Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsmathematik
Lehrstuhl für Mathematik III
D - 68131 Mannheim
FSS 2012

Flussäquivalenzen

Silvia Heitmann
Matr.- Nr.: 1275256

16. Mai 2012

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Phasendiagramme können ganz verschiedene Formen annehmen. Ob es sich um einen Sattel oder einen Knoten, einen Strudel oder einen Wirbel handelt und ob das Phasendiagramm stabil oder instabil ist, hängt von der Matrix ab, die das Diagramm erzeugt. Nun stellt sich die Frage, was an diesen Phasenporträts charakteristisch ist. Ist es möglich durch geeignete nichtlineare Koordinatentransformation ein Phasendiagramm in ein anderes zu überführen. Kann beispielsweise ein Sattel in einen Knoten oder ein stabiler Knoten in eine instabile Spirale verwandelt werden?

Um diese Frage zu klären werden wir zunächst definieren wann zwei Flüsse äquivalent sind, um uns anschließend mit den Eigenschaften der Äquivalenzklassen auseinandersetzen zu können.

Wir werden sehen, dass zwar nicht alle Phasenporträts ineinander überführbar sind, dass es aber wohl möglich ist, zum Beispiel einen stabilen Knoten in einen stabilen Strudel zu transformieren.

Silvia Heitmann
Mannheim, den 16. Mai 2012

2. Definitionen von Flussäquivalenzen

2.1. Definition: Topologische Flussäquivalenz

Definition 1. *((Topologische) Flussäquivalenz) Seien M und N metrische Räume, ϕ ein Fluss auf M mit Definitionsbereich Ω_ϕ und ψ ein Fluss auf N mit Definitionsbereich Ω_ψ.*
Dann heißen ϕ und ψ (topologisch) äquivalent, wenn es einen orientierungserhaltenden Automorphismus $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und einen Homöomorphismus $h : M \to N$ gibt, so dass gilt

$$h(\phi(t,x)) = \psi(\alpha(t), h(x)) \quad \forall (t,x) \in \Omega_\phi.$$

Jedes Paar (α, h) mit dieser Eigenschaft heißt (topologische) Flussäquivalenz.

Folglich ist (α, h) genau dann eine topologische Flussäquivalenz, falls das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \times M \supset \Omega_\varphi \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha \times h"'] & M \arrow[d, "h"] \\
\mathbb{R} \times N \supset \Omega_\psi \arrow[r, "\psi"] & N
\end{tikzcd}$$

wobei $\alpha \times h$ durch

$$\alpha \times h : \Omega_\phi \to \mathbb{R} \times N, (t,x) \to (\alpha(t), h(x))$$

definiert ist.

2.2. Definition: Lineare Flussäquivalenz

Definition 2. *(Lineare Flussäquivalenz) Sind M und N Banachräume, ist (α, h) eine Flussäquivalenz zwischen den Flüssen ϕ auf M und ψ auf N und ist h linear, so heißen ϕ und ψ linear äquivalent und (α, h) ist eine lineare Flussäquivalenz.*

2.3. Definition: Stetig differenzierbare Flussäquivalenz

Definition 3. *(Stetig differenzierbare Flussäquivalenz) Sind Ω_ϕ und Ω_ψ offene Teilmengen vom $\mathbb{R}^n$ und ist h stetig differentierbar mit stetig differtierbarer Umkehrabbildung, so heißen ϕ und ψ stetig differzierbar äquivalent und (α, h) ist eine C^1-Flussäquivalenz.*

Bemerkung: Ein orientierungserhaltender Auttomorphismus von $\mathbb{R}$ hat die Form

$$\alpha(t) = \alpha * t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

mit einer eindeutig bestimmten positiven Zahl α. Also wird durch jedes $\alpha > 0$ ein orientierungserhaltender Automorphismus definiert. Im Folgenden wird der Automorphismus α stets mit der durch ihn bestimmten positiven Zahl identifiziert.

Offenbar stellen die (topologische) Flussäquivalenz bzw. die C^1-Flussäquivalenz bzw. die lineare Flussäquivalenz jeweils eine Äquivalenzrelation dar.
Außerdem bildet eine Flussäquivalenz h die Orbits von ϕ auf die Orbits vo ψ unter Erhaltung der Orientierung ab.
Weil jede linear stetige Abbildung auch stetig differenzierbar ist, ist jede lineare Flussäquivalenz auch eine C^1-Flussäquivalenz.
Es bleibt die Frage, ob sich Lineare Flussäquivalenzen vielleicht in C^1-Flussäquivalenz überführen lassen. Das dies möglich ist, wird im Folgenden gezeigt werden.

3. Eigenschaften der Flussäquivalenzen

Als nächstes werden wir die linearen Flüsse klassifizieren, also die Äquivalenzklassen der linearen Flussäquivalenzen bestimmen. Im Folgenden bezeichnet E stets einen normierten Vektorraum.

3.1. Satz: Lineare Flussäquivalenz und Eigenwerte

Satz 4. *Es seien A, B $\in \mathcal{L}(E)$. Dann sind e^{tA} und e^{tB} genau dann linear flussäquivalent, wenn A und αB die gleiche Jordannormalform haben.*

Beweis. Zunächst werden wir zeigen, dass A $\in \mathcal{L}(E)$ und B $\in \mathcal{GL}(E)$ gilt

$$e^{BAB^{-1}} = Be^{A}B^{-1}.$$

Mit X(t) := $e^{BAB^{-1}}$ und Y(t) := $Be^{A}B^{-1}$ gilt X(0) = Y(0) = $\mathbb{1}$ und

$$\dot{X}(t) = BAB^{-1}X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

sowie

$$\dot{Y}(t) = BAe^{tA}B^{-1} = BAB^{-1}Be^{tA}B^{-1} = BAB^{-1}Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

woraus X = Y folgt.
Ist (α, h) eine lineare Flussäquivalenz zwischen e^{tA} und e^{tB}, so gilt

$$he^{tA} = e^{\alpha tB}h \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Daraus und aus $e^{BAB^{-1}} = Be^{A}B^{-1}$ folgt

$$e^{tA} = h^{-1}e^{\alpha tB}h = e^{th^{-1}(\alpha B)h} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Da der Generator des Flusses eindeutig bestimmt ist, folgt $A = h^{-1}(\alpha B)h$ mit $\alpha > 0$ und h $\in$ GL(E), und somit, wegen $det(h^{-1}(\alpha B)h - \lambda) = det(\alpha B - \lambda)$,dann $\sigma(A) = \sigma(\alpha B)$. Also haben A und αB die gleiche Jordansche Normalform.

Haben umgekehrt A und αB für ein α > 0 die gleiche Jordansche Normalform, so existiert wegen der Jordanschen Normalform ein h ∈ GL(E) mit $A = h^{-1}(\alpha B)h$. Aus

$$e^{tA} = e^{th^{-1}(\alpha B)h} = h^{-1}e^{\alpha t B}h \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

folgt dann die lineare Flussäquivalenz von e^{tA} und e^{tB}. □

Der nächste Satz zeigt, dass die differtierbaren Flüsse genauso klassifiziert werden können.

3.2. Satz: Lineare und C^1- Flussäquivalenzen

Satz 5. *Es seien A, B ∈ $\mathcal{L}(E)$. Dann sind e^{tA} und e^{tB} genau dann C^1- flussäquivalent, wenn sie linear flussäquivalent sind.*

Beweis. Sei (α, h) eine C^1-Flussäquivalenz zwischen e^{tA} und e^{tB}. Dann führt der Diffeomorphismus h ∈ C^1(E, E) den kritischen Punkt x = 0 des Flusses e^{tA} in einen kritischen Punkt y des Flusses e^{tB} über also in ein y ∈ E mit $e^{sB}y = y$ für alle s ∈ $\mathbb{R}$. Sei T : E → E die Translation x → x - y. Dann stellt (α, T ∘ h) eine Flussäquivalenz zwischen e^{tA} und e^{tB} dar, wegen

$$\begin{aligned} T \circ h \circ e^{tA}x &= h \circ e^{tA}x - y = e^{\alpha t B}h(x) - y \\ &= e^{\alpha t B}h(x) - e^{\alpha t B}y = e^{\alpha t B}(T \circ h)(x) \quad \forall x \in E, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Außerdem ist $T \circ h(0)$ = 0 und C := $(T \circ h)\prime(0)$ ∈ $\mathcal{GL}(E)$. Durch Differenzieren der Beziehung

$$T \circ h \circ e^{tA}x = e^{\alpha t B}(T \circ h)(x)$$

in x = 0 folgt auf Grund der Stetigkeit von $e^{\alpha t B}$

$$Ce^{tA} = e^{\alpha t B}C \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt, dass (α, C) eine lineare Flussäquivalenz zwischen e^{tA} und e^{tB} ist.
Gilt umgekehrt, dass (α, h) eine lineare Flussäquivalenz ist, so ist sowohl h als lineare Abbildung stetig differenzierbar und als auch die Umkehrabbildung von h. Daraus folgt direkt, dass (α, h) eine C^1-Flussäquivalenz ist. □

Betrachten wir als nächstes die topologische Klassifizierung linearer Flüsse. Dafür benötigen wir das folgende Lemma.

3.3. Lemma: Existenz einer Hilbertnorm

Lemma 6. *Für A ∈ $\mathcal{L}(E)$ gelte Re σ(A) < 0 und ϕ sei der von A erzeugte lineare Fluss auf E, also $\phi^t = e^{tA}$ für t ∈ $\mathbb{R}$. Dann existiert eine Hibertnorm ‖ . ‖ auf E, so dass mit*

$\mathbb{S}$:= *{x ∈ E | ‖ x ‖ = 1 } gilt:*

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S} \to E\backslash\{0\}, (t, x) \to \phi(t, x)$$

ist ein Homöomorphismus.

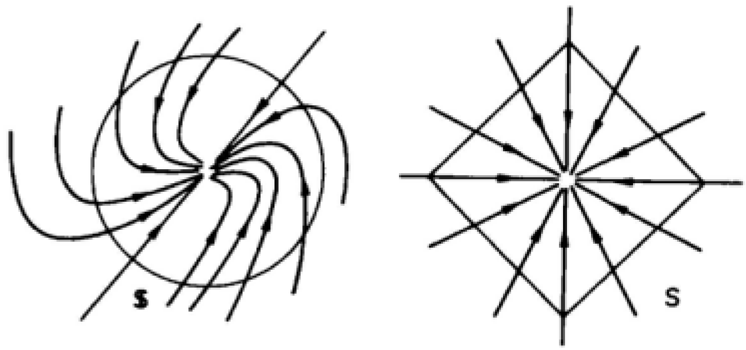
Beweis. Wähle α > 0 mit Re σ(A) < -α < 0. Dann existiert eine Hilbertnorm ‖ . ‖ auf E mit

$$\|e^{tA}x\| \leq e^{-\alpha t}\|x\| \quad \forall t \geq 0.$$

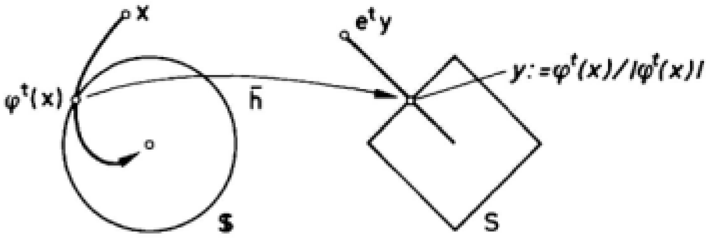
Weil $e^{-\alpha t} < 1$ und $\|x\| \leq 0$ gilt, da x ∈ $\mathbb{S}$, folgt, dass ϕ stetig und injektiv ist. Für y ∈ E \{0} gibt es wegen des Zwischenwertsatzes und wegen der Grenzwerte

$$lim_{t\to-\infty}e^{-\alpha t}\|y\| = \infty, \quad lim_{t\to\infty}e^{-\alpha t}\|y\| = 0$$

ein t ∈ $\mathbb{R}$ mit $\|\phi(-t, y)\|$ = 1. Also ist ϕ auch surjektiv und damit auch bijektiv. Aus t ≤ 0 folgt für x ∈ $\mathbb{S}$, dass gilt $t \geq \frac{1}{\alpha}ln\|\phi(t, x)\|$, und aus t ≥ 0 folgt $t \leq \frac{1}{\alpha}ln\|\phi(t, x)\|$. Deshalb gilt $|t| \leq \frac{1}{\alpha}|ln\|\phi(t, x)\||$. Dann ist das Urbild einer kompakten Teilmenge von E \{0} unter ϕ beschränkt und kompakt. Weil jeder Punkt in E \{0} eine in E \{0} kompakte Umgebung besitzt und das Bild von kompakten Mengen unter ϕ wieder kompakt ist, ist die Umkehrabbildung stetig. □



Das eben bewiesene Lemma besagt goemetrisch, dass für die Einheitssphäre $\mathbb{S}$ einer geeigneten Hilbertnorm gilt, dass jeder nichtkritische Orbit $\mathbb{S}$ "transversal" schneidet. Im folgenden Lemma werden wir zeigen, dass die Orbits einer Kontraktion "geradegebogen" werden können.



3.4. Lemma: Flussäquivalenz zwischen e^{tA} und $e^{-t}\mathbb{1}_E$

Lemma 7. *Für $A \in \mathcal{L}(E)$ gelte: Re $\sigma(A) < 0$. Dann ist e^{tA} flussäuqivalent zu $e^{-t}\mathbb{1}_E$ mit einer Flussäquivalenz der Form (1, h).*

Beweis. Nach Lemma 6 existiert eine Hilbertnorm $\|.\|$ auf E, sodass für die Einheitsshpäre $\mathbb{S}$ gilt, dass

$$\mathbb{R} \times \mathbb{S} \to E\backslash\{0\}, \quad (t, x) \to e^{tA}x =: \phi^t(x)$$

ein Homöomorphismus ist. Sei S die Einheitssphäre bezüglich der ursprünglichen Norm $\|.\|_E$ von E. Weiter sei h : E → E eine Bijektion mit h(0) := 0 und

$$h(x) := e^t \frac{\phi^t(x)}{|\phi^t(x)|}, \quad x \in E\backslash\{0\},$$

wobei t die nach Lemma 6 eindeutig bestimmte reelle Zahl ist mit ϕ^t(x) ∈ $\mathbb{S}$. Da die Abbildung

$$\bar{h} : \mathbb{S} \to S, y \to \frac{y}{|y|}$$

ein Homöomorphismus ist und da h(x) = $e^t\bar{h} \circ \phi^t(x)$ gilt, folgt aus Lemma 6, dass h ein Homöomorphismus von E \{0} auf sich ist. Um zu zeigen, dass h stetig ist in 0 ∈ E, sei V eine Umgebung von 0. Dann existiert ein $t_0 > 0$ mit $e^t S \subset V$ für alle t ≥ t_0. Es sei

$$U := \{x \in E| \|x\| < \frac{1}{\|e^{t_0 A}\|}\}.$$

Dann gilt für x ∈ U

$$\|\phi^{-t_0}(x)\| = \|e^{-t_0 A}x\| \leq \|e^{-t_0 A}\| \|x\| < 1.$$

Da aus

$$\|\phi^{-t}(y)\| \geq e^{\alpha t}\|y\| \quad \forall t \geq 0$$

folgt, dass für t ≥ 0 die Ungleichung

$$\|\phi^{t-t_0}(x)\| = \|\phi^t(\phi^{-t_0}(x))\| \leq \|\phi^{-t_0}(x)\| < e^{-\alpha t} \leq 1$$

mit einem geeigneten $\alpha > 0$ gilt, folgt, dass für eindeutig bestimmte t = t(x) mit ϕ^t(x) ∈ $\mathbb{S}$

gilt: t < -t_0. Also folgt aus der Definition von h die Beziehung h(U) $\subset$ V. Somit ist h stetig in 0.
Analog zeigt man, dass h^{-1} in 0 stetig ist.
Folglich ist h ein Homöomorphismus von E auf sich.
Damit (1, h) eine Flussäquivalenz ist, muss gezeigt werden, dass

$$h \circ \phi^t(x) = e^{-t}h(x) \quad \forall x \in E, \forall t \in \mathbb{R}$$

gilt. Für x = 0 ist dies sicher richtig. Für x $\neq$ 0 ist x = $\phi^s(y)$ für ein geeignetes Paar (s, y) $\in \mathbb{R} \times \mathbb{S}$. Hieraus folgt aufgrund der Definition von h

$$\begin{aligned} h \circ \phi^t(x) &= h \circ \phi^t \circ \phi^s(y) = h \circ \phi^{t+s}(y) \\ &= e^{-(t+s)}\frac{y}{|y|} = e^{-t}(e^{-s}\frac{y}{|y|}) \\ &= e^{-t}(e^{-s}\frac{\phi^{-s}(x)}{|\phi^{-s}(x)|}) = e^{-t}h(x) \end{aligned}$$

für alle t $\in \mathbb{R}$. $\square$

Nach diesen Vorbereitungen kann der zentrale Klassifikationssatz für hyperbolische Flüsse bewiesen werden. Dazu setzen wir für A $\in \mathcal{L}(E)$

$$m\_(A) = \sum_{\lambda \in \sigma_s(A)} m(\lambda) \qquad m_+(A) = \sum_{\lambda \in \sigma_u(A)} m(\lambda).$$

3.5. Theorem: Äquivalenz stabiler Flüsse

Theorem 8. *Zwei hyperbolische lineare Flüsse e^{tA} und e^{tB} sind genau dann flussäquivalent, wenn $m_\pm(A) = m_\pm(B)$ gilt. Dann sind die Dimensionen der stabilen und instabilen Untervektorräume die einzigen Invarianten der Flussäquivalenz für hyperbolische lineare Flüsse.*

Beweis. "$\Leftarrow$" Es existiert eine direkte Summenzerlegung

$$E = E_s \oplus E_u, \quad e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u}$$

mit dim(E_s) = m_(A), wobei e^{tA_s} eine Kontraktion und e^{tA_u} eine Expansion sein sollen. Dann existiert wegen des vorangegangenen Lemmas eine Flussäquivalenz (1, h_s) zwischen e^{tA_s} und $e^{-t}\mathbb{1}_{E_s}$. Analog erhalten wir wegen e^{tA_u} = $e^{-t(-A_u)}$ eine Flussäquivalenz (1, h_u) zwischen e^{tA_u} und $e^{-t}\mathbb{1}_{E_u}$. Nun verifiziert man unmittelbar, dass (1, $h_s \oplus h_u$) mit

$$h_s \oplus h_u : E_s \oplus E_u \to E_s \oplus E_u, \quad x + y \to h_s(x) + h_u(y)$$

eine Flussäquivalenz zwischen $e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u}$ und $e^{-t}\mathbb{1}_{E_s} \oplus e^{t}\mathbb{1}_{E_u}$ ist.

Analog existiert eine direkte Summenzerlegung

$$F = F_s \oplus F_u,\ e^{tB} = e^{tB_s} \oplus e^{tB_u}$$

und eine Flussäquivalenz (1, $\bar{h}_s \oplus \bar{h}_u$) zwischen e^{tB} und $e^{-t}\mathbb{1}_{F_s} \oplus e^t\mathbb{1}_{F_u}$. Wegen dim E_s = dim F_s existieren ein Isomorphismus $T_s : E_s \to F_s$ und ein Isomorphismus $T_u : E_u \to F_u$. Dann ist (1, $T_s \oplus T_u$) eine Flussäquivalenz zwischen den Flüssen $e^{-t}\mathbb{1}_{E_s} \oplus e^t\mathbb{1}_{E_u}$ und $e^{-t}\mathbb{1}_{F_s} \oplus e^t\mathbb{1}_{F_u}$. Also folgt die Flussäquivalenz von e^{tA} und e^{tB} aus der Transitivität.

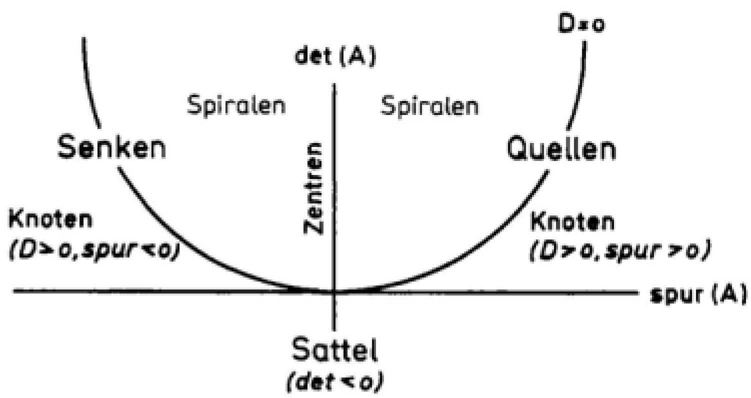
"$\Rightarrow$" Ist (α, h) eine Flussäquivalenz zwischen e^{tA} und e^{tB}, so folgt aus

$$h(e^{tA}x) = e^{\alpha tB}h(x) \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times E,$$

dass $h(E_s) \subset F_s$ und somit, aus Symmetriegründen, auch $h^{-1}(F_s) \subset E_s$ gilt (weil der Homöomorphismus h die Konvergenz gegen 0 für t $\to \infty$ enthält). Also bildet h den Vektorraum E_s homöomorph auf den Vektorraum F_s ab. Nun folgt aus dem Gebietsinvarianzsatz der Topologie (z.B. Dugundji), der besagt, dass eine stetige injektive Funktion vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$ offene Mengen auf offene Mengen abbildet und ein Homöomorphismus ist, dass dim(F_s) = dim(E_s) ist. Also erhalten wir $m_\pm(A) = m_\pm(B)$ aus der Eindeutigkeit der Zerlegung. □

4. Fazit

Aus folgenden Diagramm kann für zweidimensionale lineare Flüsse aus der Kombination von Spur und Determinante der Matrix auf die Art des Phasendiagramms geschlossen werden:



Aus den vorangegangenen Betrachtungen der Flussäquivalenzen folgt, dass alle Phasendiagramme in einem der drei Bereiche des obigen Diagramms in einer Äquivalenzklasse sind und ineinander überführt werden können.

A. Literaturverzeichnis

- Prof. Martin Schmidt: 'Analysis I/II; Mannheim, 2010/2011
- Prof. Martin Schmidt: 'Differentialgleichungen'; Mannheim, 2012
- Prof. Martin Schmidt: 'Dynamische Systeme'; Mannheim, 2011
- Herbert Amann: 'Gewöhnliche Differentialgleichungen'; 2. Auflage; New York; Berlin; Walter de Gruyter; 1995