Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

Partielle Differentialgleichungen
12. Übung
(abzugeben in der Vorlesung am 29. November 2011)

22. November 2011

43. Divergenz und Rotation.

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen heißt $f = (f_1, \dots, f_n) \in (L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}))^n$ eine schwache Lösung von

$$\nabla \cdot f = 0,$$

falls

$$\int_\Omega f \nabla \phi = 0 \quad \text{für alle } \phi \in C^1_0(\Omega).$$

Zeige

$$\nabla \cdot (\nabla \times u) = 0 \quad \text{schwach in } \Omega \text{ für } u = (u_1, u_2, u_3) \in (W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}))^3,$$

wobei die Rotation eines Vektorfeldes $F = (F_1, F_2, F_3)$ in $\mathbb{R}^3$ durch

$$\nabla \times F := (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2,\, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3,\, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

definiert ist. *(8 Punkte)*

44. Über den Satz von Friedrichs.

Es sei $a \in L^\infty((-2,2)) \backslash \{W^{1,2}((-1,1))\}$ mit $a \geq 1$ und

$$u(t) := \int_0^t \frac{1}{a(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Zeige, dass $u \in W^{1,2}((-2,2))$ eine schwache Lösung von

$$(au')' = 0 \text{ in } (-2,2)$$

ist, aber $u \notin W^{2,2}((-1,1))$. Welche Voraussetzungen des Satzes von Friedrichs 4.6 sind verletzt? *(8 Punkte)*

45. Über die endliche Differenz.

Sei $u \in W^{1,2}(B(0,1))$ eine schwache Lösung von

$$L_0 u := \sum_{i,j=1}^n \partial_i (a_{ij} \partial_j u) = f \text{ in } B(0,1)$$

mit $a_{ij} \in L^\infty(B(0,1))$ und $f \in L^2(B(0,1))$. *Zeige*, dass die endliche Differenz

$$\partial_l^h u(x) := \frac{u(x + he_l) - u(x)}{h} \quad \text{für } x \in B(0, 1 - |h|)$$

eine schwache Lösung von

$$L_0 \partial_l^h u(x) = \partial_l^h f(x) - \sum_{i,j=1}^n \partial_i (\partial_l^h a_{ij} \partial_j u(x + he_l)),\ x \in B(0, 1 - |h|)$$

ist. *(8 Punkte)*

46. Über die Cacciopoli-Ungleichung am Rand.

Man *beweise* die Cacciopoli-Ungleichung am Rand 4.7, indem man den Beweis aus dem Skript durch Adaptierung des Beweises der Cacciopoli-Ungleichung 4.5 zu Ende führt. *(10 Punkte)*

47. Über die Poincaré-Ungleichung.

Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir wollen bei dieser Aufgabe die beste Konstante $C < \infty$ in der Poincaré-Ungleichung

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \text{ für } u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

ermitteln. Hierfür gehen wir in mehreren Schritten vor:

(a) Betrachte eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $\int_\Omega u_n^2 \,\mathrm{d}\mu = 1$, so dass für $\lambda_n := \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\mu$ gilt:

$$\lambda_n \to \inf_{u\in\partial B(0,1)} \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\mu \ \text{ für } n \to \infty.$$

Zeige mithilfe des Satzes von Rellich 3.39, dass eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega)$ konvergiert. *(8 Punkte)*

(b) *Zeige* mithilfe des Satzes von Alaoglu, dass $\lim_k u_{n_k} = u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt mit $\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\mu = \lambda = \lim_k \lambda_{n_k}$. *Folgere* daraus, dass

$$f : W_0^{1,2}(\Omega) \ni u \mapsto \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\mu$$

unter der Nebenbedingung $\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}\mu = 1$ ein Minimum annimmt. *(8 Zusatzpunkte)*
[Tipp. Der Satz von Alaoglu besagt, dass für alle $R > 0$ der Ball $\overline{B(0,R)} \subset L^2(\Omega)$ schwach kompakt ist, d.h. für jede Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B(0,R)}$ existiert eine schwach konvergente Teilfolge. Hierbei konvergiert eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega)$ schwach gegen u, wenn für jedes $v \in L^2(\Omega)$ gilt: $\langle u_n, v\rangle_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n\to\infty} \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)}$.]

(c) *Zeige* mit dem Satz über Lagrange-Multiplikatoren, dass für das Minimum u aus (b)

$$-\triangle u = \lambda u$$

gilt. *(8 Punkte)*