Klassifizierung von ebenen linearen Flüssen

Theresa Kleinmann

Universität Mannheim

Seminar: Dynamische Systeme

11. Oktober 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Schwerpunkte dieses Seminarvortrags sind die Untersuchung des Verhaltens eines sogenannten ebenen linearen Flusses am kritischen Punkt $x = 0$, sowie die Erklärung der unterschiedlich auftretenden Phasendiagramme.
Hierbei beschränken wir uns auf zweidimensionale reelle Systeme.
Um mit der Klassifizierung ebener linearer Flüsse zu beginnen, werden folgende Definitionen benötigt.

1.1 Definition (lokaler Fluss)

Sei X ein topologischer Raum und $W \subset \mathbb{R} \times X$ eine offene Teilmenge. Eine Abbildung $\Phi : W \to X$ heißt lokaler Fluss auf X, falls die Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\forall x \in X$ gilt: $\{t \in \mathbb{R} | (t, x) \in W\}$ ist ein offenes Intervall, das die Null enthält.

(ii) Sei $(s, x) \in W$ und $(t, \Phi(s, x)) \in W$, dann gilt: $(t + s, x) \in W$ und

$$\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x)$$

(iii) Es gilt:

$$\Phi(0, x) = x \ \forall x \in X.$$

1.2 Definition (globaler Fluss)

Sei $W = \mathbb{R} \times X$. Dann heißt ein lokaler Fluss $\Phi : W \to X$ globaler Fluss.

1.3 Definition (Fixpunkt)

Ein Fluss $\Phi : W \to X$ besitzt einen Fixpunkt $x \in X$, falls gilt:

$$\Phi(t, x) = x \ \forall t \in W.$$

1.4 Definition (stabil, instabil, attraktiv, asymptotisch stabil)

Sei X ein metrischer Raum und $\Phi : W \to X$ ein lokaler Fluss auf X mit einem Fixpunkt x_0 von Φ. Dann heißt x_0:

- **stabil**, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt:
$$\Phi(t,x) \in B(x_0,\epsilon) \quad \forall (t,x) \in [0,\infty) \times B(x_0,\delta) \cap W$$
- **instabil**, wenn x_0 nicht stabil ist.
- **attraktiv**, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:
$$[0,\infty) \times B(x_0,\delta) \in W$$
und wenn es $\forall \epsilon > 0$ ein $t_0 > 0$ gibt, so dass gilt:
$$\Phi(x,t) \in B(x_0,\epsilon) \quad \forall (t,x) \in (t_0,\infty) \times B(x_0,\delta)$$
- **asymptotisch stabil**, wenn x_0 stabil und attraktiv ist.

1.5 Zusammenhang zwischen Differentialgleichungen und Flüssen

Um den Zusammenhang zwischen Differentialgleichungen und Flüssen zu verstehen, benötigen wir die Definition des Vektorfeldes.

1.5.1 Definition (Vektorfeld)

Sei Φ ein Fluss auf X. Dann ist die Abbildung $F : X \to X$ mit $F(x) := \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,x)_{|t=0}$ das Vektorfeld zum Fluss Φ.

1.5.2 Vom Fluss zur Differentialgleichung

Behauptung:
Sei Φ ein Fluss auf X, $x_0 \in X$, der partiell nach t differenzierbar ist und $F(x) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(0,x)$.
Dann ist $x(t) = \Phi(t,x_0)$ eine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{x} = F(x(t))$ mit Anfangsbedingung $x(0) = x_0$.

Beweis:
$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,x_0) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(s+t,x_0)_{|s=0} = \frac{\partial}{\partial s}\Phi(s,\Phi(t,x_0))_{|s=0} \\ &= \tfrac{\partial}{\partial s}\Phi(0,\Phi(t,x_0))_{|s=0} = F(\Phi(t,x_0)) = F(x(t))\end{aligned}$$
$\square$

1.5.3 Von der Differentialgleichung zum Fluss

Behauptung:
Betrachten wir die autonome Differentialgleichung $\dot{x} = F(x(t))$ mit $x(0) = x_0$, dann definiert die Lösung des Anfangswertproblems $x(t)$ ein Fluss $\Phi(t, x_0)$.

Beweis:
Definiert man $\Phi(t, x_0) := x(t)$, dann ist Φ ein Fluss. Dies folgt aus der Existenz und Eindeutigkeit. $\square$

Im Folgenden seien ein beliebiger Vektorraum E über einem Körper $\mathbb{K}$ mit $dim(E) < \infty$ und eine Matrix $A \in \mathcal{L}(E)$ gegeben.

1.6 Stabilitätskriterium

Behauptung:
Für $A \in \mathcal{L}(E)$ gilt:

$$\lim_{t\to\infty} e^{tA} = 0 \quad in\ \mathcal{L}(E) \qquad \Longleftrightarrow \qquad Re\lambda < 0 \quad \forall\lambda \in \sigma(A),$$

das heißt für jede Lösung u von der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ in E gilt:

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0,$$

wenn alle Eigenwerte von A einen negativen Realteil haben.

Beweis:
Zuallererst bringen wir die Matrix A auf Jordannormalform. Da E ein endlichdimensionaler Banachraum ist und alle Normen eines Vektorraums mit $dim(E) < 0$ äquivalent sind, können wir uns darauf beschränken, die Behauptung für die Matrix A in Jordannormalform zu beweisen. Aus der Vorlesung *Differentialgleichungen* ist bekannt, dass alle Lösungen u der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ Linearkombinationen von $x(t) = t^n e^{t\lambda} x$ sind, mit $\lambda \in \sigma(A)$.
Es gilt:

$$\mid e^{t\lambda} \mid = e^{tRe\lambda}$$

Daher folgt:

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0 \Longleftrightarrow Re\lambda < 0 \quad \forall\lambda \in \sigma(A)$$

$\square$

1.6.1 Korollar 1

Behauptung:
Für $A \in \mathcal{L}(E)$ gilt:

$$Re\lambda < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$$

$$\Longleftrightarrow$$

für jede Lösung $u \neq 0$ von $\dot{x} = Ax \in E$ gilt: $\lim\limits_{t \to -\infty} \mid u(t) \mid = \infty$

Beweis:
Sei $u(t) = e^{tA}x, x \neq 0$
Es gilt: $u(t) = e^{-|t|A}x$ für $t \leq 0$, also folgt:

$$\mid x \mid = \mid e^{|t|A} u(t) \mid \leq \mid e^{|t|A} \mid\mid u(t) \mid$$

Nach Stabilitätskriterium (1.4) ist:

$$\lim_{t \to \infty} \mid e^{|t|A} \mid = 0 \Longleftrightarrow Re\lambda < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$$

□

1.6.2 Korollar 2

Behauptung:
Für jede Lösung von $\dot{x} = Ax \in E$ ist

$$\lim_{t \to \infty} \mid u(t) \mid = \infty \Longleftrightarrow Re\lambda > 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$$

Beweis:
Sei $u(t) = e^{tA}x, t > 0$.
Dann gilt:

$$u(t) = e^{-t(-A)}x$$

Wegen $\lambda \in \sigma(A) \Longleftrightarrow -\lambda \in \sigma(-A)$ folgt die Behauptung. □

1.7 Definition (Phasendiagramme)

Unter einem Phasendiagramm in $\mathbb{R}^2$ versteht man die graphische Darstellung der zeitlichen Entwicklung von zwei Variablen eines linearen Flusses.
Die Zeit t wird als Parameter der Variablen berücksichtigt. Die zeitliche Veränderung des Flusses wird durch Pfeilrichtungen dargestellt. Dies gewährt Aussagen über die Konvergenz und Grenzwerte des Flusses. Man unterscheidet Phasendiagramme in x-Koordinaten und in y-Koordinaten.

Betrachten wir die lineare autonome Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax,\ x \in \mathbb{R}^2,\ A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \qquad (1)$$

mit allgemeiner Lösung $\Phi(t,\cdot) = e^{At}$, so wird deutlich, dass durch das Lösen einer Differentialgleichung ein linearer Fluss $\Phi(t,x) = e^{At}x$ erzeugt wird.
Für die Klassifizierung des Verhaltens des Flusses am kritischen Punkt $x = 0$ muss die Lösung $\Phi(t,\cdot) = e^{At}$ von (1) genauer betrachtet werden.
Oft ist es nützlich ein Problem in neuen geeigneteren Koordinaten zu untersuchen. Dazu transformieren wir die Differentialgleichung (1) für eine geeignete invertierbare Matrix $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ durch die Substitution $x = Py$ in die Differentialgleichung

$$\dot{y} = By \qquad (2) \qquad \text{mit } B = P^{-1}AP.$$

Es ist sinnvoll P so zu wählen, dass B eine Diagonalmatrix oder eine Matrix in Jordannormalform ist. Nun sind die Eigenwerte auf der Diagonalen ablesbar und Aussagen über die Lösung von (1) sind möglich.
Wir stellen fest, dass verschieden Eigenwerte auftreten können, die zu unterschiedlichen Phasendiagrammen führen.
Diese verschiedenen Fälle gilt es nun im Folgenden genauer zu analysieren.

2 Phasendiagramme

2.1 Fall 1: A hat reelle nichtverschwindende Eigenwerte mit unterschiedlichen Vorzeichen

Seien $\lambda < 0 < \mu,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Eigenwerte einer Matrix A.
Dann ist A halbeinfach, das heißt für alle Eigenwerte ist die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit und A ist diagonalisierbar.
Nach Transformation von (1) in (2) mit einer invertierbaren Matrix $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ lässt sich B wie folgt darstellen:

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

In y-Koordinaten ist der von B erzeugte Fluss von der Form:

$$e^{tB}y = e^{t\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda}y_1 & e^{t\mu}y_2 \end{pmatrix}$$

Also gilt:

$$t \longmapsto \left(e^{t\lambda}y_1, e^{t\mu}y_2\right)$$

In diesem Fall wird der Nullpunkt **Sattel** genannt.
Das Phasenportrait des Flusses $e^{tA} = Pe^{tB}P$ sieht in y-Koordinaten so aus:

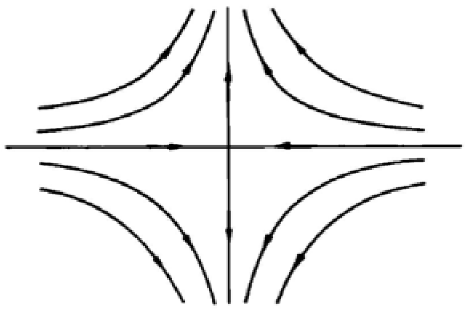

Abbildung 1: Sattel in y-Koordinaten

Resubstituiert man $x = Py$, so erhält man das Phasendiagramm des Flusses e^{tA} in x-Koordinaten. Die Transformation von $\dot{x} = Ax$ in $\dot{y} = Ay$ entspricht bildlich gesehen einer Streckung/Drehung. P ist nicht exakt definiert. Also lässt sich lediglich ein beispielhaftes Phasendiagramm des Fluss $e^{tA}x$ angeben.

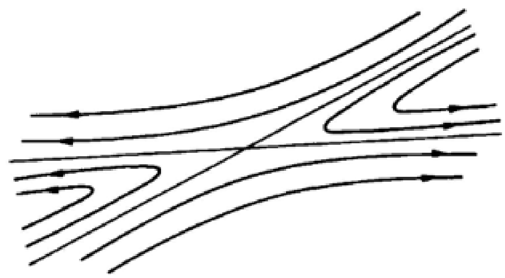

Abbildung 2: Sattel in x-Koordinaten

2.2 Fall 2: Alle Eigenwerte haben negative Realteile

Wegen dem Stabilitätskriterium (1.6) gilt für jede Lösung von (1):

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0,$$

wenn die Eigenwerte negative Realteile besitzen.
Dann ist der Nullpunkt eine **Senke** beziehungsweise **asymptotisch stabil**.

2.2.1 Die Eigenwerte sind reell

2.2.1.1 B ist diagonalisierbar

(i) Sei $\lambda < \mu < 0$:
Durch Transformation mit einem geeigneten invertierbaren $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ ist B von der Form:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Man erhält nun den Fluss:

$$e^{tB}y = e^{t\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left(e^{t\lambda}y_1, e^{t\mu}y_2\right).$$

Also

$$t \longmapsto \left(e^{t\lambda}y_1, \quad e^{t\mu}y_2\right).$$

In diesem Fall ist der Nullpunkt ein **stabiler Knoten**.
Als Phasendiagramm in y-Koordinaten erhalten wir folgende Abbildung:

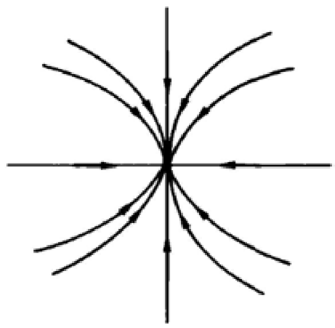

Abbildung 3: Stabiler Knoten

(ii) Sei $\lambda = \mu < 0$: Dann ist B von der Gestalt:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Der von B erzeugte Fluss in y-Koordinaten ist dann:

$$e^{tB}y = e^{t\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left(e^{t\lambda}y_1, e^{t\lambda}y_2\right).$$

Also

$$t \longmapsto \left(e^{t\lambda}y_1, e^{t\lambda}y_2\right).$$

Dann nennt man den Nullpunkt einen **Focus**.
Damit ergibt sich folgendes Phasenportrait.

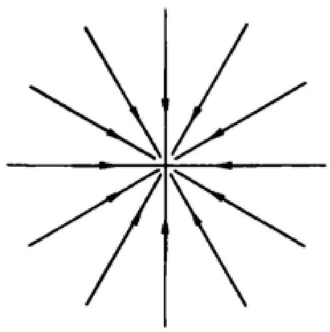

Abbildung 4: Focus

2.2.1.2 B ist eine Jordannormalform

Sei $\lambda = \mu < 0$.
Ist die algebraische Vielfachheit ungleich der geometrischen Vielfachheit einer Matrix A, dann ist A nicht diagonalisierbar. Wandeln wir die Differentialgleichung (1) in die Differentialgleichung (2) um und bringen die Matrix A auf Jordannormalform, dann ist B von der Form:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

B ist nun die Summe einer Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ und einer nilpotenten Matrix $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Aus der Vorlesung *Differentialgleichungen* wissen wir, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ gilt:

$$exp\left(t \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = exp(t\lambda) \cdot exp\left(t \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Für den von B erzeugten Fluss gilt dann:

$$e^{tB} y = e^{t\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left(e^{t\lambda} y_1 + te^{t\lambda} y_2, e^{t\lambda} y_2 \right).$$

Also

$$t \longmapsto \left(e^{t\lambda} y_1 + te^{t\lambda} y_2, e^{t\lambda} y_2 \right).$$

Definieren wir:
$x := e^{t\lambda} y_1 + te^{t\lambda} y_2$
$y := e^{t\lambda} y_2$
und drücken wir x als Funktion von y aus, so können wir das entstehende Phasendiagramm besser verstehen.

$$x = \tfrac{y_1}{y_2} y + ty \qquad \text{mit } t = \tfrac{1}{\lambda} log(\tfrac{y}{y_2})$$

also

$$x = \frac{y_1}{y_2} y + \frac{1}{\lambda} y log(\frac{y}{y_2})$$

In diesem Fall heißt der Nullpunkt **uneigentlicher Knoten**. Als Phasenportrait in y-Koordinaten erhält man:

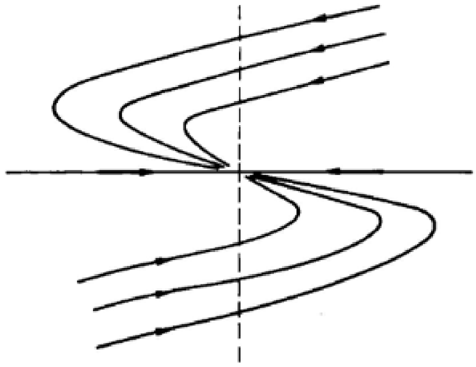

Abbildung 5: Uneigentlicher Knoten

2.2.2 Die Eigenwerte sind komplex

Besitzt $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ einen komplexen Eigenwert $\lambda = \alpha + i\omega$, mit nicht verschwindendem Imaginärteil $\omega \neq 0$, dann ist λ komplex konjugiert und $\overline{\lambda} = \alpha - i\omega$ ist ebenfalls ein Eigenwert von A.
Dann gibt es ein invertierbares $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ und A kann zu

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix}, \omega > 0$$

transformiert werden.
Durch Komplexifizierung können wir $(\mathbb{R}^2)$ mit $\mathbb{C}$ identifizieren, indem wir sagen:

$$(x, y) \longleftrightarrow x + iy$$

Mit $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \longleftrightarrow m := M \cdot 1 \in \mathcal{C}$ ist

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \longleftrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$$

Das reelle Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x - \omega y \\ \omega x + \alpha y \end{pmatrix}$$

entspricht somit der komplexen Differentialgleichung

$$\dot{z} = (\alpha + i\omega)z$$

wobei $z = x + iy$ gilt.
Wir sehen: B entspricht der Multiplikation mit dem Eigenwert $\lambda = \alpha + i\omega$ und es gilt:

$$B^n \longleftrightarrow \lambda^n \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Um e^{tB} zu ermitteln, können wir also $e^{t\lambda}$ berechnen.

$$e^{tB} = e^{t\lambda} = e^{\alpha t + i\omega t} = e^{\alpha t} e^{i\omega t}$$

Mit der Eulerschen Formel erhalten wir:

$$e^{\alpha t} e^{i\omega t} = e^{\alpha t}(cos(\omega t) + isin(\omega t)).$$

Für den Fluss e^{tB} gilt also:

$$e^{tB} y = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} cos(\omega t) & -sin(\omega t) \\ sin(\omega t) & cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

also

$$t \longmapsto \Big(e^{\alpha t}(cos(\omega t) y_1 - sin(\omega t) y_2), e^{\alpha t}(sin(\omega t) y_1 + cos(\omega t) y_2) \Big).$$

Die Transformation des Flusses e^{tA} in den Fluss e^{tB} bewirkt eine Streckung um den Faktor $e^{\alpha t}$ und eine gleichzeitige Drehung um den Winkel ωt.
In diesem Fall ist der Nullpunkt ein **stabiler Strudel** beziehungsweise eine **stabile Spirale**.
Das Phasendiagramm in y-Koordinaten für $\alpha < 0 < \omega$ ist:

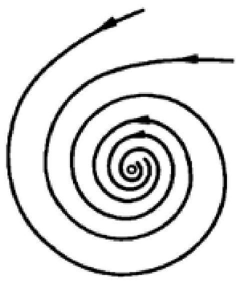

Abbildung 6: Stabiler Strudel bzw. stabile Spirale

2.3 Fall 3: Alle Eigenwerte haben positive Realteile

Für jede Lösung $u \neq 0$ gilt:

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \infty \text{ und } \lim_{t\to-\infty} u(t) = 0$$

Der Nullpunkt heißt **Quelle**.
Es gilt: $e^{tA} = e^{-t(-A)}$. Also sind die Phasenportraits in diesem Fall gleich den Phasendiagrammen von Fall 2, wobei die Pfeile in die umgekehrte Richtung zeigen.
Der Nullpunkt wird im Fall reeller Eigenwerte und $\lambda > \mu > 0$ **instabiler Knoten** genannt. Bei reellen Eigenwerten und $\lambda = \mu > 0$ ist der Nullpunkt ein **instabiler Focus** und bei komplexen Eigenwerten ein **instabiler Strudel**.

2.4 Fall 4: Die Eigenwerte sind rein imaginär

Seien die Realteile α aller Eigenwerte gleich 0. Dann erhalten wir:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \omega > 0$$

aus der Transformation von A. Für den Fluss $e^{tB}y$ gilt dann mit $\alpha = 0$:

$$e^{tB}y = e^{t\lambda}y = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} cos(\omega t) & -sin(\omega t) \\ sin(\omega t) & cos(\omega t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= e^{0}\begin{pmatrix} cos(\omega t) & -sin(\omega t) \\ sin(\omega t) & cos(\omega t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} cos(\omega t) & -sin(\omega t) \\ sin(\omega t) & cos(\omega t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \Big(cos(\omega t)y_1 - sin(\omega t)y_2, sin(\omega t)y_1 + cos(\omega t)y_2\Big)$$

also

$$t \longmapsto \Big(cos(\omega t)y_1 - sin(\omega t)y_2, sin(\omega t)y_1 + cos(\omega t)y_2\Big).$$

Das heißt, alle Lösungen sind periodisch mit Periode $\frac{2\Pi}{\omega}$. Der Nullpunkt heißt **Zentrum** oder **Wirbel**.
Als Phasenportrait ergeben sich in y-Koordinaten Einheitskreise um den Mittelpunkt.
Nach Resubstitution von $x = Py$ erhält man in x-Koordinaten Ellipsen um den Ursprung.

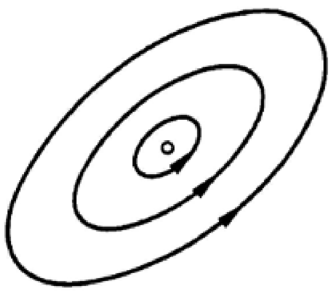

Abbildung 7: Zentrum bzw. Wirbel

2.5 Fall 5: Ein Eigenwert verschwindet

2.5.1 Ein Eigenwert ist 0

Für $\lambda \neq 0, \mu = 0$ ist B von der Form:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Für den Fluss $e^{tB}y$ gilt dann:

$$e^{tB}y = e^{t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Also

$$t \longmapsto (y_1, e^{t\lambda}y_2).$$

Ist $\lambda < 0$, dann erhalten wir eine **Linie von stabilen Gleichgewichten**, für $\lambda > 0$ eine **Linie von instabilen Gleichgewichten**.
Als Phasendiagramme ergeben sich:

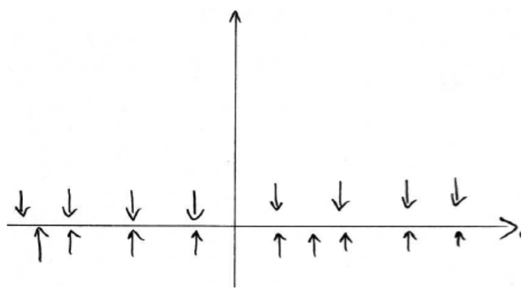

Abbildung 8: Linie von stabilen Gleichgewichten

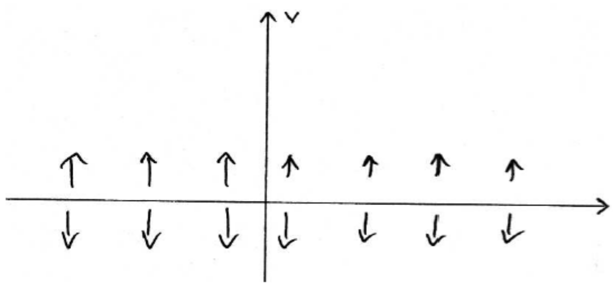

Abbildung 9: Linie von instabilen Gleichgewichten

2.5.2 Beide Eigenwerte sind 0

Ist die Matrix A nicht diagonalisierbar und nilpotent, dann bringen wir die Matrix auf Jordannormalform.
Dann gilt für B:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für den von B erzeugten Fluss ergibt sich:

$$e^{tB}y = e^{t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Also

$$t \longmapsto (y_1 + ty_2, y_2).$$

Dieser Fall ist analog zu dem Fall 2.2.1.2.

2.5.3 Die Matrix ist 0

Dann ist der Fluss trivial.

3 Zusammenfassung

Wir haben gelernt, dass die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ in $\mathbb{R}^2$ (1), und somit das Verhalten des linearen Flusses $e^{tA}x$ in der Nähe von $x = 0$ durch die Eigenwerte bestimmt ist.
In Komponentenschreibweise lässt sich das zweidimensionale Problem (1) wie folgt darstellen:

$$\dot{x_1} = ax_1 + bx_2$$

$$\dot{x_2} = cx_1 + dx_2$$

mit Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Das charakteristische Polynom der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$\chi(\lambda) = det(A - \lambda I) = det(\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}) = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - \lambda(a+d) + ad - bc$$

Mit $det(A) := ad - bc$ und $Spur(A) := a + d$ sind die Eigenwerte $\lambda_i, i \in \{1, 2\}$ nur von den reellen Eigenwerten $det(A)$ und $Spur(A)$ abhängig. Mit der Mitternachtsformel erhält man:

$$\lambda_{1,2} = \frac{Spur(A) \pm \sqrt{Spur^2(A) - 4det(A)}}{2}$$

mit Diskriminante $D := Spur^2(A) - 4det(A)$.

Durch diese Darstellung der Eigenwerte erhalten wir Informationen über die verschiedenen Phasendiagramme und kommen zu folgender Zusammenfassung:

Sattel: $det(A) < 0$
Senken: $det(A) > 0$ und $Spur(A) < 0$
  Knoten: $Spur^2(A) > 4det(A)$
  Spirale: $Spur^2(A) < 4det(A)$
Zentren: $det(A) > 0, Spur(A) = 0$
Quellen: $det(A) > 0, Spur(A) > 0$
  Knoten: $Spur^2(A) > 4det(A)$
  Spiralen: $Spur^2(A) < 4det(A)$

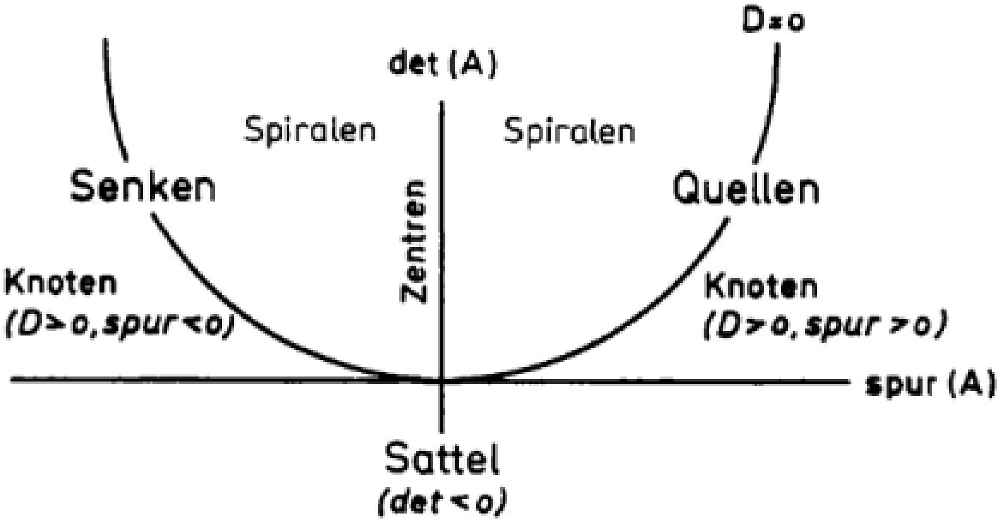

Abbildung 10: Zusammenfassung

.

4 Literatur

- Herbert Amann: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 2., überarbeitete Auflage, Berlin; New York: de Gruyter, 1995
- Prof. Martin Schmidt: Skript *Dynamische Systeme*, FSS 2011
- Prof. Martin Schmidt: Skript *Differentialgleichungen*, FSS 2012
- Dr. Jörg Härterich, Skript *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, HSS 2008