Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

Partielle Differentialgleichungen
5. Übung

4. Oktober 2011

(abzugeben in der Vorlesung am 11. Oktober 2011)

17. Ein Detail aus dem Beweis des Schwachen Maximumsprinzips.

Sei H eine reelle $n \times n$-Matrix mit

$$H = H^t \quad \text{und} \quad x^t \, H \, x \leq 0 \ \ \forall x.$$

Wir wollen zeigen, dass es dann eine Matrix D gibt, so dass $H = -D \cdot D^t$ gilt.

(a) *Zeige*: Jede reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix H besitzt einen reellen Eigenwert λ. Betrachte hierzu die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x^t \, H \, x$$

eingeschränkt auf die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 = 1\}$ und zeige, dass f dort ein Max. annimmt und dass für $v \in \mathbb{R}^n$ mit $f(v) = \max_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} f(x)$ gilt: $Hv = \lambda \, v$. *(6 Punkte)*

[Tipp. Lagrange-Multiplikatoren.]

(b) *Zeige*, dass für das orthogonale Komplement $W := \{v\}^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, x \rangle = 0\}$ von v $H|_W \subset W$ gilt und beweise mithilfe von (a), dass es eine Matrix O und reelle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit

$$H = O \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot O^t$$

gibt. *(6 Punkte)*

(c) *Zeige* mithilfe von (b), dass eine Matrix D existiert, so dass $H = -D \cdot D^t$ gilt. *(4 Punkte)*

(d) *Zeige*, dass der Differentialoperator L 2ter Ordnung mit

$$(Lu)(x) = \mathrm{div}(A \nabla u(x)), \quad a_{ij} \equiv \text{const.}$$

genau dann elliptisch ist, wenn eine invertierbare, lineare Abbildung $\phi : x \mapsto Bx$ existiert, so dass $L(u \circ \phi) = \triangle u$ gilt. *(4 Punkte)*

18. Differentialoperatoren in Divergenz- und Nicht-Divergenzform.

Seien $a_{ij}, \widetilde{a}_{ij}, b_i, \widetilde{b}_i$ und $c, \widetilde{c}$ reelle Funktionen auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ein Differentialoperator $L : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ 2ter Ordnung ist in Divergenzform gegeben, wenn sich L wie folgt schreiben lässt:

$$(Lu)(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \partial_j u(x) + b_i(x) u(x) \right) + c(x) u(x)$$

Ein Differentialoperator $\widetilde{L} : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ 2ter Ordnung ist in Nicht-Divergenzform gegeben, wenn sich $\widetilde{L}$ wie folgt schreiben lässt:

$$(\widetilde{L}u)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(x) \partial_i \partial_j u(x) + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{b}_i(x) \partial_i u(x) + \widetilde{c}(x) u(x)$$

Zeige, dass sich jeder Differentialoperator L 2ter Ordnung in Divergenzform auch in Nicht-Divergenzform und umgekehrt jeder Differentialoperator $\widetilde{L}$ 2ter Ordnung in Nicht-Divergenzform auch in Divergenzform schreiben lässt. *(8 Punkte)*

19. Harmonische Polynome.

Wir betrachten den Raum $\mathcal{P}(d,n)$ der reellen homogenen Polynome vom Grad d auf $\mathbb{R}^n$, d.h. alle Monome, aus denen ein Polynom $P \in \mathcal{P}(d,n)$ zusammengesetzt ist, haben den gleichen Grad. Wir wollen die Dimension des Unterraums $\mathcal{H}(d,n) \subset \mathcal{P}(d,n)$ der harmonischen Polynome vom Grad d bestimmen. Dies geschieht in mehreren Schritten:

(a) *Zeige*, dass für die Dimension des Raumes $\mathcal{P}(d,n)$ gilt: $\dim(\mathcal{P}(d,n)) = \binom{n+d-1}{d}$. *(3 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass gilt

$$\triangle|_{\mathcal{P}(d,n)} \begin{cases} \equiv 0 & \text{für } d = 0,1 \\ \subset \mathcal{P}(d-2,n) & \text{für } d \geq 2 \end{cases}$$

(3 Punkte)

(c) Der Raum $\mathcal{P}(d,n)$ besitzt eine natürliche Basis von Monomen der Form $P = \prod_i x_i^{d_i}$ mit $\sum_i d_i = d$. Für jedes solche Mononom P definiere $m := \max\{d_1, \ldots, d_n\}$.

Zeige mit vollständiger Induktion, dass $\triangle$ surjektiv ist, d.h.

(i) Induktionsanfang:
Zeige, dass für beliebiges (n,d), $d \geq 2$, jedes Mononom $P \in \mathcal{P}(d-2,n)$ mit $m = d-2$ im Bild von $\triangle$ enthalten ist. *(4 Punkte)*

(ii) Induktionsschritt:
Zeige, dass wenn für ein $M \leq d-2$ alle Monome P mit $M < m \leq d-2$ im Bild von $\triangle$ liegen, auch alle Monome P mit $m = M$ im Bild von $\triangle$ liegen. *(8 Punkte)*

(d) Berechne mithilfe von (c) die Dimension des Unterraums der harmonischen Polynome $\mathcal{H}(d,n) \subset \mathcal{P}(d,n)$. *(4 Punkte)*