UNIVERSITÄT
MANNHEIM

# Seminararbeit zu Dynamische Systeme

# Thema: Variationsrechnung und Euler-Lagrange Gleichung

vorgelegt von Martin Schmitz

bei Prof. Dr. Martin Schmidt
Lehrstuhl für Mathematik III
Universität Mannheim
31.10.2012

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Einführung

In diesem Vortrag werden die grundlegenden Werkzeuge der Variationsrechnung präsentiert. Die Variationsrechnung beschäftigt sich mit der Frage, wie man Ableitungen auf Funktionen beschreiben kann, deren Definitionsbereich allgemeine normierte Vektorräume, also beispielsweise auch unendlich-dimensionale Vektorräume, sind. Ein prominenter Vertreter solcher Funktionen sind Abbildungen, die von $\mathbb{R}$-wertigen, stetigen Funktionen nach $\mathbb{R}$ abbilden. Aufbauend auf der Definition der Variation werden notwendige und hinreichende Kriterien für lokale Extrempunkte diskutiert.

Diese Kriterien führen in einer speziellen Klasse von Funktionalen zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung. Das Auffinden von Kandidaten für Extremwerte reduziert sich dann darauf, diese Differentialgleichung zu lösen und dann mit Hilfe eines hinreichenden Kriteriums zu prüfen, ob an dem Punkt in der Tat ein Extremum vorliegt.

Abschließend werden zwei Beispiele diskutiert: Das Bogenmaß als Prototyp für ein Funktional sowie den eindimensionalen Spezialfall des Dirichletproblems.

31.10.2012,

Martin Schmitz

# 2 Funktionale

In diesem Abschnitt wollen wir allgemeine Funktionale einführen und einige Beispiele mit unendlich-dimensionalem Definitionsbereich behandeln.

**Definition 1** *Für einen $\mathbb{K}$-VR $X$ heißt eine Abbildung*

$$J : X \to \mathbb{K}$$

*ein **Funktional auf X**. Erfüllt das Funktional $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}, y, \tilde{y} \in X$*

1. $J(\lambda y) = \lambda J(y)$

2. $J(y + \tilde{y}) = J(y) + J(\tilde{y})$,

*so nennen wir das Funktional **linear**.*

**Bemerkung 2** *Wir werden den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ betrachten.*

**Beispiel 3** *Sei $X := C([a, b], \mathbb{R})$ und $g \in X$. Dann ist*

$$J : X \to \mathbb{R}, J(y) := \int_a^b g(x) \cdot y(x)\ dx$$

*ein lineares Funktional.*

Beweis:
Wir stellen fest, dass die genannte Abbildung wohldefiniert ist, da für alle $y \in X$ $y{\cdot}g$ stetig ist und daher das Integral $J(f) := \int_a^b g(x){\cdot}y(x)\ dx$ existiert. Für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}, y, \tilde{y} \in X$ betrachte man:

$$\begin{aligned}
&J(\lambda \cdot y) = \int_a^b g(x) \cdot \lambda y(x)\ dx = \lambda \int_a^b g(x) \cdot y(x)\ dx = \lambda J(y) \\
&J(y + \tilde{y}) = \int_a^b g(x) \cdot (y(x) + \tilde{y}(x))\ dx = \int_a^b g(x) \cdot y(x)\ dx + \int_a^b g(x) \cdot \tilde{y}(x)\ dx \\
&= J(y) + J(\tilde{y})
\end{aligned}$$

$\square$

**Erinnerung 4** *Aus der Analysis ist bekannt, dass für normierte Vektorräume $V$ und $W$ und eine lineare Abbildung $A : V \to W$ gilt:*

$$A \text{ ist stetig} \Leftrightarrow \exists\, C > 0 : \|Av\| \leq C\|v\|, v \in V.$$

*Die Menge aller stetigen und linearen Abbildungen von $V$ nach $W$ sei $\mathcal{L}(V, W)$.*

**Bemerkung 5** *Auf $C([a,b],\mathbb{R})$ führt die Norm $\|y\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |y(x)|$ zu einem Banachraum. Auf $X = \{y \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \mid y(a) = 0\}$ ist $\|y\|_E = \sqrt{\int_a^b y'^2(x)\,dx}$ eine Norm.*

**Bemerkung 6** *$J$ aus Beispiel 3 ist sogar stetig, da $\forall\, y \in X$ gilt:*

$$|J(y)| = |\int_a^b g(x)y(x)\,dx| \leq \int_a^b |g(x)||y(x)|\,dx \leq \|y\|_\infty \underbrace{\int_a^b |g(x)|\,dx}_{:=C\,\in\,\mathbb{R}}.$$

**Bemerkung 7** *Betrachten wir das Funktional $J : C^1([-1,1],\mathbb{R}), J(y) = y'(0)$, so ist zwar $J$ linear. Aber mit der Wahl $y_n(x) := \frac{\sin(x\cdot n)}{n}$ haben wir $\lim_{n\to\infty} y_n \equiv 0$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$, jedoch*

$$\lim_{n\to\infty} J(y_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin(x\cdot n)}{n}\right)'(0) = \lim_{n\to\infty} \cos(n\cdot 0) = 1 \neq 0 = J(0) = J(\lim_{n\to\infty} y_n).$$

*Also sind lineare Abbildungen auf Funktionenräumen nicht zwingend stetig.*

## 3 Die erste Variation

Wir wollen nun den Begriff der Ableitung auf Funktionale anwenden. Eine entscheidende Herausforderung besteht darin, dass wir es mit unendlich-dimensionalen Vektorräumen zu tun haben. Zunächst die folgende

**Erinnerung 8** *Sei $f : O \subset V \to W$ eine Abbildung zwischen einer offenen Teilmenge eines normierten Vektorraums $V$ und einem normierten Vektorraum $W$. Dann heißt $f$ an einer Stelle $x_0 \in O$ differenzierbar, wenn es $A \in \mathcal{L}(V,W)$ gibt, sodass die Abbildung:*

$$O \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{\|f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases}$$

*stetig in $x_0$ ist. Wenn $A$ existiert, so ist $A$ eindeutig.*

Dies formulieren wir nun explizit für Funktionale:

**Definition 9** *Sei $X$ ein normierter Vektorraum, $O \subset X$ offen und $J : O \subset X \to \mathbb{R}$ ein Funktional auf $X$. Dann heißt $J$ an einer Stelle $y_0$ differenzierbar, wenn es ein $A \in \mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ gibt, sodass die Abbildung:*

$$O \to \mathbb{R}, y \mapsto \begin{cases} \frac{|J(y)-J(y_0)-A(y-y_0)|}{\|y-y_0\|} & y \neq y_0 \\ 0 & y = y_0 \end{cases}$$

*stetig ist. In diesem Falle nennt man $\delta J[y_0] := A$ die **erste Variation von J**.*

**Beispiel 10** *Sei $J : X \to \mathbb{R}$, $J \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$. Dann ist an jeder Stelle $y_0 \in X$ $\delta J[y_0] = J$.*

<u>Beweis:</u>
Für $y \neq y_0$ betrachte:

$$\frac{|J(y) - J(y_0) - J(y - y_0)|}{\|y - y_0\|} = \frac{|J(y - y_0) - J(y - y_0)|}{\|y - y_0\|} = 0.$$

□

**Definition 11** *Sei $J : O \subset X \to \mathbb{R}$ ein Funktional, $O$ eine offene Menge. Ist $J$ in $y_0$ differenzierbar, so nennen wir*

$$\delta J(y_0, \eta) := \delta J[y_0]\eta = \frac{d}{ds} J(y_0 + s \cdot \eta)|_{s=0} = \lim_{s \to 0} \frac{J(y_0 + s \cdot \eta) - J(y_0)}{s}$$

*die **Ableitung von J** an der Stelle $y_0$ **in Richtung** $\eta$. Existiert zumindest der letzte Grenzwert, so nennen dies die entsprechende Richtungsableitung.*

# 4 Extrema von Funktionalen

Nachdem Funktionale und ein entsprechender Differenzierbarkeitsbegriff eingeführt wurden, werden nun Funktionale mit Hilfe von Variationen auf Extremwerte untersucht.

**Definition 12** *Für ein Funktional $J : X \to \mathbb{R}$ nennen wir $y_0 \in X$ **lokales Minimum (Maximum)**, wenn es ein $\delta > 0$ gibt mit $J(y_0) \leq J(y)$ $(J(y_0) \geq J(y))$ $\forall\, y \in B(y_0, \delta)$.*

**Satz 13** *Sei $J : O \subset X \to \mathbb{R}$ ein Funktional auf einer offenen Menge $O$ eines normierten Vektorraums $X$, das an der Stelle $y_0 \in O$ differenzierbar sei und an der Stelle $y_0$ ein Minimum oder Maximum annehme. Dann ist $\delta J[y_0] \equiv 0$.*

<u>Beweis:</u>
Wir betrachten den Fall des Minimums; der des Maximums verläuft analog. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass für jedes $\|s \cdot \eta\| < \delta$ mit $s \in \mathbb{R}$ und $\eta \in X$

$$\begin{aligned}
& J(y_0 + s \cdot \eta) \geq J(y_0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{J(y_0 + s\cdot\eta) - J(y_0)}{s} \leq 0, & s < 0 \\ \frac{J(y_0 + s\cdot\eta) - J(y_0)}{s} \geq 0, & s > 0 \end{cases} \\
& \Rightarrow \delta J[y_0](\eta) = \lim_{s \to 0} \frac{J(y_0 + s \cdot \eta) - J(y_0)}{s} = 0 \\
& \Rightarrow \delta J[y_0] \equiv 0
\end{aligned}$$

□

**Definition 14** *Sei $J : O \subset X \to \mathbb{R}$ ein Funktional auf einer offenen Menge $O$ eines normierten Vektorraums $X$, das an der Stelle $y_0 \in O$ differenzierbar sei. Wenn $\delta J[y_0] \equiv 0$ für ein $y_0 \in O$ gilt, so heißt $y_0$* ***stationärer*** *oder* ***kritischer Punkt****.*

Die Bedingung, dass die erste Variation verschwinden soll, wollen wir nun in dem Spezialfall untersuchen, dass die erste Variation als inneres Produkt, also von der Form von Beispiel 3, geschrieben werden kann. Dazu betrachten wir zunächst das folgende

**Lemma 15** *Sei $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine Funktion $v$ mit den Eigenschaften:*

- $v \in C^2(\mathbb{R})$
- $v(x) > 0, x \in (\alpha, \beta)$
- $v(x) = 0,\ x \notin (\alpha, \beta)$

<u>Beweis</u>
Wir wählen die Funktion $v(x) := (x-\alpha)^3(\beta - x)^3 \cdot \mathbb{1}_{(\alpha,\beta)}(x)$. Dann ist offenbar $v(x) > 0$ für $x \in (\alpha, \beta)$ und $v(x) = 0$ für $x \notin (\alpha, \beta)$. Betrachten wir die Einschränkung $v_{|[\alpha,\beta]}(x) = (x-\alpha)^3(\beta-x)^3$, so liegen an $x = \alpha$ und $x = \beta$ dreifache Nullstellen vor. Dann lässt sich die zweite Ableitung stetig an diesen Stellen nach 0 fortsetzen und es gilt somit $v \in C^2(\mathbb{R})$.

$\square$

**Lemma 16** ***(Fundamentallemma der Variationsrechnung)*** *Sei $a < b$ und sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wenn $\int_a^b g(x) \cdot f(x)\, dx = 0\ \forall\ f \in C^2([a, b])$, dann ist $g \equiv 0$.*

<u>Beweis</u>
Angenommen, $\exists\ \tilde{x} \in (a, b)$ mit $g(\tilde{x}) > 0$. Dann existieren $\delta, \epsilon > 0$ mit der Eigenschaft $g(x) > \epsilon$ für $x \in B(\tilde{x}, \delta)$, da g stetig vorausgesetzt ist. Mit Lemma 15 wählen wir $v \in C^2([a, b])$ mit $v(x) = 0$ für $x \notin (\tilde{x} - \delta, \tilde{x} + \delta)$ und $v(x) > 0$ $x \in (\tilde{x} - \delta, \tilde{x} + \delta)$. Dann gilt:

$$0 = \int_a^b g(x) \cdot v(x)\, dx = \int_{\tilde{x}-\delta}^{\tilde{x}+\delta} g(x) \cdot v(x)\, dx > 0.$$

Mit diesem Widerspruch folgt $g(x) = 0\ \forall\ x \in (a, b)$ und mit der Stetigkeitsforderung an g folgt dann auch $g \equiv 0$.

$\square$

**Korollar 17** *Sei $J : O \subset X \to \mathbb{R}$ ein Funktional auf der offenen Menge $O$ eines normierten Vektorraums $X$, der $C^2([a,b])$ umfasst, das an der Stelle $y_0 \in O$ differenzierbar sei und dort ein Maximum oder Minimum annehme. Wenn $\delta J[y_0](h) = \int_a^b g(x) \cdot h(x)\, dx$ mit einer stetigen Funktion $g$ ist, dann ist $g \equiv 0$.*

□

# 5 Euler-Lagrange Gleichung

Nach diesem Abschnitt über die Differenzierbarkeit von Funktionalen können wir uns nun der Euler-Lagrange Gleichung zuwenden. Wir werden sehen, dass sich die Bedingung aus Korollar 17 als eine Differentialgleichung 2. Ordnung entpuppen wird. Bevor diese Gleichung hergeleitet wird, soll das Vorgehen durch das folgende Beispiel motiviert werden:

**Beispiel 18** *Wir geben uns die Punkte $x_0 = 0, y_0 = 0, x_1 = 1, y_1 = 1$ vor. Dann suchen wir auf der Menge der Funktionen $\{y \in C^2([0,1]) \mid y(0) = 0, y(1) = 1\}$ ein Minimum des Bogenmaßes*

$$J(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

*In Worten: Wir suchen die kürzeste zweimal stetig differenzierbare Verbindung zwischen den beiden Punkten $(0,0)$ und $(1,1)$. Intuitiv erwarten wir, dass das Ergebnis eine lineare Funktion sein sollte. Durch die beiden vorgegebenen Punkte ist diese dann eindeutig bestimmt.*

**Bemerkung 19** *Das Funktional in Beispiel 18 erfüllt folgende Eigenschaften:*

- *Der Definitionsbereich ist dadurch eingeschränkt, dass wir uns Randwerte von zweimal stetigen Funktionen vorgeben.*

- *Das Funktional ist von der Form $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx$.*

Diese Verallgemeinerungen erheben wir zur Definition folgendes Problems:

**Definition 20** *Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und seien $y_0, y_1, x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 < x_1$ gegeben. Sei $S := \{y \in C^2([x_0, x_1]) \mid y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}$ und sei $J : S \to \mathbb{R}, J(y) := \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x))\, dx$. Dann heißt die Suche nach einem lokalen Extremum von $J$* ***fixed endpoint variational problem****.*

**Bemerkung 21** *Wir benutzen neben der Menge $S$ auch die Hilfsmenge $H := \{y \in C^2([x_0, x_1]) \mid y(x_0) = 0, y(x_1) = 0\}$. Denn dann können wir jede Funktion $\hat{y} \in S$ mit $\|\hat{y} - y\| < \epsilon$ für $y \in S$ darstellen durch $\hat{y} = y + \epsilon\eta$ mit $\eta \in H, \|\eta\| < 1$. Weiter sei bemerkt, dass wir nur in Richtung von Elementen aus $H$ ableiten können, da sonst der Definitionsbereich verlassen wird.*

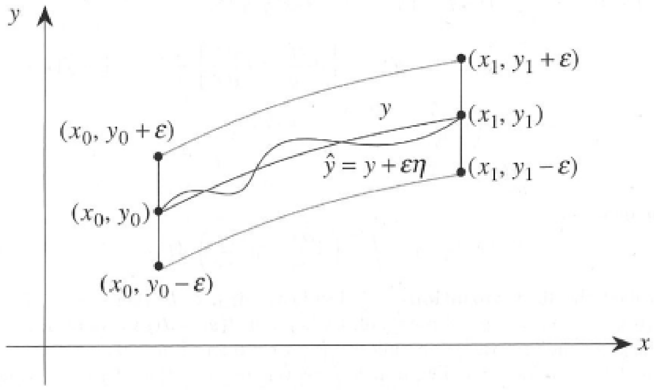


Abbildung 1: Funktionsdarstellung $\hat{y} = y + \epsilon\eta$

**Satz 22** *Sei $J$ wie in Definition 20 gegeben. Dann gilt $\forall\, y \in S, \eta \in H$:*

$$\delta J[y]\eta = \int_{x_0}^{x_1} \eta \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \, dx.$$

<u>Beweis:</u>
Sei $\hat{y} = y + \epsilon\eta$ gegeben mit $y \in S$, $\eta \in H$ $\epsilon \neq 0$. Dann können wir nach dem Satz von Taylor entwickeln:

$$f(x, \hat{y}, \hat{y}') = f(x, y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta') = f(x, y, y') + \epsilon \left( \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Dabei ist der Restterm $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ das Restglied im Taylorpolynom mit $\tau \in (0, 1)$:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon\eta(x) & \epsilon\eta'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x, y(x) + \tau\epsilon\eta(x), y'(x) + \tau\epsilon\eta'(x))}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f(x, y(x) + \tau\epsilon\eta(x), y'(x) + \tau\epsilon\eta'(x))}{\partial y \partial y'} \\ \frac{\partial^2 f(x, y(x) + \tau\epsilon\eta(x), y'(x) + \tau\epsilon\eta'(x))}{\partial y' \partial y} & \frac{\partial^2 f(x, y(x) + \tau\epsilon\eta(x), y'(x) + \tau\epsilon\eta'(x))}{\partial y'^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon\eta(x) \\ \epsilon\eta'(x) \end{pmatrix}$$

Nun gilt: $x \in [x_0, x_1]$, $|\eta(x)| \leq \|\eta\|_\infty$, $|\eta'(x)| \leq \|\eta'\|_\infty$, $|y(x) + \tau\epsilon\eta(x)| \leq \|y\|_\infty + |\epsilon|\|\eta\|_\infty$, $|y'(x) + \tau\epsilon\eta'(x)| \leq \|y'\|_\infty + |\epsilon|\|\eta'\|_\infty$. Also sind alle Auswertungen der (stetigen) zweiten partiellen Ableitungen durch das jeweilige Supremum auf dem Quader

$[x_0, x_1] \times [-\|y\|_\infty - |\epsilon|\|\eta\|_\infty, \|y\|_\infty + |\epsilon|\|\eta\|_\infty] \times [-\|y'\|_\infty - |\epsilon|\|\eta'\|_\infty, \|y'\|_\infty + |\epsilon|\|\eta'\|_\infty]$ beschränkt. Also ist die Abschätzung durch den Term $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ sogar uniform in $[x_0, x_1]$.

Dann können wir für $\epsilon \neq 0$ folgern:

$$
\begin{aligned}
&J(\hat{y}) - J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, \hat{y}, \hat{y}')\, dx - \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') + \epsilon \left( \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\, dx - \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx \\
&= \epsilon \int_{x_0}^{x_1} \left( \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&\Rightarrow \frac{J(\hat{y}) - J(y)}{\epsilon} - \int_{x_0}^{x_1} \left( \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = \frac{\mathcal{O}(\epsilon^2)}{\epsilon} \overset{\epsilon \to 0}{\to} 0.
\end{aligned}
$$

Wir berechnen nun noch mit partieller Integration:

$$
\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x_1} \left( \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{\partial f}{\partial y}\, dx + \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\eta'}_{v'} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}}_{u}\, dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{\partial f}{\partial y}\, dx + \underbrace{\eta \frac{\partial f}{\partial y'} \bigg|_{x_0}^{x_1}}_{=0} - \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}\, dx \\
&\Rightarrow \delta J[y]\eta = \int_{x_0}^{x_1} \eta \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx
\end{aligned}
$$

□

Wir erhalten also eine stetige Funktion

$$
g(x) := \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y'} y'',
$$

die die erste Variation von J als inneres Produkt beschreibt. Aus den vorangegangenen Betrachtungen folgt unmittelbar das folgende

**Korollar 23** *Sei $J$ wie in Definition 20 gegeben. Wenn $J$ an einer Stelle $\bar{y}$ ein Extremum annimmt, so erfüllt dieses $\bar{y}$ in $[x_0, x_1]$ die gewöhnliche Differentialgleichung*

$$
\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.
$$

*Diese Differentialgleichung nennt man* ***Euler-Lagrange Gleichung****.*

Wenn also Extremwerte von einem Funktional J wie in Definition 20 gesucht sind, dann kann man sich darauf zurückziehen, die entsprechende Differentialgleichung zu lösen. Diese ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiten Grades und durch die Funktion f vollständig bestimmt. Die beiden freien Parameter der Lösung werden durch die beiden Randwerte vorgegeben.

# 6 Die zweite Variation

Bislang haben wir ausschließlich die notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums diskutiert. An dieser Stelle soll daran erinnert werden, welche Eigenschaften hinreichend für ein Extremum sind:

**Erinnerung 24** *Sei $f : U \subset V \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion auf einer offenen Teilmenge $U$ eines Vektorraums $V$, die bei $x_0$ zweimal differenzierbar ist. Dann definiert die zweite Ableitung eine symmetrische Bilinearform auf $V$:*

$$f''(x_0) : V \times V \to \mathbb{R}, (v, w) \mapsto f''(x_0)(v, w).$$

**Erinnerung 25** *Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine auf einer offenen Menge eines normierten Vektorraums zweimal differenzierbare reelle Funktion. Dann ist die zweite Ableitung bei allen lokalen Minima (Maxima) eine nicht negative (nicht positive) Bilinearform: $f''(x_0)(x, x) \geq 0$ bzw. $f''(x_0)(x, x) \leq 0$ für alle $x$ in $V$. Gibt es umgekehrt einen kritischen Punkt $x_0 \in U$ und ein $\delta > 0$ mit*

$$f''(x_0)(x, x) \geq \delta\|x\|^2 \text{ bzw. } f''(x_0)(x, x) \leq -\delta\|x\|^2 \;\forall\; x \in V,$$

*dann ist der kritische Punkt ein lokales Minimum bzw. Maximum.*

Wir betrachten nun wiederum eine Taylor-Entwicklung für $f(x, \hat{y}, \hat{y}')$, wobei nun f dreimal in der zweiten und dritten sowie zweimal in der ersten Komponente stetig differenzierbar sei:

$$\begin{aligned}
&f(x, \hat{y}, \hat{y}') = f(x, y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta') \\
&= f(x, y, y') + \epsilon \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon\eta & \epsilon\eta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon\eta \\ \epsilon\eta' \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\
&= f(x, y, y') + \epsilon \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{\epsilon^2}{2} \left(\eta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} + 2\eta\eta' \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + \eta'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y'}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3).
\end{aligned}$$

Dies führt zu der folgenden

**Definition 26** *Für ein $J$ wie aus Definition 20 mit der zusätzlichen Forderung der dreimal stetigen Differenzierbarkeit von $f$ in der zweiten und dritten Komponente ist*

$$\delta^2 J(y, \eta) := \int_{x_0}^{x_1} \left(\eta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} + 2\eta\eta' \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + \eta'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y'}\right) dx$$

*die **zweite Variation von J** an einer Stelle $y$ ausgewertet in der Richtung $\eta$.*

**Satz 27** *Ein analoges Kriterium zur Erinnerung 25 lautet mit $C > 0$:*

$$\delta^2 J(y,\eta) \geq C \int_{x_0}^{x_1} \eta'^2 dx \text{ (Minimum)} \quad \text{bzw.} \quad \delta^2 J(y,\eta) \leq -C \int_{x_0}^{x_1} \eta'^2 dx \text{ (Maximum).}$$

Beweis:
Sei y ein stationärer Punkt von J und gelte die erste der beiden Ungleichungen. Man betrachte die Norm

$$\|\eta\|_1 := \|\eta\|_\infty + \|\eta'\|_\infty = \sup_{x\in[x_0,x_1]} |\eta(x)| + \sup_{x\in[x_0,x_1]} |\eta'(x)|.$$

Der Fehlerterm $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ ist wieder der Restterm in der Taylorformel, also die dritte Ableitung von f in der zweiten und dritten Komponente an einem Zwischenpunkt ausgewertet in Richtung $\begin{pmatrix}\epsilon\eta & \epsilon\eta'\end{pmatrix}$. Durch Sortieren der Ausdrücke nach $\eta'^2$ und $\eta^2$ erhält man Funktionen $\nu$ und $\rho$ mit $\nu \to 0$ und $\rho \to 0$ für $\|\eta\|_1 \to 0$ und

$$J(\hat{y}) - J(y) = \epsilon^2 \left( \frac{1}{2}\delta^2 J(y,\eta) + \underbrace{\int_{x_0}^{x_1} \nu\eta'^2 + \rho\eta^2 \, dx}_{:=R} \right).$$

Dann existiert eine Funktion q mit $q \to 0$ für $\|\eta\|_1 \to 0$ und

$$|R| \leq q \int_{x_0}^{x_1} \eta'^2 + \eta^2 \, dx.$$

Nun folgt aus der Schwarz'schen Ungleichung:

$$\eta^2(x) = \left(\int_{x_0}^{x} 1 \cdot \eta'(z)\, dz\right)^2 \leq \int_{x_0}^{x} 1^2 \, dz \cdot \int_{x_0}^{x} \eta'^2(z)\, dz \leq (x - x_0) \int_{x_0}^{x_1} \eta'^2 \, dx$$
$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_1} \eta^2 \, dx \leq \frac{(x_1-x_0)^2}{2} \int_{x_0}^{x_1} \eta'^2 \, dx$$
$$\Rightarrow |R| \leq q \left(1 + \frac{(x_1-x_0)^2}{2}\right) \int_{x_0}^{x_1} \eta'^2 \, dx.$$

Für $\|\eta\|_1$ hinreichend klein ist dann $q\left(1 + \frac{(x_1-x_0)^2}{2}\right) < \frac{C}{4}$. Dann folgt also für entsprechende $\hat{y}$ mit der Bedingung $\delta^2 J(y,\eta) \geq C \int_{x_0}^{x_1} \eta'^2 dx$:

$$J(\hat{y}) - J(y) \geq \epsilon^2 \left(\frac{C}{2}\int_{x_0}^{x_1} \eta'^2 \, dx - \frac{C}{4}\int_{x_0}^{x_1} \eta'^2 \, dx\right) = \frac{C}{4}\int_{x_0}^{x_1} \eta'^2 \, dx \geq 0.$$

Also liegt hier tatsächlich ein Minumum bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$ vor. Analoge Argumentation für ein Maximum.

□

# 7 Beispiele

In diesem abschließenden Abschnitt wollen wir die gewonnene Theorie noch auf zwei verschiedene Beispiele anwenden. Für das erste Beispiel greifen wir auf Beispiel 18 zurück.

**Beispiel 28** *Das einzige lokale Minimum des Funktionals in Beispiel 18 ist die Gerade* $y(x) = x, x \in [0,1]$.

Beweis:
Wir haben definiert:

$$J(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2} dx, \qquad f(x,y,y') = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Offenbar ist f eine glatte Funktion. Dann erhalten wir aus der Euler-Lagrange Gleichung die Bedingung:

$$0 = \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - 0 = \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$
$$\Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \equiv c \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{y'^2}{1+y'^2} = \tilde{c} \in \mathbb{R} \Rightarrow y'^2 \equiv \hat{c} \in \mathbb{R} \overset{y' \, stetig}{\Rightarrow} y' \equiv \bar{c} \in \mathbb{R}.$$

Also ist die Lösung linear, daher muss sie wegen der Randpunkte $y(0) = 0, y(1) = 1$ von der Form $y(x) = x, x \in [0,1]$ sein. Dies ist der einzige Kandidat für ein lokales Extremum. Wir rechnen nun noch die hinreichende Bedingung nach. Für $\eta \in C^2([0,1])$ erhalten wir:

$$\delta^2 J(y,\eta) = \int_0^1 \left( \underbrace{\eta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}}_{=0} + \underbrace{2\eta\eta' \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}}_{=0} + \eta'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y'} \right) dx = \int_0^1 \eta'^2 \frac{\partial}{\partial y'} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx$$
$$= \int_0^1 \eta'^2 \frac{\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2} dx = \int_0^1 \eta'^2 \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}^3} dx = \int_0^1 \eta'^2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+1}^3}}_{:=C} dx$$
$$= C \int_0^1 \eta'^2 dx = C\|\eta\|_E^2.$$

Hierbei verwenden wir das angegebene hinreichende Kriterium und die Behauptung ist gezeigt.

$\square$

Als zweites Beispiel soll der eindimensionale Spezialfall des Funktionals, das bei der Laplace-Gleichung auftaucht, mit den erarbeiteten Methoden analysiert werden.

**Definition 29** *Sei h eine Funktion auf einem offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und sei g eine Funktion auf dem Rand $\partial\Omega$. Dann heißt die Aufgabe, eine Funktion y mit den Eigenschaften $-\Delta y = h$ und $y_{|\partial\Omega} = g$ zu finden,* ***Dirichletproblem****.*

**Beispiel 30** *Im Falle n=1 betrachten wir Intervalle $I := (x_0, x_1) \subset \mathbb{R}$ für das Problem in Definition 29 mit zweimal stetig differenzierbaren h. Der Rand von I besteht dann nur aus den Punkten $x_0$ und $x_1$, sodass wir uns in de facto Randpunkte $g(x_0)$ und $g(x_1)$ vorgeben. Das eindeutige lokale Minimum des folgenden Funktionals ist die Lösung des entsprechenden Dirichletproblems:*

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{2} y'(x)^2 - h(x) \cdot y(x)\, dx, \qquad f(x, y, y') = \frac{1}{2} y'^2 - h \cdot y.$$

*für $y \in \{y \in C^2([x_0, x_1]) \mid y(x_0) = g(x_0), y(x_1) = g(x_1)\}$.*

<u>Beweis:</u>
$f$ ist offenbar hinreichend stetig differenzierbar. Dann erhalten wir mit der Euler-Lagrange Gleichung die Bedingung:

$$0 = \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx} y'(x) + h(x) = y''(x) + h(x) \Leftrightarrow -y''(x) = h(x).$$

Weil h stetig ist, existiert eine Funktion $H_2$ mit $H_2''(x) = -h(x)$. Dann folgt mit dem Hauptsatz:

$$y(x) = H_2(x) + ax + b.$$

Dann müssen die beiden Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ so gewählt werden, dass $y(x_0) = g(x_0)$ und $y(x_1) = g(x_1)$ gilt und somit ist gezeigt, dass die Euler-Lagrange Gleichung lösbar ist. Für die zweite Variation ergibt sich:

$$\delta^2 J(y, \eta) = \int_{x_0}^{x_1} \left( \eta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} + 2\eta\eta' \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + \eta'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y'} \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} \eta'^2\, dx = \|\eta\|_E^2.$$

Also ist der gewählte Punkt tatsächlich das eindeutige lokale Minimum und erfüllt
$-\Delta y = -y'' = h$.

$\square$

# 8 Literatur


- Martin Schmidt: 'Analysis', Mannheim, 2010 / 2011

- Martin Schmidt: 'Differentialgleichungen', Mannheim 2012

- Eberhard Klingbeil: 'Variationsrechnung', Mannheim; Wien; Zürich: Bibliographisches Institut, 1977

- Bruce van Brunt: 'The Calculus of Variations', New York: Springer, 2006