Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

Analysis III
12. Übung

(abzugeben in der Vorlesung am 22. Mai 2012)

15. Mai 2012

44. Über orientierbare Mannigfaltigkeiten.

(a) *Zeige:* Die n-dimensionale Sphäre S^n ist orientierbar. *(4 Punkte)*

(b) Aus den Aufgaben 12, 16, und 20 wissen wir, dass jede 1-dimensionale, zusammenhängende, glatte Mannigfaltigkeit entweder zu $\mathbb{R}$ oder zu S^1 diffeomorph ist. *Folgere* hieraus:

(i) Jede 1-dimensionale Mannigfaltigkeit ist orientierbar. *(2 Punkte)*

(ii) Ist X eine 1-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, so sind alle differenzierbaren Strukturen auf X zueinander diffeomorph. *(2 Punkte)*

(c) *Zeige:* Es seien X und Y orientierbare, differenzierbare Mannigfaltigkeiten. *Zeige,* dass dann auch $X \times Y$ orientierbar ist. *(4 Punkte)*

(d) Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. *Zeige,* dass X in jedem Fall lokal orientierbar ist. Genauer gesagt: Ist (U, ϕ) eine Karte von X mit $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) : U \to \mathbb{R}^n$, so *zeige* man, dass $\mathrm{d}\phi_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\phi_n$ eine nullstellenfreie n-Differentialform auf U ist. *(4 Punkte)*

(e) *Beweise*, dass das Tangentialbündel TX einer jeden differenzierbaren Mannigfaltigkeit X orientierbar ist. *(6 Punkte)*

45. Gleichungsdefinierte orientierte Hyperflächen. Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung und $q \in \mathbb{R}$ so, dass $X := f^{-1}(\{q\}) \neq \varnothing$ und $f|X$ submersiv ist. *Zeige*, dass X eine $(n-1)$-dimensionale, orientierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist. *(8 Punkte)*

[Tipp. Ist ω eine Volumenform auf $\mathbb{R}^n$ und F das Gradientenvektorfeld von f (d.h. es gilt $T_x(f)(v) = F(x) \cdot v$, wobei $\cdot$ das Standard-Skalarprodukt von $\mathbb{R}^n$ bezeichnet), so untersuche man $i_F\omega|X$.]

46. Integration auf dem Einheitskreis. Es sei ω eine 1-Differentialform auf dem Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, den wir mithilfe der Parameterisierung

$$f : \mathbb{R} \to S^1,\ t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

betrachten.

(a) *Zeige*, dass

$$\int_{S^1} \omega = \int_{[0,2\pi]} f^*\omega$$

gilt. *(5 Punkte)*

[Tipp. Natürlich soll Korollar 3.24 angewendet werden. So ganz ohne Zusatzüberlegung geht das aber nicht, weil $f|[0, 2\pi]$ nicht injektiv ist...]

(b) Man *folgere* aus (a) den *Satz von Stokes* für S^1. Mehr noch: man *zeige*, dass ω genau dann exakt ist, wenn

$$\int_{S^1} \omega = 0$$

gilt. *(5 Punkte)*

47. Eine Differentialform, die geschlossen, aber nicht exakt ist.

Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ betrachten wir die 1-Differentialform

$$\omega := -\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\ .$$

(a) *Zeige*, dass ω geschlossen ist. *(4 Punkte)*

(b) *Berechne* $\int_{S^1} \omega$. *(4 Punkte)*

(c) *Folgere* aus (b), dass ω nicht exakt ist. *(2 Punkte)*

[Tipp. Aufgabe 46.]

Bemerkung. Wegen $\mathrm{d}(\mathrm{d}\eta) = 0$ ist in jedem Fall jede exakte Differentialform geschlossen. Das *Lemma von Poincaré* besagt, dass auf *sternförmigen* Gebieten im $\mathbb{R}^n$ auch die Umkehrung gilt: jede geschlossene Differentialform ist exakt. Das Beispiel dieser Übungsaufgabe zeigt, dass diese Aussage auf allgemeinen Gebieten nicht richtig ist: auf dem nicht-sternförmigen Gebiet $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ existiert eine geschlossene 1-Differentialform, die nicht exakt ist.