Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

Partielle Differentialgleichungen
8. Übung

25. Oktober 2011

(abzugeben in der Übung am 02. November 2011)

27. Über den Satz von Lax-Milgram.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $L : C_0^2(\Omega) \to C_0(\Omega)$ der elliptische Operator in Divergenzform, der durch

$$(Lu)(x) = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) + c(x)u(x)$$

gegeben ist. Sei $K > 0$ und $c(x) \geq K \ \ \forall x \in \Omega$. *Zeige*, dass L die Ungleichung

$$\langle Lu, u\rangle_{L^2(\Omega)} \geq C \cdot \|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \ \text{ (für eine Konstante } C > 0)$$

erfüllt. *(10 Punkte)*

28. Über Sobolevräume.

Sei $\Omega = B(0,1)$ und $u : B(0,1) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(x) := |x|^\gamma$. Wir wollen untersuchen, welche Bedingungen an γ, k, n und p gestellt werden müssen, so dass für eine solche Wahl $u \in W^{k,p}(B(0,1))$ gilt. Dafür gehen wir in mehreren Schritten vor:

(a) *Zeige*: u definiert eine Distribution der Form $F_u : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \phi \mapsto F_u(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} u\phi \,\mathrm{d}\mu$ auf $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \gamma > -n$. *(4 Punkte)*

(b) *Zeige*: Ist $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ und definieren u und $\partial^\alpha u$ Distributionen F_u bzw. $F_{\partial^\alpha u}$ auf $\mathbb{R}^n$, so ist $G := \partial^\alpha F_u - F_{\partial^\alpha u}$ eine Distribution mit Träger $\operatorname{Tr}(G) = \{0\}$. *(4 Punkte)*

(c) Diese Teilaufgabe zeigt, dass G aus (b) nicht immer 0 ist, d.h. um die Ableitung einer Distribution F_u zu bestimmen, reicht es nicht aus, die entsprechende Ableitung von u zu berechnen!
Zeige, dass für die Fundamentallösung Φ der Laplace-Gleichung im Sinne der Distributionentheorie $-\triangle F_\Phi(\psi) = \delta(\psi)$ gilt. *(4 Punkte)*

(d) Sei $F : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \ \phi \mapsto F(\phi)$ eine Distribution auf $\mathbb{R}^n$ mit Träger $\operatorname{Tr}(F) = \{0\}$ und

$$F(\phi_\lambda) = \lambda^{-(d+n)} F(\phi) \ \ \forall \lambda > 0 \ \text{ mit } \ \phi_\lambda(x) := \phi(\lambda x) \ \ \forall \phi.$$

Zeige: Ist $d + n > 0$, so folgt $F \equiv 0$, d.h. $F(\phi) = 0 \ \ \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. *(4 Punkte)*
[Tipp. Definiere $\widetilde{\phi}_\lambda(x) = \lambda^{d+n}\phi(\lambda x)$ und zeige für ein $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \operatorname{Tr}(\psi) \subset B(0,1)$ mit $\psi|_{B(0,\frac{1}{2})} \equiv 1$, dass $\lim\limits_{\lambda \to 0}(\psi\widetilde{\phi}_\lambda) = 0$ gleichmäßig und für alle Ableitungen von $\psi\widetilde{\phi}_\lambda$ gilt. Folgere daraus $F(\phi) = \lim\limits_{\lambda \to 0} F(\psi\widetilde{\phi}_\lambda) = 0$.]

(e) *Zeige*, dass $\partial^\alpha u(x) = P_{|\alpha|}(x) \cdot (x \cdot x)^{\gamma/2 - |\alpha|} \ \ \forall \alpha$ gilt, wobei $P_{|\alpha|}$ ein homogenes Polynom vom Grad $d = |\alpha|$ ist. *(4 Punkte)*

(f) *Zeige* die Gleichung

$$\int_{B(0,1)} |\partial^\alpha u(x)|^p \mathrm{d}\mu = \int_{\partial B(0,1)} |\partial^\alpha u(x)|^p \mathrm{d}\sigma \cdot \int_0^1 r^{(\gamma - |\alpha|)p} \cdot r^{n-1} \mathrm{d}r.$$

Folgere daraus, dass $u \in W^{k,p}(B(0,1))$ für $\gamma > k - \frac{n}{p}$. *(4 Punkte)*
[Tipp. Benutze Kugelkoordinaten sowie die Teilaufgaben (a), (b), (d) und (e).]

29. Rechnen mit Sobolevfunktionen.

(a) Sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$ und $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ derart, dass $\eta(x) = 1$ für $|x| \leq \frac{1}{2}$. Sei $u(x) = \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{1/4} \cdot \eta(x)$. *Zeige*, dass $u \in W^{1,2}(\Omega)$. *(6 Punkte)*

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$.

(i) *Zeige*, dass für $w(x) := \min\{u(x), v(x)\}$ auch $w \in W^{1,2}(\Omega)$ liegt und *bestimme* die schwache Ableitung von w. *(6 Punkte)*

(ii) *Zeige* mit (i), dass für $r(x) = \max\{u(x), v(x)\}$ auch $r \in W^{1,2}(\Omega)$ liegt. *(4 Punkte)*