Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

Partielle Differentialgleichungen
13. Übung

29. November 2011

(abzugeben in der Vorlesung am 06. Dezember 2011)

48. Rechnen mit Polarkoordinaten.

Sei $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ in Polarkoordinaten durch

$$u(re^{i\varphi}) := r^2 \log(r) \cos(2\varphi)$$

gegeben. *Zeige*

$$\triangle u(re^{i\varphi}) = 4\cos(2\varphi) \text{ in } B(0,1),$$

d.h. $\triangle u \in L^\infty(B(0,1))$, aber $u \in W^{2,p}(B(0,1)) \backslash W^{2,\infty}(B(0,1))$ für alle $1 \le p < \infty$.

(8 Zusatzpunkte)

[Tipp. Benutze Aufgabe 3 (c).]

49. Eine Interpolationsungleichung.

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, der $C^1(B(0,2))$ enthält, d.h. es existiert eine stetige, injektive Abbildung $I : C^1(B(0,2)) \hookrightarrow X$. *Zeige*, dass ein $C(n) < \infty$ existiert, so dass

$$\|u\|_{C^2(B(0,2))} \le C(n) \left(\|D^2 u\|_{L^\infty(B(0,2))} + \|I(u)\|_X\right)$$

gilt.

(8 Zusatzpunkte)

[Tipp. Zeige, dass die Einbettungen $C^2(B(0,2)) \to C^1(B(0,2)) \hookrightarrow X$ die Voraussetzungen des Lemmas von Ehrling 3.3 erfüllen, d.h. zeige, dass die Abbildung $T : C^2(B(0,2)) \to C^1(B(0,2))$ kompakt ist und schreibe $\|u\|_{C^2(B(0,2))} = \|D^2u\|_{L^\infty(B(0,2))} + \|u\|_{C^1(B(0,2))}$.]

50. Äquivalente Normen.

Sei $U \subset C^2(B(0,2))$ der Unterraum, der durch $U := \{u \in C^2(B(0,2)) \mid u(0) = 0, \nabla u(0) = 0\}$ gegeben ist. *Zeige*, dass auf U die Norm $\|D^2u\|_{L^\infty(B(0,2))}$ äquivalent zu der Norm $\|u\|_{C^2(B(0,2))}$ ist.

(8 Zusatzpunkte)

[Tipp. Es gilt $u(x) - u(0) = \int_0^1 \nabla u(t \cdot x) \cdot x \, \mathrm{d}t$.]

51. Über die innere Schauderabschätzung.

An welcher Stelle und wie muss der Beweis der inneren Schauderabschätzung 4.11 angepasst werden, um für $u \in C^{2,\alpha}(B(0,2))$ die Abschätzung

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1))} \le C(\Lambda, n, \alpha) \left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{L^1(B(0,2))}\right)$$

zu erhalten?

(8 Zusatzpunkte)