Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

Partielle Differentialgleichungen
7. Übung
(abzugeben in der Vorlesung am 25. Oktober 2011)

18. Oktober 2011

23. Leibnizformel für Ableitungen bzgl. Multi-Indizes.

Ein Vektor der Form $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, der $\gamma_i \in \mathbb{N}_0\ \forall i$ erfüllt, wird Multi-Index der Ordnung

$$|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$$

genannt. Für einen solchen Multi-Index γ setzen wir $\partial^\gamma := \prod_{i=1}^n \partial_i^{\gamma_i}$. Wir wollen die folgende Leibnizformel für glatte $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beweisen:

$$\partial^\gamma(uv) = \sum_{0 \le \beta \le \gamma} \binom{\gamma}{\beta} (\partial^\beta u)(\partial^{\gamma-\beta} v) \qquad (*)$$

Hierbei ist $\binom{\gamma}{\beta} := \prod_{i=1}^n \binom{\gamma_i}{\beta_i}$ und mit $\beta \le \gamma$ ist gemeint, dass $\beta_i \le \gamma_i$ für alle i gilt. *Zeige* mit vollständiger Induktion in n, dass $(*)$ gilt. *(8 Punkte)*

[Tipp. Es darf verwendet werden, dass der IA für $n = 1$ bereits gezeigt wurde, d.h. für $l \in \mathbb{N}_0$ gilt $\partial^l(uv) = \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} (\partial^i u)(\partial^{l-i} v)$.]

24. Über den Dualraum von $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Sei $1 \le p \le \infty$. Der Banachraum $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist mit der Norm

$$\|\cdot\| : L^p(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}$$

ausgestattet. Wir wollen zeigen, dass für q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ die Abbildung

$$j : L^q(\mathbb{R}^n) \to (L^p(\mathbb{R}^n))' = \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}), \quad g \mapsto j(g) \text{ mit } j(g)(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f g \, \mathrm{d}\mu$$

eine lineare Isometrie ist, d.h. es gilt $\|g\|_q = \|j(g)\|$. Man kann damit zeigen, dass für $1 \le p < \infty$ der Dualraum von $L^p(\mathbb{R}^n)$ isometrisch isomorph zu $L^q(\mathbb{R}^n)$ ist.

(a) *Zeige* mithilfe der Hölderschen Ungleichung, dass $j : L^q(\mathbb{R}^n) \to (L^p(\mathbb{R}^n))'$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L = 1$ ist. *(3 Punkte)*

(b) *Zeige* die Hölder'sche Ungleichung $\|f\,g\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ mithilfe der Young'schen Ungleichung. *(4 Punkte)*

[Tipp. Setze $\widetilde{f} := \frac{|f|}{\|f\|_p}$ und $\widetilde{g} := \frac{|g|}{\|g\|_q}$ und benutze die Young'sche Ungleichung: Seien $p > 0$, $q > 0$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $x > 0$, $y > 0$: $xy \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$ und Gleichheit nur für $x^p = y^q$.]

(c) *Gib* für gegebenes g eine Funktion f an, so dass $\|f\,g\|_1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ gilt. *(4 Punkte)*

(d) *Zeige* mithilfe von (c), dass auch $\|g\|_q \le \|j(g)\|$ für alle $g \in L^q(\mathbb{R}^n) \backslash \{0\}$ gilt und folgere daraus, dass j eine Isometrie ist. *(6 Punkte)*

Bitte wenden.

25. Über Sobolevräume.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} 1 + x & \text{für } -1 \le x \le 0 \\ 1 - x & \text{für } \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(i) *Bestimme* die erste Ableitung der Distribution $F : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\phi \mapsto F(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x$. *(4 Punkte)*

(ii) *Zeige*, dass die zweite Ableitung der Distribution $F(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x$ eine Linearkombination von Dirac-Distributionen ist. *(4 Punkte)*

(iii) *Zeige*: $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, aber $f \notin W^{2,1}(\mathbb{R})$. *(4 Punkte)*

(b) Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $u \in W^{2,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ so, dass $\partial^\alpha u = 0$ für alle α mit $|\alpha| = 2$ im schwachen Sinne gilt. *Zeige*, dass u affin ist, d.h. $u(x) = a \cdot x + b$ mit $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$. *(5 Punkte)*

[Tipp. Bezeichne mit e_i den i-ten Einheitsvektor. Zeige, dass $u_{e_i} \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ sowie $\nabla u_{e_i} = 0$ für alle i gilt und benutze Proposition 3.19. Mit einem ähnlichen Argument folgt dann die Behauptung.]

26. Über den Sobolev'schen Einbettungssatz.

Zeige, dass $W^{1,1}((0,1)) \hookrightarrow C([0,1])$ eine stetige Einbettung ist. *(8 Punkte)*

[Tipp. Man zeige, dass $\|u\|_\infty \le \|u\|_1 + \|u_1\|_1$ gilt. Hierfür betrachte man für $(u, u_1) \in W^{1,1}((0,1))$ die Funktion $U := \int_{x_0}^x u_1(t)\,\mathrm{d}t$ und zeige: $U \in W^{1,1}((0,1)) \cap C([0,1])$ und $U - u \equiv \text{const}$. Damit folgere man, dass $|u|$ ein Minimum bei einem $x_0 \in [0,1]$ annimmt. Außerdem zeige man $|u(x) - u(x_0)| \le \|u_1\|_1$ um anschließend mit der Dreiecksungleichung eine Abschätzung für $\|u\|_\infty$ zu erhalten.]