Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

Partielle Differentialgleichungen
9. Übung
(abzugeben in der Vorlesung am 08. November 2011)

02. November 2011

30. Der Divergenzsatz für Lipschitz-stetige Vektorfelder.

Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Rand $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Wir wollen zeigen, dass für $f = (f_1, \ldots, f_n) \in (C^{0,1}(\Omega))^n$ ebenso der Divergenzsatz erfüllt ist, d.h. es gilt

$$\int_\Omega \nabla \cdot f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\partial\Omega} f \cdot N \,\mathrm{d}\sigma. \tag{$*$}$$

Hierbei ist die rechte Seite von $(*)$ wie folgt definiert: Sei $U(x_1) \cup \ldots \cup U(x_N) \supset \partial\Omega$ eine Übderdeckung des Randes $\partial\Omega$ und $\varphi_i \in C^{0,1}(B^{n-1}(0,\rho_i))$ mit $\|\varphi_i\|_\infty < M_i$ und $\{x - x_i \mid x \in U(x_i) \cap \Omega\} = \{(y,t) \in B^{n-1}(0,\rho_i) \times (-M_i, M_i) \mid t \leq \varphi_i(y)\}$. Sei $h_1, \ldots, h_N$ eine entsprechende Zerlegung der Eins. Dann ist die rechte Seite von $(*)$ durch

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot N \,\mathrm{d}\sigma = \sum_{i=1}^N \int_{B^{n-1}(0,\rho_i)} h_i f(y, \varphi_i(y)) \cdot (\nabla_y \varphi(y), -1) \,\mathrm{d}^{n-1}y \tag{$**$}$$

definiert.

(a) *Zeige*: $\partial\Omega$ ist genau dann stetig differenzierbar im Sinne von Definition 1.4, wenn $\varphi_i \in C^1(B(0,\rho_i))$ gilt. *(4 Punkte)*

(b) *Zeige*: Ist $\partial\Omega$ stetig differenzierbar, so stimmt $(**)$ mit Definition 1.4 überein. *(4 Punkte)*

(c) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ invertierbar mit $\det(A) > 0$ und f glatt. *Zeige*: Die Gleichung $(*)$ gilt für f und Ω genau dann, wenn $(*)$ für $f_A = A \cdot f \circ A^{-1}$ und $\Omega_A = A[\Omega]$ gilt. *(5 Zusatzpunkte)*

(d) Sei $\varphi \in C^{0,1}(B^{n-1}(0,\rho))$ mit $\|\varphi\|_\infty < M$ und $f \in \left(W_0^{1,\infty}(B^{n-1}(0,\rho) \times (-M, M))\right)^n$. Dann gilt

$$\int_{B^{n-1}(0,\rho)} \int_{\varphi(y)}^M \nabla \cdot f(y,t) \,\mathrm{d}^{n-1}y \, dt = \int_{B^{n-1}(0,\rho)} f(y, \varphi(y)) \cdot (\nabla_y \varphi, -1) \,\mathrm{d}^{n-1}y,$$

wobei für alle i und alle y aus $B(0,\rho)$ die Abbildung $t \mapsto \varphi(y + te_i)$ auf $\{t \in \mathbb{R} \mid y + te_i \in B(0,\rho)\}$ bijektiv ist. $(* * *)$ *(5 Zusatzpunkte)*

(e) *Zeige*, dass für $f = (f_1, \ldots, f_n) \in (C^{0,1}(\Omega))^n$ der Divergenzsatz $(*)$ gilt. *(6 Zusatzpunkte)*
[Tipp. Man zeige mithilfe von (c), dass Bedingung $(* * *)$ immer erreicht werden kann. Außerdem benutze man den Approximationssatz 3.30.]

31. Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $v \in W^{1,2}(\Omega)$. *Zeige*, dass

$$\int_\Omega u_{e_i} v_{e_j} \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega u_{e_j} v_{e_i} \,\mathrm{d}\mu$$

gilt. *(8 Punkte)*

[Tipp. Approximiere u durch Funktionen aus $C_0^\infty(\Omega)$.]

32. Über Sobolevräume.

Sei $n \geq 3$ und $\Omega = B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ sowie $u \in C^1(\Omega \backslash \{0\})$ derart, dass

$$\int_{\Omega\backslash\{0\}} |u(x)|^2 \,\mathrm{d}\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int_{\Omega\backslash\{0\}} |\nabla u(x)|^2 \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

gilt. *Zeige*, dass $u \in W^{1,2}(\Omega)$ und $u_{e_j}(x) = \partial_j u(x)$ für $x \neq 0$ gilt. *(10 Punkte)*

[Tipp. Sei $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Zeige, dass es eine Folge $\phi_n \in C_0^\infty(\Omega\backslash\{0\})$ gibt, so dass $\phi_n \to \phi$ in $W^{1,2}(\Omega)$. Hierzu wähle man $\phi_n(x) := \psi(n|x|) \cdot \phi(x)$ mit $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\psi(r) = 1$ für $r \geq 1$ und $\psi(r) = 0$ für $r \leq \frac{1}{2}$.]

33. Eine Ungleichung für Funktionen aus $W_0^{2,2}(\Omega)$.

Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt sowie $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$. *Zeige* die folgende Ungleichung:

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \cdot \|\triangle u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}.$$

(8 Punkte)

[Tipp. Betrachte $u \in C_0^\infty(\Omega)$ und integriere $\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\mu$ partiell.]