Martin Schmidt
Sebastian Klein
Markus Knopf

Partielle Differentialgleichungen
1. Übung

6. September 2011

(abzugeben in der Vorlesung am 13. September 2011)

1. Typen von Differentialgleichungen.

Untersuche, welche der folgenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung elliptisch sind.

(a) $\partial_{xx}u + \partial_{yy}u = 0$ *(1 Punkt)*

(b) $\partial_{xy}u + \partial_{yy}u = 0$ *(1 Punkt)*

(c) $\partial_{xx}u - \partial_{yy}u = 0$ *(1 Punkt)*

(d) $\partial_t u - \partial_{xx}u - \partial_{tt}u = 0$ *(1 Punkt)*

2. Über die homogene Transportgleichung.

Sei $b \in \mathbb{R}^n$ ein fester Vektor. Die (homogene) Transportgleichung in Richtung von b ist dann die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{u} + b \cdot \nabla u = 0\ . \tag{$*$}$$

Dabei ist $u = u(x,t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion, $\dot{u}$ bezeichnet die Ableitung von u nach dem Parameter $t \in \mathbb{R}$, und der Gradient ∇u bezieht sich nur auf die Ableitung nach den Komponenten des Vektors $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeige: Ist $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung von ($*$), so ist u auf jeder der parallelen Geraden in Richtung $(b,1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ konstant. *(4 Punkte)*

(b) Sei $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Zeige: Dann ist $u(x,t) := g(x - tb)$ eine Lösung von ($*$), und zwar die einzige mit $u(\,\cdot\,,0) = g$. *(4 Punkte)*

3. Über den Laplaceoperator. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge.

(a) Seien $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonische Funktionen. Dann ist die Funktion $w(x) := u(x) \cdot v(x)$ genau dann harmonisch, wenn $\nabla u \perp \nabla v$ gilt. *(6 Punkte)*

(b) Seien $f \in C^2(\Omega)$ und $g \in C^1(\Omega)$. Man zeige, dass dann

$$g \,\triangle f = \operatorname{div}(g\,\nabla f) - \nabla f \cdot \nabla g$$

gilt. *(6 Punkte)*

(c) Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeige, dass $\triangle u$ in den Polarkoordinaten $x = r\,\cos(\varphi)$, $y = r\,\sin(\varphi)$ die Darstellung

$$\triangle u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

besitzt. *(6 Punkte)*

4. Extremale des Dirichletintegrals.

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\overline{\Omega}$ kompakt. Die Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$ „minimiere in $C^1(\overline{\Omega})$ das Dirichletintegral $\int_\Omega \|\nabla u\|^2$ bei festgehaltenem Rand“, d.h. für jede Funktion $v \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $v|\partial\Omega = u|\partial\Omega$ gelte

$$\int_\Omega \|\nabla u\|^2 \leq \int_\Omega \|\nabla v\|^2 \,.$$

Ziel der Aufgabe ist es, zu beweisen, dass u harmonisch ist. Dazu gehen man im Einzelnen wie folgt vor:

Es sei eine beliebige Funktion $\lambda \in C^1(\overline{\Omega})$ gegeben, deren Träger $\mathrm{Tr}(\lambda) := \overline{\{\, x \in \overline{\Omega} \,|\, \lambda(x) \neq 0 \,\}}$ in Ω enthalten ist. Dann betrachten wir die Funktionenschar $(u_t)_{t\in\mathbb{R}}$ mit

$$u_t : \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ x \mapsto u(x) + t\,\lambda(x)$$

sowie die differenzierbare Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \int_\Omega \|\nabla u_t\|^2 \,.$$

Nun zeige man:

(a) Es gilt $\frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0} (\|\nabla u_t\|^2) = 2\,\nabla u \cdot \nabla\lambda\,.$ *(5 Punkte)*

(b) Mit Hilfe von (a) berechne man: $f'(0) = -2\int_\Omega \lambda \,\triangle u\,.$ *(6 Punkte)*
[Tipp. Aufgabe 3(b) und Gaußscher Integralsatz.]

(c) Andererseits gilt wegen der Minimalitätseigenschaft von u: $f'(0) = 0\,.$ *(4 Punkte)*

(d) Durch Kombination von (b) mit (c) folgere man, dass $\triangle u|\Omega = 0$ ist; daher ist u harmonisch.

Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass es zu jedem $x \in \Omega$ und jeder offenen Umgebung U von x in Ω eine „Höckerfunktion“ $\lambda \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $\lambda \geq 0$, $\mathrm{Tr}(\lambda) \subset U$ und $\lambda(x) = 1$ gibt. Man wende (b) und (c) auf ein derartiges λ an, um zu zeigen, dass $\triangle u(x) = 0$ ist. *(5 Punkte)*

Das **Tutorium** findet erstmals am

Mittwoch, den 7. September 2011

um **13.45–15.15 Uhr** in **A5, Raum C 012** statt.