Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

Analysis III
3. Übung
(abzugeben in der Vorlesung am 06. März 2012)

28. Februar 2012

8. Der lokale Umkehrsatz.

Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ eine glatte Abbildung, so dass die Tangentialabbildung $T_p(f)$ in einem Punkt $p \in M$ ein Vektorraum-Isomorphismus $T_pM \to T_{f(p)}N$ ist. *Zeige*, dass eine Umgebung U von p existiert, so dass $f|_U$ ein glatter Diffeomorphismus ist. *(6 Punkte)*

[Tipp. Man führe die Aussage auf die entsprechende Aussage der Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ zurück.]

9. Über differenzierbare Abbildungen.

Zeige, dass die folgenden Abbildungen gemäß Definition 1.21 glatt sind:

(a) Die Antipoden-Abbildung der Sphäre $\alpha : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n,\ x \mapsto -x.$ *(6 Punkte)*

(b) Die *Hopf-Abbildung* $\beta : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2,\ (w, x, y, z) \mapsto (2(wy + xz), 2(xy - wz), w^2 + x^2 - y^2 - z^2).$ *(8 Punkte)*

10. Über Immersionen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten.

(a) Welche der folgenden Abbildungen sind Immersionen?

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto f(t) = (\cos(2t), \sin(2t), t)$. Ist f injektiv? *(6 Punkte)*

(ii) $g : (1, \infty) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto g(t) = \left(\frac{t+1}{2t}\cos(2t), \frac{t+1}{2t}\sin(2t)\right).$ *(6 Punkte)*

(b) Sei $M \neq \emptyset$ eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\dim(M) = n$ und $f : M \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung. *Zeige*, dass f keine Immersion ist. *(8 Punkte)*

[Tipp. Man nehme an, die Behauptung sei falsch. Benutze Aufg. 8 um zu zeigen, dass dann $f[M] \subset \mathbb{R}^n$ offen und abgeschlossen ist und führe dies zu einem Widerspruch.]

11. Über den Zusammenhang zwischen Derivationen und Vektoren im $\mathbb{R}^n$.

Sei A eine $\mathbb{R}$-Algebra mit Eins-Element $\mathbb{1}_A$ und $\phi : A \to \mathbb{R}$ ein Algebrahomomorphismus (d.h. insbesondere $\phi(\mathbb{1}_A) = 1$). Sei $\mathrm{Der}_\phi(A) \subset \mathcal{L}(A, \mathbb{R})$ der Unterraum von $\mathcal{L}(A, \mathbb{R})$, der durch

$$\mathrm{Der}_\phi(A) := \{D \in \mathcal{L}(A, \mathbb{R}) \mid D(ab) = \phi(a)D(b) + D(a)\phi(b) \ \text{ für } a, b \in A\}$$

definiert ist. *Zeige*:

(a) Für alle $D \in \mathrm{Der}_\phi(A)$ gilt: $D(\mathbb{1}_A) = 0$. *(4 Punkte)*

(b) Seien $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ a_1, \dots, a_n \in \ker(\phi)$ sowie $b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_m \in \ker(\phi)$. Dann gilt für alle $D \in \mathrm{Der}_\phi(A)$

$$D\left(\lambda_0 \mathbb{1}_A + \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^m b_j c_j\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i D(a_i).$$

(2 Punkte)

(c) Wenn $a_1, \ldots, a_n \in \ker(\phi)$ existieren, so dass jedes $a \in A$ als $a = \lambda_0 \mathbb{1}_A + \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^m b_j c_j$ mit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ sowie $b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_m \in \ker(\phi)$ geschrieben werden kann, so ist die Abbildung

$$\Psi : \mathrm{Der}_\phi(A) \to \mathbb{R}^n, \quad D \mapsto (D(a_1), \ldots, D(a_n))$$

injektiv. *(4 Punkte)*

12. Klassifikation 1-dim. zusammenhängender differenzierbarer Mannigfaltigkeiten.

Diese Aufgabe soll als *Vorbereitung* für den Beweis folgender Aussage dienen: Jede 1-dimensionale zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit ist entweder zu $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{S}^1$ diffeomorph.

Sei $(M, \mathcal{A})$ eine 1-dimensionale differenzierbare zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Wir wollen zeigen, dass M einen Atlas $\widetilde{\mathcal{A}}$ besitzt, der die folgende Eigenschaft hat:

Jede Karte $(U_\phi, \phi) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ bildet auf ein offenes Intervall I_ϕ ab, d.h. $\phi : U_\phi \to I_\phi$ und für zwei Karten $(U_\phi, \phi), (U_\psi, \psi)$ mit $U_\phi \cap U_\psi \neq \emptyset$ gilt $|(\psi \circ \phi^{-1})'| = 1$. $(*)$

Dazu gehen wir in mehreren Schritten vor:

(a) *Zeige*, das man für eine Karte $(U_\phi, \phi) \in \mathcal{A}$ o.B.d.A. annehmen kann, dass ϕ auf ein offenes Intervall I_ϕ abbildet. *(2 Zusatzpunkte)*

(b) *Zeige* mithilfe einer Zerlegung der Eins, dass für jede Karte $(U_\phi, \phi) \in \mathcal{A}$ eine glatte Funktion $f_\phi : U_\phi \to \mathbb{R}^+$ existiert, so dass für zwei Karten $(U_\phi, \phi), (U_\psi, \psi)$ mit $U_\phi \cap U_\psi \neq \emptyset$

$$\frac{f_\phi(x)}{f_\psi(x)} = |(\psi \circ \phi^{-1})'(\phi(x))| \quad \text{auf } U_\phi \cap U_\psi$$

gilt. *(4 Zusatzpunkte)*

(c) *Zeige*, dass für jede Karte $(U_\phi, \phi) \in \mathcal{A}$ ein Diffeomorphismus $\Psi_\phi : I_\phi \to J_\phi$ in ein offenes Intervall J_ϕ existiert, so dass

$$\Psi'_\phi(\phi(x)) = f_\phi(x) \quad \text{für alle } x \in U_\phi$$

gilt. Dann hat der Atlas $\widetilde{\mathcal{A}}$ bestehend aus den Karten $(U_\phi, \widetilde{\phi})$ mit $\widetilde{\phi} := \Psi_\phi \circ \phi : U_\phi \to J_\phi$ die Eigenschaft $(*)$. *(4 Zusatzpunkte)*