Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

Analysis III
1. Übung

14. Februar 2012

(abzugeben in der Vorlesung am 21. Februar 2012)

1. Eine äquivalente Definition für zusammenhängende Räume.

Sei X ein metrischer Raum. *Zeige*: X ist zusammenhängend. $\Leftrightarrow$ Es existiert kein Paar (U, V) von nicht-leeren, disjunkten, offenen Teilmengen $U, V \subset X$, so dass $X = U \cup V$ gilt. *(6 Punkte)*

2. Über zusammenhängende Komponenten.

Seien $A, B \subset \mathbb{R}^2$ Teilmengen, die durch $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ und } y \in [-1, 1]\}$ und $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}^+ \text{ und } y = \sin(\frac{1}{x})\}$ gegeben sind und sei $M \subset \mathbb{R}^2$ definiert durch $M := A \cup B$.

(a) *Zeige*, dass M zusammenhängend ist. *(8 Punkte)*
[Tipp. Zeige, dass $\overline{B} = M$ gilt und benutze Satz 1.8.]

(b) Sei $y \in [-1, 1]$ und $\varepsilon < 1$. Da $\overline{B} = M$ gilt, gibt es ein $x \in \mathbb{R}^+$ mit $(x, \sin(\frac{1}{x})) \in (0, \varepsilon) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$. *Bestimme* für ein solches $x \in \mathbb{R}^+$ die Zusammenhangskomponente des Punktes $(x, \sin(\frac{1}{x}))$ in $M \cap ((0, \varepsilon) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon))$. *(6 Punkte)*
[Tipp. Benutze Satz 1.7.]

(c) *Zeige* mithilfe von (b), dass M nicht lokal zusammenhängend ist. *(6 Punkte)*

(d) *Zeige* durch einen Widerspruchsbeweis, dass kein stetiger Weg $\gamma : [0, 1] \to M$ mit Anfangspunkt $\gamma(0) \in A$ und Endpunkt $\gamma(1) \in B$ existiert. Daraus folgt, dass M *nicht weg-zusammenhängend* ist. *(6 Punkte)*
[Tipp. Man nehme an, die Behauptung sei falsch. Dann ist die Menge $\gamma^{-1}[A]$ abgeschlossen und besitzt ein Maximum. Dadurch wird ein Element $y \in [-1, 1]$ definiert, so dass man durch Anwendung von Teilaufgabe (b) zu einem Widerspruch gelangt.]

3. Beispiele differenzierbarer Mannigfaltigkeiten.

(a) Wir betrachten die Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^2$ aus Aufg. 2 als metrisierbaren, separablen topologischen Raum. *Bestimme* einen Atlas $\mathcal{A}$ für B und *zeige*, dass $(B, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension 1 ist. *(6 Punkte)*

Bitte wenden.

(b) Wir betrachten den Zylinder $Z = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ als metrisierbaren, separablen topologischen Raum. Für festes $\theta \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Abbildung

$$\psi_\theta : \mathbb{R} \times (\theta, \theta + 2\pi) \to Z, \quad (t, s) \mapsto (t, \cos(s), \sin(s)).$$

Zeige:

(i) Die Abbildung ψ_θ ist ein Homöomorphismus in Z. Daher definiert die Umkehrabbildung $\phi_\theta := \psi_\theta^{-1} : \psi_\theta[\mathbb{R} \times (\theta, \theta + 2\pi)] \to \mathbb{R}^2$ eine Karte für Z. *(6 Punkte)*

(ii) Durch $\mathcal{A} = \{\phi_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ wird auf Z eine differenzierbare Struktur definiert, d.h. $(Z, \mathcal{A})$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension 2. *(6 Punkte)*

Das **Tutorium** findet erstmals am

Mittwoch, den 15. Februar 2012

um **13.45–15.15 Uhr** in **A5, Raum C 013** statt.