Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

Partielle Differentialgleichungen
11. Übung
(abzugeben in der Vorlesung am 22. November 2011)

15. November 2011

39. Über schwache Lösungen elliptischer Differentialgleichungen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

(a) Sei $f \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$, L ein elliptischer Differentialoperator gemäß Definition 4.1 mit

$$Lu \geq f \quad \text{und} \quad Lu \leq f. \tag{$*$}$$

Zeige: Dann gilt für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$: $\mathcal{L}(u,v) = -\langle f, v\rangle$. *(4 Punkte)*

(b) **(i)** *Zeige*: Lu definiert folgende Distribution:

$$C_0^\infty(\Omega) \ni \phi \mapsto -\mathcal{L}(u,\phi).$$

(4 Punkte)

(ii) *Zeige*: Gilt $(*)$, so folgt $Lu = f$ im Sinne von Distributionen. *(4 Punkte)*

(c) Sei nun $u \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$, $f \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, so dass $\triangle u \geq f$ und $\triangle u \leq f$ im schwachen Sinne gilt. *Zeige*, dass für $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ im Sinne von Distributionen

$$\triangle(\phi u) = (\triangle\phi)u + 2\nabla\phi \cdot \nabla u + f\phi$$

gilt. *(5 Punkte)*

40. Schwache Lösungen der Poisson-Gleichung.

Im folgenden betrachten wir ein Beispiel für Funktionen $u, f \in C_0(\Omega)$, so dass $\triangle u = f$ im schwachen Sinne, aber $u \notin C^2(\Omega)$. Sei $B(0,\frac{1}{2}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \frac{1}{4}\}$ und $u(x,y) := (x^2 - y^2)\log|\log(r)|$ mit $r = (x^2+y^2)^{1/2}$.

(a) *Zeige*: $u \in C^2(B(0,\frac{1}{2})\setminus\{0\})$ und $\lim\limits_{r\to 0} u(x,y) = 0$, d.h. u lässt sich stetig auf $B(0,\frac{1}{2})$ fortsetzen. *(5 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass auf $B(0,\frac{1}{2})\setminus\{0\}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) &= 2x\log|\log(r)| + (x^3 - y^2x)\frac{1}{r^2\log(r)}, \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) &= 2\log|\log(r)| + (5x^2 - y^2)\frac{1}{r^2\log(r)} - (x^4 - x^2y^2)\frac{2\log(r)+1}{r^4(\log(r))^2}
\end{aligned}$$

gilt. *(5 Punkte)*

(c) *Zeige*: $\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(y,x)$ und damit

$$\triangle u = (x^2 - y^2)\left(\frac{4}{r^2\log(r)} - \frac{1}{r^2(\log(r))^2}\right).$$

Folgere daraus $\lim\limits_{r\to 0}\triangle u(x,y) = 0$. *(6 Punkte)*

(d) Sei $g \in C(B(0, \frac{1}{2}))$ die stetige Fortsetzung von $\triangle u$ auf $B(0, \frac{1}{2})$. *Zeige*, dass $\triangle u = g$ schwach in $B(0, \frac{1}{2})$. Hierfür zeige man für $\phi \in C_0^\infty(B(0, \frac{1}{2}))$ die Formel

$$\int_{B(0,\frac{1}{2})\setminus B(0,\varepsilon)} u \triangle \phi \, \mathrm{d}\mu = \int_{B(0,\frac{1}{2})\setminus B(0,\varepsilon)} g\phi \, \mathrm{d}\mu + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} (u\nabla\phi - \phi\nabla u) \cdot N \, \mathrm{d}\sigma.$$

(6 Punkte)

(e) Sei $\psi \in C_0^\infty(B(0, \frac{1}{2}))$ mit $\psi(x, y) = 1$ in einer Umgebung von 0 und sei

$$f := \psi g + 2\nabla\psi \cdot \nabla u + (\triangle\psi)u \in C(B(0, \tfrac{1}{2})).$$

Zeige mithilfe von Aufg. 39(c), dass $\triangle(\psi u) = f$ im schwachen Sinne gilt. *(6 Punkte)*

41. Schwache Lösungen von Differentialgleichungen.

Zeige für $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{21} = 1$, $a_{12} = -1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, dass jedes $u \in W^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung der Differentialgleichung

$$\sum_{i,j=1}^{2} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) = 0$$

ist. *(5 Punkte)*

[Tipp. Aufgabe 34.]

42. Über das schwache Maximumprinzip.

Wir wollen zeigen, dass das schwache Maximumprinzip für Operatoren in Divergenzform (Schwaches Maximumprinzip 4.2) aus dem klassischen Maximumprinzip (Korollar 2.18) folgt, falls die Koeffizienten samt Lösung glatt sind. Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ mit

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) + \sum_{i=1}^{n} c_i \partial_i u + du \geq 0 \quad \text{in } \Omega$$

und $a_{ij}, b_i \in C^{0,1}(\Omega)$, $c_i, d \in L^\infty(\Omega)$, sowie

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j > 0 \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ und } x \in \overline{\Omega}$$

und

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\partial_i v - dv\Big) \geq 0 \text{ für alle } 0 \leq v \in C_0^1(\Omega).$$

Zeige, dass $\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u_+$ gilt. *(8 Zusatzpunkte)*

[Tipp. Schreibe L in Nicht-Divergenzform.]