Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

Analysis III
2. Übung
(abzugeben in der Vorlesung am 28. Februar 2012)

21. Februar 2012

4. Die Sphäre als differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Wir betrachten $\mathbb{R}^{n+1}$ auf die übliche Weise als euklidischen Vektorraum, dessen kanonische Basis wir mit $(e_0, \dots, e_n)$ bezeichnen. Unter der *n-dimensionalen Sphäre* verstehen wir die Teilmenge

$$\mathbb{S}^n := \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\| = 1\}.$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, wie man $\mathbb{S}^n$ auf natürliche Weise als n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit auffassen kann. Dazu *zeige* man:

(a) Ist $p \in \mathbb{S}^n \setminus \{e_0\}$, so schneidet die Gerade durch die Punkte $e_0 \in \mathbb{S}^n$ und p die Hyperebene

$$H := \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, e_0 \rangle = 0\} = \{0\} \times \mathbb{R}^n$$

in genau einem Punkt, den wir mit $F(p)$ bezeichnen wollen. *Bestimme* eine explizite Formel für $F(p)$. Die dadurch definierte Abbildung $F : \mathbb{S}^n \setminus \{e_0\} \to H$ heißt *stereographische Projektion.* *(8 Punkte)*

(b) $F : \mathbb{S}^n \setminus \{e_0\} \to H$ ist ein Homöomorphismus auf H. Indem wir H mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren, wird $(\mathbb{S}^n \setminus \{e_0\}, F)$ daher eine Karte für $\mathbb{S}^n$. *(8 Punkte)*

(c) Sei $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1},\ (v_0, v_1, \dots, v_n) \mapsto (-v_0, v_1, \dots, v_n)$ die Spiegelung an $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist $\widetilde{F} := F \circ \Phi : \mathbb{S}^n \setminus \{-e_0\} \to H$ eine weitere Karte von $\mathbb{S}^n$. *(5 Punkte)*

(d) Die beiden Karten F und $\widetilde{F}$ sind verträglich. Daher ist $(\mathbb{S}^n, \mathcal{A})$ mit

$$\mathcal{A} := \{(\mathbb{S}^n \setminus \{e_0\}, F), (\mathbb{S}^n \setminus \{-e_0\}, \widetilde{F})\}$$

eine differenzierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit. *(5 Punkte)*

5. Über die Verträglichkeit differenzierbarer Strukturen.

Betrachte den Homöomorphismus $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$ und den Atlas $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, \mathrm{Id})\}$ von $\mathbb{R}$ (aufgefasst als differenzierbare Mannigfaltigkeit $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$), der nur aus der Karte $(\mathbb{R}, \mathrm{Id})$ besteht. Dieser Atlas $\mathcal{A}$ wird die natürliche differenzierbare Struktur von $\mathbb{R}$ genannt.

Gebe einen Homöomorphismus $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *an*, der die natürliche differenzierbare Struktur von $\mathbb{R}$ auf eine nicht-verträgliche differenzierbare Struktur von $\mathbb{R}$ abbildet. *(8 Punkte)*

6. Über diffeomorphe Mannigfaltigkeiten.

Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. *Zeige*, dass M und N genau dann diffeomorph sind, wenn eine glatte Abbildung $f : M \to N$ existiert, die bijektiv ist und deren Umkehrabbildung auch glatt ist. *(8 Punkte)*

Bitte wenden.

7. Eine Zerlegung der Eins für das Intervall $(0, 4)$.

Wir betrachten das offene Intervall $M := (0, 4)$ als 1-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann sind

$$U_1 := (0, 2), \quad U_2 := (1, 3) \quad \text{und} \quad U_3 := (2, 4)$$

offene Teilmengen von M, die gemeinsam eine offene Überdeckung von M bilden. Man *gebe* eine dieser Überdeckung angepasste Zerlegung der Eins *an*, d.h. man bestimme Funktionen $f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(M)$ mit

$$0 \leq f_k \leq 1, \quad \mathrm{Tr}(f_k) \subset U_k \quad \text{für } k = 1, 2, 3$$

und

$$f_1 + f_2 + f_3 = 1.$$

(8 Punkte)