Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

Analysis III
10. Übung
(abzugeben in der Vorlesung am 8. Mai 2012)

2. Mai 2012

36. Duale 1-Formen zu Vektorfeldern.

Es sei $F \in \mathrm{Vec}^\infty(\mathbb{R}^3)$ ein glattes Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$, das nirgends verschwindet. Man *bestimme* ein glattes Tensorfeld α in $T'\mathbb{R}^3$ (eine 1-Differentialform auf $\mathbb{R}^3$), so dass der Kern von α an jeder Stelle orthogonal zu F ist (bezüglich des üblichen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^3$). *(5 Punkte)*

37. Zerfallende 2-Tensoren.

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $n \leq 4$. Ein $\xi \in \bigwedge^2 V$ heißt *zerfallend*, wenn es Vektoren $v, w \in V$ mit $\xi = v \wedge w$ gibt. Die Menge der zerfallenden Elemente von $\bigwedge^2 V$ bezeichnen wir mit M, sie wird auch der *Segré-Kegel* in $\bigwedge^2 V$ genannt. Ferner sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine Basis von V.

Man *zeige*:

(a) Ist $n = 1$, so ist $\bigwedge^2 V = \{0\}$. *(1 Punkt)*

(b) Ist $n = 2$, so wird $\bigwedge^2 V$ von $e_1 \wedge e_2$ aufgespannt, deshalb ist $M = \bigwedge^2 V$. *(1 Punkt)*

(c) Ist $n = 3$, so gilt ebenfalls $M = \bigwedge^2 V$. *(5 Punkte)*

(d) Ist $n = 4$, so gilt für ein Element $\xi \in \bigwedge^2 V$, etwa $\xi = \sum_{1 \leq k < \ell \leq 4} \lambda_{k\ell}\, e_k \wedge e_\ell$ mit $\lambda_{k\ell} \in \mathbb{K}$, genau dann $\xi \in M$, wenn

$$\lambda_{12} \cdot \lambda_{34} - \lambda_{13} \cdot \lambda_{24} + \lambda_{14} \cdot \lambda_{23} = 0 \qquad (*)$$

ist. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *folgere* man, dass $M \setminus \{0\}$ eine 5-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\bigwedge^2 V$ ist. *(10 Punkte)*

[Tipp. Wenn ξ die Gleichung $(*)$ erfüllt, so kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\lambda_{14} \neq 0$ ist; unter dieser Voraussetzung mache man den Ansatz

$$\xi = \big(e_1 + c_2\, e_2 + c_3\, e_3\big) \wedge \big(\widetilde{c}_2\, e_2 + \widetilde{c}_3\, e_3 + \widetilde{c}_4\, e_4\big)$$

mit zu bestimmenden Zahlen $c_2, c_3, \widetilde{c}_2, \widetilde{c}_3, \widetilde{c}_4 \in \mathbb{K}$.]

Bemerkung. Für beliebige Dimension $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$ kann man zeigen, dass der Segré-Kegel durch $M = \{\, \xi \in \bigwedge^2 V \mid \xi \wedge \xi = 0 \in \bigwedge^4 V \,\}$ beschrieben wird.

38. Symplektische Tensoren.

Es sei V ein endlich-dimensionaler, normierter Vektorraum. Ein *symplektischer Tensor* auf V ist ein $\omega \in \bigwedge^2 V'$, das nicht entartet ist; dabei bedeutet letzteres

$$\forall\, v \in V \setminus \{0\}\ \exists\, \widetilde{v} \in V \ :\ \omega(v, \widetilde{v}) \neq 0$$

(wobei wir hier wie auch im Folgenden ω mittels des kanonischen Isomorphismus $V'' \cong V$ auch als Bilinearform $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ auffassen). Es sei ω ein symplektischer Tensor auf V.

(a) *Zeige*, dass die Abbildung

$$V \to V',\; v \mapsto \omega(v,\,\cdot\,)$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist. *(4 Punkte)*

(b) Sei $v \in V$ mit $v \neq 0$. *Zeige*: Es existiert ein zu v linear unabhängiger Vektor $\widetilde{v} \in V$ mit $\omega(v, \widetilde{v}) = 1$, und für jedes solches $\widetilde{v}$ gilt

$$\dim\big(\ker\omega(v,\,\cdot\,) \cap \ker\omega(\widetilde{v},\,\cdot\,)\big) = \dim(V) - 2\,. \qquad \textit{(6 Punkte)}$$

(c) *Beweise*: Die Dimension von V ist notwendigerweise gerade, etwa gilt $\dim(V) = 2n$ mit $n \in \mathbb{N}$, und es existiert eine Basis $(v_1, \ldots, v_n, \widetilde{v}_1, \ldots, \widetilde{v}_n)$ von V mit

$$\omega(v_k, v_\ell) = \omega(\widetilde{v}_k, \widetilde{v}_\ell) = 0 \quad \text{und} \quad \omega(v_k, \widetilde{v}_\ell) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = \ell \\ 0 & \text{für } k \neq \ell \end{cases}$$

für alle $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$. *(5 Punkte)*

39. Lokale Darstellung von Tensorfeldern.

Es sei X eine n-dimensionale, glatte Mannigfaltigkeit, und f ein Tensorfeld in $T^q_p X$. Um die Notation zu vereinfachen, beschränken wir uns auf den Fall $p = 0, q = 2$; für andere Werte von p und q gelten analoge Aussagen. Es sei weiter (U, ϕ) eine Karte von X; die Komponentenfunktionen von ϕ bezeichnen wir mit $\phi_1, \ldots, \phi_n : U \to \mathbb{R}$ und betrachten die davon induzierten, über U definierten Tensorfelder α_k in $T^1_0 X$ mit $\alpha_k(x)(v) = T_x(\phi_k)(v)$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$, $x \in U$ und $v \in T_x X$.

(a) *Zeige*: Es existieren Funktionen $f_{k,\ell} : U \to \mathbb{R}$ ($k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$), so dass

$$f|U = \sum_{k,\ell=1}^{n} f_{k,\ell} \cdot \alpha_k \otimes \alpha_\ell\,,$$

das heißt für alle $x \in U$ und $v, w \in T_x X$

$$f(x)(v, w) = \sum_{k,\ell=1}^{n} f_{k,\ell}(x)\, \alpha_k(x)(v)\, \alpha_\ell(x)(w)$$

gilt; *zeige weiter*, dass diese Funktionen eindeutig bestimmt sind. Diese Art der Beschreibung von f nennt man *Darstellung von f in lokalen Koordinaten.* *(7 Punkte)*

(b) *Zeige*: f ist genau dann glatt, wenn die Funktionen $f_{k,\ell}$ alle glatt sind. *(6 Punkte)*