Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

Analysis III
11. Übung

8. Mai 2012

(abzugeben in der Vorlesung am 15. Mai 2012)

40. Geschlossene und exakte Differentialformen.

Eine p-Differentialform ω auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X heißt *geschlossen*, wenn $\mathrm{d}\omega = 0$ gilt, und sie heißt exakt, wenn es eine $(p-1)$-Differentialform θ auf X mit $\omega = \mathrm{d}\theta$ gibt.

Es sei nun $X = \mathbb{R}^3$, und es seien $x, y, z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die üblichen Koordinaten-Projektionen von $\mathbb{R}^3$. Man *untersuche*, ob die folgenden Differentialformen ω geschlossen sind und ob sie exakt sind; gegebenenfalls *finde* man auch eine Differentialform θ auf $\mathbb{R}^3$ mit $\omega = \mathrm{d}\theta$.

(a) $\omega = yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$ *(6 Zusatzpunkte)*

(b) $\omega = x\,\mathrm{d}x + x^2y^2\,\mathrm{d}y + yz\,\mathrm{d}z$ *(4 Zusatzpunkte)*

(c) $\omega = 2xy^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ *(8 Zusatzpunkte)*

41. Über das Zurückziehen von Differentialformen.

(a) Es seien X, Y differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension n und $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung. Weiter seien Karten $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) : V \to \mathbb{R}^n$ auf offenen Teilmengen $U \subset X$ bzw. $V \subset Y$ mit $f(U) \subset V$ gegeben. Man *zeige*, dass unter diesen Voraussetzungen für jede glatte Funktion $g \in C^\infty(V, \mathbb{R})$ gilt:

$$f^*(g\,\mathrm{d}\psi_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\psi_n) = (g \circ f) \cdot \det\left(\frac{\partial(\psi_j \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\right) \cdot \mathrm{d}\phi_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\phi_n\,.$$

(8 Zusatzpunkte)

[Tipp. Man verwende die bekannte Formel $\langle A_1 \wedge \dots \wedge A_p, v_1 \otimes \ldots \otimes v_p \rangle = \det\big(A_i(v_j)\big)_{i,j}$, siehe S. 67 des Skripts.]

(b) Wir betrachten auf $\mathbb{R}^3$ die *kanonische Volumenform*, das ist die 3-Differentialform $\omega := \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, sowie die *sphärischen Koordinaten*, d.h. die glatte Abbildung

$$f : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3,\ (r, \vartheta, \varphi) \mapsto \big(\, r\,\cos(\vartheta)\,\cos(\varphi)\,,\ r\,\cos(\vartheta)\,\sin(\varphi)\,,\ r\,\sin(\vartheta)\,\big)\ .$$

Berechne „ ω in sphärischen Koordinaten“, das heißt, die Zurückziehung $f^*\omega$.

(8 Zusatzpunkte)

42. Aus der symplektischen Geometrie.

Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine 2-Differentialform ω auf X heißt *symplektische Form*, wenn ω geschlossen ist (d.h. $\mathrm{d}\omega = 0$ gilt), und für jedes $x \in X$ der alternierende Tensor $\omega(x) \in \bigwedge^2 T'_x M$ nicht entartet ist (siehe Aufgabe 38). In dieser Situation nennt man das Paar (X, ω) eine *symplektische Mannigfaltigkeit.*

Man *zeige* für eine symplektische Mannigfaltigkeit (X, ω) die folgenden Aussagen. Dabei sollen die Ergebnisse von Aufgabe 38 verwendet werden.

(a) Die Dimension von X ist notwendigerweise gerade. *(1 Zusatzpunkt)*

(b) Die Abbildung

$$TM \to TM', \ v \mapsto i_v\omega = \langle \omega, v \otimes \Box \rangle$$

ist ein Vektorbündel-Isomorphismus. Daher existiert zu jeder Funktion $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ genau ein Vektorfeld $H_f \in \mathrm{Vec}^\infty(X)$ mit

$$i_{H_f}\omega = \mathrm{d}f \ .$$

H_f heißt das *Hamiltonsche Vektorfeld* zu f. *(3 Zusatzpunkte)*

(c) Sei $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$. Jede Integralkurve $c : (a, b) \to X$ des Hamiltonschen Vektorfelds H_f ist eine Niveaulinie von f (d.h. $f \circ c$ ist konstant). *(4 Zusatzpunkte)*

43. Es sei X eine 3-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, und ω eine nirgends verschwindende 1-Differentialform auf X, so dass es eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit P von X mit $\omega|TP = 0$ gibt. *Zeige*, dass für jedes $x \in P$ gilt:

$$(\omega \wedge \mathrm{d}\omega)(x) = 0 \ .$$ *(8 Zusatzpunkte)*

[Tipp. Man stelle ω bezüglich einer Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ von X mit $x \in U$ dar, für die $\phi(U \cap P) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ gilt.]