Ljapunovstabilität

Natalie Uhly

25.10.2012

Inhaltsverzeichnis

Sei im Folgenden:
E = (E, $|.|$) ein endlichdimensionaler Banachraum $D \subset E$ offen,
J ein offenes Intervall in den reelen Zahlen mit alle positiven reelen Zahlen sind in J enthalten. Ferner sei $f \in C^{0,1-}(J \times D, E)$ und
$u(t,\tau,\xi) \in (\mathcal{D}(f), D)$ die durch $\dot{x} = f(t,x), x(\tau) = \xi, (\tau,\xi) \in J \times D$ definierte Lösung mit $\mathcal{D}(f) = J \times D$.
Dabei ist $C^{0,1-}(T \times X, Y) := f : T \times X \to Y | f \in C(T \times X, Y)$und f Lipschitz stetig bezgl.$x \in X$
$t^+ := \sup\{\beta \text{ reel} | x = f(t,x)\ x(t_0) = x_0 \text{ hat eine Lösung auf } [t_0, \beta]\}$

1 einleitende Definitionen

Definition 1 (Ljapunovstabil) *Eine Nulllösung heißt (Ljapunov-)stabil, wenn für jede Umgebung U_0 von 0 und für alle $\tau \in J$ eine Umgebung V_0 existiert mit $u(t,\tau,\xi) \in U$ $\forall t \in [\tau, t^+(\tau,\xi))$ $\forall \xi \in V_0$.*
Erfüllt die Nulllösung dieses Stabilitätsmerkmal nicht, so wird sie instabil genannt.

Definition 2 (attraktiv) *Eine Nulllösung heißt attraktiv, wenn zu jedem $\tau \in J$ eine Umgebung W_0 existiert, sodass für alle $\xi \in W_0$*
(1) *$t^+(\tau,\xi) = \infty$ und* ***(2)*** *$\lim_{t \to \infty} u(t,\tau,\xi) = 0$ gilt.*

Definition 3 (asymptotisch stabil) *Die Nulllösung wird asymptotisch stabil genannt, wenn die Nulllösung attraktiv und stabil ist.*

Definition 4 (gleichmäßig stabil) *Die Nulllösung heißt gleichmäßig stabil, wenn V_0 unabhängig von $\tau \in J$ ist.*

Definition 5 (gleichmäßig attraktiv) *Die Nulllösung heißt gleichmäßig attraktiv, wenn W_0 unabhängig von $\tau \in J$ ist und wenn der Grenzwert in* ***(1)*** *gleichmäßig bezüglich $(\tau,\xi) \in J \times W$ existiert,das heißt: für alle Umgebungen $\tilde{U_0}$ existiert ein $T > 0$ mit $u(t,\tau,\xi) \in \tilde{U_0}$ für $t > \tau + T$ und alle $(\tau,\xi) \in J \times W$.*

Definition 6 (gleichmäßig asymptotisch stabil) *Die Nulllösung nennt man gleichmäßig asymptotisch stabil, wenn sie gleichmäßig stabil und gleichmäßig attraktiv ist.*

2 erste Folgerungen

Proposition 7 *Eine Nulllösung ist stabil* $\Leftrightarrow$ *für alle Umgebungen* U_0 *und zu jedem* $\tau \in J$ *eine Umgebung* V_0 *existiert mit* $t^+(\tau,\xi) = \infty$ *und* $u(t,\tau,\xi) \in U_0$ $\forall (t,\xi) \in [\tau,\infty) \times V_0$.

Beweisidee:
Bei der Wahl für U_0 sodass $\mathrm{dist}(U_0, \delta D) > 0$ folgt aus dem Globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz, dass $t^+(\tau,\xi) = \infty$ $\forall \xi \in V_0$ gilt.

Anmerkung 8 *Der Begriff der Stabilität ist offensichtlich eine Verschärfung der 'stetigen Abhängigkeit von Anfangswerten'*
(Aus der stetigen Abhängigkeit von Anfangswerten kann man nur folgern, dass der Grenzwert $lim_{\xi\to\infty} u(t,\tau,\xi) = 0$ *gleichmäßig auf kompakten Teilintervallen von* J *existiert, wohingegen die Stabilität dieser Grenzwert gleichmäßig bezüglich* $t \in [\tau,\infty)$ *existiert.)*

Anmerkung 9 *Die Begriffe der Stabilität und der Attraktivität sind unabhängig von* $\tau \in J$ *im folgenden Sinn:*
wenn $x = 0$ *stabil bzw attraktiv bzgl* $\tau \in J$ *dann auch bzgl* $\sigma \in J$.

Anmerkung 10 *Stabilität und Attraktivität sind unabhängige Begriffe.*

Proposition 11 ***(i)*** *f ist periodisch in t und die Nulllösung ist stabil* $\Rightarrow$ *die Nulllösung ist gleichmäßig stabil.*

(ii) *f ist periodisch in t und die Nulllösung ist asymptotisch stabil* $\Rightarrow$ *die Nulllösung ist gleichmäßig asymptotisch stabil.*

(iii) *f ist unabhängig von t und die Nulllösung ist stabil* $\Rightarrow$ *die Nulllösung ist gleichmäßig stabil.*

(iv) *f ist unabhängig von t und die Nulllösung ist asymptotisch stabil* $\Rightarrow$ *die Nulllösung ist gleichmäßig asymptotisch stabil.*

Beweisideen:
zu **(i)**
Sei f periodisch in t: $\forall t \in J$ $\exists$ ein $\tilde{t}$ sodass $f(t,x) = f(\tilde{t},x)$. Wir wissen $\dot{x}$ hat eine stabile Nulllösung, das heißt: $\forall U_0$ und $\forall \tau \in J$ $\exists V_0$ mit $u(t,\tau,\xi) \in U_0$ $\forall t \in [\tau, t^+(\tau,\xi))$,$\forall \xi \in V_0$. Dann müssen wir t nur auf einem kompakten Intervall (mit Periodenlänge) betrachten. Wir wissen vom Satz von Weierstraß (über Maxima stetiger Funktionen),dass eine stetige Funktion ihr Minimum und Maximum auf dem kompakten Intervall annimmt. => wähle die Minimale Umgebung U_0 von 0 die für $\tau \in J$ eine Umgebung V_0 beschreibt mit $u(t,\tau,\xi) \in U$ $\forall t \in [\tau, t^+(\tau,\xi))$ $\forall \xi \in V_0$.
zu **(ii)**

Von Stabilität zu gleichmäßiger Stabilität ist schon gezeigt, fehlt noch, dass aus Attraktivität gleichmäßige Attraktivität folgt. Wende die Aussage der Minima und Maxima für die Gleichung der Attraktivität an.
zu **(iii)**
Da die Stabilität gegeben ist und die Funktion f nicht von t abhängt, aber $f \in C^{0,1-}$ lipschitzstetig in $x \in D$ gleichmäßig bezüglich t, folgt, dass die Stabilitätsbedingung gleichmäßig bezüglich $\tau \in J$ gilt.
zu **(iv)**
Analog lässt sich auch die Gleichmäßige Attraktivität aus der Attraktivität folgern.

Anmerkung 12 *Ist $\hat{u} := u(., \tau_0, \xi_0)$ irgendeine Lösung von $\dot{x} = f(t, x)$ so besitzt die Differentialgleichung $\dot{y} = f(t, y + \hat{u}(t)) - f(t, \hat{u}(t)$ die globale Nulllösung und misst die Abweichung von $\hat{u}$. Daher sagt man von $\hat{u}$ sie sei stabil, wenn die Nulllösung stabil ist. (oder $\hat{u}$ sei attraktiv, wenn die Nulllösung attraktiv ist.)*

3 Ljapunov - Stabilität

Satz 13 *1. Sei $A \in \mathcal{L}(E)$. Dann ist die Nulllösung der linearen Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ genau dann stabil, wenn gilt:*

(i) $\Re(\sigma(A)) \leq 0$

(ii) *jedes $\lambda \in \sigma(A)$ mit $\Re(\lambda) = 0$ ist ein halbeinfacher Eigenwert.*

2. Die Nulllösung ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $\Re(\lambda) < 0 \forall \lambda \in A$

Beweis:

Wiederholung 14 (Beschränkheitskriterium) *Sei $A \in \mathcal{L}(E)$. Dann bleibt jede Lösung u von $\dot{x} = Ax$ für $t \to \infty$ genau dann beschränkt, wenn gilt:*
(i) $\Re(\lambda) \leq 0 \forall \lambda \in \sigma(A)$
(ii) *Jedes $\lambda \in \sigma(A)$ mit $\Re(\lambda) = 0$ ist ein halbeinfacher Eigenwert, das heißt: Der Jordanblock des Eigenwertes ist eine Diagonalmatrix.*

zu 1.
Von Anmerkung 2 wissen wir, es reicht für ein $\tau \in J$ zu zeigen, dass die Nulllösung stabil ist. Wir betrachten $\tau = 0$, das bedeutet den Fluss $e^{tA}\xi$ mit $\xi \in E$. Es sei α das Supremum über $|e^{tA}|$ mit $t \in R_+$ kleiner ∞ Dann folgt für $\epsilon > 0$

$$|e^{tA}\xi| \leq |e^{tA}||\xi| < \epsilon \forall (t, \xi) \in R_+ \times B(0, \epsilon/\alpha)$$

Das heißt wir haben eine stabile Nulllösung.
Ist $x_1, ..., x_m$ eine Basis von E, dann folgt: $\xi = \sum_i \xi^i x_i$ und aus $e^{tA}\xi = \sum_i \xi^i e^{tA} x_i$. Da auf endlichdimensionalen Vektorräumen die Normen äquivalent sind und durch die Defionition der Operatornorm, folgt, dass $\alpha < \infty$ genau dann erfüllt ist, wenn jede der Lösungen $e^{tA}x_i \; \forall i$ beschränkt ist. Nach dem Beschränkheitskriterium gilt eine Beschränkung der Lösungen genau dann, wenn **(i)** und **(ii)** erfüllt sind.
Ist **(i)** oder **(ii)** verletzt, so gilt nach dem Beschränkheitskriterium: $\exists x \in E$ mit $|e^{tA}x| \to \infty$ für $t \to \infty$. Daher ist die Nulllösung instabil.

Wiederholung 15 (Stabilitätskriterium) *Für $A \in \mathcal{L}(E)$ gilt:*

$$\lim_{t \to \infty} e^{tA} = 0 \Leftrightarrow \Re(\lambda) < 0 \forall \lambda \in A$$

zu 2.
nach 1. folgt, dass die Nulllösung stabil für $\Re(\lambda) < 0 \forall \lambda \in A$. Da aus Proposition 7 hervorgeht, dass die erste Bedingung der Attraktivität bei Stabilität schon erfüllt ist, reicht die zweite Bedingung zu zeigen. Nach dem Stabilitätskriterium folgt die zweite Aussage.

Lemma 16 *Sei $\dot{x} = Ax + g(t,x)$ mit $g(t,x) = o(|x|)$ für $x \to 0$ gleichmäßig bezüglich $t \in J$ und besitze nahezu dieselbe asymoptotische Stabilitätsverhalten wie die ungestörte lineare Gleichung: $\dot{x} = Ax$. Sei $g \in C^{0,1-}(J \times D, E)$ und u(t) mit $t \in J(\tau, \xi)$ irgendeine Lösung von $\dot{x} = Ax + g(t,x)$*
Dann folgt: u genügt der Integralgleichung:
***(5)** $u(t) = e^{(t-\tau)A}\xi + \int_\tau^t e^{(t-s)A} g(s, u(s))ds$*

Beweisidee:
Die inhomogene lineare Gleichung $\dot{x} = Ax + g(t, u(t))$ für $t \in J(\tau, \xi)$ besitzt die eindeutig bestimmte Lösung u auf $J(\tau, \xi)$ mit $u(\tau) = \xi$. Daher folgt aus der Variation-der-Konstanten-Formel, dass die Aussage zutrifft.

Theorem 17 (asymptotische Stabilität) *Für $A \in \mathcal{L}(E)$ gelte $\Re(\sigma(A)) < 0$. Ferner sei $g \in C^{0,1-}(J \times D, E)$ mit*
***(6)** $g(t,x) = o(|x|)$ für $x \to 0$ gleichmäßig bezüglich $t \in J$.*
Dann ist die Nulllösung der gestörten linearen Gleichung $\dot{x} = Ax + g(t,x)$ gleichmäßig asymptotisch stabil.

Beweis:

Da gilt $\Re(\sigma(A)) < 0$ Existieren positive Konstanten α und β mit $|e^{tA}| \leq \beta \cdot e^{-\alpha t}$ für alle $t \geq 0$, wobei wir $\beta > 1$ annehmen dürfen. Also folgt aus **(5)** die Abschätzung
(7) $|u(t)| \leq \beta e^{-\alpha(t-s)}|\xi| + \beta \int_\tau^t e^{-\alpha(t-s)}|g(s,u(s))|ds$ für $\tau \leq t < t^+(\tau, \xi)$
Sei nun $\epsilon \in (0, \alpha)$ beliebig. Nach **(6)** existiert ein $\delta \in (0, \epsilon)$ mit
(8) $|g(t,x)| \leq (\epsilon/\beta)|x|$ mit $|x| \leq \delta$ und $t \geq \tau$.

Nun Behaupten wir das gilt: $|u(t)| < \delta < \epsilon$ für $|\xi| < \delta/\beta$ und $t \in [\tau, t^+(\tau, \xi))$. (Daraus folgt die gleichmäßige Stabilität der Nulllösung.)

Widerspruchsbeweis um die Behauptung zu beweisen: Annahme: gelte $|u(t)| < \delta < \epsilon$ für $|\xi| < \delta/\beta$ und $t \in [\tau, t^+(\tau, \xi))$ nicht. Dann $\exists \xi \in B(0, \delta/\beta)$und ein $\bar{t} \in (\tau, t^+(\tau, \xi))$ mit der Eigenschaft, dass $\bar{t} = \inf\{t \in [\tau, t^+(\tau, \xi))||u(t)| = \delta\}$ Dann folgt aus **(7)** und **(8)** für $\tau \leq t \leq \bar{t}$ dass $|u(t)| \leq \delta e^{-\alpha(t-\tau)} + \epsilon \int_\tau^t e^{-\alpha(t-s)}|u(s)|ds$. Jetzt wollen wir das Gronwallsche Lemma anwenden:

Wiederholung 18 (Gronwallsche Lemma) *Sei J ein Intervall, $t_0 \in J$ ferner sei g eine stetige Abbildung von J in die reelen Zahlen mit $g \geq 0$ und gelte:*

$$g(t) \leq A \int_{t_0}^t g(s)ds + B \ t \in J$$

mit geeigneten $A, B \geq 0$ Dann gilt $\forall t \in J$

$$g(t) \leq Be^{A|t-t_0|}$$

Wir wählen B $= \delta e^{-\alpha(t-\tau)}$ und A $=\epsilon \int_\tau^t e^{-\alpha(t-s)}$ dann folgt:
(9) $|u(t)| \leq \delta e^{-(\alpha-\epsilon)(t-\tau)} \forall \tau \leq t \leq \bar{t}$ und insbesondere für $\bar{t}$:

$$\delta = |u(\bar{t})| \leq \delta e^{-(\alpha-\epsilon)(\bar{t}-\tau)} < \delta$$

Dies ist ein Widerspruch. Daraus folgt die obige Behauptung.
Sei nun ein $\xi \in B(0, \delta/\beta)$, so folgt aus: $|u(t)| < \delta \forall t \in [\tau, t^+(\tau, \xi))$ dass $|u(t)| \leq \delta e^{-(\alpha-\epsilon)(t-\tau)} \forall \tau \leq t \leq t^+(\tau, \xi)$ gilt. Das bedeutet die Nulllösung ist gleichmäßig attraktiv.

Anmerkung 19 ***Innerhalb dieses Beweises, brauchen wir die Komplexifizierung:***
Die Komplexifizierung $E_\mathbb{C}$ von $E = (E, |.|)$ ist ein normierter $\mathbb{C}$ -Vektrraum, der folgendermaßen gebildet wird:
Auf $E \times E$ werden eine Multiplikation mit komplexen Skalaren $\gamma := \alpha + i\beta$ definiert durch:
$\gamma z = (\alpha x - \beta y, \beta x - \alpha y)$ und einer Norm durch: $|z|_{E_\mathbb{C}} := max_{0 \leq \Phi \leq 2\pi}\{|x\cos(\Phi) + y\sin(\Phi)|\}$
Man verifiziert dann leicht, dass $(E \times E, |.|_{E_\mathbb{C}}) =: E_\mathbb{C}$ mit dieser Multiplikation ein normierter $\mathbb{C}$ -Vektorraum der Dimension m (über $\mathbb{C}$) ist, wenn E die Dimension m (über den reelen Zahlen) hat. Außerdem gilt:
$1(x,0) = (x,0)$ und $i(x,0) = (0,x)$ sowie $|(x,0)|_{E_\mathbb{C}} = |x| \; \forall x \in E$. Folglich können wir E mit $E \times \{0\}$ in $E_\mathbb{C}$ identifizieren und jedes Element $z = (x,y)$ eindeutig in der Form $z = x + iy$ darstellen.
Aus diesem Grund schreiben wir kurz $E_\mathbb{C} = E + iE$. Sei nun $A \in \mathcal{L}(E)$. Dann wird die Komplexifizierung $A_\mathbb{C}$ von A durch $A_\mathbb{C}(x+iy) := Ax + iAy \; \forall x + iy \in E_\mathbb{C}$ erklärt.
Es ist offenbar $A_\mathbb{C}$ ein Endomorphismus von $E_\mathbb{C}$, das bedeutet: $A_\mathbb{C} \in \mathcal{L}(E_\mathbb{C})$ und es gilt: $|A_\mathbb{C}|_{\mathcal{L}(E_\mathbb{C})} = |A|_{\mathcal{L}(E)}$. In der Tat, aus

$$|A_\mathbb{C}(x+iy)|_{\mathcal{L}(E_\mathbb{C})} = max_{0 \leq \Phi \leq 2\pi}\{|Ax\cos(\Phi) + Ay\sin(\Phi)|\} \leq |A|_{\mathcal{L}(E)}|x+iy|_{E_\mathbb{C}}$$

folgt $|A_\mathbb{C}|_{\mathcal{L}(E_\mathbb{C})} \leq |A|_{\mathcal{L}(E)}$
Umgekehrt gilt für $x \in E \subset E_\mathbb{C}$ $|Ax| = |A_\mathbb{C}x|_{E_\mathbb{C}} \leq |A_\mathbb{C}|_{\mathcal{L}(E_\mathbb{C})}|x|$
Also $|A|_{\mathcal{L}(E)} \leq |A_\mathbb{C}|_{\mathcal{L}(E_\mathbb{C})}$
Damit ist die Gleichheit der Normen gezeigt. Offensichtlich gilt nun: $A_\mathbb{C}^n = (A^n)_\mathbb{C}$ und folglich: $(e^{tA})_\mathbb{C} = e^{tA_\mathbb{C}} \; \forall t \in J$

Lemma 20 *Für $A \in \mathcal{L}(E)$ gelte $\alpha < \Re(\sigma(A)) < \beta$*
Dann existiert eine euklidische Norm $||.||$ auf E, sodass für das zugehörige innere Produkt $(.|.)$ gilt:

$$\alpha||x||^2 \leq \Re((Ax|x)) \leq \beta||x||^2 \; \forall x \in E$$

Beweis:

Zuerst betrachten wir den komplexen Fall:
Wir wissen: A lässt sich als $A = D + N$ mit $D = diag\{\mu_1, ..., \mu_m\}$ mit μ_i die gemäß ihrer gezählten Eigenwerte von A sind. Wir wissen: zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es

eine euklidische Norm $||.||$ auf E gibt mit $||N|| \leq \epsilon$. Wir fixieren jetzt: $\epsilon > 0$ mit $\epsilon \leq min\{\beta - max[\Re(\sigma(A))], min[\Re(\sigma(A))] - \alpha\}$

Wegen $(Dx|x) = \sum_j(\mu_j|x^j|^2)$ wobei x^j die Koordinaten von x bezüglich der (zur Konstruktion der Norm) verwendeten Orthonormalbasis sind, gilt:

$$min[\Re(\sigma(A))]||x||^2 \leq \Re(Dx|x) \leq \max[\Re(\sigma(A))]||x||^2$$

Da ferner $\Re((Ax|x)) = \Re((Dx|x)) + \Re((Nx|x))$ und $|\Re((Nx|x))| \leq ||N||||x||^2 \leq \epsilon||x||^2$ ist, folgt die Behauptung aus:

$$\Re((Dx|x)) - \epsilon||x||^2 \leq \Re((Ax|x)) \leq \Re((Dx|x)) + \epsilon||x||^2$$

und der Wahl von ϵ

Betrachten wir jetzt den reelen Fall: Das eben Bewiesene gilt dann für die Komplexifizierung $A_{\mathbb{C}}$ in $E_{\mathbb{C}}$. die Hilbertnorm $||.||_{\mathbb{C}}$ auf $E_{\mathbb{C}}$ induziert durch Restriktion von $E \subset E_{\mathbb{C}}$ eine Hilbertnorm $||.||$ auf E. Für das dazugehörige Skalarprodukt erhalten wir:

$$(x|y) = (||x+y||^2 - ||x-y||^2)/4 \forall x, y \in E$$

Damit folgt:

$$\alpha||x||^2 = \alpha||x||^2_{\mathbb{C}} \leq \Re(A_{\mathbb{C}}x|x) = \Re(Ax|x) \leq \beta||x||^2_{\mathbb{C}} = \beta||x||^2$$

Damit folgt auch für den reelen Fall die Behauptung.

4 Ljapunov - Instabilität

Theorem 21 (Instabilität) *Der Operator $A \in \mathcal{L}(E)$ besitze mindestens einen Eigenwert mit positivem Realteil. Ferner sei $g \in C^{0,1-}(J \times D, E)$ mit*
$g(t,x) = o(|x|)$ für $x \to 0$ gleichmäßig bezüglich $t \in J$.
*Dann ist die Nulllösung der gestörten linearen Gleichung **(11)** $\dot{x} = Ax + g(t,x)$ instabil.*

Beweis:

Nach Voraussetzung ist das instabile Spektrum $\sigma_u(A)$ nicht leer. Folglich $\exists\gamma$ mit $0 < \gamma < \Re(\sigma_u(A)$. Wegen

$$\sigma_u(A-\gamma) = \sigma_u(A) - \gamma$$

ist das neutrale Spektrum $\sigma_u(A_\gamma)$ von $A_\gamma := A - \gamma$ und A_γ erzeugt einen hyperbolischen linearen Fluss e^{tA_γ}.
Wir wissen, dass es eine direkte Summenzerlegung $E = E_- \oplus E_+$, sodass A_γ in

$$A_\gamma = (A_\gamma)_- \oplus (A_\gamma)_+$$

, derart, dass $\sigma_s(A_\gamma) = (\sigma_s(A_\gamma))_-$ und $\sigma_u(A_\gamma) = (\sigma_s(A_\gamma))_+$ gelten. Offensichtlich wird der Operator A zerlegt in

$$A = A_- \oplus A_+$$

und $\sigma_s(A_+) = \sigma_u(A)$ sowie $\sigma_s(A_-) = \sigma_s(A) \cup \sigma_n(A)$
Es gilt als $\Re(\sigma(A_-) \leq 0$ und $\Re(\sigma(A_-) > \alpha > 0$ für ein geeignetes $\alpha > 0$
Wir wählen $\beta \in (0,\alpha)$ fest. Dann existieren nach Lemma 4 Hilbertnormen $||.||_+$ auf E_+ und $||.||_-$ auf E_- so, dass gilt:

$$\textbf{(13)}\ \Re(A_- x_- | x_-) \leq \beta ||x_-||_-^2\ \forall x_- \in E_-$$

und

$$\textbf{(14)}\ \Re(A_+ x_+ | x_+) \geq \alpha ||x_+||_+^2\ \forall x_+ \in E_+$$

offensichtlich wird durch $(x_- + x_+ | y_- + y_+) := (x_- | y_-) + (x_+ | y_+)$ ein inneres Produkt auf $E = E_- \oplus E_+$ definiert, damit eine Norm $||.||$ mit

$$\textbf{(15)}\ ||x||^2 = ||x_- + x_+||^2 = ||x_-||_-^2 + ||x_+||_+^2\ \forall x = x_- + x_+ \in E$$

Wir setzten $\Phi(x) := (||x_-||_-^2 - ||x_+||_+^2)/2 = (||Px||^2 - ||Qx||^2)/2\ \forall x \in E$

Wobei P:$E \to E_+$ und Q:$E \to E_-$ die zu $E = E_- \oplus E_+$ gehörigen Projektionen sind und $\gamma := (\alpha - \beta)/4$
Dann existiert nach **(10)** ein $\delta > 0$ mit **(16)**$||g(t,x)|| \leq \gamma ||x||$ für $||x|| \leq \delta$
Es sei nun u eine Lösung von **(11)** mit $||u(0)|| < \delta$ und $\Phi(u(0)) > 0$, dann gilt für $t \geq 0$ mit $||u(t)|| \leq \delta$ für $\varphi := \Phi(u(t))$ wegen **(13)**,**(14)** und **(16)**:

$$\dot{\varphi}(t) = \Re(Pu(t) | P\dot{u}(t)) - \Re(Qu(t) | Q\dot{u}(t))$$

$$= \Re(A_+u_+(t)|u_+(t)) - \Re(A_-u_-(t)|u_-(t)) + \Re(Pu(t)|Pg(t,u(t))) - \Re(Qu(t)|Qg(t,u(t)))$$
$$\geq \alpha||Pu(t)||^2 - \beta||Qu(t)||^2 - \gamma||P||||Pu(t)||||u(t)|| - \gamma||Q||||Qu(t)||||u(t)||$$

Da $||Px|| \leq ||x||$ und $||Qx|| \leq ||x||$ für alle $x \in E$. Daraus folgt $||P|| \leq 1$ und $||Q|| \leq 1$, also
(17) $\dot{\varphi}(t) \geq \alpha||Pu(t)||^2 - \beta||Qu(t)||^2 - \gamma(||Pu(t)|| + ||Qu(t)||)||u(t)||$.
Für kleine $t \geq 0$ folgt aus $\varphi(0) > 0$ auch $\varphi(t) = \Phi(u(t)) \geq 0$, also $||Qu(t)|| \leq ||Pu(t)||$ und somit nach **(15)** $||u(t)|| \leq 2||Pu(t)||$. Also erhalten wir aus **(17)**

$$\textbf{(18)}\dot{\varphi}(t) \geq (\alpha - 4\gamma)||Pu(t)||^2 - \beta||Qu(t)||^2 = 2\beta\varphi(t)$$

für alle $t \geq 0$ mit $||u(t)|| \leq \delta$ und $\varphi(t) \geq 0$. Durch Integration von **(18)** folgt

$$\textbf{(19)}\varphi(t) \geq \varphi(0)e^{2\beta t}$$

für die obigen Werte von t. Hieraus liest man insbesondere ab, dass $\varphi(t) > 0$ für alle $t \leq 0$ und mit $||u(t)|| \leq \delta$ gilt. Mit anderen Worten: keine Lösung von **(11)** mit Anfangswert in $B(0,\delta) \cap \Phi^{-1}[0,\infty)$ verlässt den Doppelkegel $\Phi^{-1}[0,\infty)$ bevor sie den Ball $B(0,\delta)$ verlässt. Ferner folgt aus **(19)**, dass jede Lösung mit von Null verschieden Anfangswert in $B(0,\delta) \cap \Phi^{-1}[0,\infty)$ den Rand von $B(0,\delta)$ erreicht, was Instabiltät der Nulllösung beweist.

5 Prinzip der linearisierten Stabilität

Theorem 22 *Es sei* $f \in C^1(D,E)$ *mit* $f(x_0) = 0$.
Gilt dann $\Re(Df(x_0)) < 0$, *so ist der kritische Punkt der autonomen Differentialgleichung* $\dot{x} = f(x)$ *asymptotisch stabil.*
Ist $\sigma(Df(x_0)) \cap \{z \in \mathbb{C} | \Re(z) > 0\} \neq \emptyset$ *so ist* x_0 *instabil.*

Beweis:
Mit $A = Df(x_0) \in \mathcal{L}(E)$ und $g(y) := f(y + x_0) - Df(x_0)y$ gilt $g(y) = o(|y|)$für $y \to 0$ und $\dot{y} = f(y + x_0) = Ay + g(y)$. Also folgt die Behauptung unmittelbar aus Anmerkung 12 und Theorem 17 und 21.