Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

Partielle Differentialgleichungen
6. Übung

11. Oktober 2011

(abzugeben in der Vorlesung am 18. Oktober 2011)

20. Über das Transformationsverhalten von Differentialoperatoren 2ter Ordnung.

Seien $U, O \subset \mathbb{R}^n$ offene, beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und $\phi \in C^2(\overline{U}, \overline{O})$, d.h. $\phi : U \to O$ ist zweimal stetig differenzierbar und ϕ sowie alle Ableitungen von ϕ lassen sich stetig auf den Rand von U fortsetzen. Darüberhinaus existiere die Umkehrabbildung ϕ^{-1} mit $\phi^{-1} \in C^2(\overline{O}, \overline{U})$. Sei L ein Differentialoperator 2ter Ordnung, der in Nicht-Divergenzform gegeben ist, d.h.

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_i\partial_j u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x)$$

mit reellen Funktionen $a_{ij} \in C^2(U), b_i \in C^1(U)$ und $c \in C(U)$.

(a) *Zeige*, dass es einen Differentialoperator 2ter Ordnung $\widetilde{L}$ mit gibt, so dass

$$L(u \circ \phi) = (\widetilde{L}u) \circ \phi \qquad (*)$$

gilt, d.h. es existieren reelle Funktionen $\widetilde{a}_{ij}, \widetilde{b}_i$ und $\widetilde{c}$ auf $\phi(U) = O$ mit

$$(\widetilde{L}u)(y) = \sum_{i,j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(y)\partial_i\partial_j u(y) + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{b}_i(y)\partial_i u(y) + \widetilde{c}(y)u(y)$$

für $y = \phi(x) \in O$. *(8 Punkte)*

[Tipp. Man setze $\widehat{a}_{ij}(y) := a_{ij}(\phi^{-1}(y))$, $\widehat{b}_i(y) := b_i(\phi^{-1}(y))$ und $\widehat{c}(y) := c(\phi^{-1}(y))$ und forme mit diesem Ansatz die linke Seite von $(*)$ um.]

(b) *Zeige*: L ist genau dann elliptisch, wenn $\widetilde{L}$ elliptisch ist. *(4 Punkte)*

21. Über kompakte Operatoren.

Seien X, Y Banachräume. Eine lineare, stetige Abbildung $T : X \to Y$ heißt kompakt, wenn für jede beschränkte Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in X eine Teilfolge $(x_{m_l})_{l\in\mathbb{N}}$ existiert, für die $(Tx_{m_l})_{l\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(a) *Zeige*, dass eine lineare, stetige Abbildung $T : X \to Y$ genau dann kompakt ist, wenn das Bild der offenen Einheitskugel $B(0,1) = \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$ von X unter T relativ-kompakt ist, d.h. $\overline{T[B(0,1)]}$ ist kompakt. *(3 Punkte)*

(b) Sei X ein Banachraum und $\mathbb{1}_X : X \to X$ die identische Abbildung. *Zeige*: Ist X unendlich-dimensional, so ist $\mathbb{1}_X$ nicht kompakt. *(6 Punkte)*

[Tipp. Zeige zuerst: Ist $\overline{B(0,1)} = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ kompakt, so ist X endlich-dimensional. Hierfür überdecke man $\overline{B(0,1)}$ mit endlich vielen offenen Kugeln mit Radius $\frac{1}{2}$, etwa $\overline{B(0,1)} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \frac{1}{2})$. Sei V der durch $a_1, \dots, a_n$ erzeugte endlich-dimensionale Unterraum von X. Man zeige nun, dass $V = X$ gilt.]

Bitte wenden.

(c) Sei $l^2 := \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty\}$ der Hilbertraum aller quadratisch summierbaren Folgen mit der abzählbaren Orthonormalbasis $\{e_i := (\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}} \mid i \in \mathbb{N}\}$. Für eine beschränkte Folge $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ betrachte man den linearen, stetigen Operator $T : l^2 \to l^2$, der auf der Orthonormalbasis $\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ wie folgt wirkt

$$T(e_i) := \lambda_i \cdot e_i.$$

Zeige: T ist genau dann kompakt, wenn $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = 0$ gilt. *(6 Punkte)*

[Tipp für die Rückrichtung. Für alle $m \in \mathbb{N}$ sei $I_m : l^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ definiert durch $l^2 \ni x \mapsto (x_1, \ldots, x_m)$. Zeige, dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $B(0,1) \subset l^2$ eine Folge von Teilfolgen $(x_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ (parametrisiert durch $m \in \mathbb{N}_0$) existiert, so dass gilt:

- $(x_{0,n})_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und
- $(x_{m+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist Teilfolge von $(x_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $(I_{m+1}(x_{m+1,n}))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^{m+1}$ konvergiert.

Zeige, dass dann $(Tx_{m,m})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in l^2 ist.]

22. Über den Raum der Hölder-stetigen Funktionen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

(a) Gib für $0 < \alpha < \beta \leq 1$ eine Funktion u an, für die gilt: $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, aber $u \notin C^{0,\beta}(\Omega)$. *(3 Punkte)*

(b) Diese Teilaufgabe zeigt, weshalb man $C^{0,\alpha}(\Omega)$ nur für offene Teilmengen Ω betrachtet. Sei $0 < \alpha \leq 1$ und $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. *Zeige*:

(i) u ist gleichmäßig stetig. *(4 Punkte)*

(ii) Es gibt eine eindeutige Funktion $\widetilde{u} \in C^{0,\alpha}_{\text{loc}}(\overline{\Omega})$ mit $\widetilde{u}|_\Omega = u$. *(4 Punkte)*

(iii) Es gilt:

$$\sup_{x\neq y\in\overline{\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \sup_{x\neq y\in\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

(4 Punkte)

(c) Diese Teilaufgabe zeigt, weshalb man keine Hölder-Räume $C^{0,\gamma}(\Omega)$ für $\gamma > 1$ betrachtet. Sei $\gamma > 1$ und $u \in C^{0,\gamma}(\Omega)$. *Zeige*:

(i) u ist differenzierbar und es gilt $\nabla u \equiv 0$. *(4 Punkte)*

(ii) Ist Ω zusammenhängend, so gilt $u \equiv \text{const}$. *(4 Punkte)*