Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

Analysis III
4. Übung
(abzugeben in der Vorlesung am 13. März 2012)

06. März 2012

13. Über das kartesische Produkt zweier differenzierbarer Mannigfaltigkeiten.

Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension $\dim(M) = m$ und $\dim(N) = n$. *Zeige*, dass $M \times N$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $m + n$ ist. *(8 Punkte)*

[Tipp. Wenn $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ bzw. $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ Karten von M bzw. N sind, so ist $\phi \times \psi : U \times V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n,\ (x, y) \mapsto (\phi(x), \psi(y))$ eine Karte für $M \times N$.]

14. Über Untermannigfaltigkeiten und Einbettungen.

(a) Sei $a > 0$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) = \left(a - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2.$$

Zeige, dass das Urbild $f^{-1}[\{b^2\}]$ für jedes b mit $0 < b < a$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. *(6 Punkte)*

(b) Man *untersuche mit Beweis*, für genau welche $t \in \mathbb{R}$

$$A := \{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = t \}$$

eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. *(8 Punkte)*

(c) Sei $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$ und $f : S \to \mathbb{R}^5$ definiert durch

$$f(x, y, z) = \left(xy, xz, yz, \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2), \tfrac{1}{2\sqrt{3}}(x^2 + y^2 - 2z^2)\right).$$

(i) *Zeige*, dass f eine Immersion ist. *(4 Punkte)*

(ii) *Zeige*, dass für $(x, y, z), (\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \in S$ gilt:

$$f(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = f(x, y, z) \iff (\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = \pm(x, y, z)\ . \qquad (*)$$

Daher ist $f : S \to \mathbb{R}^5$ keine Einbettung. *(6 Punkte)*

[Tipp. Man betrachte die komplexen Zahlen $w := x + iy$ und $\widetilde{w} := \widetilde{x} + i\widetilde{y}$, und untersuche die Gleichung $w^2 - \widetilde{w}^2 = 0$.]

Bemerkung. Identifiziert man in S jeweils die Antipodenpunkte (d.h. $\pm(x, y, z)$) miteinander, so erhält man den sogenannten 2-*dimensionalen reell-projektiven Raum* $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Aus $(*)$ ergibt sich, dass f eine *injektive* Immersion $\widetilde{f} : \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{R}^5$ induziert, von der man zeigen kann, dass es sich tatsächlich sogar um eine Einbettung handelt. $\widetilde{f}$ ist eine Variante der sogenannten *Veronese-Einbettung*.

15. Über die Tangentialabbildung.

(a) *Beweise* die Teile (i)–(iv) aus Satz 1.35 der Vorlesung ausführlich. *(4+4+4+3 Punkte)*

(b) Es seien X und Y differenzierbare Mannigfaltigkeiten, wobei X zusammenhängend sei, und $f : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung. *Zeige*, dass f genau dann konstant ist, wenn $T_x(f) = 0$ für alle $x \in X$ gilt. *(3 Punkte)*

16. Klassifikation 1-dim. zusammenhängender differenzierbarer Mannigfaltigkeiten II.

In dieser Aufgabe wird die in Aufgabe 12 begonnene Klassifikation der 1-dimensionalen, zusammenhängenden differenzierbaren Mannigfaltigkeiten fortgesetzt. Dazu sei M eine 1-dimensionale differenzierbare zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Wir entnehmen aus Aufgabe 12 das Ergebnis, dass M einen Atlas $\mathcal{A}$ besitzt, der die folgende Eigenschaft hat:

$$\text{Jede Karte } (U_\phi, \phi) \in \mathcal{A} \text{ bildet auf ein offenes Intervall } I_\phi \text{ ab, d.h. } \phi : U_\phi \to I_\phi \text{ und}$$
$$\text{für zwei Karten } (U_\phi, \phi), (U_\psi, \psi) \text{ mit } U_\phi \cap U_\psi \neq \emptyset \text{ gilt } |(\psi \circ \phi^{-1})'| = 1. \qquad (*)$$

Wir können dabei voraussetzen (das soll nicht bewiesen werden), dass der Atlas $\mathcal{A}$ maximal unter der Eigenschaft $(*)$ ist, das soll heißen: ist (U_ϕ, ϕ) eine mit $\mathcal{A}$ verträgliche Karte, so dass der Atlas $\mathcal{A} \cup \{(U_\phi, \phi)\}$ immer noch die Eigenschaft $(*)$ erfüllt, so ist $(U_\phi, \phi) \in \mathcal{A}$.

Es seien nun $\phi : U_\phi \to I_\phi$ und $\psi : U_\psi \to I_\psi$ zwei Karten aus $\mathcal{A}$. Wir zeigen hier, dass $U_\phi \cap U_\psi$ höchstens zwei Zusammenhangskomponenten besitzt, und zwar mit den folgenden Schritten:

(a) Wir betrachten die Teilmenge

$$\Gamma := \{\, (s,t) \in I_\phi \times I_\psi \mid \phi^{-1}(s) = \psi^{-1}(t) \,\}$$

des kartesischen Produktes $I_\phi \times I_\psi$. *Zeige*, dass Γ abgeschlossen in $I_\phi \times I_\psi$ ist, und dass

$$\Gamma = \{\, \big(\phi(x), \psi(x)\big) \,\big|\, x \in U_\phi \cap U_\psi \,\}$$

gilt. *(2 Zusatzpunkte)*

(b) Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\gamma : J \to \Gamma$ eine differenzierbare Funktion (ein „Weg“ in Γ). *Beweise*, dass für alle $t \in J$

$$\gamma'(t) \in \mathbb{R} \cdot (1, \varepsilon)$$

mit einem $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ gilt. Daher(?) sind die Zusammenhangskomponenten von Γ Geradenstücke der Steigung ± 1. *(4 Zusatzpunkte)*

(c) *Zeige*, dass die Zusammenhangskomponenten von Γ „auf dem Rand von $I_\phi \times I_\psi$ enden“, das soll heißen, dass $\partial\Gamma \subset \partial(I_\phi \times I_\psi)$ gilt. *(3 Zusatzpunkte)*

[Tipp. Angenommen, ein Randpunkt (s_0, t_0) von Γ läge im Innern von $I_\phi \times I_\psi$. Dann zeige man, dass $\phi^{-1}(s_0) \in U_\phi \cap U_\psi$ ist, und benutze diese Tatsache, um eine Verlängerung der Zusammenhangskomponente von Γ durch (s_0, t_0) zu konstruieren.]

(d) Mit Hilfe der Injektivität von $\psi \circ \phi^{-1}$ *mache man sich klar*, dass auf jeder Kante von $I_\phi \times I_\psi$ höchstens ein Randpunkt von Γ liegen kann, und *folgere* daraus, dass Γ höchstens zwei Zusammenhangskomponenten besitzt. *(3 Zusatzpunkte)*

(e) Nun *schließe* man, dass $U_\phi \cap U_\psi$ höchstens zwei Zusammenhangskomponenten hat. *(3 Zusatzpunkte)*

[Tipp. Die Projektion von Γ auf I_ϕ ist gleich $\phi[U_\phi \cap U_\psi]$.]