Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

Analysis III
5. Übung

13. März 2012

(abzugeben in der Vorlesung am 20. März 2012)

17. Über Schnitte von Vektorbündeln.

Es sei (E, B, π) ein differenzierbares $\mathbb{K}$-Vektorraumbündel, $f, f_1, f_2 : B \to E$ seien glatte Schnitte von (E, B, π), und $g : B \to \mathbb{K}$ sei eine glatte Funktion. *Zeige:*

(a) Der *Nullschnitt* $O : B \to E,\ b \mapsto 0 \in \pi^{-1}[\{b\}]$ ist ein glatter Schnitt. *(2 Punkte)*

(b) $f_1 + f_2$ und $g \cdot f_1$ sind glatte Schnitte von (E, B, π). *(2 Punkte)*

(c) Das Bild $f[B]$ ist eine Untermannigfaltigkeit von E. *(4 Punkte)*

18. Die Tangentialbündel der Sphären der Dimension ≤ 3.

In dieser Aufgabe untersuchen wir das Tangentialbündel der n-dimensionale Sphäre

$$S^n := \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1 \}$$

(siehe auch Aufgabe 4).

(a) *Zeige*, dass S^n eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, und dass für $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n$ gilt:

$$T_x S^n = \{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, v \cdot x = 0 \}\,. \qquad \textit{(3 Punkte)}$$

(b) *Finde* einen nullstellenfreien Schnitt des Tangentialbündels TS^1, und *folgere*, dass das Vektorraumbündel TS^1 trivial ist. *(3 Punkte)*

(c) *Zeige*, dass das Vektorraumbündel TS^3 trivial ist. *(6 Punkte)*

[Tipp. Man benutze Lemma 1.54, und untersuche die folgenden Abbildungen auf S^3:

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) := (-x_2, x_1, x_4, -x_3)\,, \quad f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) := (-x_3, -x_4, x_1, x_2)$$
$$\text{und} \quad f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) := (-x_4, x_3, -x_2, x_1)\,.$$

Bemerkung. Identifiziert man S^3 mit der Einheitssphäre im Raum $\mathbb{H}$ der *Quaternionen*, so entspricht die Anwendung von f_1, f_2 bzw. f_3 mit der Multiplikation mit der reinimaginären Einheitsquaternione i, j bzw. $k = ij$.]

(d) Sei $x_N := (0, 0, 1) \in S^2$ und $x_S := (0, 0, -1) \in S^2$. Mithilfe der stereographischen Projektion (siehe Aufgabe 4(a)) *bestimme* man lokale Trivialisierungen von TS^2 über $U_N := S^2 \setminus \{x_N\}$ und über $U_S := S^2 \setminus \{x_S\}$, und *berechne* die Übergangsfunktion $\phi_{U_N, U_S} : S^2 \setminus \{x_N, x_S\} \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$. *(10 Punkte)*

Bemerkung. Man kann zeigen, dass das Vektorraumbündel TS^2 <u>nicht</u> trivial ist.

19. (a) Das Tangentialbündel eines Vektorraums. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. *Zeige,* dass das Tangentialbündel TV trivial ist, und zwar mit der Faser V. *(4 Punkte)*

(b) Geradenbündel über $\mathbb{R}$. *Beweise:* Jedes *Geradenbündel*, d.h. Vektorraumbündel der Faserdimension 1, über einem offenen Intervall $(a, b) \in \mathbb{R}$ ist trivial. *(8 Punkte)*

[Tipp. Es sei $(E, (a, b), \pi)$ ein Geradenbündel über (a, b), $t_0 \in (a, b)$ fest und

$$J := \{ t \in (a, b) \,|\, \text{Es existiert ein nullstellenfreier Schnitt von } E \text{ auf } (t, t_0) \text{ bzw. auf } (t_0, t) \}\,,$$

wobei in der Definition von J das Intervall (t, t_0) oder (t_0, t) zu wählen ist, je nachdem, ob $t \leq t_0$ oder $t > t_0$ ist. Man zeige, dass $J \neq \varnothing$ ist, und dass J in (a, b) offen und abgeschlossen ist.]

(c) Ein nicht-triviales Geradenbündel über S^1. Auf dem Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ (siehe Aufgabe 4) fixieren wir ein Paar von Antipodenpunkten $p \in S^1$ und $-p \in S^1$. Dann ist mit

$$U_1 := S^1 \setminus \{p\} \quad \text{und} \quad U_2 := S^1 \setminus \{-p\}$$

(U_1, U_2) eine offene Überdeckung von S^1, und $U_1 \cap U_2$ zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten V_+ und V_-.

Man *zeige*, dass indem man die Konstruktion aus Beispiel 1.51 auf die Überdeckung (U_1, U_2) von S^1, $F := \mathbb{R}$ und die Abbildung

$$\phi_{U_1,U_2} : U_1 \cap U_2 \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}),\ x \mapsto \begin{cases} \mathrm{id}_{\mathbb{R}} & \text{für } x \in V_+ \\ -\mathrm{id}_{\mathbb{R}} & \text{für } x \in V_- \end{cases}$$

anwendet, man ein Geradenbündel (E, S^1, π) über S^1 erhält, das <u>nicht</u> trivial ist. E hat die Gestalt eines (unendlich ausgedehnten) *Möbiusbandes.* *(8 Punkte)*

[Tipp zum Nachweis der Nicht-Trivialität von E: Man nehme an, dass E einen nullstellenfreien Schnitt f besitze, dann untersuche man f mithilfe der beiden lokalen Trivialisierungen von E auf U_1 bzw. U_2. Vielleicht möchte man dazu den Zwischenwertsatz auf eine auf V_+ oder V_- definierte Funktion anwenden; das geht, weil $V_\pm$ diffeomorph zu einem reellen Intervall ist.]

20. Klassifikation 1-dim. zusammenhängender differenzierbarer Mannigfaltigkeiten III.

Mit dieser Aufgabe schließen wir die mit den Aufgaben 12 und 16 begonnene Klassifikation der 1-dimensionalen zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten ab. Wie zuvor sei M eine 1-dimensionale, zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit, und $\mathcal{A}$ der in Aufgabe 12 konstruierte maximale Atlas auf M. Nach Aufgabe 16(e) wissen wir, dass für je zwei Karten $(U_\phi, \phi), (U_\psi, \psi) \in \mathcal{A}$ der Schnitt $U_\phi \cap U_\psi$ höchstens zwei Zusammenhangskomponenten besitzt.

(a) Wir setzen in dieser Teilaufgabe voraus, dass für je zwei Karten $(U_\phi, \phi), (U_\psi, \psi) \in \mathcal{A}$ der Schnitt $U_\phi \cap U_\psi$ zusammenhängend ist.

(i) Es sei $\{ (U_i, \phi_i) \mid i \in I \}$ eine Familie von Karten aus $\mathcal{A}$ (wobei $I \neq \varnothing$ eine beliebige Indexmenge ist), so dass für $i, j \in I$ jeweils $\phi_i|(U_i \cap U_j) = \phi_j|(U_i \cap U_j)$ gilt. Man *zeige*, dass es eine Karte $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ gibt, so dass für alle $i \in I$ gilt: $U_i \subset U$ und $\phi|U_i = \phi_i$. *(2 Zusatzpunkte)*

(ii) Wegen (i) enthält $\mathcal{A}$ eine Karte (U_{ϕ_0}, ϕ_0), die maximal ist in dem Sinne, dass sie nicht zu einer Karte aus $\mathcal{A}$ auf einer größeren offenen Menge als U_{ϕ_0} fortgesetzt werden kann. (Das zeigt man mit dem *Zornschen Lemma*, und braucht nicht ausgeführt zu werden.)

Zeige, dass $U_{\phi_0} = M$ gilt, und *folgere*, dass M diffeomorph zu $\mathbb{R}$ ist. *(4 Zusatzpunkte)*

(b) *Zeige*: Wenn $U_\phi \cap U_\psi$ zwei Zusammenhangskomponenten besitzt, dann ist M diffeomorph zu $\mathbb{S}^1$. *(4 Zusatzpunkte)*

[Tipp. Die beiden Karten ϕ und ψ reichen schon aus, um einen Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{S}^1 \to M$ anzugeben. Hierfür untersuche man erneut den Graph Γ aus Aufgabe 16.]