Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

Analysis III
Letzte Übung
(abzugeben in der Vorlesung am 29. Mai 2012)

22. Mai 2012

48. Eine Integration.

Es sei eine 1-Form auf $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\omega := y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y\ .$$

Wir betrachten die Einschränkung von ω auf die 2-Sphäre S^2, gegeben durch

$$S^2 = \{\, (\sin(\varphi)\sin(\vartheta), \cos(\varphi)\sin(\vartheta), \cos(\vartheta)) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, \varphi \in [0, 2\pi), \vartheta \in [0, \pi] \,\}\ .$$

Man *bestätige durch Rechnung*, dass in dieser konkreten Situation der Satz von Stokes gilt, das heißt, dass

$$\int_{S^2} \mathrm{d}\omega = 0$$

ist. *(20 Punkte)*

[Tipp. Man verwende die Parametrisierung von S^2

$$f : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to S^2,\ (\varphi, \vartheta) \mapsto (\sin(\varphi)\sin(\vartheta), \cos(\varphi)\sin(\vartheta), \cos(\vartheta))\ ,$$

und überlege sich, wie man mit dem Problem umgehen soll, dass f nicht überall injektiv ist, und nicht überall immersiv ist.]

49. Die Divergenz von Vektorfeldern und der Integralsatz von Gauß.

Es sei X eine glatte, kompakte, orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und ω eine Volumenform (d.h. eine n-Differentialform ohne Nullstellen) auf X. Ferner sei $F \in \mathrm{Vec}^\infty(X)$.

(a) Man *zeige*, dass es genau eine Funktion $\mathrm{div}^\omega F \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ gibt, so dass

$$\mathrm{div}^\omega(F) \cdot \omega = \mathrm{d}(i_F \omega)$$

gilt. Die Funktion $\mathrm{div}^\omega(F)$ heißt die *Divergenz* des Vektorfeldes F bezüglich der Volumenform ω. *(5 Punkte)*

(b) In dieser Teilaufgabe sei $X \subset \mathbb{R}^n$ mit $\overline{X^0} = X$, und $\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$ sei die Standard-Volumenform des $\mathbb{R}^n$. Wir schreiben $F = (F_1, \ldots, F_n)$ mit Funktionen $F_k \in \mathrm{C}^\infty(X, \mathbb{R})$. *Zeige,* dass dann

$$\mathrm{div}^\omega(F) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}$$

gilt, mit anderen Worten: In dieser Situation stimmt die in (a) definierte Divergenz mit der üblichen Divergenz der Funktion $F : X \to \mathbb{R}^n$ überein. *(5 Punkte)*

(c) Man *beweise* den *Integralsatz von Gauß*:

$$\int_X \mathrm{div}^\omega(F) \cdot \omega = \int_{\partial X} i_F \omega\ . \qquad (5\ Punkte)$$

Kombiniert man dieses Ergebnis mit (b), so erhält man für die Situation von (b) den klassischen Gaußschen Integralsatz.

50. Volumenformen auf kompakten, zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten.

Es sei X eine kompakte, zusammenhängende, orientierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit (ohne Rand), und ω eine nullstellenfreie n-Differentialform auf X. Man *zeige*, dass ω nicht exakt sein kann. *(15 Punkte)*

[Tipp. Man berechne $\int_X \omega$ auf zweierlei Art: Einerseits mit dem Satz von Stokes, und andererseits nach Definition 3.23.]