# Phasendiagramme von linearen Flüssen

Christine Rimke

24.April 2012

Universität Mannheim
Seminar: Dynamische Systeme und Variationsrechnung
FSS 2012

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einführung

Dieser Vortrag widmet sich der Klassifikation von ebenen, linearen Flüssen im $\mathbb{R}^2$ der Form

$$\Phi(t,x) = e^{tA}x, A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2), x \in \mathbb{R}^2$$

Hierbei wird mit Hilfe der Eigenwerte der Matrix A das Verhalten der Flüsse an dem kritischen Punkt x = 0 betrachtet und kategorisiert. Um zu verstehen, was ein linearer Fluss ist, benötigen wir zunächst die Defintion eines Flusses.

**Definition 1.1** (lokaler Fluss)
Sei X ein topologischer Raum, $W \subset \mathbb{R} \times X$ eine offene Teilmenge. Die Abbildung $\Phi : W \to X$ heißt lokaler Fluss auf X wenn Folgendes gilt:

1. Für alle $x \in X$ ist die Menge $\{t \in \mathbb{R} | (t,x) \in W\}$ ein offenes Intervall und $0 \in \{t \in \mathbb{R} | (t,x) \in W\}$
2. Falls $(s,x) \in W$ und $(t, \Phi(s,x)) \in W$, dann gilt: $(t+s,x) \in W$ und
$$\Phi(t, \Phi(s,x)) = \Phi(t+s,x)$$
3. Für alle $x \in X$ gilt $\Phi(0,x) = x$.

**Definition 1.2** (globaler Fluss)
Ein wie in Def. 1.1 definierter lokaler Fluss heißt globaler Fluss wenn gilt:

$$W = \mathbb{R} \times X$$

**Bemerkung 1.3** (Zusammenhang Fluss - Differentialgleichung):
Grundsätzlich ist jeder partiell nach t differenzierbare Fluss die Lösung einer Differentialgleichung und jede allgemeine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung kann als Fluss aufgefasst werden.

Fluss $\Rightarrow$ DGL:
Behauptung:
Sei $\phi$ ein partiell nach t differenzierbarer Fluss, $F(x) = \dfrac{\delta \phi(0,x)}{\delta t}$.
Für jedes $x_0 \in X$ ist $x(t) = \phi(t, x_0)$ mit $x(0) = x_0$ eine Lösung von $\dot{x} = F(x(t))$.

Beweis:
$\dot{x}(t) = \dfrac{\delta \phi(t+s,x_0)}{\delta t}|_{s=0} = \dfrac{\delta \phi(t+s,x_0)}{\delta s}|_{s=0} = \dfrac{\delta \phi(s,\phi(t,x_0))}{\delta s}|_{s=0} = F(\phi(t,x_0)) = F(x(t))$

DGL $\Rightarrow$ Fluss:
Behauptung:
Für jedes $x_0 \in X$ sei $x(t)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x(t)} = F(x(t)) \text{ mit } x(0) = x_0$$

Beweis:
x(t) wird definiert als der Fluss $\phi(t, x_0)$.

**Definition 1.4** (Fixpunkt)
$x \in X$ heißt Fixpunkt oder Ruhelage eines Flusses $\phi : W \to X$, wenn

$$\phi(t, x) = x \ \ \forall t \in W$$

Mit diesem Vorwissen betrachten wir nun das 2-dimensionale Problem:

$$\dot{x} = Ax \text{ mit } x \in \mathbb{R}^2, A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$$

Dies ist eine lineare, homogene und autonome Differentialgleichung, deren allgmeine Lösung für gegeben ist durch:

$$x = e^{tA}.$$

Der lineare Fluss $e^{tA}x$ wird also durch die Lösung einer Differentialgleichung erzeugt. Um nun das Verhalten des Flusses zu untersuchen, ist es notwendig, die Lösung der DGL genauer zu bestimmen. Bekanntlich wird diese Lösung durch die Eigenwerte der Matrix A charakterisiert. Für eine leichtere Berechnung bietet es sich an, in dem System $\dot{x} = Ax$ x mit einer geeigneten Matrix $P \in G\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$durch $x = Py$ zu substituieren, so dass gilt:

$$y = P^{-1}x \Rightarrow \dot{y} = P^{-1}APy$$

Mit der Definition $B = P^{-1}AP$ gilt $\dot{y} = By$. Durch dese Transformation wird A auf Diagonal- bzw. Jordannormalform gebracht, wobei die Eigenwerte auf der Diagonalen stehen.
Im Folgenden werden wir sehen, was die verschiedenen Eigenwerte für die Phasendiagramme und ihren Verlauf bedeuten. Hierfür unterscheiden wir verschiedene Fälle.

# 2 Phasendiagramme

## 2.1 A besitzt reelle, nichtverschwindende Eigenwerte verschiedenen Vorzeichens - der Nullpunkt ist ein Sattel

Da für die Eigenwerte $\lambda < 0 < \mu$ gilt, muss A halbeinfach, d.h. diagonalisierbar sein. Daher ist $B = P^{-1}AP$ von der Form:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich für unseren Fluss:

$$e^{tB}y = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, t \mapsto (e^{\lambda t}y_1, e^{\mu t}y_2)$$

Das Phasenportrait des Flusses ist nun in y - Koordinaten gegeben. Es zeigt an einigen Punkten qualitativ die zeitliche Entwicklung des Flusses, seine Fließrichtung und Grenzwerte. In diesem Fall nennt man den Nullpunkt einen *Sattel*.

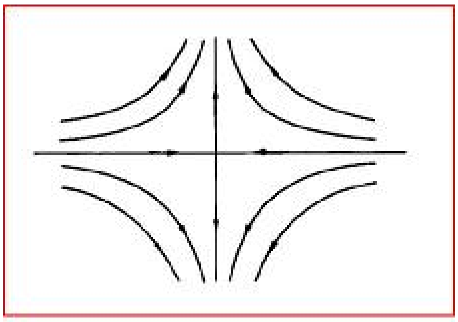

Abbildung 1: Sattel in y - Koordinaten

Allerdings ist durch die rechnerische Vereinfachung der Fluss in y - Koordinaten gegeben. Um ihn wieder auf die ursprüngliche Form in x-Koordinaten zu bringen, muss man die Substitution x = Py rückgängig machen. Da wir P nicht genau kennen, lässt sich das ursprüngliche Bild nicht exakt angeben. Allgemein kann man jedoch sagen, dass die Substitution eine lineare Transformation war und diese bildlich gesehen im $\mathbb{R}^2$ einer Drehung und / oder Streckung entspricht. Daher könnte der ursprüngliche Fluss in etwa so aussehen:

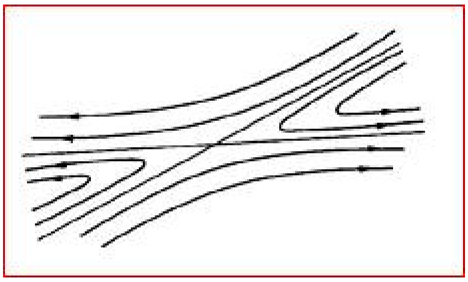

Abbildung 2: Sattel in x - Koordinaten

## 2.2 Für alle Eigenwerte von A gilt: $\Re < 0$ - der Nullpunkt ist eine Senke, bzw. asymptotisch stabil

### 2.2.1 Die Eigenwerte sind reell - der Nullpunkt ist ein (stabiler) Knoten

**a) B ist eine Diagonalmatrix**
Wenn A halbeinfach ist, kann A durch eine geeignete Matrix P auf die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda < \mu < 0$$

gebracht werden. Dann ist der Fluss $t \mapsto e^{tB}y$ gegeben durch

$$t \mapsto (e^{\lambda t}y_1, e^{\mu t}y_2)$$

und besitzt folgendes Phasendiagramm:

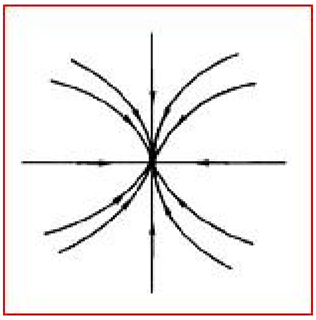

Abbildung 3: stabiler Knoten

Falls die Eigenwerte identisch sind, so ist die Matrix B von der Form:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $t \mapsto (e^{\lambda t}y_1, e^{\lambda t}y_2)$ In diesem Fall heißt der der Nullpunkt auch *Focus* und das Phasendiagramm sieht folgendermaßen aus:

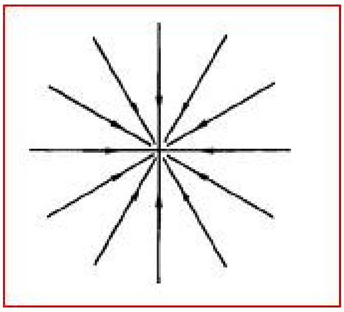

Abbildung 4: Focus

**b) B ist eine Jordannormalform**

Wenn A nicht diagonalisierbar ist, so kann man A auf eine Jordansche Nomalform bringen, wobei $\lambda = \mu$ gelten muss. Dann ist

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

und für den Fluss gilt:

$$e^{tB}y = e^{t\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow t \mapsto (e^{\lambda t}y_1 + te^{\lambda t}y_2, e^{\lambda t}y_2)$$

Um das leichter zu sehen, kann man $t_1 = e^{\lambda t}y_1 + te^{\lambda t}y_2$ und $t_2 = e^{\lambda t}y_2$ definieren und $t_1$ als Funktion von $t_2$ schreiben:

$$t_1 = \frac{y_1}{y_2}t_2 + \frac{1}{\lambda}t_2 log(\frac{t_2}{y_2})$$

Damit sich ergibt sich folgendes Phasenportrait, das auch *uneigentlicher Knoten* genannt wird:

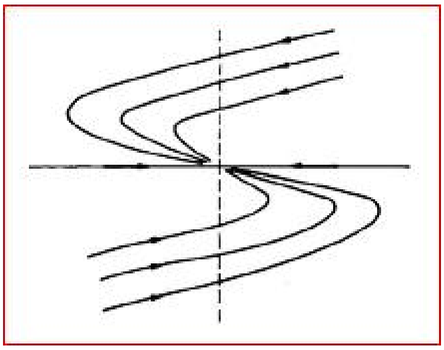

Abbildung 5: uneigentlicher Knoten

### 2.2.2 Die Eigenwerte sind komplex - der Ursprung ist ein stabiler Strudel / eine stabile Spirale

Wenn $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ einen komplexen Eigenwert $\lambda = \alpha + i\omega, \omega \neq 0$ besitzt, so ist auch $\bar{\lambda} = \alpha - i\omega$ ein Eigenwert von A und es existiert ein $P \in G\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ so dass für $B = P^{-1}AP$ gilt:

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix}$$

Vom Übungsblatt 5 ist bekannt, dass das reelle System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

äquivalent ist zu der komplexen Differentialgleichung

$$\dot{z} = (\alpha + i\omega)z \text{ mit } z = x + iy$$

Um $e^{tB}$ zu berechnen, identifizieren wir also

$$\mathbb{R}^2 \leftrightarrow \mathbb{C} \text{ durch } (x, y) \leftrightarrow (x + iy)$$

und mit $M \in \mathcal{L}(\mathbb{C}) \leftrightarrow m := M \cdot 1 \in \mathbf{C}$

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \leftrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$$

Damit ist die Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x - \omega y \\ \omega x + \alpha y \end{pmatrix} \text{ äquivalent zu } (\alpha + i\omega)(x + iy)$$

und entspricht der Multiplikation mit dem Eigenwert $\lambda = \alpha + i\omega$. Daher gilt

$$B^n \leftrightarrow \lambda^n \forall n \in \mathbb{N}$$

und damit auch

$$e^{tB} \leftrightarrow e^{t\lambda} = e^{t(\alpha+i\omega)} = e^{t\alpha}[cos(\omega t) + isin(\omega t)].$$

Daher folgt:

$$e^{tB} = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} cos(\omega t) & -sin(\omega t) \\ sin(\omega t) & cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Somit hat der Fluss $t \mapsto e^{Bt}y$ die Form:

$$t \mapsto (e^{\alpha t}(cos(\omega t)y_1 - sin(\omega t)y_2), e^{\alpha t}(sin(\omega t)y_1 + cos(\omega t)y_2)$$

Anschaulich gesprochen führt $e^{tB}$ also zu einer Streckung um den Faktor $e^{\alpha t}$ und einer Drehung um den Winkel $\omega t$. Es ensteht ein *stabiler Strudel / Spirale.*Da hier $\alpha < 0$ ist, sieht das Phasendiagramm so aus:

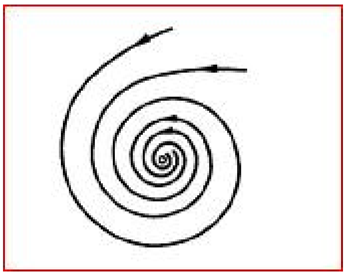

Abbildung 6: stabiler Strudel bzw. stabile Spirale

## 2.3 Für alle Eigenwerte gilt: $\Re > 0$ - der Ursprung ist ein Quelle

Da $e^{tA} = e^{-t(-A)}$ gilt, entsprechen die Phasendiagramme den jeweiligen Diagrammen von 2.2 mit umgedrehten Pfeilen. Insbesondere folgt auch für jede Lösung $u$

$$lim_{t\to\infty}|u(t)| = \infty \text{ und } lim_{t\to-\infty}u(t) = 0$$

Man sagt nun, der Nullpunkt sei ein *instabiler Knoten oder Strudel.*

## 2.4 Ein Eigenwert ist 0

In dem Fall, dass für die Eigenwerte $\lambda \neq 0, \mu = 0$ gilt, ergibt sich:

$$e^{Bt}y = e^{t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow t \mapsto (y_1, e^{\lambda t}y_2)$$

Für $\lambda < 0$ bedeutet das eine *Line von stabilen Gleichgewichten*, für $\lambda > 0$ eine *Linie von instabilen Gleichgewichten*:

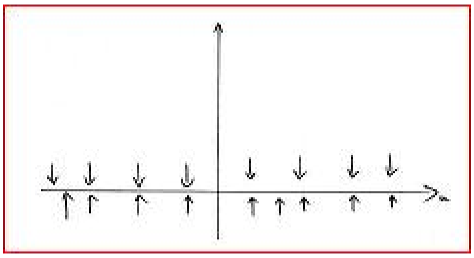

Abbildung 7: Linie von stabilen Gleichgewichten

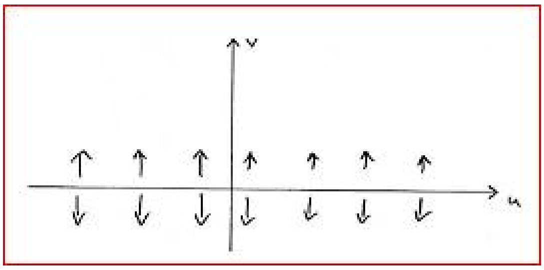

Abbildung 8: Linie von instabilen Gleichgewichten

## 2.5 Für alle Eigenwerte gilt: $\Re = 0$; der Nullpunkt ist ein Zentrum oder Wirbel

Wenn die Eigenwerte rein imaginär sind, dann kann A auf die Form:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

gebracht werden. Damit folgt

$$e^{tB}y = \begin{pmatrix} cos(\omega t) & -sin(\omega t) \\ sin(\omega t) & cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

und

$$t \mapsto (cos(\omega t)y_1 - sin(\omega t)y_2, sin(\omega t)y_1 + cos(\omega t)y_2)$$

Damit sind alle Lösungen periodisch mit der Periode $2\pi/\omega$. In y-Koordinaten ergeben sich deswegen Kreise um den Mittelpunkt 0, in x-Koordinaten Ellipsen. Der Ursprung wird *Zentrum* oder *Wirbel* genannt.

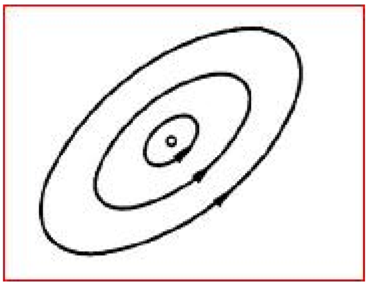

Abbildung 9: Wirbel oder Zentrum

# 3 Überblick

Um alle Unterfälle nochmal vollständig zu betrachten, bietet es sich an, eine allgemeine Darstellung der Eigenwerte anzugeben und zu kategorisieren. Die Eigenwerte sind definiert als die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$det(A - \lambda id) = det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - \lambda spur(A) + det(A)$$
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(spur(A) \pm \sqrt{spur(A)^2 - 4det(A)})$$

Damit kann man nun folgende Bedingungen angeben:

Sattel: $\lambda < 0 < \mu, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow det(A) < 0$

Senken: $\lambda \leq \mu < 0 \Rightarrow det(A) > 0, spur(A) < 0$

stabiler Knoten: $\lambda \leq \mu < 0 \lambda, \mu \in \mathbf{R} \Rightarrow spur(A)^2 > 4det(A)$

Strudel / Spirale: $\lambda = \alpha + i\omega, \alpha < 0 \Rightarrow spur(A)^2 < 4det(A)$

Quellen: $\lambda \geq \mu > 0 \Rightarrow det(A) > 0, spur(A) > 0$

instabiler Knoten: $\lambda \geq \mu > 0 \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow spur(A)^2 > 4det(A)$

instabiler Strudel: $\lambda = \alpha + i\omega, \alpha > 0 \Rightarrow spur(A)^2 < 4det(A)$

Zentrum: $\lambda = \pm i\omega \Rightarrow det(A) > 0, spur(A) = 0$

Damit ergibt sich folgendes Schema:

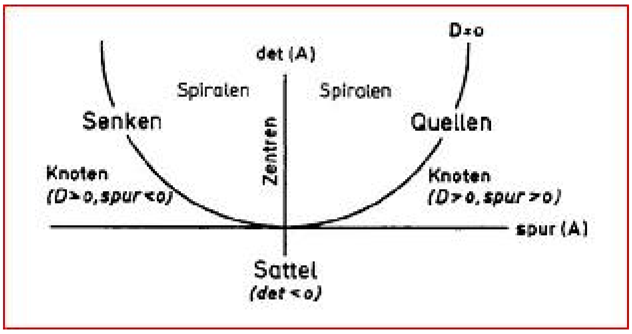


Abbildung 10: Schema

# 4 Literatur

1. Herbert Amann: Gewöhnliche Differentialgleichungen
   Verlag: De Gruyter

2. Prof. M.Schmidt: Skript zum Seminar „Einführung in Dynamische Systeme“ an der Universität Mannheim im HSS 2010