UNIVERSITÄT
MANNHEIM

Die Euler Lagrange Gleichungen

Seminararbeit

eingereicht im: FSS 2012

von: Marc-Daniel Mildenberger
geboren am 17. Februar 1990
in Speyer

E-Mail-Adresse: mmildenb@mail.uni-mannheim.de

Matrikelnummer: 1285818

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsmathematik
Lehrstuhl für Mathematik III
D – 68131 Mannheim
Telefon: +49 621 181 2510
Internet: http://analysis.math.uni-mannheim.de/

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

In seinem Vortrag/ seiner Ausarbeitung hat uns Ricardo Peña Hoepner die allgemeine Gestalt von Funktionalen näher gebracht und erläutert, inwieweit sich, aus dem endlich-dimensionalen Fall bekannte Fragen, zu Stetig- und Differenzierbarkeit, sowie zur Extremwertsuche auf Funktionale übertragen lassen. Dabei hat er die erste Variation eingeführt und eine notwendige Bedingung für Extrema diskutiert.
Hierauf aufbauend wollen wir die zweite Ableitung definieren und ein hinreichendes Kriterium herleiten. Der Schwerpunkt dieser Arbeit soll auf der darauffolgenden Betrachtung der Klasse von Funktionalen der Gestalt $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')dx$ liegen, wir spezifizieren für diese die notwendige Bedingung für ein Extremum, indem wir die Euler-Lagrange-Gleichung einführen. Anschliessend betrachten wir die zweite Variation. Zum Abschluss untersuchen wir einige Spezialfälle, bei denen das Lösen der Euler Lagrange Gleichung leichter fällt, sowie den „entarteten“ Fall.

Marc-Daniel Mildenberger
Mannheim, den 26.04.2012

2. Die zweite Ableitung

Nachdem wir uns im letzten Vortrag mit der ersten Ableitung von Funktionalen beschäftigt haben, wollen wir nun die zweite Ableitung betrachten. Die Betrachtung dieser ist notwendig, da, analog zum endlich dimensionalen Fall, eine Nullstelle der ersten Variation eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für ein Extremum darstellt.
Dabei leiten wir die zweite Ableitung erst im Allgemeinen her und wenden sie nach der Einführung der Euler-Lagrange-Gleichung auf diese an.

2.1. Definition: Die zweite Ableitung

Wir wollen uns zuerst an die allgemeine Definition der Ableitung erinnern:

Definition 1. *(Ableitung) Seien X und Y normierte Vektorräume. Eine Abbildung f von einer offenen Menge $U \subset X \to Y$ heißt im Punkt x_0 differenzierbar, wenn es ein $f'(x_0) \in \mathcal{L}(X,Y)$ gibt, so dass die folgende Abbildung in x_0 stetig ist:*

$$U \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \left\{ \begin{array}{cc} \frac{\|f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} & \text{für } x \neq x_0 \\ 0 & \text{für } x = x_0 \end{array} \right\}$$

$f'(x_0)$ heißt die Ableitung von f bei x_0.

Definition 2. *Sei $f : U \to \mathbb{R}$, wobei U eine offene Teilmenge eines normierten Vektorraumes V ist, und an der Stelle $x_0 \in U$ zweimal differenzierbar. Die zweite Ableitung definiert eine symmetrische Bilinearform auf V. Es gilt:*

$$f''(x_0) : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad (v,w) \mapsto f''(x_0)(v,w)$$

2.2. Satz: Hinreichende Bedingung für ein Extremum

Satz 3. *Sei $f : U \to \mathbb{R}$, wobei U, wie in obiger Definition, eine offene Teilmenge des normierten Vektorraumes V ist. f sei auf einer offenen Menge zweimal differenzierbar. Die zweite Ableitung f'' ist dann bei allen lokalen Minima (Maxima) eine positiv - semidefinite (negativ - semidefinite) Bilinearform (d.h. $\forall x \in V$ muss gelten: $f''(x_0)(x,x) \geq 0$ für ein Minimum bzw. $f''(x_0)(x,x) \leq 0$ für ein Maximum).*

Gibt es umgekehrt einen kritischen Punkt $x_0 \in U$ *(d.h.* $f'(x_0) = 0$*) und ein* $\epsilon > 0$*, so dass* $\forall h \in V$ *gilt:*

$$f^{''}(x_0)(h,h) \geq \epsilon \left\| h \right\|^2 \qquad \textit{bzw.} \qquad f^{''}(x_0)(h,h) \leq -\epsilon \left\| h \right\|^2$$

so besitzt f *an der Stelle* x_0 *ein lokales Minimum bzw. Maximum.*

Beweis. f habe an der Stelle x_0 ein ein lokales Minimum bzw. ein Maximum. Dann folgt mit Korollar 7.16 aus dem Analysis Skript (HWS/FSS 2010/11)von Herrn Prof. Schmidt, dass die Aussage gilt.

Für die Rückrichtung betrachten wir nun im Speziellen den Fall eines lokalen Minimums; der Fall eines lokalen Maximums geht nahezu analog mit $\geq$ anstelle von $\leq$. Es sei vorausgesetzt, dass folgende Ungleichung gilt:

$$f^{''}(x_0)(h,h) \geq \epsilon \left\| h \right\|^2$$

Wir wissen auf Grund der Definition der Ableitung von f', dass ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $h \in B(0,\delta) \setminus \{0\}$ gilt:

$$\frac{\left\| f'\left(x_0+h\right) - f'\left(x_0\right) - f''\left(x_0\right)\left(h\right) \right\|}{\left\| h \right\|} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Wenn wir die Abbildungen an dem Vektor h auswerten, erhalten wir folgende Ungleichung:

$$\frac{\left| f'\left(x_0+h\right)\left(h\right) - f'\left(x_0\right)\left(h\right) - f''\left(x_0\right)\left(h,h\right) \right|}{\left\| h \right\|} \leq \left\| h \right\| \frac{\epsilon}{2}$$

Wir wissen, dass x_0 ein kritischer Punkt ist, also $f'(x_0) = 0$ gilt.

$$\Rightarrow \left| f'\left(x_0+h\right)\left(h\right) - f''\left(x_0\right)\left(h,h\right) \right| \leq \left\| h \right\|^2 \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow -f'\left(x_0+h\right)\left(h\right) + f''\left(x_0\right)\left(h,h\right) \leq \left\| h \right\|^2 \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow f''\left(x_0\right)\left(h,h\right) - \left\| h \right\|^2 \frac{\epsilon}{2} \leq f'\left(x_0+h\right)\left(h\right)$$

Da $f^{''}(x_0)(h,h) \geq \epsilon \left\| h \right\|^2$ gilt und aus der vorangegangenen Gleichung erhalten wir

$$\Rightarrow \left\| h \right\|^2 \epsilon - \left\| h \right\|^2 \frac{\epsilon}{2} \leq f''\left(x_0\right)\left(h,h\right) - \left\| h \right\|^2 \frac{\epsilon}{2} \leq f'\left(x_0+h\right)\left(h\right)$$

$$\Rightarrow \left\| h \right\|^2 \frac{\epsilon}{2} \leq f'\left(x_0+h\right)\left(h\right)$$

Damit können wir zurück auf die Funktion f schließen, dass für diese gilt:

$$\begin{aligned} f(x_0+h)-f(x_0) &= \int_0^1 f'(x_0+th)(h)dt \\ &= \int_0^1 f'(x_0+th)\frac{1}{t}(th)dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{\epsilon}{2}\|ht\|^2 \frac{1}{t}dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{\epsilon}{2}t\|h\|^2 dt \\ &\geq \frac{\epsilon}{2}\|h\|^2 \frac{1}{2}t^2 \,|_{t=0}^{t=1} \\ &\geq \frac{\epsilon}{4}\|h\|^2 \end{aligned}$$

Für jedes x in einer Umgebung des Punktes x_0 nimmt die Funktion einen Funktionswert an, der größer ist als $f(x_0)$. Also liegt an der Stelle x_0 ein Minimum vor. □

2.3. Beispiel zur zweiten Variation

Wir können die Bedingung $f''(y)(\eta,\eta)\geq\epsilon\|\eta\|^2$ in dem von uns betrachteten unendlich-dimensionalen Fall nicht auf $f''(y)(\eta,\eta)>0$ abschwächen. Dies belegt folgendes Gegenbeispiel:
Sei $J: C([0,1])\to\mathbb{R}$, $y\mapsto\int_0^1 y^2(x)(x-y(x))dx$
Die erste Variation ist $\delta J(y,\eta)=\int_0^1(-3y(x)^2+2xy(x))\eta(x)dx$ (Die Berechnung dieser fand im vorangegangenen Vortrag von Ricardo Peña Hoepner statt), wobei $\eta\in C^2([0,1])\backslash\{0\}$ ist. Wir betrachten die Nullfunktion $y(x)\equiv 0$. Diese ist ist ein kritischer Punkt des Funktionales J. Die zweite Variation für die Nullfunktion ausgewertet an der Stelle η ist: $\delta^2 J(0,\eta)=2\int_0^1\eta^2(x)xdx>0$ (dies lässt sich mit der Formel, die wir in in Kapitel 3.6 herleiten, leicht bestimmen). Also müsste ein Minimum der Funktion vorliegen.
Betrachten wir jedoch für $\alpha>0$ die Funktion

$$\tilde{y}(x)=\begin{Bmatrix} \alpha-x & \text{für } 0\leq x\leq\alpha \\ 0 & \text{für } \alpha\leq x\leq 1 \end{Bmatrix}$$

Dann gilt $J(s\tilde{y})=s^2\int_0^\alpha(\alpha-x)^2xdx-s^3\int_0^\alpha(\alpha-x)^3dx=(\frac{s^2}{12}-\frac{s^3}{4})\alpha^4$ und wir sehen, dass dieser Ausdruck, z.B. für $s=1$, kleiner 0 wird $\Rightarrow$ die Nullfunktion kann kein Minimum sein, da wir mit $\tilde{y}$ eine Funktion gefunden haben, so dass J in jeder Umgebung um die Nullfunktion bei $\tilde{y}$ geringere Werte annimmt.

3. Die Euler Lagrange Gleichung

3.1. Betrachtung spezieller Funktionale

Nachdem wir uns bis jetzt allgemein mit Funktionalen beschäftigt haben, wollen wir uns nun einer speziellen Klasse von Funktionalen widmen. Und zwar solchen von der Gestalt:

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')dx$$

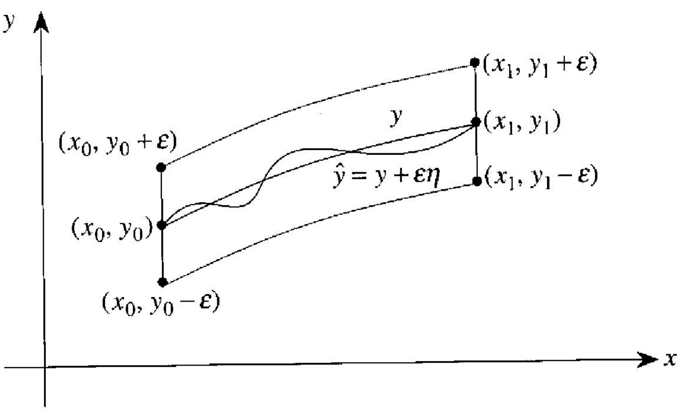
Dabei ist $J : C^2([x_0, x_1]) \to \mathbb{R}$ und f ist auf der offenen Menge zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt. Wir spezifizieren die Menge der Lösungen, indem wir zwei Anfangswerte $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ vorgeben, welche y an den Stellen x_0 und x_1 annehmen soll. Wir betrachten also ein Variationsproblem mit festen Endpunkten im Vektorraum $C^2([x_0, x_1])$. Wie wir später sehen werden, resultiert daraus eine Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Zusammenfassend gesagt, suchen wir nun die Funktionen $y \in S$, welche für J ein Extremum bilden, dabei bezeichnet die Menge S:

$$S := \left\{y \in C^2[x_0, x_1] \mid y(x_0) = y_0 \wedge y(x_1) = y_1\right\}$$

zusätzlich benötigen wir für unsere Argumentation, die wie folgt definierte Menge H:

$$H := \left\{\eta \in C^2[x_0, x_1] \mid \eta(x_0) = \eta(x_1) = 0\right\}$$



Wir werden uns mit Funktionen $\tilde{y} \in S$ in einer ϵ-Umgebung eines Minimums befassen, die obige Grafik soll diesbezüglich zur Veranschaulichung dienen. Es sei angemerkt, dass sich jedes

Element $\tilde{y} \in S$ durch $\tilde{y} = y + \epsilon\eta$, wobei $\eta \in H$ und $\epsilon > 0$, beschreiben lässt.
Bevor wir aus diesem Gedanken die Euler-Lagrange-Gleichung herleiten, benötigen wir zuerst das Fundamentallemma der Variationsrechnung.

3.2. Vorbemerkung

Davor wollen wir uns folgender Proposition bewusst werden.

Proposition 4. *Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, wobei $\alpha < \beta$ sein soll, existiert eine Funktion $v \in C^2(\mathbb{R})$, so dass für alle $x \in (\alpha, \beta)$: $v(x) > 0$. und für alle $x \in \mathbb{R}\setminus[\alpha, \beta] : v(x) = 0$ gilt.*

Beweis. Sei $v(x) = (x - \alpha)^3(\beta - x)^3$ wenn $x \in (\alpha, \beta)$ und 0 sonst. Da v ein Polynom ist, können wir dieses beliebig oft auf $\mathbb{R} \setminus(\alpha, \beta)$ differenzieren. Des weiteren ist $v(x) > 0$ für alle $x \in (\alpha, \beta)$. □

3.3. Das Fundamentallemma der Variationsrechnung

Lemma 5. *Seien $g(x), h(x) \in C^2([x_0, x_1])$. Gilt für alle Funktionen $h(x)$ mit $h(x_0) = h(x_1) = 0$:*

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)h(x)dx = 0 \qquad \text{so folgt} \qquad g(x) = 0 \qquad \text{für alle } x \in [x_0, x_1]$$

Beweis. Annahme: Es gibt ein $c \in (x_0, x_1)$, so dass $g(c) \neq 0$ ist.
O.b.d.A. nehmen wir an, dass $g(c) > 0$. Da g laut Voraussetzung stetig ist, gibt es aber eine ganze Umgebung (α, β) um den Punkt c für die gilt: $g(x) > 0$ für $x \in (\alpha, \beta)$. Durch die vorangegangene Proposition wissen wir, dass eine Funktion $v \in C^2(\mathbb{R})$ existiert, für die gilt: $v(x) > 0$ für alle $x \in (\alpha, \beta)$ und $v(x) = 0$ für alle $x \in [x_0, x_1]\setminus(\alpha, \beta)$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_1} g(x)v(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)v(x)dx > 0$$

dies widerspricht der Annahme, dass $\int_{x_0}^{x_1} g(x)h(x)dx = 0$ für alle $h(x)$. Daraus folgt, dass $g(x) = 0$ auf dem Intervall $[x_0, x_1]$ sein muss. □

3.4. Die Euler Lagrange Gleichung

Wir nehmen an, dass das Funktional J für y ein lokales Extremum annimmt. Wir betrachten nun ein $\tilde{y}$ aus einem ϵ-Ball um den Punkt y. Wir wissen, dass wir jedes $\tilde{y}$ schreiben können als $\tilde{y} = y + \epsilon\eta$, wobei $\eta \in H$. Für kleine ϵ können wir nach dem Satz von Taylor entwickeln.

$$f(x, \tilde{y}, \tilde{y}') = f(x, y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta') = f(x, y, y') + \epsilon\left\{\eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'\frac{\partial f}{\partial y'}\right\} + O(\epsilon^2).$$

Betrachten wir nun:

$$\begin{aligned}
J(\tilde{y}) - J(y) &= \int_{x_0}^{x_1} f(x,\tilde{y},\tilde{y}')dx - \int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \left(f(x,y,y') + \epsilon \left\{ \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right\} + O(\epsilon^2) \right) - f(x,y,y') \right\} dx \\
&= \epsilon \int_{x_0}^{x_1} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx + O(\epsilon^2) \\
&= \epsilon \delta J(y,\eta) + O(\epsilon^2)
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt folgende Definition angewendet haben:

$$\delta J(y,\eta) := \int_{x_0}^{x_1} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

Definition 6. *$\delta J(y,\eta)$ ist die erste Variation von J.*

Wir betrachten nun den zweiten Summanden im Integral gesondert und integrieren diesen mit partieller Integration.

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_1} \eta'(x) \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} dx &= \eta \frac{\partial f}{\partial y'}\bigg|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} dx \\
&= - \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} dx
\end{aligned}$$

Dies gilt, da η nach Voraussetzung in H liegt und damit folglich $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$. Wenn wir diesen Ausdruck in die erste Variation einsetzen, erhalten wir die Formulierung:

$$\delta J(y,\eta) = \int_{x_0}^{x_1} \eta \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right\} dx$$

Bemerkung 7. *Wenn $\eta \in H$ ist, dann ist auch $-\eta \in H$ und es gilt $\delta J(y,\eta) = -\delta J(y,-\eta)$. Für kleine ϵ wird folglich das Vorzeichen von $J(\tilde{y}) - J(y)$ durch das Vorzeichen der ersten Variation bestimmt, außer die erste Variation ist null. Die Bedingung, dass $J(y)$ ein lokales Extremum in S ist, fordert, dass $J(\tilde{y}) - J(y)$ für jedes $\tilde{y} \in B(y,\epsilon)$ nicht das Vorzeichen wechselt.*

Daraus folgt der Satz:

Satz 8. *Sei J ein Funktional der Gestalt $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')dx$, wobei $y \in S$ und f zweimal stetig differenzierbar sei. Wenn J an der Stelle y ein lokales Extremum annimmt, muss die erste Variation für alle $\eta \in H$ verschwinden.*

$$\Rightarrow \qquad \delta J(y,\eta) = \int_{x_0}^{x_1} \eta \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right\} dx = 0$$

Bemerkung 9. *Natürlich ist damit, wie aus den endlich-dimensionalen Räumen bekannt, noch nicht sichergestellt, dass wirklich ein Extremum vorliegt. Diese Bedingung ist notwendig, jedoch nicht hinreichend.*

Definition 10. *Stellen, an denen die erste Variation verschwindet, heißen stationäre Punkte.*

Da, wie obig erwähnt, die Bedingung $\int_{x_0}^{x_1} \eta \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right\} dx = 0$ für alle η gelten muss, folgt für jedes Extremum y mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

Definition 11. *Die aus der Abbildung* $E(x) := \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$ *resultierende Differentialgleichung* $E(x) = 0$ *heißt Euler-Lagrange-Gleichung.*

Sie ist wohldefiniert, da wir vorausgesetzt haben, dass f zweimal stetig differenzierbar sein muss. Zudem ist $E(x)$ stetig aufgrund der Stetigkeitseigenschaft von f und da $y \in C^2([x_0, x_1])$.

Bemerkung 12. *Die Euler-Lagrange-Gleichung ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, dies wird einsichtiger, wenn wir die Gleichung ausschreiben:*

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y'} y''$$

Als Resultat lässt sich folgender Satz festhalten:

Satz 13. *Sei* $J : C^2[x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, $[x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$ *von der Form:*

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx$$

wobei f *zweimal stetig differenzierbar ist,* $x_0 < x_1$ *und*

$$S := \left\{ y \in C^2([x_0, x_1]) \mid y(x_0) = y_0 \wedge y(x_1) = y_1 \right\}$$

mit $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. *Dann muss jedes Extremum* $y \in S$ $\forall x \in [x_0, x_1]$ *die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllen*

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

Die-Euler-Lagrange-Gleichung kann folglich analog zu der Bedingung gesehen werden, dass bei Funktionen der Gradient an einem Extremum verschwinden muss.

3.5. Beispiel zur Euler-Lagrange-Gleichung

Beispiel 14. *Wir wollen nun ein konkretes Anwendungsbeispiel betrachten. Dabei soll* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *abbilden und* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit den Anfangsparametern:* $(x_0, y_0) = (0, 0)$ *und*

$(x_1, y_1) = (1, 1)$. *Anschaulich beschreibt* $J(y)$ *die Länge der Kurve zwischen den vorgegebenen Punkten im* $\mathbb{R}^2$.

$$\Rightarrow J(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Um das Minimum von $J(y)$ *zu finden müssen wir die Euler-Lagrange-Gleichung lösen.*

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 - \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = const$$

Daraus folgt das $y' = c_1$, *wobei* c_1 *eine Konstante ist. Folglich sieht ein potentielles Extremum von* $J(y)$ *so aus:*

$$y(x) = c_1 x + c_2$$

wobei c_2 *eine weitere Integrationskonstante ist. Aufgrund der von uns gewählten Randwerte folgt* $c_1 = 1$ *und* $c_2 = 0$, *ist folglich das einzige potentielle Extremum gegeben durch* $y(x) = x$. *Dieses ist ein Minimum (was wir später zeigen werden). Das Ergebnis ist nicht überraschend, da bekanntlich der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten im* $\mathbb{R}^2$ *eine Gerade durch die beiden Punkte ist.*

3.6. Die zweite Variation von Funktionalen der Form $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')dx$

Wir wollen nun die 2. Variation eines Funktionales der Form $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')dx$ betrachten um zu untersuchen, ob bei einem stationären Punkt ein Extremum vorliegt. Dabei argumentieren wir, wie bei der Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung, mit der Taylorentwicklung. Wir setzen dabei voraus, dass f dreimal differenzierbar ist.
Wir nehmen an, J besitzt an der Stelle y ein Extremum und $\tilde{y}$ befindet sich in einem ϵ-Ball um y, also lässt sich $\tilde{y}$ mit vorangegangener Notation schreiben als $\tilde{y} = y + \epsilon\eta$, wobei auch hier $\eta \in H$ und $\epsilon > 0$ sein soll. Wir entwickeln wieder im Punkt (x, y, y'):

$$f(x, \tilde{y}, \tilde{y}') = f(x, y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta')$$

$$= f(x, y, y') + \epsilon\left\{\eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'\frac{\partial f}{\partial y'}\right\} + \frac{\epsilon^2}{2}\left\{\eta^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\eta\eta'\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + \eta'^2\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right\} + O(\epsilon^3).$$

Wir definieren:

Definition 15. *Sei* $J(y)$ *ein Funktional von obiger Form und* f *eine dreimal stetig differenzierbare Funktion. Dann heißt*

$$\delta^2 J(y, \eta) := \int_{x_0}^{x_1} \left(\eta^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\eta\eta'\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + \eta'^2\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right) dx$$

die zweite Variation von J.
Wir betrachten nun wieder:

$$J(\tilde{y}) - J(y) = \epsilon\delta J(y,\eta) + \frac{\epsilon^2}{2}\delta^2 J(y,\eta) + O(\epsilon^3)$$

Wir haben jedoch vorausgesetzt, dass J an der Stelle y ein Extremum hat, deswegen verschwindet die erste Variation.

$$\Rightarrow J(\tilde{y}) - J(y) = \frac{\epsilon^2}{2}\delta^2 J(y,\eta) + O(\epsilon^3)$$

Also wird das Vorzeichen von $J(\tilde{y}) - J(y)$ von dem Vorzeichen von $\delta^2 J(y,\eta)$ bestimmt.

Bemerkung 16. *Bei der Untersuchung der zweiten Variation haben wir schon die Euler-Lagrange-Gleichung gelöst und kennen folglich y, also sind $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}, \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ bekannte Terme in x.*

Nun muss untersucht werden, inwieweit $\delta^2 J(y,\eta)$ die hinreichenden Bedingungen für ein Extremum (siehe Satz 3) erfüllt.

3.7. Beispiel zur zweiten Variation

Beispiel 17. *Wir wollen nun erneut das Beispiel aus 3.5 aufgreifen. Dort haben wir bestimmt, dass das einzige potentielle Extremum von $J(y) = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2}dx$ mit den beiden Anfangsparametern $(x_0, y_0) = (0,0)$ und $(x_1, y_1) = (1,1)$ die Ursprungsgerade $y(x) = x$ ist. Wir wollen nun noch zeigen, dass dies tatsächlich ein Minimum ist. Wir berechnen dabei zuerst folgende zweite Ableitungen: $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = (1+y')^{-1.5}$. Daraus folgt dann für die zweite Variation:*

$$\begin{aligned}
\delta^2 J(y,\eta) &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\eta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\eta\eta' \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + \eta'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right) dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \eta'^2 (1+y')^{-1.5} dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \eta'^2 (1+1)^{-1.5} dx \\
&= \frac{1}{2^{3/2}} \int_{x_0}^{x_1} \eta'^2 dx \\
&= \frac{1}{2^{3/2}} \|\eta\|_E^2
\end{aligned}$$

wobei wir die Norm $\|\eta\|_E := \sqrt{\int_{x_0}^{x_1} \eta'^2 dx}$ benutzen. Damit erfüllt $\delta^2 J(y = x, \eta)$ die Bedingungen aus Satz 3 und wir haben formal gezeigt, dass für $y(x) = x$ ein Minimum von J vorliegt.

4. Spezialfälle

Da die Euler-Lagrange-Gleichung eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, ist es im Allgemeinen schwierig diese zu lösen. Wir betrachten nun einige Spezialfälle, wo die Funktion $f(x, y, y')$ nicht explizit von y bzw. von x abhängt und dadurch das Lösen der Differentialgleichung einfacher wird.

4.1. Keine explizite Abhängigkeit von y

Wir betrachten ein Funktional der Form: $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y')dx$. Die betrachtete Funktion f ist folglich nur noch von x und y' abhängig, anders gesagt es besteht keine direkte Abhängigkeit von y mehr. Dann reduziert sich die Euler-Lagrange Gleichung auf:

$$\frac{\partial f(x, y')}{\partial y'} = c_1$$

wobei c_1 eine Integrationskonstante ist. Der Ausdruck $\frac{\partial f(x,y')}{\partial y'}$ ist eine Differentialgleichung erster Ordnung für y. Die Gleichung ist lösbar für y', wenn $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \neq 0$ ist (s. dazu Satz der impliziten Funktionen).

4.2. Keine explizite Abhängigkeit von x

Eine weiterer vereinfachender Fall ist, wenn das Funktional nur von y und y' abhängig ist. Also $J(y)$ die Form $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(y, y')dx$ hat. Wir definieren eine Hilfsfunktion H:

$$H(y, y') := y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f$$

Satz 18. *Sei ein Funktional der Form $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(y, y')dx$, $y \in S$ gegeben und $H(y, y')$ wie obig definiert. Dann ist H entlang jedes Extremum y konstant.*

Beweis.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}H(y,y') &= \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f\right) \\
&= y''\frac{\partial f}{\partial y'} + y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \left(y'\frac{\partial f}{\partial y} + y''\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \\
&= y'\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= -y'E(x) = 0
\end{aligned}$$

und da y laut Annahme ein Extremum ist, muss es die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllen. Daraus folgt dann, dass $H(y,y') = const$ sein muss. □

Bemerkung 19. *Wenn $J(y)$ nicht direkt von x abhängt, reicht es anstelle der Euler-Lagrange-Gleichung, einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, die durch H gegebene Differentialgleichung zu lösen. H entspricht einer Differentialgleichung erster Ordnung und das Lösen ist im Allgemeinen einfacher.*

5. Der entartete Fall

5.1. Der entartete Fall

Wir sind bis jetzt immer davon ausgegangen, dass die Funktion $f(x, y, y')$ von der Komponente y' in einer nicht-linearen Weise abhängt. Wir wollen nun betrachten, wenn dies der Fall sein sollte.

Satz 20. *Wenn das Funktional $J(y)$ linear von y' abhängt, also von der Form*

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} \big(A\,(x, y)\, y' + B\,(x, y)\big)\, dx$$

ist, wobei A und B stetig differenzierbare Funktionen sind, reduziert sich die Euler-Lagrange-Gleichung auf eine Identität und der Wert von $J(y)$ ist unabhängig von der Wahl von y.

Beweis. Die Euler Lagrange Gleichung für $J(y)$ lautet:

$$\left(y'\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) - \frac{d}{dx}A\,(x, y) = 0$$

Jedoch wissen wir, dass:

$$\frac{d}{dx}A\,(x, y) = \frac{\partial A}{\partial x} + y'\frac{\partial A}{\partial y}$$

gilt. Wenn wir dies in die obere Gleichung einsetzen, verringert sich die Euler-Lagrange-Gleichung auf die Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

Wir erkennen, dass es sich bei diesem Ausdruck nicht mehr um eine Differentialgleichung, sondern um eine implizite Beschreibung der Funktion y handelt. Inwieweit Lösungen vorhanden sind, hängt von der Wahl der Funktionen A und B ab. Des weiteren sehen wir, dass die Gleichung keine frei wählbare Konstante enthält, also ein Anfangswert keinen Einfluss auf die Lösung der Gleichung, also auf y, hat. Da wir uns auf einer konvexen Menge befinden, existiert ein $F(x, y)$, für welches $\frac{\partial F}{\partial y} = A$ und $\frac{\partial F}{\partial x} = B$ gilt (vgl. Differentialgleichungsskript von Herr Prof. Schmidt Lemma 1.41/ Stammfunktionen), wobei wir $\frac{\partial F}{\partial x}$ auffassen, als Ableitung nach der Komponente x. Folglich kann f dann geschrieben werden als:

$$f = \frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{dF}{dx}$$

Wenn wir dies nun f umschreiben zu $f = \frac{dF}{dx}$ folgt:

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dF}{dx} dx = F(x_1, y(x_1)) - F(x_0, y(x_0)) = F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0)$$

folglich ist der Wert von $J(y)$ unabhängig von der konkreten Funktion y. Er wird nur von den gegebenen Anfangswerten bestimmt. $\square$

Wir wollen die umgekehrte Fragestellung betrachten:

Satz 21. *Sei $J : C^2([x_0, x_1]) \to \mathbb{R}$ ein Funktional der Form:*

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')dx$$

wir suchen zu gegebenen Anfangswert $y(x_0) = y_0$ und $y(x_1) = y_1$ das Extremum $y \in S$. Wenn sich die Euler-Lagrange-Gleichung auf eine Identität reduziert, muss die Funktion f linear in der Komponente y' sein und der Wert des Funktionales ist unabhängig von der Funktion y.

Beweis. Wenn die Euler-Lagrange-Gleichung eine Identität ist, also eine implizite Beschreibung der Funktion y und keine Differentialgleichung, folgt, da dies für alle $x \in [x_0, x_1]$ und alle $y \in S$ gelten soll, aus

$$E(x) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y'} y'' = 0$$

dass $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = 0$, da Funktionen $y \in S$ existieren für die es ein $\xi \in (x_0, x_1)$ gibt mit $y(\xi) = 0$ und $y'(\xi) = 0$, jedoch $y''(\xi) \neq 0$. Also ist $\frac{\partial f}{\partial y'} = const$ in y'. Daraus wiederum folgt, dass die Funktion f selber nur in einer linearen Weise von y' abhängen darf. Also muss f die Form

$$f(x, y, y') = A(x, y)\, y' + B(x, y)$$

haben. Durch Einsetzen von f in die Euler-Lagrange-Gleichung erhalten wir $\frac{\partial A}{\partial y} y' + \frac{\partial B}{\partial y} - (\frac{\partial A}{\partial x}) - (\frac{\partial A}{\partial y} y') - 0 = 0$, folglich gilt $\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y}$ für alle $x \in [x_0, x_1]$ und alle $y \in S$. $\square$

A. Literaturverzeichnis

- Prof. Martin Schmidt: 'Analysis I/II'; Mannheim, 2010/2011
- Prof. Martin Schmidt: 'Differentialgleichungen'; Mannheim 2012
- Bruce Van Brunt: 'The calculus of variations'; New York ; Berlin ; Heidelberg: Springer, 2006.
- Eberhard Klingbeil: 'Variationsrechnung'; Mannheim: Bibliogr. Inst., 1977
- Vladimir I. Arnold: 'Mathematische Methoden der klassischen Mechanik'; Berlin : Dt. Verl. d. Wiss., 1988