Seminar: Ausgewählte Themen gewöhnlicher Differentialgleichungen und dynamischer Systeme

Yue Yu

14.11.2018

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

In diesem Kapitel werden wir sehen, dass die Eigenschaft der Hyperbolizität unter Störung erhalten ist. Das heißt, falls ein linearer Isomorphismus hyperbolisch ist, ist eine naheliegende lineare Abbildung auch ein hyperbolischer linearer Isomorphismus. Hyperbolizität hat nicht nur Bezug auf Expansion und Kontraktion, sondern auch auf die Invertierbarkeit.

2 Persistenz der Hyperbolizität für einen Fixpunkt

Definition (Mininorm) Es seien $(E, |\cdot|)$und$(E', |\cdot|')$ zwei endlich-dimensionale normierte Vektorräume mit der gleichen Dimension. Ein Homömorphismus $f : E \to E'$ ist ein Lipömorphismus, wenn f und f^{-1} lipschitz-stetig sind. Für eine lineare Abbildung $A : E \to E'$, wir nennen

$$m(A) = inf\{|AV|'\big|V \in E, |V| = 1\}$$

die Mininorm von A. Wenn A invertierbar ist, ist $m(a) = |A^{-1}|^{-1}$.
Satz 1. Satz der Inversen Funktion für Lipschitzfunktionen Es sei $A : E \to E'$ ein linearer Isomorphismus, $\Phi : E \to E'$ ist lipschitz-stetig. wenn

$$lip\Phi < m(A),$$

dann ist $A + \Phi$ ein Lipömorphismus und

$$lip((A + \Phi)^{-1}) \leq \frac{1}{m(A) - lip\Phi}.$$

Beweis: Zuerst zeigen wir, dass $A+\Phi$ bijektiv ist, das bedeutet, dass $\forall z \in E'$,die Gleichung

$$(A + \Phi)x = z$$

eine eindeutige Lösung hat. Das ist nichts anders zu zeigen, dass die Abbildung von E nach E

$$T(x) = A^{-1}z - A^{-1}\Phi(x)$$

einen eindeutigen Fixpunkt besitzt. Es genügt zu zeigen, dass T eine Kontraktion ist. $\forall x, y \in E$,

$$\begin{aligned}|Tx - Ty| &= |A^{-1}\Phi x - A^{-1}\Phi y| \\ &\leq |A^{-1}| \cdot Lip\Phi \cdot |x - y|\end{aligned}$$

Wir haben angenommen, dass $Lip\Phi < m(A)$, so können wir schlussfolgern, dass $|A^{-1}| \cdot Lip\Phi < 1$. Weil die lipschitz-Konstante kleiner als 1 ist, ist T eine Kontraktion, daraus folgt, dass es nur einen Fixpunkt x von T gibt, außerdem für die Abbildung $A + \phi$ gibt es ein eindeutiges x für alle z, deshalb ist die Abbilung $A + \phi$ bijektiv.
$A + \Phi$ ist lipschitz-stetig, wir sollen jetzt überprüfen, dass die Inverse $(A + \Phi)^{-1}$ auch mit einer speziellen Konstante lipschitz-stetig ist. $\forall x, y \in E$,

$$\begin{aligned}|(A + \Phi)x - (A + \Phi)y| &\geq |A(x - y)| - |\Phi x - \Phi y| \\ &\geq (m(A) - Lip\Phi)|x - y|\end{aligned}$$

Es seien $x = (A + \Phi)^{-1}x'$ und $y = ((A + \Phi)^{-1}y'$, wir setzen x und y in die Ungleichung ein und bekommen:

$$|x' - y'| \geq (m(A) - Lip\Phi)|(A + \Phi)^{-1}(x') - (A + \Phi)^{-1}(y')|$$

$$\frac{1}{m(A) - lip\Phi}|x' - y'| \leq |(A + \Phi)^{-1}(x') - (A + \Phi)^{-1}(y')|$$

darausfolgt $lip((A + \Phi)^{-1}) \leq \frac{1}{m(A) - lip\Phi}$.

$\square$

Bemerkung Ein spezieller Fall ist wenn Φ C^1 ist. $A + \Phi$ ist ein Diffeomorphismus laut dem Satz der Inversen Funktion für Lipschitzfunktionen. Wenn Φ noch zusätzlich linear ist, ist LipΦ die Operator Norm von Φ und $A + \Phi$ ein linearer Isomorphismus.

Definition (Box Metrik) Es seien A und X Metrische Räume, für den Produkt Raum definieren wir

$$d((a, x), (b, y)) = max\{d(a, b), d(x, y)\}$$

als die Box Metrik, wobei die drei Metriken A, X, $A \times X$ die selbe Buchstabe d benutzen.

Satz 2. Es seien A und X zwei metrische Räume, X ist vollständig, $F : A \times X \to X$ ist eine Abbildung. Wir nehmen an, $\exists 0 < \lambda < 1$, sodass

$$d(F(a, x), F(a, y)) \leq \lambda d(x, y)$$

$\forall a \in A$ und $\forall x, y \in X$. Sei $p(a) : A \to X$ der eindeutige Fixpunkt von $F(a, \cdot)$, dann ist p ist stetig, wenn F stetig ist und p ist lipschitz-stetig, wenn F lipschitz stetig ist.

Beweis: Wegen

$$\begin{aligned} d(p(a), p(b)) &= d(F(a, p(a)), F(b, p(b))) \\ &\leq d(F(a, p(a)), F(a, p(b))) + d(F(a, p(b)), F(b, p(b))) \\ &\leq \lambda d((p(a), p(b)) + d(F(a, p(b)), F(b, p(b))) \end{aligned}$$

Das heißt:

$$d(p(a), p(b)) < \frac{1}{1 - \lambda} d(F(a, p(b)), F(b, p(b))).$$

Nun zeigen wir, dass die Stetigkeit von F die Stetigkeit von p folgt. Da F stetig in $(b, p(b))$ ist, das heißt, $\forall \epsilon$, $\exists \delta < 0$, sodass wenn $d((b, p(b)), (a, p(b))) < \delta$ gilt, ist $d(F(b, p(b)), F(a, p(b))) < \epsilon$, dann ist $d(p(a), p(b)) < \frac{1}{1-\lambda} \cdot \epsilon$ mit $d(a, b) < \delta$, weil $d(b, p(b)), (a, p(b))) = d(a, b) < \delta$, daraus folgt die Stetigkeit von p. Bei der Lipschitz-Stetigkeit nutzen wir auch die gleiche Idee. Weil F lipschitz-stetig ist, $\exists L > 0$, sodass $d(F(a, p(b)), F(b, p(b))) \leq L \cdot d(a, b)$. So ist die Ungleichung $d(p(a), p(b)) < \frac{1}{1-\lambda} \cdot L \cdot d(a, b))$, betrachten wir $\frac{1}{1-\lambda} \cdot L$ als die neue Lipschitz-Konstante für p, so ist p lipschitz stetig.

$\square$

Nun zeigen wir, wenn ein Isomorphismus A hyperbolisch ist, ist die naheliegende lineare Abbildung B auch hyperbolisch. Es seien $E^s \oplus E^u$ die hyperbolische Zerlegung von A. Wir möchten zeigen, dass $G^s \oplus G^u$ die hyperbolische Zerlegung von B ist. Wir sind zuerst auf der Suche von G^u und danach kann G^s genauso gefunden werden. $E^u = \bigcap_0^\infty A^n(C_1(E^u))$ ist der Kern von dem instabile Kegel $C_1(E^u)$, wobei $C_1(E^u) = \{V \in E \big| |Vs| \leq |Vu|\}$. Wenn man B darauf anwendet, ist $G^u = \bigcap_0^\infty B^n(C_1(E^u))$.
Es seien $E = E_1 \oplus E_2$ die direkte Summe von E, $L(E_1, E_2)$ist der Raum von linearen Abbildungen von E_1 nach E_2, $L(E_1, E_2)(1)$ ist der geschlossene Einheitsball um den Ursprungspunkt.

Lemma Sei $B : E \to E$ lineare Isomorphismus, es kann als $\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ dargestellt werden, wobei $B_{ij} = \pi_i \circ B|_{E_j}$. Wenn es eine Norm von E vom Box Typ bezüglich der direkten Summe und zwei Konstanten $\lambda > 0$, $\epsilon > 0$ gibt, sodass

$$\begin{aligned} max\{|B_{11}^{-1}|, |B_{22}|\} &< \lambda, \\ max\{|B_{12}|, |B_{21}|\} &< \epsilon, \\ \lambda + \epsilon &< 1, \end{aligned}$$

,
dann exisitiert eine eindeutige lineare Abbildung $P = P_B : E_1 \to E_2$ mit $|P| < 1$, sodass der lineare Unterraum $gr(P)$ B-invariant ist, wobei $gr(P)$ der Graph von P ist. $B|_{gr(P)}$ ist eine $(\lambda^{-1} - \epsilon)$ Expansion. P_B und $gr(P_B)$ sind von B stetig abhängig.
Bemerkung $\lambda + \epsilon < 1$ führt zu $\lambda^{-1} - \epsilon > 1$.

Beweis Es sei $P : E_1 \to E_2$ eine lineare Abbildung mit $|P| < 1$. $\forall v \in E_1$,

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ Pv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}v + B_{12}Pv \\ B_{21}v + B_{22}Pv \end{pmatrix}$$

Die Aussage $B(gr(P)) \subset gr(P)$ gilt genau dann wenn $P(B_{11}v + B_{12}Pv) = B_{21}v + B_{22}Pv$, $\forall v \in E_1$, vereinfacht ist $P(B_{11} + B_{12}P) = B_{21} + B_{22}P$.
Laut dem Satz der Inversen Funktionen für Lipschitzfunktionen ist $m(B_{11}) \geq \lambda^{-1}$, $|B_{12}P| \leq \epsilon$ und $B_{11} + B_{12}P : E_1 \to E_2$ ist invertierbar. Von $P = (B_{21} + B_{22}P)(B_{11} + B_{12}P)^{-1}$ kann man eine Abbildung erzeugen, nämlich $T = T_B : L(E_1, E_2)(1) \to L(E_1, E_2)$, $T(P) = (B_{21} + B_{22}P)(B_{11} + B_{12}P)^{-1}$, es heißt die von B induzierte Transformation von dem Graphen. Unser Ziel von Anfang kann erreicht werden dadurch dass wir einen Fixpunkt von T finden.

Zuerst überprüfen wir, dass T eine Selbstabbilung ist.

$$\begin{aligned}|T(P)| &\leq |B_{21} + B_{22}P| \cdot |(B_{11} + B_{22}P)^{-1}| \\ &= |B_{21} + B_{22}P| \cdot |(B_{11}(1 + B_{11}^{-1}B_{12}P))^{-1}| \\ &\leq |B_{21} + B_{22}P| \cdot |B_{11}^{-1}| \cdot |(1 + B_{11}^{-1}B_{12}P)^{-1}| \\ &\leq (\lambda + \epsilon) \cdot \frac{1}{\lambda^{-1}} \cdot \frac{1}{1 + \lambda\epsilon} \\ &\leq \frac{\lambda + \epsilon}{\lambda^{-1} - \epsilon}.\end{aligned}$$

So können wir sehen, dass $\forall P \in L(E_1, E_2)(1)$ bildet $T(P)$ auf sich selbst ab.
Zweitens überprüfen wir, dass T eine Kontraktion ist, das heißt, es gibt eine Lipschitzkonstante $L < 1$, sodass $|T(P) - T(P')| \leq L \cdot |P - P'|$, $\forall P, P' \in L(E_1, E_2)$. Wir formen $T(P)$ und $T(P')$ um,

$$T(P)(B_{11} + B_{12}P) = B_{21} + B_{22}P, T(P')(B_{11} + B_{12}P') = B_{21} + B_{22}P'$$

$$\begin{aligned}(T(P) - T(P'))B_{11} + T(P)B_{12}P - T(P')B_{12}P + T(P')B_{12}P - T(P')B_{12}P' &= B22(P - P') \\ (T(P) - T(P'))(B_{11} + B_{12}P) &= (B_{22} - T(P')B_{12})(P - P') \\ T(P) - T(P') &= (B_{22} - T(P')B_{12})(P - P')(B_{11} + B_{12}P)^{-1}\end{aligned}$$

wir können schlussfolgern, wegen

$$|T(P) - T(P')| \leq \frac{\lambda + \epsilon}{\lambda^{-1} - \epsilon}|P - P'|.$$

ist $T(P)$ eine Kontraktion. Laut dem Banachfixpunktsatz hat T einen eindeutigen Fixpunkt $P = P_B \in L(E_1, E_2)(1)$, sodass $B(gr(P)) \subset gr(P)$, weil $B : E \to E$ ein linearer Isomorphismus ist, gilt auch die Gleichung $B(gr(P)) = gr(P)$ und somit ist der lineare Unterraum $gr(P)$ B-invariant.
Da die Norm von Box Typ ist und $P \in L(E_1, E_2)$, ist die Norm gleich der erste Komponent von dem Vektor in $gr(P)$,

$$|B(v, Pv)| = |B_{11}v + B_{12}Pv| \geq (\lambda^{-1} - \epsilon)|v|$$

somit ist $B|_{gr(P)}$ eine $(\lambda^{-1} - \epsilon)$ Expansion.
Es sei β die Menge aller linearen Isomorphismus, die die Bedingungen von dem Lemma erfüllen. Wir haben eine Familie von Kontraktion mit dem Parameter B.

$$T : \beta \times L(E_1, E_2)(1) \to L(E_1, E_2)(1)$$
$$T(B, P) = T_B(P) = (B_{21} + B_{22}P)(B_{11} + B_{12}P)^{-1}$$

T ist offenbar stetig und die Lipschitzkonstante von T_B hängt nicht von B ab. Laut dem vorherigen Satz sind der Fixpunkt P_B und $gr(P_B)$ stetig von B abhängig.

□

Satz 3.(Persistenz der Hyperbolizität für eine lineare Abbildung) Es sei $A : E \to E$ ein hyperbolischer linearer Isomorphimsmus. Es existiert ein $\delta_0 > 0$ sodass eine lineare Abbilung B auch hyperbolisch ist wenn $B : E \to E$ die Bedingung $|B - A| < \delta_0$ erfüllt. Die stabile und instabile Räume $E^s(B)$ und $E^u(B)$ hängen stetig von B ab.

Beweis: Wenn der Satz für eine Norm von E gilt, gilt das auch für jede Norm von E. Es sei $E = E^u \oplus E^s$ die hyperbolische Zerlegung von A, $\exists\tau$ mit $0 < \tau < 1$ im Bezug auf $|\cdot|$. Dann sind $|A_{uu}^{-1}| \leq \tau$, $|A_{ss}^{-1}| \leq \tau$, $A_{us} = A_{su} = 0$.
Laut Satz 1. gibt es ein $\delta_0 > 0$, sodass alle B mit $|B - A| < \delta_0$ invertierbar sind. Wähle $\tau < \lambda < 1$ und $\epsilon > 0$, sodass $\lambda + \epsilon < 1$. Verkleiner $\delta_0 > 0$, sodass alle B mit $|B - A| < \delta_0$ die Bedingungen vom Lemma bezüglich der Zerlegung von E in der direkten Summe $E = E^u \oplus E^s$ erfüllen. Wegen

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1},$$

wenn B nah an A liegt, liegt B^{-1} auch nah an A^{-1}. Verkleinern $\delta_0 > 0$ weiter, sodass wenn $|B-A| < \delta_0$ gilt, erfüllt B^{-1} das Lemma auch bezüglich $E = E^u \oplus E^s$. Deshalb $\exists P_B \in L(E^u, E^s)(1)$ und $Q_B \in L(E^s, E^u)(1)$, sodass $G^u = gr(P_B)$ und $G^s = gr(Q_B)$ beide B-invariant sind, also $G^u = \{(x, P_x)|x \in E^u\}$ und $G^s = \{(Q_B(x), x)|x \in E^s\}$. Außerdem ist $B|_{G^s}$ eine Kontraktion und $B|_{G^u}$ eine Expansion, da Q_B von B^{-1} nach P_B^{-1} abbildet, B^{-1} ist $gr(Q_B)$ Expansion und B ist $gr(Q_B)$ Kontraktion. Zusätzlich ist $G^u \cap G^s = \{0\}$, wir können es so begründen: seien $y = P_B(x)$ und $x = Q_B(y)$, so ist $x = Q_B \cdot P_B \cdot x$ und $|x| \leq |Q_B| \cdot |P_B| \cdot |x|$ und führt zu einem Widerspruch. Weil die zwei Unterräume komplementäre Dimensionen haben, folgt $E = G^u \oplus G^s$. So können wir schlussfolgern, dass B hyperbolisch mit $E^s(B) = G^s$ und $E^u(B) = G^u$ ist.

□

Satz(Persistenz der Hyperbolizität von einem hyperbolischen Fixpunkt) Es sei $p \in U$ ein hyperbolischer Fixpunkt von f, es gibt $\delta_0 > 0$,$\epsilon_0 > 0$, sodass $\forall g \in B^1(f, \delta_0)$, $B(p, \epsilon_0)$ maximal einen Fixpunkt besitzt. $\forall 0 < \epsilon < \epsilon_0$, $\exists 0 < \delta \leq \delta_0$, sodass $\forall g \in B^1(f, \delta)$ in $B(p, \epsilon)$ mindestens einen Fixpunkt P_g hat.

Definition Ein periodischer Punkt $p \in U$ von f heißt hyperbolisch, wenn die Ableitung $Df^m(p) : E \to E$ ein Hyperbolischer linearer Isomorphismus ist.

Aus dem Satz 2. und dem Satz "Persistenz der Hyperbolizität von einem hyperbolischen Fixpunkt"vom letzten Kapitel folgt der letzte Satz:

Satz 4. Es sei $p \in U$ ein hyperbolischer Fixpunkt von f. $\exists\delta_0, \epsilon_0$, sodass $\forall g \in B^1(f, \delta_0)$ einen eindeutigen hyperbolsichen Fixpunkt P_g in $B(p, \epsilon_0)$ hat, wobei P_g, $E^s(P_g)$ und $E^u(P_g)$ von g stetig anhängen.

3 Literaturverzeichnis

[1] Differentiable Dynamical Systems(An introduction to structural stability and hyperbolicity) Lan Wen