Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

Analysis III
6. Übung

20. März 2012

(abzugeben in der Vorlesung am 27. März 2012)

21. Extrapolation von Schnitten eines Vektorraumbündels.

Es sei (E, B, π) ein Vektorraumbündel, $b_0 \in B$ und $v \in \pi^{-1}[\{b_0\}]$. *Zeige:* Es existiert ein globaler Schnitt $f : B \to E$ mit $f(b_0) = v$. *(10 Punkte)*

[Tipp. Man verwende eine lokale Trivialisierung von π in der Nähe von b_0, sowie eine Zerlegung der Eins auf B.]

22. Trivialität von Homomorphismenbündeln.

Es seien (E, B, π) und (E', B, π') zwei Vektorraumbündel über der differenzierbaren Mannigfaltigkeit B. Wir betrachten das Homomorphismenbündel $(\mathrm{Hom}(E, E'), B, \pi'')$ zu diesen beiden Bündeln.

(a) *Zeige:* Wenn die Bündel E und E' beide trivial sind, so ist auch $\mathrm{Hom}(E, E')$ trivial. *(5 Punkte)*

(b) *Beweise oder widerlege:* Wenn $\mathrm{Hom}(E, E')$ trivial ist, so sind auch E und E' trivial. *(5 Punkte)*

[Tipp. Man untersuche das „Möbiusband“ aus Aufgabe 19(c) als Vektorraumbündel über $B = S^1$.]

23. Das duale Bündel zu einem Vektorraumbündel.

Es sei (E, B, π) ein Vektorraumbündel über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit B vom Fasertyp $F := \mathbb{K}^n$. Weiter sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von B, so dass π über jedem $U \in \mathcal{U}$ trivial ist; wir bezeichnen für $U, V \in \mathcal{U}$ mit $\phi_{U,V} : U \cap V \to \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n),\ x \mapsto \phi_{U,V}(x) = g_{UV}(x)$ die zugehörigen Kozykel für (E, B, π).

Zeige, dass das duale Bündel (E', B, π') zu π bezüglich $\mathcal{U}$ durch die Kozykel $(\phi'_{U,V})_{U,V\in\mathcal{U}}$ mit

$$\phi'_{U,V} : U \cap V \to \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n),\ x \mapsto \big((g_{UV}(x))^t\big)^{-1}$$

beschrieben wird, wobei wir für $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$ mit A^t die transponierte Matrix zu A bezeichnen. *(6 Punkte)*

24. Klassifikation der Geradenbündel über S^1.

Wir wollen in dieser Aufgabe beweisen, dass jedes Geradenbündel (d.h. Vektorraumbündel der Faserdimension 1) über dem Einheitskreis S^1 entweder trivial, oder aber zum (in Aufgabe 19(c) beschriebenen) Möbiusband isomorph ist.

Dazu sei (E, S^1, π) ein Geradenbündel über S^1. Wir fixieren $p_0 \in S^1$. Dann ist (U_1, U_2) mit $U_1 := S^1 \setminus \{p_0\}$ und $U_2 := S^1 \setminus \{-p_0\}$ offensichtlich eine offene Überdeckung von S^1, und $U_1 \cap U_2 = S^1 \setminus \{p_0, -p_0\}$ zerfällt in die beiden Zusammenhangskomponenten V_+ und V_-. Nun gehe man wie folgt vor:

(a) Mittels Aufgabe 19(b) *zeige* man, dass es lokale Trivialisierungen $\phi_k : \mathbb{R} \times U_k \to \pi^{-1}[U_k]$ von π gibt, und dass damit $f_k : U_k \to E,\ p \mapsto \phi_k(1,p)$ ein nullstellenfreier Schnitt von π über U_k ist. *(4 Punkte)*

(b) Man *überlege sich*, dass es genau eine Funktion $\chi : U_1 \cap U_2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\forall p \in U_1 \cap U_2 \ : \ \phi_2(\chi(p), p) = f_1(p)$$

gibt, und *begründe*, dass diese nullstellenfrei ist, und auf V_+ bzw. auf V_- ihr Vorzeichen nicht wechselt. *(4 Punkte)*

(c) Wenn χ auf V_+ und auf V_- dasselbe Vorzeichen hat, dann *zeige* man, dass das Bündel π trivial ist. *(8 Punkte)*

[Tipp. Man konstruiere einen globalen Schnitt für π, indem man mithilfe einer Zerlegung der Eins f_1 in der Nähe von $-p_0$ geeignet modifiziert. Dabei bedenke man, dass es durchaus möglich ist, dass χ bei Annäherung gegen $-p_0$ gegen $\pm\infty$ geht.]

(d) Wir betrachten nun den Fall, dass χ auf V_+ und V_- unterschiedliche Vorzeichen annimmt; ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\chi|V_+ > 0$ und $\chi|V_- < 0$. Dann bezeichnen wir mit (E_M, S^1, π_M) das Möbiusband aus Aufgabe 19(c), und mit $\phi_{M,k} : \mathbb{R} \times U_k \to \pi_M^{-1}[U_k]$ dessen Trivialisierungen über U_k, so dass die Übergangsabbildung die in Aufgabe 19(c) gegebene ist. Man *zeige*, dass es genau einen Isomorphismus von Vektorraumbündeln $g : E \to E_M$ mit

$$\forall p \in U_1 \ : \ g(f_1(p)) = \phi_{M,1}(1,p) \quad \text{und} \quad \forall p \in U_2 \ : \ g(f_2(p)) = \frac{1}{|\chi(p)|} \cdot \phi_{M,2}(1,p)$$

gibt. *(8 Punkte)*