Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

Partielle Differentialgleichungen
10. Übung
(abzugeben in der Vorlesung am 15. November 2011)

08. November 2011

34. Vertauschbarkeit der zweiten partiellen Ableitungen.

Seien $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in W^{2,p}(\Omega)$. *Zeige*, dass für die schwachen Ableitungen von u

$$(u_{e_i})_{e_j} = (u_{e_j})_{e_i} \quad \text{für alle} \quad i, j = 1, \ldots, n$$

gilt. *(6 Punkte)*

35. Über Sobolevräume.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\mathbb{1}_\Omega : \Omega \to \{0, 1\}$ die Indikatorfunktion der Menge Ω. *Zeige*:

(a) Ist $u \in W^{1,2}(\Omega)$, so ist auch $w := \min\{u, \mathbb{1}_\Omega\} \in W^{1,2}(\Omega)$. *Bestimme* außerdem die Ableitung von w. *(6 Punkte)*

[Tipp. Aufg. 29(b)]

(b) $L^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ liegt dicht in $W^{1,2}(\Omega)$. *(4 Punkte)*

[Tipp. Für $u \in W^{1,2}(\Omega)$ betrachte man die Folge $u_n := \max\{-n \cdot \mathbb{1}_\Omega, \min\{u, n \cdot \mathbb{1}_\Omega\}\}$ und zeige $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = 0$.]

36. Die Umkehrung zu Proposition 3.32 gilt nicht.

Am folgenden Beispiel wollen wir einsehen, dass die Umkehrung zu Prop. 3.32 im Allgemeinen nicht gilt, d.h.

$$W_0^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \not\subset \{u \in C(\overline{\Omega}) : \, u|_{\partial\Omega} = 0\}. \tag{$*$}$$

Sei $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 1\} \subset \mathbb{R}^3$ und $\Omega = B(0,1)\setminus\{0\}$. Sei $u \in C_0^\infty(B(0,1))$ und $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\psi(r) = 1$ für $r \geq 1$ und $\psi(r) = 0$ für $r \leq \frac{1}{2}$.

(a) Sei $u_n(x) := \psi(n|x|)u(x)$. *Zeige*: $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} = 0$. *(6 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass für die schwache j-te partielle Ableitung von u_n

$$(u_n)_{e_j}(x) = \psi(n|x|)u_{e_j}(x) + n\psi'(n|x|)\frac{x_j}{|x|}u(x)$$

gilt. *(6 Punkte)*

(c) *Zeige* mithilfe von (a) und (b), dass $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = 0$ gilt und folgere daraus $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. *(6 Punkte)*

(d) *Zeige*, dass $(*)$ gilt. *(4 Punkte)*

Bitte wenden.

37. Unstetige Funktionen im Sobolevraum $W^{1,p}(\Omega)$.

Sei $1 \leq p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. *Zeige*: Ist $p < n$, so enthält $W^{1,p}(\Omega)$ unstetige Funktionen.

(4 Punkte)

38. Ein anderer Zugang zu Sobolevungleichungen.

Sobolevungleichungen setzen die "Größe" von ∇u mit der von u in Beziehung. Deshalb wollen wir u durch seinen Gradienten ausdrücken.

(a) Sei $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und seien $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{n-1}$ Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^n$. *Zeige*:

$$u(x) = -\frac{1}{n\omega_n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty \partial_r u(x + r\theta)\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta.$$

(4 Punkte)

[Tipp. Es gilt $u(x) = -\int_0^\infty \partial_r u(x + r\theta)\, \mathrm{d}r$.]

(b) Sei $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Zeige*

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\langle x - y, \nabla u(y) \rangle}{|y - x|^n}\, \mathrm{d}y$$

und folgere daraus die Ungleichung $|u(x)| \leq \frac{1}{n\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^{n-1}}\, \mathrm{d}y$. *(4 Punkte)*

[Tipp. Benutze (a), setze $y := x + r\theta$ und verwende den Transformationssatz.]