Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

Analysis III
8. Übung

17. April 2012

(abzugeben in der Vorlesung am 24. April 2012)

29. Die Berechnung der Lieklammer in Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$.

Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, und $F, G \in \mathrm{Vec}^\infty(X)$. Nach Satz 2.22(iii) existieren Vektorfelder $\widetilde{F}, \widetilde{G} \in \mathrm{Vec}^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\widetilde{F}|X = F$ und $\widetilde{G}|X = G$. Mithilfe dieser Fortsetzungen kann die Lieklammer $[F, G]$ berechnet werden; man *zeige* nämlich, dass für $x \in X$

$$[F, G](x) = \widetilde{G}'(x) \cdot F(x) - \widetilde{F}'(x) \cdot G(x)$$

gilt. Dabei bezeichnet $\widetilde{F}'(x)$ bzw. $\widetilde{G}'(x)$ die Jacobi-Matrix von $\widetilde{F}$ bzw. $\widetilde{G}$ an der Stelle x.

(7 Punkte)

30. Kommutativität von Flüssen.

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ Konstanten und die Vektorfelder $F, G \in \mathrm{Vec}^\infty(\mathbb{R}^3)$ gegeben durch

$$F(x_1, x_2, x_3) = (1, x_3, -x_2) \quad \text{und} \quad G(x_1, x_2, x_3) = (a, b, c).$$

(a) *Bestimme* die Flüsse ψ_F und ψ_G von F bzw. G. *(6 Punkte)*

(b) *Berechne* $[F, G]$. *(4 Punkte)*

(c) Man *bestimme auf zweierlei Art*, für welche Wahlen der Konstanten a, b, c die Flüsse ψ_F und ψ_G miteinander kommutieren. *(2+4 Punkte)*

31. Ein Fluss auf der 2-Sphäre.

Es sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die 2-dimensionale Einheitssphäre, $a \in \mathbb{R}$ und wie schon in Aufgabe 28(b) $F \in \mathrm{Vec}^\infty(S^2)$ gegeben durch

$$F(x, y, z) = (a\,y, -a\,x, 0).$$

Sei weiter $M := S^2 \setminus \{(1, 0, 0)\}$. *Finde* eine offene Umgebung W von $\{0\} \times M$ in $\mathbb{R} \times M$, so dass $\psi_F|W$ ein Fluss auf M ist. Ist $\psi_F|W$ ein globaler Fluss auf M? *(5 Punkte)*

32. An Vektorfelder angepasste Karten.

Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $n := \dim(X)$, $x_0 \in X$ und $F \in \mathrm{Vec}^\infty(X)$ ein Vektorfeld mit $F(x_0) \neq 0$. Man *zeige*, dass es eine Karte (U, ϕ) von X mit $x_0 \in U$ und

$$T_x(\phi)^{-1}(e_1) = F(x) \quad \text{für } x \in U$$

gibt. Dabei bezeichnet $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ den ersten Standardeinheitsvektor des $\mathbb{R}^n$.

(12 Punkte)

[Tipp. Sei ψ der Fluss von F. Dann existieren $\varepsilon > 0$ und eine Umgebung $\widehat{U}$ von x_0 in X, so dass ψ mindestens auf $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \widehat{U}$ definiert ist. Man wähle eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit S von $\widehat{U}$ mit $x_0 \in S$ und $F(x_0) \notin T_{x_0}S$ (warum existiert eine solche?). Damit untersuche man $\psi|((-\varepsilon, \varepsilon) \times S)$ in der Nähe von $(0, x_0)$ mithilfe des Satzes von der Umkehrfunktion.]

33. Riemannsche Metriken.

Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wir bezeichnen mit $L(TX, TX; \mathbb{R})$ das Vektorraumbündel, dessen Faser über $x \in X$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Bilinearformen $T_xX \times T_xX \to \mathbb{R}$ ist. Eine *Riemannsche Metrik* auf X ist ein globaler, glatter Schnitt g in diesem Vektorbündel, so dass für $x \in X$ die Bilinearform $g(x)$ jeweils ein Skalarprodukt auf T_xX, also symmetrisch und positiv definit ist.

Zeige: Auf X existiert eine Riemannsche Metrik. *(10 Punkte)*

[Tipp. Ist (U, ϕ) eine Karte von X, so wird durch $g(x)(v, w) = T_x\phi(v) \cdot T_x\phi(w)$ für $x \in U$ und $v, w \in T_xX$ eine Riemannsche Metrik auf U definiert, wobei $\cdot$ auf der rechten Seite der Gleichung das übliche Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ bedeutet. Man „klebe“ derartige Riemannsche Metriken auf Kartenumgebungen mittels einer Zerlegung der Eins zu einer Riemannschen Metrik auf X zusammen.]