Hyperbolische lineare Flüsse

Carsten Kuhnen

03.05.2012

1 Einführung

Im Folgenden sei E (also (E, | . |)) ein beliebiger $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{K}}(E) = m < \infty$ und sei A $\in \mathcal{L}$(E).
Wir bezeichnen als Kurzform e^{tA} als den von A erzeugten linearen Fluss auf E, statt präziser

$$\varphi : \mathbb{R} \times E \to E, (t, x) \longmapsto e^{tA}x.$$

Der Nullpunkt von E ist natürlich ein kritischer Punkt von e^{tA}, den wir nun näher betrachten wollen.

2 Quelle und Senke

Zur Vereinfachung schreiben wir für jede nicht leere Menge M $\subset \mathbb{C}$ und $\beta \in \mathbb{R}$: $\Re$ M $<$ β für $\Re$(m) $<$ β $\forall$ m $\in$ M.

Definition 1.

Defintion	*Der Nullpunkt von E heißt* ***Senke****, wenn für jedes* $x \in E - \{0\}$ *gilt:* $lim_{t\to\infty} e^{tA}x$=0.	*Der Nullpunkt von E heißt* ***Quelle****,wenn für jedes* $x \in E - \{0\}$ *gilt:* $lim_{t\to\infty}\|e^{tA}x\|$=$\infty$.
äquivalente Bedingung	$\Re\ \sigma(A) < 0$	$\Re\ \sigma(A) > 0$
Bezeichung des linearen Flusses	Kontraktion	Expansion

3 Lemma

Wir wollen mit Hilfe des folgenden Lemma zeigen, dass bei einer Kontraktion (Expansion) jede Flusslinie

$$\varphi_x(t) = e^{tA}x$$

für t$\to$ ∞ mit x$\neq$0 exponentiell gegen 0 (bzw. "∞") konvergiert.
Eine Hilbertnorm ||.|| ist eine Norm, die aus einem Skalarprodukt abgeleitet wird, d.h. für ein Skalarprodukt (. | .) auf E ist ||x||^2=(x|x).

Lemma 2. *Für* $A \in \mathcal{L}(E)$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gelte* $\Re\ \sigma(A) < \alpha$. *Dann existiert eine Hilbertnorm* $||.||$ *auf E mit* $||e^{tA}|| \leq e^{\alpha t}\ \forall t \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Zunächst betrachten wir den Fall, dass $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist.
Nun wissen wir, dass A bezüglich einer geeigneten Basis die Form A=D+N hat, wobei

$$D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_2, ..., \lambda_k, ..., \lambda_k) = diag(\mu_1, ..., \mu_m)$$

und N^m=0 (also D eine Diagonal- und N eine nilpotente Matrix ist), sowie DN=ND.
Außerdem können wir die Basis $\{a_1, ..., a_m\}$ von E so wählen, dass gilt:

$$Na_j = a_{j-1} \ oder \ Null.$$

Ersetzen wir a_j duch $b_j := \delta^j a_j$ mit $\delta>0$, so bleibt D unverändert. Für N gilt nun:

$$Nb_j = \delta b_{j-1} \ oder \ Null.$$

Also hat die Matrix N bezüglich der Basis $\{b_1, ..., b_m\}$ höchstens in der oberen Nebendiagonalen von Null verschiedene Einträge, und zwar die Zahlen δ. Wenn wir nun die zu dieser Basis gehörige euklidische Norm verwenden, so folgt (für ein entsprechend gewähltes δ):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ eine \ Hilbertnorm \ ||.|| \ auf \ E \ mit \ ||N|| \leq \varepsilon.$$

Da D=diag$(\mu_1, ..., \mu_m)$ eine Diagonalmatrix ist gilt:

$$e^{tD} = diag(e^{t\mu_1}, ..., e^{t\mu_m}).$$

Für die folgende Gleichung müssen wir zunächst die Operatornorm, die durch die Hilbertnorm definiert wird, näher betrachten.
$||D|| = \sup\{||Dx|| \mid x \in E, ||x|| \leq 1\}$
Für jedes $x \in E$ mit $||x|| \leq 1$ existieren $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$ mit $x = \alpha_1 b_1 + ... + \alpha_m b_m$.
$||Dx||^2 = ||D(\alpha_1 b_1 + ... + \alpha_m b_m)||^2 = ||\mu_1\alpha_1 b_1 + ... + \mu_m\alpha_m b_m||^2$
$= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \mu_i\mu_j\alpha_i\alpha_j < b_j, b_i >= \mu_1^2\alpha_1^2 + ... + \mu_m^2\alpha_m^2$
$\leq (\alpha_1^2 + ... + \alpha_m^2) max_{1\leq j\leq m}\mu_j^2 = ||x||^2 max_{1\leq j\leq m}\mu_j^2 \leq max_{1\leq j\leq m}\mu_j^2$
Daraus folgt nun

$$||e^{tD}|| = max_{1\leq j\leq m}|e^{t\mu_j}| = max_{1\leq j\leq m}e^{t\Re(\mu_j)}.$$

Wenn wir nun ε so klein wählen, dass $\Re(\lambda) \leq \alpha\text{-}\varepsilon \ \forall \ \lambda \in \sigma(A)$ ist, können wir weiter abschätzen mit

$$||e^{tD}|| \leq e^{t(\alpha-\varepsilon)}.$$

Betrachten wir nun wieder den linearen Fluss, so ergeben sich folgende Abschätzungen:

$$\begin{aligned}
||\mathrm{e}^{tA}|| &= ||\mathrm{e}^{t(D+N)}|| \\
&\leq ||e^{tD}||\ ||e^{tN}|| \\
&\leq e^{t(\alpha-\varepsilon)}e^{t||N||} \\
&\leq e^{t(\alpha-\varepsilon)}e^{t\varepsilon} \\
&= \mathrm{e}^{t\alpha} \qquad \textit{für} \quad t > 0.
\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gezeigt.
Um die Aussage für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ zu zeigen, übertragen wir das Problem auf $\mathbb{C}$, d.h. wir komplexifizieren die Ausgangssituation und wenden dann die obigen Resulate an. □

Bemerkungen:
Für $A \in \mathcal{L}(E)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelte...

$\Re\ \sigma(A) < \alpha.$	$\Re\ \sigma(A) > \alpha.$
Lemma *Dann existiert eine Hilbertnorm $\|\| \cdot \|\|$ auf E mit* $\|\|\mathrm{e}^{tA}\|\| \leq e^{\alpha t} \quad \forall\ t \in \mathbb{R}_+.$	(b) *Dann existiert eine Hilbertnorm $\|\| \cdot \|\|$ auf E mit* $\|\|\mathrm{e}^{tA}\|\| \geq e^{\alpha t} \quad \forall\ t \in \mathbb{R}_+.$
(a) *Es existiert eine Konstante $\beta \geq 0$ mit* $\|\mathrm{e}^{tA}\| \leq \beta e^{\alpha t} \quad \forall\ t \in \mathbb{R}_+.$	(c) *Es existiert eine Konstante $\beta > 0$ mit* $\|\mathrm{e}^{tA}\| \geq \beta e^{\alpha t} \quad \forall\ t \in \mathbb{R}_+.$

Diese Aussagen folgen aus dem vorangegangenen Lemma, der Äquivalenz der Normen (da E ein endlich dimensionaler K-Vektorraum ist) und $\sigma(-A) = -\sigma(A)$.

4 Theorem

Theorem 3. *Es sei $A \in \mathcal{L}(E)$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Der Nullpunkt ist eine Senke.*

(ii) *Es existieren Konstanten $\alpha > 0$ und $\beta \geq 0$ mit*

$$|e^{tA}x| \leq \beta e^{-\alpha t}|x| \quad \forall\ t \in \mathbb{R}_+, x \in E.$$

(iii) *Es existieren eine Hilbertnorm $||.||$ auf E und eine Konstante $\alpha > 0$ mit*

$$||e^{tA}x|| \leq e^{-\alpha t}||x|| \quad \forall\ t \in \mathbb{R}_+, x \in E.$$

Ebenso sind äquivalent:

(i') *Der Nullpunkt ist eine Quelle.*

(ii') *Es existieren Konstanten* $\alpha > 0$ *und* $\beta > 0$ *mit*

$$|e^{tA}x| \geq \beta e^{\alpha t}|x| \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+, x \in E.$$

(iii') *Es existieren eine Hilbertnorm* $||.||$ *auf* E *und eine Konstante* $\alpha > 0$ *mit*

$$||e^{tA}x|| \geq e^{\alpha t}||x|| \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+, x \in E.$$

Beweis. (i) Der Nullpunkt ist eine Senke.
$\Leftrightarrow \Re\ \sigma(A) < 0$
$\Leftrightarrow \exists\ \tilde{\alpha} < 0 : \Re\ \sigma(A) < \tilde{\alpha}$
$\Rightarrow$ (mit Bem. (a), setzte $\alpha = -\tilde{\alpha}$) (ii) $|e^{tA}x| \leq \beta e^{-\alpha t}|x| \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+, x \in E$
$\Rightarrow lim_{t\to\infty} e^{tA}x = 0$
$\Leftrightarrow$(i) Der Nullpunkt ist eine Senke.
$\Leftrightarrow \Re\ \sigma(A) < 0$
$\Leftrightarrow \exists\ \tilde{\alpha} < 0 : \Re\ \sigma(A) < \tilde{\alpha}$
$\Rightarrow$(mit Lemma, setzte $\alpha = -\tilde{\alpha}$) (iii) $||\mathrm{e}^{tA}x|| \leq e^{-\alpha t}||x|| \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+, x \in E$
$\Rightarrow lim_{t\to\infty} e^{tA}x = 0$
$\Leftrightarrow$(i) Der Nullpunkt ist eine Senke.
Der Beweis zum zweiten Teil des Theorems verläuft analog, hier verwendet man die Bemerkungen (b) und (c). □

5 Hyperbolizität

Zunächst zerlegen wir das Spektrum σ(A) disjunkt in drei Mengen:

$$\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_n(A) \cup \sigma_u(A)$$

- Das stabile Spektrum

$$\sigma_s(A) := \{\lambda \in \sigma(A) | \Re(\lambda) < 0\}$$

- Das neutrale Spektrum

$$\sigma_n(A) := \{\lambda \in \sigma(A) | \Re(\lambda) = 0\}$$

- Das unstabile (bzw. instabile) Spektrum

$$\sigma_u(A) := \{\lambda \in \sigma(A) | \Re(\lambda) > 0\}$$

Definition 4. *Der von A erzeugte lineare Fluss e^{tA} auf E heißt* ***hyperbolisch****, wenn $\sigma_n = \emptyset$, also wenn $\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_u(A)$ gilt.*

Im Folgenden bezeichnen wir mit m(λ) die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ von A $\in \mathcal{L}$(E).
Das folgende Theorem liefert die mehrdimensionale Verallgemeinerung der zweidimensionalen Sattels.

Theorem 5. *e^{tA} sei ein hyperbolischer linearer Fluss. Dann gibt es eine direkte Summenzerlegung*

$$E = E_s \oplus E_u,$$

welche A und damit den linearen Fluss e^{tA} wie folgt zerlegt

$$A = A_s \oplus A_u \quad \textit{und} \quad e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u}.$$

Und dann sind e^{tA_s} eine Kontraktion und e^{tA_u} eine Expansion. Diese Zerlegung ist eindeutig und es gilt

$$dim(E_s) = \sum_{\lambda \in \sigma_s(A)} m(\lambda) \quad \textit{bzw.} \quad dim(E_u) = \sum_{\lambda \in \sigma_u(A)} m(\lambda).$$

Beweis. Zunächst betrachten wir wieder den Fall, dass $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist.
1. Teil: Zerlegung
Wir setzen

$$E_s := \oplus_{\lambda \in \sigma_s(A)} ker[(A - 1\lambda)^{m(\lambda)}]$$

und

$$E_u := \oplus_{\lambda \in \sigma_u(A)} ker[(A - 1\lambda)^{m(\lambda)}].$$

$$\Rightarrow E = E_s \oplus E_u$$

(Wir setzen die algebraische Vielfachheit als Exponent um die verallgemeinerten Eigenvektoren zu etrhalten.) Diese Zerlegung von E zerlegt A in $A_s \oplus A_u$ und damit auch e^{tA} in $e^{tA_s} \oplus e^{tA_u}$.
Da gilt $\sigma(A_s) = \sigma_s(A)$ und $\sigma(A_u) = \sigma_u(A)$ ergibt sich, dass e^{tA_s} eine Kontraktion und e^{tA_u} eine Expansion ist.
Die Formel für die dim(E_s) bzw. dim(E_u) folgt direkt aus der obigen Wahl von E_s bzw. E_u.
2. Teil: Eindeutigkeit
Es sei $E = E_1 \oplus E_2$ eine weitere Zerlegung von E, welche A zerlegt in $A_1 \oplus A_2$, so dass e^{tA_1} eine Kontraktion und e^{tA_2} eine Expansion ist.
Für x $\in E_1$ gilt dann

$$x = y + z$$

wobei y $\in$ E_s und z $\in$ E_u.
Wegen $e^{tA}x = e^{tA_1}x \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ folgt

$$e^{tA}z = e^{tA}P_u x = P_u e^{tA}x \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (*),$$

wobei $P_u : E \to E_u$ die zur Zerlegung $E=E_s \oplus E_u$ gehörige Projektion bezeichnet. Nach Theorem 3 (ii') existieren Konstanten $\alpha, \beta >0$, so dass

$$|e^{tA}z| = |e^{tA_u}z| \geq \beta e^{t\alpha}|z| \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+ \quad (**).$$

Aus $(*)$ und $(**)$ folgt z=0. Es gilt also $E_1 \subset E_s$. Aus Symmetriegründen folgt $E_s \subset E_1$.
$\Rightarrow E_1 = E_s$
Wenn wir nun x $\in E_2$ wählen mit x=y+z, wobei y $\in E_s$ und z $\in E_u$, dann gilt

$$e^{tA}x = e^{tA_2}x \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Folglich gilt

$$e^{tA}y = e^{tA}P_s x = P_s e^{tA}x \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

wobei $P_s : E \to E_s$ die zur Zerlegung $E=E_s \oplus E_u$ gehörige Projektion bezeichnet.
Wegen $e^{tA_s} = e^{|t|(-A_s)}$ und $\sigma(-A_s) = -\sigma(A_s)$ folgt aus Theorem 3 (ii')

$$|e^{tA}y| = |e^{tA_s}y| = |e^{|t|(-A_s)}y| \geq \beta e^{\alpha|t|}|y|$$

für t<0 und geeignete Konstanten $\alpha, \beta>0$, folglich gilt y=0. Also gilt $E_2 \subset E_u$. Aus Symmetriegründen folgt $E_u \subset E_2$.
$\Rightarrow E_2 = E_u$
$\Rightarrow$ Eindeutigkeit der Zerlegung
Für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lässt dich die Aussage mit Hilfe der Komplexifizierung zeigen. $\square$

Definition 6. *E_s heißt der* ***stabile*** *und E_u der* ***instabile Untervektorraum*** *des hyperbolischen linearen Flusses e^{tA}.*

Ein hyperbolisches linearer Fluss ist eine Kontraktion, wenn $E_u=\{0\}$ oder eine Expansion, wenn $E_s=\{0\}$. Ist $E=\mathbb{R}^3$ können sich beispielsweise aus dem hyperbolischen Fluss folgende Abbildungen ergeben.

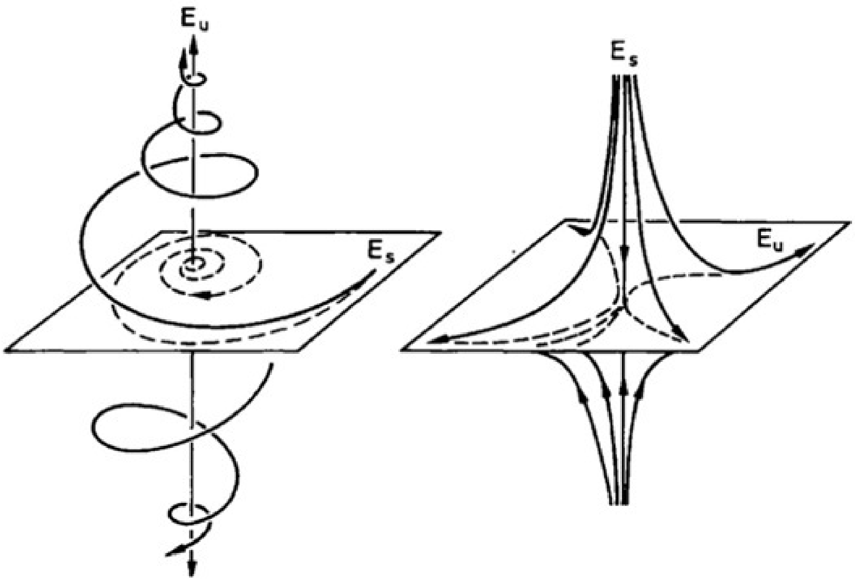

Figure 1: mehrdimensionale Verallgemeinerung des 2-dimensionalen Sattels