Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

Partielle Differentialgleichungen
2. Übung

13. September 2011

(abzugeben in der Vorlesung am 20. September 2011)

5. Ableitung der Inversenbildung.

Sei $a < b$ und $A : (a,b) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ eine differenzierbare Abbildung des reellen Intervalls (a,b) in den Raum der stetigen, linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Für jedes $t \in (a,b)$ sei $A(t)$ in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ invertierbar. Zeige, dass dann auch die Abbildung

$$A^{-1} : (a,b) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n),\ t \mapsto (A(t))^{-1}$$

differenzierbar ist, und dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A^{-1}(t) = -A^{-1}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A(t) \cdot A^{-1}(t)$$

gilt. *(6 Punkte)*

6. Über Distributionen.

(a) Zeige, dass

$$F : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ \phi \mapsto \int_{\mathbb{R}} x^3 \cdot \phi''(x)\,\mathrm{d}x$$

eine Distribution auf $\mathbb{R}$ ist, und bestimme eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \phi(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})\,.$$

(3 Punkte)

(b) Zeige, dass die Dirac-Distribution

$$\delta : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ \phi \mapsto \phi(0)$$

in der Tat eine Distribution auf $\mathbb{R}$ ist, und beweise, dass es *keine* lokal Lesbegue-integrierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\delta(\phi) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot \phi(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

gibt. *(4 Punkte)*

(c) Bestimme die Ableitung $\dot{F}$ bzw. $\dot{\delta}$ der beiden Distributionen aus (a) und (b). *(2+2 Punkte)*

7. Über die Faltung.

(a) Zeige, dass die Faltung von Funktionen mit kompaktem Träger auf dem $\mathbb{R}^n$ eine bilineare, kommutative und assoziative Verknüpfung ist. *(1+2+4 Punkte)*

(b) Zeige, dass bei Distributionen mit nicht-kompaktem Träger (auf $\mathbb{R}$) die Faltung selbst in den Fällen, in denen sie wohldefiniert ist, nicht assoziativ zu sein braucht. *(4 Punkte)*
[Tipp. Wir bezeichnen mit 1 die Einsfunktion auf $\mathbb{R}$, mit $\dot{\delta}$ die Ableitung der Dirac-Distribution (siehe Aufgabe 5(c)), und mit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die *Heaviside-Funktion*, d.h. $H(x) = 1$ für $x \geq 0$ und $H(x) = 0$ für $x < 0$. Dann berechne man $1 * (\dot{\delta} * H)$ und $(1 * \dot{\delta}) * H$.]

(c) Seien $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $i \in \{1, \dots, n\}$. Zeige, dass dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g) \;=\; f * \frac{\partial g}{\partial x_i} \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_i} * g \,. \qquad \textit{(4 Punkte)}$$

8. Eine alternative Beschreibung der Faltung einer Distribution.

(a) Es sei $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann existieren zu jedem $n \in \mathbb{N}$ endlich viele Paare $(\phi_{n,i}, x_{n,i})_{i=1,\dots,k_n}$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, so dass für jedes $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \phi * g - \sum_{i=1}^{k_n} \phi_{n,i} \mathsf{T}(x_{n,i}) g \right\|_\infty = 0 \,. \qquad \textit{(7 Punkte)}$$

[Tipp. Weil ϕ stetig differenzierbar ist und kompakten Träger hat, ist ϕ Lipschitz-stetig. Daraus folgt in Verbindung mit der Aussage, dass $\mathrm{Tr}(\phi)$ kompakt ist, dass eine Überdeckung von $\mathrm{Tr}(\phi)$ durch endlich viele offene, beschränkte Mengen $U_1, \dots, U_{k_n}$ existiert, so dass ϕ auf jedem U_i höchstens um ε schwankt. Man fixiere nun $x_{n,i} \in U_i$ und setzt $\phi_{n,i} := \phi(x_{n,i}) \cdot \mathrm{vol}(U_i)$.]

(b) In der Situation von (a) gilt für jeden endlichen Multiindex α sogar

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \phi * g - \sum_{i=1}^{k_n} \phi_{n,i} \mathsf{T}(x_{n,i}) g \right\|_{K,\alpha} = 0 \,,$$

wobei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige kompakte Menge ist; hieraus folgere man

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \phi_{n,i} F(\mathsf{T}(x_{n,i}) g) = F(\phi * g) \,. \qquad \textit{(4 Punkte)}$$

[Tipp. Vollständige Induktion und Aufgabe 7(c).]

(c) Sei $g, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Zeige, dass dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, F(\mathsf{T}(x)\mathsf{P}g)\, \mathrm{d}^n x = F(\phi * \mathsf{P}g)$$

gilt. *(7 Punkte)*

[Tipp. (b)]