UNIVERSITÄT
MANNHEIM

Hyperbolische lineare Flüsse und Flussäquivalenzen

Thu Giang Nguyen
Mannheim, 18.Oktober 2012

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsmathematik
Lehrstuhl für Mathematik III
Herbst-/Wintersemester 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbereitungen

Zunächst möchte ich ein paar bereits bekannte Sätze präsentieren, um später darauf zurückgreifen zu können. Die Beweise hierzu befinden sich in [1] und [2].
Im Folgenden betrachten wir stets endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume E mit Norm $\|\cdot\|_E$. Das Spektrum von A bezeichnen wir mit $\sigma(A)$ und wir schreiben $\Re(\sigma(A)) < 0$, wenn $\Re(\lambda) < 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$ gilt. Insbesondere beinhaltet $\sigma(A)$ im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ auch alle komplexen Eigenwerte von A. Des Weiteren sei $m(\lambda)$ die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ.

Satz 1.1. *(Stabilitätskriterium) Für $A \in \mathcal{L}(E)$ auf einem endlichdimensionalen Banachraum E konvergiert $exp(tA)$ in $\mathcal{L}(E)$ im Grenzwert $t \to \infty$ genau dann gegen Null, wenn alle (komplexen) Eigenwerte von A negativen Realteil haben.*

Korollar 1.2. *Für $A \in \mathcal{L}(E)$ gilt genau dann $\Re(\sigma(A)) < 0$, wenn für jede Lösung $u \neq 0$ von $\dot{x} = Ax$*

$$\lim_{t \to -\infty} \|u(t)\| = \infty$$

Beweis. Offenbar ist $u(t) = e^{tA}x$ Lösung obiger Differentialgleichung. Für $x \neq 0$ ist für $t \leqslant 0$ $u(t) = e^{-|t|A}x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \|x\| = \|e^{|t|A}u(t)\| &\leqslant \|e^{|t|A}\|\|u(t)\| \\ \Leftrightarrow \|e^{-|t|A}\|\|x\| &\leqslant \|u(t)\| \end{aligned} \tag{1}$$

Nach 1.1 gilt $0 = \lim_{t\to\infty} \|e^{|t|A}\|$ genau dann wenn $\Re(\sigma(A)) < 0$

$$\Leftrightarrow \infty = \lim_{t\to\infty} \|e^{-|t|A}\|\|x\| = \lim_{t\to-\infty} \|e^{-|t|A}\|\|x\| \leqslant \|u(t)\|$$

Also folgt mit (1) dann

$$\lim_{t\to-\infty} \|u(t)\| = \infty \Leftrightarrow \Re(\sigma(A)) < 0.$$

□

Korollar 1.3. *Für jede Lösung u von $\dot{x} = Ax$ in E ist*

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = \infty$$

genau dann, wenn $\Re(\sigma(A)) > 0$ gilt.

Beweis. Ist $\lambda \in \sigma(A)$, so ist $-\lambda \in \sigma(-A)$. Also gilt für $-A$ $\Re(\sigma(A)) < 0$. Wegen 1.2 ist das äquivalent dazu, dass

$$\lim_{t\to\infty} \|e^{t(-A)}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \|e^{-t(-A)}\| = \infty$$
$$\Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = \lim_{t\to\infty} \|e^{tA}\| = \infty$$

□

Satz 1.4. *(Satz über die Hauptraumzerlegung) Sei $F \in End_k(V)$ und das charakteristische Polynom*

$$P_F = \pm(t-\lambda_1)^{r_1} \dots (t-\lambda_k)^{r_k}$$

mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$. Es sei $V_i := Hau(F, \lambda_i) \subset V$ für jedes λ_i der Hauptraum. Dann gilt:

(i) $F(V_i) \subset V_i$ *und* $\dim V_i = r_i$ *für* $i = 1, \dots, k$.

(ii) $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$.

(iii) *F hat eine Zerlegung $F = F_D + F_N$ mit*

- ***(a)*** *F_D diagonalisierbar,*
- ***(b)*** *F_N nilpotent.*
- ***(c)*** *$F_D \circ F_N = F_N \circ F_D$.*

1.1 Komplexifizierung

Wir betrachten den Fall eines endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums E. Die Komplexifizierung $E_{\mathbb{C}}$ von $E = (E, \|\cdot\|)$ ist ein normierter $\mathbb{C}$-Vektorraum. Auf $E \times E$ wird die Multiplikation mit komplexen Skalaren $\gamma := \alpha + i\beta \in \mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ definiert durch

$$\gamma z := (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y) \qquad \forall\ z = (x,y) \in E \times E$$

und eine Norm durch

$$\|z\|_{E_{\mathbb{C}}} := \max_{0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi} \|x \cos(\psi) + y \sin(\psi)\|.$$

Offenbar ist $1(x,0) = (x,0)$, $i(x,0) = (0,x)$ und $\|(x,0)\| = \|x\|$ für alle $x \in E$. Folglich können wir E mit $E \times 0$ in $E_{\mathbb{C}}$ identifizieren und jedes $z = (x,y) \in E \times E$ eindeutig in der Form $z = x + iy$ darstellen.
Für $A \in \mathcal{L}(E)$ ist die Komplexifizierung $A_{\mathbb{C}}$ definiert durch

$$A_{\mathbb{C}}(x+iy) := Ax + iAy \qquad \forall x + iy \in E_{\mathbb{C}}$$

$A_{\mathbb{C}}$ ist ein Endomorphismus von $E_{\mathbb{C}}$ und es gilt $\|A_{\mathbb{C}}\|_{\mathcal{L}(E_C)} = \|A\|_{\mathcal{L}(E)}$.
Außerdem folgt aus $A_{\mathbb{C}}^n = (A^n)_{\mathbb{C}}$, dass $(e^{tA})_{\mathbb{C}} = e^{tA_{\mathbb{C}}}$ gilt.

2 Hyperbolische Lineare Flüsse

2.1 Einführung

Wir betrachten die Verallgemeinerung auf einen beliebigen $\mathbb{K}$-Vektorraum E der Dimension $m < \infty$ mit Norm $\|\cdot\|_E$. Für $A \in \mathcal{L}(E)$ sei e^{tA} der von A erzeugte lineare Fluss auf E

$$\Phi : \mathbb{R} \times E \to E, \quad (t, x) \mapsto e^{tA}x.$$

Der Nullpunkt von e^{tA} ist ein kritischer Punkt und heißt

Senke	Quelle	
$\lim_{t\to\infty} e^{tA}x = 0$	$\lim_{t\to-\infty} e^{tA}x = 0$	
$\Re(\sigma(A)) < 0$	$\Re(\sigma(A)) > 0$	vgl. 1.1
e^{tA} heißt Kontraktion	e^{tA} heißt Expansion	

Lemma 2.1. *Für $A \in \mathcal{L}(E)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelte $\Re(\sigma(A)) < \alpha$. Dann existiert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf E mit*

$$\|e^{tA}\| \leqslant e^{\alpha t} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann zerfällt das charakteristische Polynom von A in Linearfaktoren und mit einem geeigneten Basiswechsel lässt sich A darstellen als $D + N$ (vgl. 1.4) mit einer diagonalen Matrix

$$D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_k) = diag(\mu_1, \dots, \mu_m)$$

und einer nilpotenten Matrix N, deren Einträge auf der oberen Nebendiagonale 0 oder 1 sind. Wähle eine Basis $\tilde{B} = \{e_1, \dots, e_m\}$ von E so, dass $Ne_j = e_{j-1}$ oder 0 gilt. Nun ersetze man $a_j = \delta^j e_j$, damit ist $B = \{a_1, \dots, a_m\}$ wieder eine Basis von E und es gilt $Na_j = \delta a_{j-1}$ oder 0. Bezüglich B hat N in den Einträgen der oberen Nebendiagonale 0 oder δ.

$$\|N\| := \max_{\|x\|_2=1} \|Nx\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|(\delta x_2, \dots, \delta x_m, 0)\|_2 = \delta$$

$$\|D\|^2 \coloneqq \max_{\|x\|_2=1} \|Dx\|_2{}^2 = \max_{\|x\|_2=1} \|D\sum_{j=1}^m \alpha_j a_j\|_2{}^2 = \max_{\|x\|_2=1} \|\sum_{j=1}^m \alpha_j \mu_j a_j\|_2{}^2$$

$$= \max_{\|x\|_2=1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_j \alpha_i \mu_j \mu_i < a_j, a_i > = \max_{\|x\|_2=1} \sum_{j=1}^m \alpha_j^2 \mu_j^2 \delta^{2j}$$

$$\leqslant \max_{\|x\|_2=1} (\max_j \mu_j^2 \sum_{j=1}^m \alpha_j^2 \delta^{2j}) = \max_j |\mu_j|^2 \max_{\|x\|_2=1} < x, x > = \max_{j=1,\ldots,m} |\mu_j|^2$$

$$\Rightarrow \|e^{tD}\| = \max_{j=1,\ldots,m} |e^{t\mu_j}| \overset{|e^{it\Im(\mu_j)}=1|}{=\!=\!=} \max_{j=1,\ldots,m} |e^{t\Re(\mu_j)}|$$

Wähle also $\epsilon < \alpha - \max \Re(\sigma(A))$ und $\delta \in (0, \epsilon)$. Dann folgt für $t \in \mathbb{R}^+$

$$\|e^{tA}\| = \|e^{tD+tN}\| = \|e^{tD}e^{tN}\| \leqslant \|e^{tD}\| \cdot \|e^{tN}\| \leqslant e^{t(\alpha-\epsilon)}e^{t\epsilon} = e^{\alpha t}$$

Im Fall von $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ führen wir die Komplexifizierung von A auf $A_\mathbb{C}$ durch. Da der Realteil eines komplexen Skalarproduktes ein reelles Skalarprodukt ist, induziert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_{E_\mathbb{C}}$ der Komplexifizierung $E_\mathbb{C}$ stets eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_E$auf E. Außerdem ist $\|Ax\|_E = \|A_\mathbb{C}x\|_{E_\mathbb{C}}$, also können wir obige Aussagen auf die Komplexifizierung anwenden. □

Korollar 2.2. **(i)** *Gilt* $\Re(\sigma(A)) < \alpha$, *so existiert eine Konstante* $\beta \geqslant 0$ *mit*

$$\|e^{tA}\|_E \leqslant \beta e^{\alpha t} \quad \forall t \geqslant 0$$

(ii) *Gilt* $\Re(\sigma(A)) > \alpha$, *so existiert eine Konstante* $\gamma > 0$ *mit*

$$\|e^{tA}x\|_E \geqslant \gamma e^{\alpha t}\|x\|_E \quad \forall x \in E \text{ und } t \geqslant 0$$

Beweis. **(i)** Wegen der Äquivalenz aller Normen auf endlichdimensionalen Räumen existiert ein $\beta > 0$, sodass

$$\|e^{tA}\|_E \leqslant \beta\|e^{tA}\| \overset{2.1}{\leqslant} \beta e^{\alpha t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

(ii) Es gilt $\Re(\sigma(A)) > \alpha \Leftrightarrow -\Re(\sigma(A)) < -\alpha \Leftrightarrow \Re(\sigma(-A)) < -\alpha$. Also folgt mit 2.1 für $t \geqslant 0$, dass $\|e^{t(-A)}\| \leqslant e^{-\alpha t}$.

$$\|x\| = \|e^{-tA+tA}x\| \leqslant \|e^{-tA}\|\|e^{tA}x\| \leqslant e^{-\alpha t}\|e^{tA}x\|$$

$$\Leftrightarrow \|e^{tA}x\| \geqslant e^{-\alpha t}\|x\|$$

Dann folgt die Behauptung wegen der Äqivalenz der Normen.

□

Satz 2.3. *Es sei $A \in \mathcal{L}(E)$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Der Nullpunkt ist eine Senke.*

(ii) $\exists\, \alpha > 0,\ \beta \geqslant 0$: $\|e^{tA}x\|_E \leqslant \beta e^{-\alpha t}\|x\|_E\ \forall\ t \geqslant 0$ *und* $x \in E$.

(iii) *Es existieren eine Hilbertnorm* $\|\cdot\|$ *auf* E *und* $\alpha > 0$ *mit* $\|e^{tA}\| \leqslant e^{-\alpha t}$ *und* $t \geqslant 0$.

Ebenso äquivalent sind:

(i') *Der Nullpunkt ist eine Quelle.*

(ii') $\exists\, \alpha > 0,\ \beta > 0$ *mit* $\|e^{tA}x\|_E \geqslant \beta e^{\alpha t}\|x\|_E\, \forall t \geqslant 0,\ x \in E$.

(iii') *Es existieren eine Hilbertnorm* $\|\cdot\|$ *und* $\alpha > 0$ *mit* $\|e^{tA}x\| \geqslant e^{\alpha t}\|x\|$ *für* $t \geqslant 0$.

Beweis. **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)**: Der Nullpunkt sei eine Senke.
$\overset{Def}{\Leftrightarrow}\ \forall\ x \in E \setminus \{0\} \lim_{t\to\infty} e^{tA}x = 0$
$\overset{1.1}{\Leftrightarrow}\ \Re(\sigma(A)) < 0$
$\Leftrightarrow\ \exists\ \alpha > 0 :\ \Re(\sigma(A)) < -\alpha$
$\overset{2.2}{\Rightarrow}\ \exists\ \beta \geqslant 0 :\ \|e^{tA}\|_E \leqslant \beta e^{-\alpha t} \qquad \text{für } t \geqslant 0, x \in E$
$\Leftrightarrow$ **(ii)** $\exists\ \beta > 0 :\ \|e^{tA}x\|_E \leqslant \|e^{tA}\|_E\|x\|_E \leqslant \beta e^{-\alpha t}\|x\|_E \qquad \text{für } t \geqslant 0, x \in E$
(ii) $\Rightarrow$ **(iii)**: Wegen der Äquivalenz der Normen existiert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ mit $\|e^{tA}\| \leqslant \frac{1}{\beta}\|e^{tA}\|_E \overset{(ii)}{\leqslant} e^{-\alpha t} \qquad \text{für } t \geqslant 0$
(iii) $\Rightarrow$ **(i)**: $\|e^{tA}x\| \leqslant \|e^{tA}\|\|x\| \leqslant e^{-\alpha t}\|x\| \overset{t\to\infty}{\to} 0$
$\Rightarrow e^{tA}x \overset{t\to\infty}{\to} 0 \qquad \text{für } t \geqslant 0, x \in E$
$\Rightarrow$ **(i)** Der Nullpunkt ist eine Senke.
Der Beweis für **(i')**$\Leftrightarrow$**(ii')**$\Leftrightarrow$**(iii')** läuft analog. Im Schritt von **(iii')**$\Rightarrow$**(i')** verwendet man

$$e^{tA}x \overset{t\to\infty}{\to} \infty\ \Rightarrow \Re(\sigma(A)) > 0.$$

□

2.2 Hyperbolische lineare Flüsse

Für $A \in \mathcal{L}(E)$ zerlegen wir nun das Spektrum $\sigma(A)$ disjunkt in

$$\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_n(A) \cup \sigma_u(A)$$

$$\begin{aligned} \text{in das „stabile Spektrum“:} \quad & \sigma_s(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \Re(\lambda) < 0\}, \\ \text{in das „neutrale Spektrum“:} \quad & \sigma_n(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \Re(\lambda) = 0\}, \\ \text{in das „instabile Spektrum“:} \quad & \sigma_u(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \Re(\lambda) > 0\}. \end{aligned}$$

Definition 2.4. *Der von A erzeugte Fluss e^{tA} heißt hyperbolisch, wenn $\sigma_n(A) = \varnothing$, also*

$$\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_u(A).$$

Nun führen wir die mehrdimensionale Verallgemeinerung des zweidimensionalen Sattels durch.

Satz 2.5. *Sei e^{tA} ein hyperbolischer linearer Fluss. Dann existiert eine Zerlegung*

$$E = E_s \oplus E_u \quad \textit{mit} \quad A = A_s \oplus A_u \quad \textit{und} \quad e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u},$$

derart, dass e^{tA_s} eine Kontraktion und e^{tA_u} eine Expansion ist. Diese Zerlegung ist eindeutig mit

$$\dim(E_s) = \sum_{\lambda \in \sigma_s(A)} m(\lambda) \qquad \textit{und} \qquad \dim(E_u) = \sum_{\lambda \in \sigma_u(A)} m(\lambda)$$

Beweis. Im komplexen Fall zerlegen wir E in die eindeutigen Haupträume E_λ von A, d.h. $E = E_s \oplus E_u$ mit

$$E_s = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_s(A)} E_\lambda \qquad E_u = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_u(A)} E_\lambda \qquad E_\lambda = \{x \in E \mid (A - \lambda)^{m(\lambda)} x = 0\}.$$

Dies wiederum zerlegt $A = A_s \oplus A_u$ zerlegt und damit auch $e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u}$. Aus dem Stabilitätskriterium 1.1 ergibt sich, dass e^{tA_s} eine Kontraktion und e^{tA_u} eine Expansion ist. Aus dem Satz über die Hauptraumzerlegung und der Definition von direkten Summen folgt die Formel für die Dimension von E_s und E_u.
Für die Eindeutigkeit betrachten wir eine weitere Zerlegung von $E = E_1 \oplus E_2$, sodass e^{tA_1} eine Kontraktion und e^{tA_2} eine Expansion ist.
Wir wollen zeigen, dass $E_s = E_1$ ist. Sei dazu $x \in E_1$ beliebig. Dann existiert

eine eindeutige Darstellung $x = y + z$ mit $y \in E_s$ und $z \in E_u$. Um zu zeigen, dass $z = 0$ ist, betrachten wir zunächst

$$e^{tA}x = e^{tA_1}x + \underbrace{e^{tA_2}x}_{=0} = e^{tA_1}x \overset{t\to\infty}{\to} 0.$$

Sei P_u die kanonische Projektion von E auf E_u. Dann ist

$$e^{tA}z = e^{tA}P_u(x) = P_u(\underbrace{e^{tA}x}_{\underset{\infty}{\overset{t}{\to}}0}) \overset{t\to\infty}{\to} 0$$

Da A_u eine Expansion ist und somit der Nullpunkt eine Quelle, existieren $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ mit

$$\|z\|\beta e^{\alpha t} \leqslant \|e^{tA_u}z\| = \|e^{tA}z\| \overset{t\to\infty}{\to} 0$$

Daraus folgt $\|z\| = 0$, also $z = 0$ und $E_1 \subset E_s$. Aus Symmetriegründen folgt $E_1 = E_s$.
Sei nun $x \in E_2$. Wir zerlegen x wieder in $x = y + z$ mit $y \in E_s$ und $z \in E_u$. Dann gilt

$$e^{tA}x = e^{tA_2}x \underset{-\infty}{\overset{t}{\to}} 0$$

Damit erhalten analog zum obigen Fall

$$e^{tA}y = e^{tA}P_s x = P_s e^{tA}x \underset{-\infty}{\overset{t}{\to}} 0$$

Für $t < 0$ gilt dann $e^{tA} = e^{|t|(-A_s)}$. Wegen $\sigma(-A_s) = -\sigma(A_s)$ erhalten wir aus 2.3

$$\beta e^{\alpha|t|}\|y\| = \|e^{|t|(-A_s)}y\| = \|e^{tA}y\| \underset{-\infty}{\overset{t}{\to}} 0,$$

weswegen $y = 0$ und $E_2 \subset E_u$ ist. Aus Symmetriegründen folgt $E_u = E_2$.
Damit haben wir die Eindeutigkeit der Zerlegung gezeigt.
Im reellen Fall betrachten wir wieder die Komplexifizierung von A bzw. E. Wir zerlegen $E_\mathbb{C}$ und $A_\mathbb{C}$ wie oben und setzen

$$E_s = (E_\mathbb{C})_s \cap E \qquad \text{und} \qquad E_u = (E_\mathbb{C})_u \cap E$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$(E_\mathbb{C})_s = (E_s)_\mathbb{C} \qquad \text{und} \qquad (E_\mathbb{C})_u = (E_u)_\mathbb{C}.$$

Die Eigenwerte von $A_\mathbb{C}$ sind entweder reell oder sie treten in komplex konjugierten Paaren auf, d.h. für alle Eigenwerte λ_j mit $\Im(\lambda_j) \neq 0$ ist auch $\overline{\lambda}_j$

Eigenwert von $A_{\mathbb{C}}$. Nun betrachte man für jeden reellen Eigenwert λ_j den Hauptraum $Hau(A_{\mathbb{C}}, \lambda_j)$ und für jedes Paar komplex konjugierter Eigenwerte $\{\lambda_j, \overline{\lambda}_j\}$ die Summe der Haupträume $Hau(A_{\mathbb{C}}, \lambda_j) \oplus Hau(A_{\mathbb{C}}, \overline{\lambda}_j)$.
Dann gilt für $x \in (Hau(A_{\mathbb{C}}, \lambda_j) \oplus Hau(A_{\mathbb{C}}, \overline{\lambda}_j)) \cap E$ nach Definition der Komplexifizierung von A $e^{tA}x = e^{tA_{\mathbb{C}}}x$.
Ist $z = a + ib \in (Hau(A_{\mathbb{C}}, \lambda_j) \oplus Hau(A_{\mathbb{C}}, \overline{\lambda}_j))$, so folgt dass auch $\bar{z} = a - ib \in (Hau(A_{\mathbb{C}}, \lambda_j) \oplus Hau(A_{\mathbb{C}}, \overline{\lambda}_j))$ ist.
Dementsprechend sind $a = \frac{z+\bar{z}}{2}$ und $b = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ Elemente von $E \cap (Hau(A_{\mathbb{C}}, \lambda_j) \oplus Hau(A_{\mathbb{C}}, \overline{\lambda}_j))$. Wenn $e^{tA_{\mathbb{C}}}$ eine Kontraktion auf $(Hau(A_{\mathbb{C}}, \lambda_j) \oplus Hau(A_{\mathbb{C}}, \overline{\lambda}_j))$ ist, ist e^{tA} ebenfalls eine Kontraktion auf $(Hau(A_{\mathbb{C}}, \lambda_j) \oplus Hau(A_{\mathbb{C}}, \overline{\lambda}_j)) \cap E$, denn

$$e^{tA}a = e^{tA_{\mathbb{C}}}a = e^{tA_{\mathbb{C}}}\frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \text{und} \qquad e^{tA}b = e^{tA_{\mathbb{C}}}b = e^{tA_{\mathbb{C}}}\frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

Folglich ist sowohl $\Re(z)$ als auch $\Im(z)$ im stabilen Untervektorraum von E. Der Fall für ein z aus dem Hauptraum zu einem reellen Eigenwert von $A_{\mathbb{C}}$ verläuft analog. Also macht es keinen Unterschied, ob wir zuerst den stabilen bzw. instabilen Unterraum bilden oder zuerst komplexifizieren und es gilt $(E_s)_{\mathbb{C}} = (E_{\mathbb{C}})_s$ und analog auch $(E_u)_{\mathbb{C}} = (E_{\mathbb{C}})_u$.
Somit folgt die Behauptung im reellen Fall.

□

Ein hyperbolischer Fluss kann eine Kontraktion ($E_u = \{0\}$) oder eine Expansion ($E_s = \{0\}$) sein. Wir nennen E_s den stabilen Untervektorraum und E_u und instabilen Untervektorraum des Flusses e^{tA}.

3 Flussäquivalenzen

3.1 Einführung

Wir interessieren uns nun für die Phasenportäts von hyperbolischen linearen Flüssen. Es stellt sich die Frage, ob es durch geeignete Basiswechsel möglich ist Sattel, Knoten und Spiralen in einander zu überführen? Wir werden zeigen, dass die Antwort darauf einzig von der Dimension der stabilen Untervektorräume abhängt. Dazu präzisieren wir nun den Begriff äquivalenter Flüsse, indem wir drei verschiedene Klassifikationen einführen.

Definition 3.1. *(topologische Flussäquivalenz) Seien Φ und $\tilde{\Phi}$ zwei lokale Flüsse auf den metrischen Räumen Ω und $\tilde{\Omega}$ mit den Definitionsbereichen $W \subset \mathbb{R} \times \Omega$ und $\tilde{W} \subset \mathbb{R} \times \tilde{\Omega}$. Φ und $\tilde{\Phi}$ heißen flussäquivalent, wenn es einen orientierungserhaltenden Automorphismus $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und einen Homöomorphismus Ψ von Ω auf $\tilde{\Omega}$ gibt, sodass $\alpha \times \Psi$ ein Homöomorphismus von*

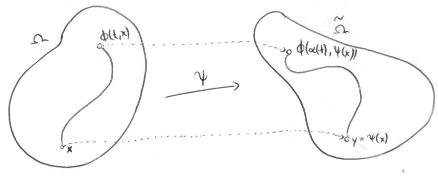
W auf $\tilde{W}$ ist und $\Psi \circ \Phi = \tilde{\Phi} \circ (\alpha \times \Psi)$ auf W gilt.
Das Paar (α, Ψ) heißt dann (topologische) Flussäquivalenz.

Hierbei ist $\alpha \times \Psi$ definiert durch

$$\alpha \times \Psi \; : W \to \mathbb{R} \times \Omega \; , \; (\alpha \times \Psi)(t, x) = (\alpha(t), \Psi(x))$$

Ist (α, Ψ) eine Flussäquivalenz zwischen Φ und $\tilde{\Phi}$, dann kommutieren folgende zwei Diagramme:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \times \Omega \supset W \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\alpha \times \Psi"'] & \Omega \arrow[d, "\Psi"] \\ \mathbb{R} \times \tilde{\Omega} \supset \tilde{W} \arrow[r, "\tilde{\Phi}"] & \tilde{\Omega} \end{tikzcd}$$



Definition 3.2. *(C^1-Flussäquivalenz) Sind Ω und $\tilde{\Omega}$ offene Teilmengen vom $\mathbb{R}^n$ und ist Ψ ein Diffeomorphismus, so heißen Φ und $\tilde{\Phi}$ stetig differenzierbar äquivalent und (α, Ψ) ist eine C^1-Flussäquivalenz.*

Definition 3.3. *(Lineare Flussäquivalenz) Sind Ω und $\tilde{\Omega}$ Banachräume und ist Ψ ein linearer Homöomorphismus, so heißen Φ und $\tilde{\Phi}$ linear äquivalent und (α, Ψ) ist eine lineare Flussäquivalenz.*

Bemerkung 3.4.

(i) *Auf $\mathbb{R}$ hat ein orientierungserhaltender Automorphismus für alle $t \in \mathbb{R}$ die Form $\alpha(t) = \alpha \cdot t$ mit einer positiven Zahl α. Andersrum definiert auch jedes $\alpha > 0$ einen orientierungserhaltenden Automorphismus auf $\mathbb{R}$. Deswegen identifizieren wir im Folgenden den Automorphismus α stets mit der durch ihn bestimmten positiven Zahl.*

(ii) *Flussäquivalenzen definieren Äquivalenzrelationen.*

(iii) *Ist (α, Ψ) eine Flussäquivalenz, so bildet Ψ die Orbits von Φ auf die Orbits von $\tilde{\Phi}$ unter Erhaltung der Orientierung ab.*

3.2 Lineare Flussäquivalenzen

Satz 3.5. *Seien A und B lineare Abbildungen auf endlichdimensionalen Vektorräumen. Dann sind e^{tA} und e^{tB} genau dann linear flussäquivalent, wenn ein $\alpha > 0$ existiert, sodass A und αB die gleiche Jordannormalform haben.*

Beweis. "$\Rightarrow$": Sei (α, Ψ) eine lineare Flussäquivalenz zwischen e^{tA} und e^{tB}. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\Psi \circ e^{tA} \overset{Vor.}{=} e^{\alpha t B} \circ \Psi \quad \Leftrightarrow \quad e^{tA} = \Psi^{-1} e^{\alpha t B} \Psi = e^{t \Psi^{-1}(\alpha B)\Psi}$$

Da der Generator eines Flusses eindeutig bestimmt ist, folgt $A = \Psi^{-1}(\alpha B)\Psi$. Ψ ist ein Homöomorphismus, d.h. vor allem $\Psi \in GL(E)$ und $\alpha > 0$, also sind A und αB ähnlich und wir erhalten mit den Resultaten aus der Linearen Algebra, dass A und αB die gleiche Jordannormalform haben.
"$\Leftarrow$": Wenn A und αB die gleiche Jordannormalform haben, existiert ein invertierbares Ψ, sodass $A = \Psi^{-1}(\alpha B)\Psi$. Also sind e^{tA} und e^{tB} linear flussäquivalent mit (α, Ψ). □

Man hätte Satz 3.5 auch so formulieren können, dass A und B genau dann linear flussäquivalent sind, wenn die Spektren von A und αB sowie die geometrische und algebraische Vielfachheiten der Eigenwerte übereinstimmen. Der nächste Satz zeigt, dass die Klasse der C^1-Flussäquivalenzen für lineare Flüsse identisch ist mit der Klasse der linearen Flussäquivalenzen.

Satz 3.6. *Die durch auf endlichdimensionalen Vektorräumen definierten linearen Abbildungen A und B generierten Flüsse e^{tA} und e^{tB} sind genau dann C^1-flussäquivalent, wenn sie linear flussäquivalent sind.*

Beweis. "$\Rightarrow$": Seien e^{tA} und e^{tB} C^1-flussäquivalent mit (α, Ψ). Dann führt der Diffeomorphismus $\Psi \in C^1(E, \tilde{E})$ den kritischen Punkt x=0 von e^{tA} in einen kritischen Punkt $\Psi(0) = y_0$ von e^{tB} über:

$$0 = e^{tA}0 \Leftrightarrow \Psi(0) = \Psi e^{tA} 0 = e^{\alpha t B}\Psi(0)$$

Wir definieren nun die Translation T mit $T(x) = x - y_0$, dann gilt

$$\begin{aligned}(T \circ \Psi)(e^{tA}x) &= \Psi e^{tA} x - y_0 = e^{\alpha t B}\Psi(x) - e^{\alpha t B} y_0 \\ &= e^{\alpha t B}(\Psi(x) - y_0) = e^{\alpha t B}(T \circ \Psi)(x)\end{aligned}$$

Also ist $(\alpha, T \circ \Psi)$ eine Flussäquivalenz zwischen e^{tA} und e^{tB}.
Der Nullpunkt ist ein kritischer Punkt von $T \circ \Psi$ und $C \coloneqq (T \circ \Psi)'(0)$ ist als Ableitung einer bijektiven, stetig differenzierbaren Abbildung, eine invertierbare, lineare Abbildung, also ein Vektorraumisomorphismus. Dann erhalten wir für alle $t \in \mathbb{R}$ durch Differenzieren nach x in x=0

$$\begin{array}{rrcl} & ((T\circ\Psi)(e^{tA}x))'|_{x=0} & = & (e^{\alpha tB}(T\circ\Psi)(x))'|_{x=0} \\ \Leftrightarrow & (T\circ\Psi)(e^{tA}0)\cdot e^{tA} & = & e^{\alpha tB}(T\circ\Psi)'(0) \\ \Leftrightarrow & Ce^{tA} & = & e^{\alpha tB}C \end{array}$$

Somit ist (α, C) eine lineare Flussäquivalenz zwischen e^{tA} und e^{tB}.
"$\Leftarrow$": Wir wissen, dass lineare Abbildungen stetig differenzierbar sind. Wenn Ψ ein linearer Homöomorphismus ist, so ist auch die Umkehrabbildung von Ψ linear, demzufolge gilt die Behauptung.

□

3.3 Topologische Flussäquivalenzen

Als nächstes beschäftigen wir uns mit der wesentlich schwierigeren Klassifizierung linearer Flüsse, den topologischen Flussäquivalenzen. Dazu benötigen wir die folgenden vorbereitenden Lemmata.

Lemma 3.7. *Sei $A \in \mathcal{L}(E)$, $\Re(\sigma(A)) < 0$ und Φ der von A erzeugte lineare Fluss auf E. Mit der Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf E, für die $\|e^{tA}\| \leqslant e^{\alpha t}$ gilt, ist*

$$\hat{\Phi} : \mathbb{R}\times\mathbb{S}^{d-1} \to E\setminus\{0\}, \qquad (t,x)\mapsto \Phi(t,x)$$

auf $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{d-1} = \mathbb{R}\times\{x\in E\,|\,\|x\| = 1\}$ ein Homöomorphismus.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\hat{\Phi}$ eine bijektive, stetige Abbildung von $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{d-1}$ nach $E\setminus\{0\}$ ist und kümmern uns anschließend um die Stetigkeit der Umkehrabbildung.
Es gilt $\Re(\sigma(A)) < 0$, also existiert ein $\alpha > 0$, sodass $\Re(\sigma(A)) < -\alpha$.
$\overset{2.1}{\Rightarrow}$ es existiert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$, sodass $\|e^{tA}\| \leqslant e^{-\alpha t}$ für $t \geqslant 0$
Sei $y \in E\setminus\{0\}$ beliebig, dann ist $e^{tA}y \neq 0$ für alle $t\in\mathbb{R}$. Betrachte nun

$$\|e^{tA}y\| \leqslant e^{-\alpha t}\|y\| \qquad \text{für } t \geqslant 0 \tag{1}$$

Hieraus folgt

$$\|y\| = \|e^{tA}e^{-tA}y\| \leqslant e^{-\alpha t}\|e^{-tA}y\| \qquad \text{für } t\geqslant 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\|e^{tA}y\| \geqslant e^{-\alpha t}\|y\| \qquad \text{für } t \leqslant 0. \tag{2}$$

Wir betrachten die Grenzwerte

$$e^{-\alpha t}\|y\| \xrightarrow[\infty]{t} 0 \quad \text{und} \quad e^{-\alpha t}\|y\| \xrightarrow[-\infty]{t} \infty$$

Wegen dem Zwischenwertsatz gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\|e^{-tA}y\| = 1$. Also ist $\hat{\Phi}$ surjektiv. Die Injektivität ist klar, also ist $\hat{\Phi}$ bijektiv. Die Stetigkeit erhalten wir direkt aus der Stetigkeit von Φ.
Um die Stetigkeit der Umkehrabbildung zu zeigen, betrachten wir eine beliebige konvergente Folge (y_k) in $E \setminus \{0\}$ mit Grenzwert y. Diese impliziert eine Folge (t_k) in $\mathbb{R}$ und eine Folge (x_k) in $\mathbb{S}^{d-1}$ mit $y_k = e^{t_k A}x_k$. Da $\mathbb{S}^{d-1}$ kompakt ist, besitzt (x_k) eine konvergente Teilfolge in $\mathbb{S}^{d-1}$. Wir kompaktifizieren nun $\mathbb{R}$, in dem wir durch Erweiterung mit $-\infty, \infty$ von $\mathbb{R}$ zu $\bar{\mathbb{R}}$ übergehen. Also können wir eine weitere Teilfolge von (t_k) auswählen, sodass diese im Kompaktum $\bar{\mathbb{R}}$ konvergiert mit $t_k \to t \in \bar{\mathbb{R}}$. Für $t \in \bar{\mathbb{R}}^+$ gilt

$$\|\lim_{k\to\infty}(y_k)\| = \|\lim_{k\to\infty}(e^{t_k A}x_k)\| = \|e^{\lim_{k\to\infty} t_k A}\lim_{k\to\infty} x_k\| \overset{2.3}{\leqslant} e^{-\alpha \lim_{k\to\infty} t_k}\|\lim_{k\to\infty} x_k\|.$$

$$\Leftrightarrow \|y\| \leqslant e^{-\alpha t}$$

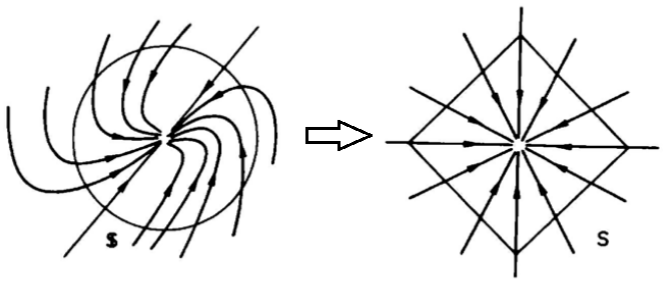
Nach Voraussetzung ist $y \in E \setminus \{0\}$, also muss $t < \infty$ sein. Analog erhalten wir $t > -\infty$. Also konvergiert das Bild jeder konvergenten Folge, also ist Φ^{-1} stetig.

□

Für das folgende Lemma ist es nützlich zu wissen, dass für ein passendes $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\Phi^{-1}(y) = (-t, \Phi(t, y)).$$

Als nächstes wollen wir die Orbits einer Kontraktion "geradebiegen".



Lemma 3.8. *Sei $A \in \mathcal{L}(E)$ und $\Re(\sigma(A)) < 0$. Dann ist e^{tA} flussäquivalent zu $e^{-t}\mathbb{1}_E$ mit einer Flussäquivalenz der Form $(1, \Psi)$.*

Beweis. Nach Lemma 3.7 existiert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf E, sodass wir einen Homöomorphismus $\hat{\Phi}$ auf der zugehörigen Einheitssphäre $\mathbb{S}^{d-1}$ definieren können mit

$$\hat{\Phi} : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1} \to E \setminus \{0\}, \qquad (t, x) \mapsto \Phi(t, x) = e^{tA}x$$

Sei $\mathbb{S}_E^{d-1}$ die Einheitssphäre bezüglich der ursprünglichen Norm $\|\cdot\|_E$ von E. Dann folgt wieder mit Lemma 3.7, dass die Einschränkung $\hat{\Phi}_E$ des durch $-\mathbb{1}_E$ erzeugten linearen Flusses auf $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_E^{d-1}$ ein Homöomorphismus ist mit

$$\hat{\Phi}_E(t,x) = e^{-t}x.$$

Offensichtlich sind

$$\frac{\cdot}{\|\cdot\|_E} : \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{S}_E^{d-1}, \quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|_E} \quad \text{und} \quad \frac{\cdot}{\|\cdot\|} : \mathbb{S}_E^{d-1} \to \mathbb{S}^{d-1}, \quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

zueinander inverse Homöomorphismen. Infolgedessen erhalten wir insgesamt, dass auch $\Psi \coloneqq \hat{\Phi}_E \circ (\mathbb{1} \times \frac{\cdot}{\|\cdot\|_E}) \circ \hat{\Phi}^{-1}$ ein Homöomorphismus von $E\setminus\{0\}$ auf sich selbst ist. Man rechnet leicht nach, dass für $x \in E\setminus\{0\}$ gilt

$$\Psi(x) = e^t \frac{\Phi(t,x)}{\|\Phi(t,x)\|_E},$$

wobei $\|\Phi(t,x)\| = 1$. Ebenfalls durch Nachrechnen erhält man die Umkehrabbildung von Ψ mit

$$\Psi^{-1}(x) = \Phi\left(-\ln(\|x\|_E), \frac{x}{\|x\|}\right) \qquad \text{für } t \neq 0$$

Wir setzen sowohl Ψ also auch Ψ^{-1} im Nullpunkt mit 0 fort. Die Stetigkeit bleibt dabei erhalten, denn für ein geeignetes $\beta > -\Re(\sigma(A))$, wie in Satz 2.3 verlangt, gilt für $t \leqslant 0: \ \|e^{tA}x\| \leqslant e^{-\beta t}\|x\|$. Wegen $\|\Phi(t,x)\| = 1$ ist das äquivalent zu $e^{\beta t} \leqslant \|x\|$

$$\Rightarrow \|\Psi(x)\|_E = \|e^t \frac{\Phi(t,x)}{\|\Phi(t,x)\|_E}\|_E = e^t \leqslant \|x\|^{\frac{1}{\beta}} \overset{x\to 0}{\to} 0$$

Auch hier erhalten wir analog die Stetigkeit in 0 von Ψ^{-1}.
Letztendlich bleibt zu zeigen, dass $(1, \Psi)$ die gewünschte Flussäquivalenz ist, d.h.

$$\Psi \circ \Phi(t,x) = e^{-t}\Psi(x) \qquad \forall\, x \in E, t \in \mathbb{R}$$

Für $x \in E\setminus\{0\}$ existiert wegen 3.7 ein eindeutiges Paar $(s,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}$, für das $x = \Phi(s,y)$ gilt. Folglich gilt

$$\Psi \circ \Phi(t,x) = \Psi \circ \Phi(t, \Phi(s,y)) = \Psi \circ \Phi(t+s, y) = e^{-(s+t)} \frac{y}{\|y\|_E}$$

$$= e^{-t}\left(e^{-s}\frac{y}{\|y\|_E}\right) = e^{-t}\left(e^{-s}\frac{\Phi(-s,x)}{\|\Phi(-s,x)\|_E}\right) = e^{-t}\Psi(x)$$

$\square$

Zum Abschluss beweisen wir die zentrale Klassifikation hyperbolischer linearer Flüsse. Wir definieren für $A \in \mathcal{L}(E)$

$$m_-(A) = \sum_{\lambda \in \sigma_s(A)} m(\lambda) \qquad\qquad m_+(A) = \sum_{\lambda \in \sigma_u(A)} m(\lambda)$$

Satz 3.9. *Zwei hyperbolische lineare Flüsse e^{tA} und e^{tB} sind genau dann flussäquivalent, wenn $m_\pm(A) = m_\pm(B)$ gilt.*

Beweis. "$\Leftarrow$": Sei $m_-(A) = m_-(B)$, dann ist wegen der Dimensionsformel auch $m_+(A) = m_+(B)$. Nach Satz 2.5 existiert also eine direkte Summenzerlegung von E in $E_s \oplus E_u$, welche e^{tA} in $e^{tA_s} \oplus e^{tA_u}$ zerlegt.
Für A_s ist $\sigma(A_s) < 0 \overset{3.8}{\Rightarrow} e^{tA_s}$ ist flussäquivalent zu $e^{-t}\mathbb{1}_{E_s}$ mit $(1, \Psi_s)$. Analog folgt, dass $e^{-t(-A_u)}$ flussäquivalent zu $e^t\mathbb{1}_{E_u}$ ist mit $(1, \Psi_u)$.
Wir zeigen nun, dass $(1, \Psi_s \oplus \Psi_u)$ eine Flussäquivalenz zwischen e^{tA} und $e^{-t}\mathbb{1}_{E_s} \oplus e^t\mathbb{1}_{E_u}$ ist.
Sei $x = y + z$ mit $y \in E_s$ und $z \in E_u$

$$\begin{aligned}((\Psi_s \oplus \Psi_u) \circ (\Phi_{A_s} \oplus \Phi_{A_u}))(t, x) &= (\Psi_s \oplus \Psi_u)(e^{tA_s}y + e^{tA_u}z) \\ &= \Psi_s(e^{tA_s}y) + \Psi_u(e^{tA_u}z) \\ &= e^{-t}\Psi_s(y) + e^t\Psi_u(z) \\ &= (e^{-t}\mathbb{1}_{E_s} \oplus e^t\mathbb{1}_{E_u})(t, \Psi_s(y) + \Psi_u(z)) \\ &= (e^{-t}\mathbb{1}_{E_s} \oplus e^t\mathbb{1}_{E_u})(1 \times \Psi_s \oplus \Psi_u)(t, x)\end{aligned}$$

Analog existiert eine direkte Summenzerlegung von $E = \bar{E}_s \oplus \bar{E}_u$ mit $e^{tB} = e^{tB_s} \oplus e^{tB_u}$ und eine Flussäquivalenz $(1, \bar{\Psi}_s \oplus \bar{\Psi}_u)$zwischen e^{tB} und $e^{-t}\mathbb{1}_{\bar{E}_s} \oplus e^t\mathbb{1}_{\bar{E}_u}$. Nach Voraussetzung ist $m_-(A) = m_-(B)$, also $\dim(E_s) = \dim(\bar{E}_s)$, also existiert ein Isomorphismus F_s bzw F_u zwischen E_s und $\bar{E}_s$ bzw. E_u und $\bar{E}_u$. Man verifiziert leicht, dass $(1, F_s \oplus F_u)$ eine Flussäquivalenz zwischen $e^{-t}\mathbb{1}_{E_s} \oplus e^t\mathbb{1}_{E_u}$ und $e^{-t}\mathbb{1}_{\bar{E}_s} \oplus e^t\mathbb{1}_{\bar{E}_u}$ ist. Da Flussäquivalenzen Äquivalenzrelationen sind, folgt aus der Transitivität die Flussäquivalenz von e^{tA} und e^{tB} mit $(1, (\bar{\Psi}_s \oplus \bar{\Psi}_u)^{-1} \circ (F_s \oplus F_u) \circ (\Psi_s \oplus \Psi_u))$.
"$\Rightarrow$": Ist (α, Ψ) eine Flussäquivalenz zwischen e^{tA} und e^{tB}, so gilt

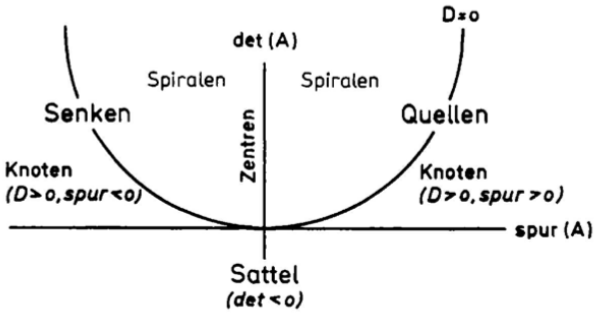
$$\Psi(e^{tA}x) = e^{\alpha tB}\Psi(x) \quad \forall\, (t, x) \in \mathbb{R} \times E$$

$\Rightarrow \Psi[E_s] \subset \bar{E}_s$, aus Symmetriegründen ist $\Psi^{-1}[\bar{E}_s] \subset E_s$, also ist $E_s = \bar{E}_s$. Damit bildet Ψ E_s homöomorph auf $\bar{E}_s$ ab. Letztendlich folgt $\dim(E_s) = \dim(\bar{E}_s)$ aus dem Gebietsinvarianzsatz der Topologie.

$\square$

4 Abschließende Worte

Mit dem letzten Satz haben wir fast alle linearen Flüsse klassifiziert, denn für fast alle $A \in \mathcal{L}(E)$ gilt $\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_u(A)$. Insbesondere sind hyperbolische Flüsse flussäquivalent zum einfachen "mehrdimensionalen Sattel".
Wir können beispielsweise stabile Strudel in stabile Knoten überführen oder instabile Knoten in instabile Strudel. Das folgende Diagramm veranschaulicht die drei Bereiche, innerhalb welcher wir transformieren können.



Bei hyperbolischen linearen Flüssen ist das neutrale Spektrum leer, also liegen sie außerhalb des Bereiches, wo $det(A) = 0$ ist und für $det(A) > 0$ ist $spur(A) \neq 0$. Das ist der Grund dafür, dass sie durch sehr kleine Störungen keine dramatischen Änderungen in ihrem Verhalten aufweisen. Die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen kann man dann ähnlich wie bei der Wellengleichung berechnen.

Literatur

[1] FISCHER, GERD: Lineare Algebra, 14. verb. Aufl. vieweg, Wiesbaden 2003.

[2] AMANN, HERBERT: Gewöhnliche Differentialgleichungen , 2. verb. Aufl., Walter de Gruyter, Berlin, New York 1995

[3] SCHMIDT, MARTIN: Analysis I & II, Mannheim 2010/2011