

9. Übung

(abzugeben in der Vorlesung am 2. Mai 2012)

Im gesamten Übungsblatt seien V, V_1, \dots, V_n, W **endlich-dimensionale**, normierte Vektorräume über \mathbb{K} .

34. (a) **Dimension von $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_n; W)$.** Zeige, dass

$$\dim \mathcal{L}(V_1, \dots, V_n; W) = \dim(V_1) \cdot \dots \cdot \dim(V_n) \cdot \dim(W)$$

gilt.

(6 Punkte)

[Tipp. Ausgehend von Basen der V_k und von W überlege man sich, wie eine Basis von $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_n; W)$ aussieht.]

(b) **Alternative Beschreibungen der Norm auf $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_n; W)$.** Nach Vorlesung ist die Norm auf $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_n; W)$ durch

$$\|A\| := \sup\{ \|A(x_1, \dots, x_n)\| \mid x_k \in V_k, \|x_k\| \leq 1 \}$$

für $A \in \mathcal{L}(V_1, \dots, V_n; W)$ gegeben. Beweise, dass die folgenden beiden alternativen Beschreibungen dieser Norm gelten:

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup\{ \|A(x_1, \dots, x_n)\| \mid x_k \in V_k, \|x_k\| = 1 \} \\ &= \sup\left\{ \left\| A\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|}\right) \right\| \mid x_k \in V_k \setminus \{0\} \right\}. \end{aligned}$$

(6 Punkte)

(c) **Ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{L}(V; W)$ und $\mathcal{L}(V, W'; \mathbb{K})$.** Zeige, dass die Abbildung

$$\Phi : \mathcal{L}(V; W) \rightarrow \mathcal{L}(V, W'; \mathbb{K}), \quad A \mapsto \Phi(A)$$

mit

$$\Phi(A) : V \times W' \rightarrow \mathbb{K}, \quad (v, B) \mapsto (B \circ A)(v)$$

ein Isomorphismus der normierten Vektorräume $\mathcal{L}(V; W)$ und $\mathcal{L}(V, W'; \mathbb{K})$ ist; das bedeutet: Φ ist ein Vektorraum-Isomorphismus, der zusätzlich die Norm respektiert, d.h. für alle $A \in \mathcal{L}(V; W)$ gilt

$$\|\Phi(A)\| = \|A\|.$$

(6 Punkte)

35. **Das Tensorprodukt endlich-dimensionaler Vektorräume.**

(a) *Belege jeweils durch ein Beispiel*, dass im Allgemeinen

(i) das Tensorprodukt von Vektoren

$$V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_n, \quad (v_1, \dots, v_n) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_n$$

selbst dann nicht kommutativ ist, wenn $V_1 = \dots = V_n$ ist; (6 Punkte)

(ii) nicht jeder Vektor in $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ kohärent ist. (6 Punkte)

- (b) *Zeige*, dass in $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ die lineare Hülle der kohärenten Vektoren ganz $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ ist, das heißt, dass sich jedes Element von $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ als endliche Linearkombination kohärenter Vektoren schreiben läßt. (6 Punkte)
- (c) *Konstruiere* Isomorphismen von normierten Vektorräumen, um die folgenden natürlichen Isomorphismen zu beweisen:
- (i) $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_n; W) \cong \mathcal{L}(V_1 \otimes \dots \otimes V_n; W)$ (6 Punkte)
- (ii) $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ (4 Punkte)
- (iii) $\mathcal{L}(V; W) \cong V' \otimes W$. (4 Punkte)

