Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

27. September 2011

Partielle Differentialgleichungen
4. Übung

(abzugeben in der Vorlesung am 4. Oktober 2011)

13. Harmonische Funktionen auf $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$.

Wir betrachten Funktionen auf dem Einheitsball $B(0,1)$ in $\mathbb{R}^2$.

(a) Sei $u \in C^2(\overline{B(0,1)})$ eine auf $B(0,1)$ harmonische Funktion, die als $u = u(r,\varphi)$ ($0 \leq r \leq 1$ und $-\pi < \varphi \leq \pi$) in Polarkoordinaten gegeben sei. Zeige, dass dann

$$\int_{\partial B(0,1)} \frac{\partial u}{\partial r}(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) = 0$$

gilt. *(8 Punkte)*

[Tipp. Gaußscher Integralsatz.]

(b) Untersuche, ob die folgenden Neumann-Probleme eine Lösung $u \in C^2(\overline{B(0,1)})$ haben, und „errate" gegebenenfalls eine solche Lösung.

(i) $\triangle u = 0$ auf $B(0,1)$ mit $\frac{\partial u}{\partial r} = \sin(\varphi)$ auf $\partial B(0,1)$. *(6 Punkte)*

(ii) $\triangle u = 0$ auf $B(0,1)$ mit $\frac{\partial u}{\partial r} = \sin^2(\varphi)$ auf $\partial B(0,1)$. *(6 Punkte)*

14. Harmonische Funktionen spezieller Gestalt.

Es sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $v : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sowie ein fester Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Wir betrachten die beiden Funktionen

$$u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\, x \mapsto v(\|x\|)$$
$$\text{und} \quad w : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\, x \mapsto v(\sqrt{1 + \|x\|^2\,\|y\|^2 - 2\,x \cdot y})\ .$$

Zeige: u ist genau dann harmonisch, wenn w harmonisch ist. *(10 Punkte)*

15. Zum Maximumprinzip für harmonische Funktionen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, zusammenhängendes und beschränktes Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sowie $g_1, g_2 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Weiter seien $u_1, u_2 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetige, auf Ω zweimal stetig differenzierbare, Lösungen des Dirichlet-Problems

$$-\triangle u_k|\Omega = f\,, \qquad u_k|\partial\Omega = g_k$$

für $k \in \{1,2\}$.

Zeige: Gilt $g_1 \leq g_2$, so auch $u_1 \leq u_2$. *(8 Punkte)*

Bitte wenden.

16. Ein Detail aus dem Beweis der Poissonschen Darstellungsformel.

Wir bezeichnen mit $K(x,y)$ den Poissonkern wie in Abschnitt 2.3 der Vorlesung. Über ihn ist in der Vorlesung gezeigt worden (das soll natürlich *nicht* noch einmal bewiesen werden):

(i) $K(x,y) > 0$ für $y \in \partial B(0,1)$

(ii) $\int_{\partial B(0,1)} K(x,y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = 1$

(iii) $K(x,y)$ konvergiert für alle $y_0 \in \partial B(0,1)$ im Grenzwert $x \to y_0$ gegen Null, und zwar ist die Konvergenz auf kompakten Teilmengen von $\partial B(0,1) \setminus \{y_0\}$ gleichmäßig.

Es sei nun eine stetige Funktion $u \in C(\overline{B(0,1)})$ gegeben. Wir definieren

$$\tilde{u} : B(0,1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_{\partial B(0,1)} K(x,y)\,u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\ . \qquad (*)$$

Zeige, dass sich die Funktion $\tilde{u}$ stetig auf $\partial B(0,1)$ fortsetzen läßt, und dass die Fortsetzung auf $\partial B(0,1)$ mit u übereinstimmt. *(12 Punkte)*

[Tipp. Für vorgegebenes $x_0 \in \partial B(0,1)$ betrachte man $x \in B(0,1)$ in der Nähe von x_0 und zerlege das Integral in $(*)$ in einen Anteil, der nahe bei x_0 liegt, und in einen „Rest“. Man verwende die zitierten Eigenschaften (i)–(iii) von K, um zu zeigen, dass der „Rest“ klein wird. Beim Anteil nahe bei x_0 nutze man die Stetigkeit von u, um $u(y)$ durch $u(x_0)$ zu approximieren.]