Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

Analysis III
7. Übung

27. März 2012

(abzugeben in der Vorlesung am 17. April 2012)

25. Die Lieklammer von Vektorfeldern. Wir betrachten drei glatte Vektorfelder auf $\mathbb{R}^4$, deren Einschränkungen auf S^3 schon in Aufgabe 18(c) eine Rolle spielten:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) := (-x_2, x_1, x_4, -x_3)\;, \quad G(x_1, x_2, x_3, x_4) := (-x_3, -x_4, x_1, x_2)$$
$$\text{und} \quad H(x_1, x_2, x_3, x_4) := (-x_4, x_3, -x_2, x_1)\;.$$

(a) *Berechne* $[F, G]$, $[G, H]$ und $[F, H]$. *(9 Punkte)*

(b) *Checke ab*, dass in dieser Situation die folgende Gleichung, die sogenannte *Jacobi-Identität* (siehe auch Aufgabe 26(a)), erfüllt ist:

$$[F, [G, H]] + [G, [H, F]] + [H, [F, G]] = 0\;. \qquad \textit{(2 Punkte)}$$

26. Rechenregeln für die Lieklammer. Es sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

(a) *Zeige:* Die Lieklammer auf $\mathrm{Vec}^\infty(X)$ ist $\mathbb{R}$-bilinear, schief-symmetrisch (d.h. für $F, G \in \mathrm{Vec}^\infty(X)$ gilt $[G, F] = -[F, G]$), und für $F, G, H \in \mathrm{Vec}^\infty(X)$ gilt die *Jacobi-Identität*

$$[F, [G, H]] + [G, [H, F]] + [H, [F, G]] = 0\;. \qquad \textit{(4 Punkte)}$$

(b) *Zeige:* Für $F, G \in \mathrm{Vec}^\infty(X)$, $f, g \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ und $x \in X$ gilt

$$[f\,F, g\,G](x) = f(x)\,g(x)\,[F, G](x) + f(x)\,T_x(g)(F(x))\,G(x) - g(x)\,T_x(f)(G(x))\,F(x)\;.$$

Die Lieklammer ist also *nicht* $C^\infty(X, \mathbb{R})$-linear. *(4 Punkte)*

(c) Es sei $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von X auf einer offenen Teilmenge $U \subset X$. Dann betrachten wir für $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Vektorfelder $F_i \in \mathrm{Vec}^\infty(U)$ mit

$$F_i(x) = T_x(\phi)^{-1}(e_i)\;,$$

wobei $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ den i-ten Standardeinheitsvektor des $\mathbb{R}^n$ bezeichne. Man *zeige*, dass für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: $[F_i, F_j] = 0$. *(4 Punkte)*

Bemerkung. Diese Aussage ist der Grund, warum einem in der Differentialrechnung auf dem $\mathbb{R}^n$ (Analysis II) keine Lieklammern begegnen. Wir versichern: In der Analysis auf Mannigfaltigkeiten spielen Lieklammern eine wesentliche Rolle.

27. (a) Über die Integralkurven von Vektorfeldern der Form $\boldsymbol{\lambda F}$. Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $F \in \mathrm{Vec}^\infty(X)$, $\lambda \in C^\infty(X, \mathbb{R})$, $G := \lambda F \in \mathrm{Vec}^\infty(X)$ und $p_0 \in X$.

Zeige: Ist $\alpha : I \to X$ eine Integralkurve von F mit $\alpha(0) = p$, und ist $f : J \to I$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = (\lambda \circ \alpha)(y) \quad \text{mit} \quad y(0) = 0\;,$$

so ist $\beta := \alpha \circ f : J \to X$ eine Integralkurve von G mit $0 \in J$ und $\beta(0) = p_0$, und man erhält jede solche Integralkurve von G mit auf diese Weise. *(6 Punkte)*

(b) Ein Beispiel für ein nicht-vollständiges Vektorfeld. Auf $X = \mathbb{R}^2$ betrachten wir das Vektorfeld $G \in \mathrm{Vec}^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit

$$G(x) = \|x\|^2 \cdot x$$

für $x \in \mathbb{R}^2$. Man *bestimme* die maximalen Integralkurven von G und *zeige*, dass G nicht vollständig ist. *(7 Punkte)*

[Tipp. Man wende (a) mit dem Vektorfeld $F(x) := x$ an. Die Integralkurven von F kann man bestimmen, indem man die Lösungen der entsprechenden Differentialgleichung „errät“. — Die maximalen Lösungen der Differentialgleichung $y' = e^{2y}$ sind die Funktionen

$$y : (-\infty, \tfrac{c}{2}) \to \mathbb{R}, \ x \mapsto y(x) = -\tfrac{1}{2} \ln(-2x + c)$$

mit Konstante $c \in \mathbb{R}$.]

28. Flüsse von Vektorfeldern.

(a) Es sei F das glatte Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$, das durch

$$F(x, y) = (y, -x)$$

gegeben ist. *Bestimme* den maximalen Fluss von F. *(6 Punkte)*

[Tipp. Es ist hilfreich, $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ zu identifizieren, und dann F mit Hilfe der komplexen Multiplikation umzuschreiben.]

(b) Es sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die 2-Sphäre und $a \in \mathbb{R}$. Wir definieren $F : S^2 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$F(x, y, z) = (a\,y, -a\,x, 0) \ .$$

(i) *Zeige*, dass F ein Vektorfeld auf S^2 ist. *(2 Punkte)*

(ii) *Bestimme* den maximalen Fluss von F. *(6 Punkte)*