Kapitel 2

Maximumprinzipien

2.1 Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen

Für eine harmonische Funktion u auf einem Gebiet, das einen Ball $B(x,r)$ vom Radius r enthält, ist der Mittelwert von u auf dem Rand $\partial B(x,r)$ des Balles gerade gleich dem Wert von u am Mittelpunkt x. Weil das für beliebige Radien gilt und der Mittelwert von u auf dem Ball $B(x,r)$ gerade gleich einem gewichtetem Mittelwert aller Mittelwerte von u auf den Rändern der Bälle $B(x,r')$ mit $0 \leq r' \leq r$ ist, ist dann auch der Mittelwert auf dem Ball $B(x,r)$ gleich dem Wert von u am Mittelpunkt x. Dieser Sachverhalt führt zu aufschlussreichen Folgerungen.

Mittelwerteigenschaft 2.1. *Sei $u \in C^2(\Omega)$ eine harmonischen Funktion auf einem offenen Gebiet Ω, das den Ball $B(x,r)$ enthält. Dann sind die Mittelwerte von u auf dem Ball $B(x,r)$ und dessen Rand gleich dem Wert von u am Mittelpunkt x. Sind umgekehrt die Mittelwerte einer zweimal differenzierbaren Funktion $u \in C^2(\Omega)$ auf allen Bällen $B(x,r)$, die in Ω enthalten sind, oder auf Rändern dieser Bälle gleich den Werten von u an den entsprechenden Mittelpunkten, dann ist u auf Ω harmonisch.*

Beweis: Für $x \in \Omega$ sei $\Phi(r)$ definiert als der Mittelwert von u auf $\partial B(x,r) \subseteq \Omega$:

$$\Phi(r) := \frac{1}{r^{n-1} n\omega_n} \int\limits_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\,\mathrm{d}\sigma(z).$$

Hier bezeichnet ω_n das Volumen des Einheitsballs im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$. Mit Hilfe des Gaußschen Satzes erhalten wir für die Ableitung $\Phi'(r) =$

$$\frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz)\cdot z\,\mathrm{d}\sigma(z) = \frac{1}{r^{n-1} n\omega_n} \int\limits_{\partial B(x,r)} \nabla u(y)\cdot N\,\mathrm{d}\sigma(y) = \frac{1}{r^{n-1} n\omega_n} \int\limits_{B(x,r)} \triangle u\,\mathrm{d}\mu.$$

Für harmonische u ist also Φ konstant solange $B(x,r)$ in Ω liegt. Wegen der Stetigkeit von u konvergiert $\Phi(r)$ im Grenzwert $\lim r \to 0$ gegen $u(x)$. Also sind diese Mittelwerte von u gleich den Werten $u(x)$ von u an den entsprechenden Mittelpunkten. Wegen

$$\frac{1}{r^n\omega_n}\int\limits_{B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}^n y = \frac{n}{r^n}\int\limits_0^r \frac{1}{s^{n-1}n\omega_n}\int\limits_{\partial B(x,s)} s^{n-1}u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}s = \frac{n}{r^n}\int\limits_0^r s^{n-1}\Phi(s)\,\mathrm{d}s.$$

folgt daraus, dass auch der Mittelwert von u auf $B(x,r)\subseteq\Omega$ gleich $u(x)$ ist.

Wenn aber umgekehrt die Mittelwerte von u auf allen Bällen $B(x,r)$ in Ω gleich den Werten von u an den entsprechenden Mittelpunkten sind, dann gilt

$$u(x) = \frac{n}{r^n}\int\limits_0^r s^{n-1}\Phi(s)\,\mathrm{d}s.$$

Deshalb verschwindet die Ableitung der rechten Seite nach r:

$$-\frac{n^2}{r^{n+1}}\int\limits_0^r s^{n-1}\Phi(s)\,\mathrm{d}s + \frac{n}{r^n}r^{n-1}\Phi(r) = -\frac{n}{r}u(x) + \frac{n}{r}\Phi(r) = 0.$$

Dann sind auch die Mittelwerte $\Phi(r)$ von u auf den Rändern der Bälle $B(x,r)$ gleich $u(x)$. Weil u zweimal stetig differenzierbar ist, ist nach unser obigen Formel Φ differenzierbar, und die Ableitung $\Phi'(r)$ verschwindet genau dann, wenn die Integrale von $\triangle u$ über alle Bälle in Ω verschwinden, bzw. u harmonisch ist. **q.e.d.**

Aufgrund dieser Mittelwerteigenschaft gilt für $\psi \in C_0^\infty((0,r))$:

$$\left(\int_0^r \psi(s)\,\mathrm{d}s\right)u(x) = \int\limits_{B(x,r)} u(y)\frac{\psi(|y-x|)}{n|y-x|^{n-1}\omega_n}\,\mathrm{d}^n y.$$

Diese Charakterisierung können wir auf Distributionen übertragen:

Schwache Mittelwerteigenschaft 2.2. *Sei U eine harmonische Distribution auf einem offenen Gebiet Ω, das den Ball $B(x,r)$ enthält. Für $\psi \in C_0^\infty((0,r))$ mit $\int \psi\,\mathrm{d}\mu = 0$ verschwindet U auf folgender Testfunktion mit kompakten Träger in Ω:*

$$f(y) = \frac{\psi(|y-x|)}{n|y-x|^{n-1}\omega_n}.$$

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass es eine Testfunktion mit kompaktem Träger in Ω gibt, die $\triangle g = f$ erfüllt. Aufgrund der Voraussetzungen an ψ gibt es eine Testfunktion Ψ mit kompaktem Träger in $[0, r]$, deren Ableitung gerade gleich ψ ist. Wir definieren

$$g(y) = \int_r^{|y-x|} \frac{\Psi(s)}{ns^{n-1}\omega_n}\, \mathrm{d}s.$$

Das ist eine Testfunktion mit kompaktem Träger in $B(x, r) \subseteq \Omega$, die nur von $s = |y-x|$ abhängt. Für eine Funktion $u(x) := v(|x|) = v(\sqrt{x \cdot x})$ ergibt die Kettenregel für $x \neq 0$:

$$\nabla_x u(x) = v(|x|)\nabla_x |x| = v'(|x|)\frac{2x}{2|x|} \qquad \triangle_x u(x) = v''(|x|) + \frac{n-1}{|x|}v'(|x|) \tag{2.1}$$

Daraus ergibt sich

$$\triangle_y g(y) = \frac{\psi(|y-x|)}{n|y-x|^{n-1}\omega_n} - \frac{(n-1)\Psi(|y-x|)}{n|y-x|^n\omega_n} + \frac{n-1}{|y-x|}\frac{\Psi(|y-x|}{n|y-x|^{n-1}\omega_n} = f(y).\mathbf{q.e.d.}$$

Weylsches Lemma 2.3. *Sei U eine harmonische Distribution auf dem offenen Gebiet Ω. Dann gibt es eine harmonische Funktion $u \in C^\infty(\Omega)$, so dass U die entsprechende Distribution ist (auf den Testfunktionen mit kompaktem Träger in Ω).*

Beweis: Zunächst definieren wir u. Für jedes $x \in \Omega$ sei $B(x, r)$ eine Ball in Ω und ψ eine Testfunktion mit kompaktem Träger in $(0, r)$, die $\int_0^r \psi(s)\, \mathrm{d}s = 1$ erfüllt. Dann sei

$$u(x) := U(f_x) \quad \text{mit} \qquad f_x(y) := \frac{\psi(|y-x|)}{n|y-x|^{n-1}\omega_n}.$$

Aufgrund der Schwachen Mittelwerteigenschaft hängt $u(x)$ nicht von der Wahl von r und ψ ab. Also können wir r und ψ so wählen, dass wir sie für alle y in einer kleinen Umgebung von x in der Definition von $u(y)$ verwenden können. Dort ist u die Faltung einer solchen Testfunktion f zu $x = 0$ mit der Distribution U. Man beachte, dass diese Testfunktionen punktsymmetrisch sind $\mathsf{P}f = f$. Wegen Lemma 1.8 ist u undendlich oft differenzierbar. Aufgrund der Schwachen Mittelwerteigenschaft verschwinden harmonische Distributionen auf allen Testfunktionen, deren Integrale verschwinden, und die nur von dem Abstand von einem beliebigen Punkt abhängen. Letzteres ist äquivalent dazu, dass sie invariant sind unter allen Drehungen um diesen Punkt sind. Aus der Invarianz des Lebesguemaßes unter den Drehungen folgt, dass die Faltung $\phi * \psi$ einer Testfunktion ϕ, die invariant ist unter Drehungen um y, mit einer Testfunktion ψ, die invariant ist unter Drehungen um z, invariant ist unter Drehungen um $y + z$:

$$(\phi*\psi)(\mathsf{O}x+y+z) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\mathsf{O}x+y+z-x')\psi(x')\, \mathrm{d}^n x' = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\mathsf{O}(x-x')+y)\psi(\mathsf{O}x'+z)\, \mathrm{d}^n x'.$$

Das Integral der Faltung $\phi * \psi$ ist gleich dem Produkt der Integrale von ϕ und ψ:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\phi * \psi)(x)\,\mathrm{d^n}x = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y)\psi(y)\,\mathrm{d^n}y\,\mathrm{d^n}x = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\psi(y)\,\mathrm{d^n}y\,\mathrm{d^n}x$$
$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\,\mathrm{d^n}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,\mathrm{d^n}x\right).$$

Dann ist die Faltung von f mit Testfunktionen der Form wie sie in der Schwachen Mittelwerteigenschaft betrachtet werden, wieder eine solche Testfunktion. Deshalb hat auch $\tilde{U}$ die schwache Mittelwerteigenschaft. Weil u stetig ist, setzt sich $\tilde{U}$ eindeutig auf $L^1(\Omega)$-Funktionen mit kompaktem Träger in Ω fort und erfüllt die erste Formulierung der Mittelwerteigenschaft. Also ist u harmonisch. Für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ gibt es ein $r > 0$ mit $\phi_{B(0,\epsilon)} * \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $\tilde{U}(\phi) = U(\mathsf{P}\phi_{B(0,\epsilon)} * \phi)$ für $0 < \epsilon < r$. Aus Lemma 1.9 folgt

$$U(\phi) = U(\lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathsf{P}\phi_{B(0,\epsilon)} * \phi) = \tilde{U}(\phi).$$

Also stimmen die Distributionen U und $\tilde{U}$ überein. **q.e.d.**

Insbesondere haben wir gezeigt, dass eine Distribution genau dann harmonisch ist, wenn sie die Schwache Mittelwerteigenschaft hat, oder wenn sie einer harmonischen Funktion entspricht. Die schwachen Lösungen der Laplacegleichung stimmen also mit den starken Lösungen überein, so dass es genügt starke Lösungen zu betrachten.

Zum Abschluss dieses Abschnittes werden wir sehen, dass aus der Mittelwerteigenschaft für nichtnegative harmonische Funktionen eine sogenannte Harnackungleichung folgt. Diese besagt, dass allein durch den einen Wert einer solchen nichtnegativen harmonischen Funktion auf einem offenen Gebiet alle Werte auf einer kompakten Teilmenge des Gebietes gleichmäßig für alle solchen Funktionen abgeschätzt werden.

Harnacksche Ungleichung 2.4. *Sei Ω' ein offenes zusammenhängendes Gebiet mit kompakten Abschluss $\bar{\Omega}'$ in dem offenen Gebiet Ω. Dann gibt es ein $C > 0$, das nur von Ω und Ω' abhängt, so dass für jede auf Ω nicht negative harmonische Funktion u*

$$\sup_{x\in\Omega'} u(x) \le C \inf_{x\in\Omega'} u(x)$$

gilt. Insbesondere gilt für alle $x, y \in \Omega'$
$$\frac{1}{C}u(y) \le u(x) \le Cu(y).$$

Beweis: Sei $r > 0$ so gewählt, dass für alle $x \in \Omega'$ die Bälle $B(x, 2r)$ in Ω enthalten sind ($2r$ ist der Abstand von Ω' vom Rand von Ω). Zunächst nehmen wir an dass $x, y \in \Omega'$ voneinander höchstens den Abstand r haben. Aufgrund der Mittelwerteigenschaft folgt

$$u(x) = \frac{1}{2^n r^n \omega_n} \int_{B(x,2r)} u\,\mathrm{d}\mu \ge \frac{2^{-n}}{r^n \omega_n} \int_{B(y,r)} u\,\mathrm{d}\mu = 2^{-n}u(y)$$

aus $B(y,r) \subseteq B(x,2r)$. Weil $\bar{\Omega}'$ kompakt und zusammenhängend ist können wir $\bar{\Omega}'$ mit endlich vielen Bällen $B_1, \ldots, B_N$ vom Radius $r/2$ überdecken, so dass zwei aufeinander folgende Bälle jeweils nicht leeren Schnitt miteinander haben. Durch N fache Anwendung des schon bewiesenen Spezialfalles folgt für beliebige $x, y \in \Omega'$

$$u(x) \geq 2^{-nN} u(y).$$

Weil x und y beliebig sind folgt dann auch $\sup_{x \in \Omega'} u(x) \leq 2^{nN} \inf_{x \in \Omega'} u(x).$ **q.e.d.**

Harnackscher Konvergenzsatz 2.5. *Eine monotone Folge harmonischer Funktionen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem offenen zusammenhängendem Gebiet Ω konvergiert genau dann gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω gegen eine harmonische Funktion auf Ω, wenn$(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für ein $x \in \Omega$ beschränkt ist.*

Beweis: Wenn u_n auf kompakten Mengen gleichmäßig konvergiert, dann insbesondere an allen $x \in \Omega$. Sei umgekehrt für ein $x \in \Omega$ die Folge $u_n(x)$ beschränkt. Dann konvergiert wegen der Monotonie $u_n(x)$. Wegen der Monotonie ist für $n \geq m$ die Folge $(u_n - u_m)_{n\geq m}$ nicht negativ. Wegen der Harnackschen Ungleichung ist diese Folge auf kompakten Mengen von Ω beschränkt und monoton. Also konvergiert sie dort gleichmäßig gegen eine Funktion, die wieder die Mittelwerteigenschaft hat. **q.e.d.**

2.2 Maximumprinzip harmonischer Funktionen

Wenn eine harmonische Funktion u auf einem offen zusammenhängendem Gebiet Ω ihr Supremum (oder Infimum) in einem Punkt $x \in \Omega$ annimmt, dann gibt es sicherlich einen Ball $B(x,r) \subseteq \Omega$. Dann folgt aber aus der Mittelwerteigenschaft

$$\frac{1}{r^n \omega_n} \int\limits_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| \, \mathrm{d}^n y = 0.$$

Also muss u auf $B(x,r)$ konstant sein. Insbesondere ist die Teilmenge von Ω, auf der u gleich $u(x)$ ist offen und abgeschlossen. Weil aber Ω zusammenhängend ist, muss dann diese Teilmenge ganz Ω sein. Damit folgt aus der Mittelwerteigenschaft ein

Starkes Maximumprinzip 2.6. *Eine auf einer offenen und zusammenhängenden Menge harmonische Funktion, die dort einen Extremwert annimmt, ist konstant.* **q.e.d.**

Schwaches Maximumprinzip 2.7. *Sei $u \in C(\bar{\Omega})$ eine auf dem Abschluss eines beschränkten offenen Gebietes $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ stetige Funktion, die auf Ω harmonisch ist. Dann nimmt u sein Maximum (und Minimum) auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω an.*

Beweis: Die stetige Funktion u nimmt auf $\bar{\Omega}$ ein Maximum und Minimum an. Wenn sie nicht auf $\partial\Omega$ liegen, dann ist u wegen des Starken Maximumprinzips konstant.**q.e.d.**

Wegen dem Maximumprinzip sind harmonische Funktionen eindeutig durch ihre Randwerte bestimmt. Allgemeiner betrachten wir das

Dirichletproblem 2.8. *Auf einer offenen beschränkten Menge $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ ist für gegebene Funktionen f auf Ω und g auf $\partial\Omega$ eine Lösung der Poissongleichung $-\triangle u = f$ gesucht, die sich stetig auf den Rand fortsetzt und dort die Werte $u|_{\partial\Omega} = g$ annimmt.*

Die Differenz zweier Lösungen ist harmonisch und verschwindet auf dem Rand. Wegen dem schwachen Maximumprinzip hat das Dirichletproblem höchstens eine Lösung.

2.3 Poissonsche Darstellungsformel

Im Mittelwertsatz ist der Wert einer harmonischen Funktion bei x durch die Werte auf $\partial B(x,r)$ festgelegt. Mit einer expliziten Formel werden wir jetzt eine harmonische Funktion in $B(x,r)$ durch ihre Werte auf $\partial B(x,r)$ berechnen. Zunächst definieren wir

Greensche Funktion vom Einheitsball 2.9.

$$G_{B(0,1)}(x,y) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\left(\ln|x-y| - \ln\frac{|x-|x|^2y|}{|x|}\right) & \text{für } n=2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{|x|^{n-2}}{|x-|x|^2y|^{n-2}}\right) & \text{für } n>2. \end{cases}$$

Diese Funktion hat folgende Eigenschaften **(i)** $G_{B(0,1)}(x,y) = G_{B(0,1)}(y,x)$.

(ii) $G_{B(0,1)}(x,y) = 0$ für $x \in \partial B(0,1)$ oder $y \in \partial B(0,1)$.

(iii) $\triangle_x G_{B(0,1)}(x,y) = 0$ für $x \neq y$ und $y \neq \frac{x}{|x|^2}(=\tilde{x}) \iff x \neq \frac{y}{|y|^2}(=\tilde{y})$.

Die erste Eigenschaft folgt aus $(\frac{|x-|x|^2y|}{|x|})^2 = 1-2(x\cdot y)+|x|^2|y|^2 = (\frac{|y-|y|^2x|}{|y|})^2$. Die zweite folgt dann aus $x-|x|^2y = x-y$ für $|x|=1$. Wegen (2.1) ist der erste Summand von $G_{B(0,1)}$ für $x \neq y$ harmonisch. Genauso folgt für festes y und eine Funktion $u(x) = v(r)$ mit $r = \sqrt{1+|x|^2|y|^2-2x\cdot y}$ wegen $(x|y|^2-y)^2 = |y|^2r^2$ für $r \neq 0$

$$\nabla u(x) = \frac{x|y|^2-y}{r}v'(r) \qquad \triangle u(x) = |y|^2\left(v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r)\right).$$

Deshalb ist auch der zweite Summand harmonisch. Wir definieren (gilt auch für $n = 2$):

$$\begin{aligned}
K(x,y) &:= -\nabla_y G_{B(0,1)}(x,y) \cdot \frac{y}{|y|} = -\nabla_y G_{B(0,1)}(y,x) \frac{y}{|y|} \\
&= -\frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{y}{|y|} \nabla_y \left(\frac{1}{|y-x|^{n-2}} - \frac{1}{|y|^{n-2} \left|\tilde{y} - x\right|^{n-2}} \right) \\
&= \frac{1}{n\omega_n} \frac{y}{|y|} \left(\frac{y-x}{|y-x|^n} - \frac{y}{|y|^n \left|\tilde{y}-x\right|^{n-2}} - \frac{(\tilde{y}-x)\left(\frac{1}{|y|^2} - 2\frac{y^2}{|y|^4}\right)}{|y|^{n-2}\left|\tilde{y}-x\right|^n} \right) \\
\text{(für } |y| = 1) \quad &= \frac{1}{n\omega_n} \frac{1 - xy - (x^2 - 2xy + 1) + (1 - xy)}{|x-y|^n} = \frac{1 - |x|^2}{n\omega_n |x-y|^n}.
\end{aligned}$$

Poissonsche Darstellungsformel 2.10. *Für $g \in C(\partial B(0,1))$ ist die eindeutige harmonische Funktion $u \in C^2(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$ mit $u|_{\partial B(0,1)} = g$ gegeben durch*

$$u(x) = \int\limits_{\partial B(0,1)} K(x,y) g(y) \, \mathrm{d}\sigma(y).$$

Beweis: Wegen der Eigenschaft (iii) ist $x \mapsto K(x,y)$ harmonisch für $x \neq y$ und $x \neq \tilde{y}$ und damit auch u auf $B(0,1)$. Wegen dem Maximumprimzip genügt es zu zeigen, dass sich u stetig auf $\partial B(0,1)$ fortsetzt mit $u|_{\partial B(0,1)} = g$. Aus dem Gaußschen Satz folgt

$$\int\limits_{\partial B(0,1)} K(x,y) \, \mathrm{d}\sigma(y) + \int\limits_{\partial B(x,\epsilon)} \nabla_y G_{B(0,1)}(x,y) \cdot N \, \mathrm{d}\sigma(y) = - \int\limits_{B(0,1) \setminus B(x,\epsilon)} \triangle_x G_{B(0,1)} \, \mathrm{d}^{\mathrm{n}} x = 0$$

für $x \in B(0,1)$ und hinreichend kleine $\epsilon > 0$. Hier bezeichnet N die äußere Normale von $B(x,\epsilon)$. Weil der zweite Summand von $G_{B(0,1)}$ auch bei x harmonisch ist gilt sogar

$$\int\limits_{\partial B(0,1)} K(x,y) \, \mathrm{d}\sigma(y) = \begin{cases} \int_{\partial B(x,\epsilon)} \nabla_y \frac{1}{2\pi} \ln|x-y| \cdot N \, \mathrm{d}\sigma(y) & \text{für } n = 2 \\ -\int_{\partial B(x,\epsilon)} \nabla_y \frac{1}{n(n-2)\omega_n |x-y|^{n-2}} \cdot N \, \mathrm{d}\sigma(y) & \text{für } n > 2. \end{cases}.$$

Dieses Integral ist wegen (2.1) gleich 1. Die Familie von glatten Funktionen $y \mapsto K(x,y)$

(i) ist auf $y \in \partial B(0,1)$ positiv,

(ii) hat dort Integral 1,

(iii) und konvergiert für alle $y_0 \in \partial B(0,1)$ im Grenzwert $x \to y_0$ auf kompakten Mengen von $\partial B(0,1) \setminus \{y_0\}$ gleichmäßig gegen Null.

Wegen (i)-(iii) setzt sich u stetig auf $\partial B(0,1)$ fort und ist dort gleich g. **q.e.d.**

Aufgrund des Transformationsverhaltens von $\triangle$ unter $x \mapsto r(x-z)$ gilt für jede harmonische Funktion u auf $B(z,r)$, die sich stetig auf $\partial B(z,r)$ fortsetzt

$$u(x) = \frac{r^2 - |x-z|^2}{nr\omega_n} \int\limits_{\partial B(z,r)} \frac{u(y)}{|x-y|^n} \, \mathrm{d}\sigma(y) = \frac{1 - \frac{|x-z|^2}{r^2}}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B(0,1)} \frac{u(z+ry)}{|\frac{x-z}{r} - y|^n} \, \mathrm{d}\sigma(y). \quad (2.2)$$

Also sind insbesondere alle Werte von u in $B(z,r)$ allein durch die Werte von u auf $\partial B(z,r)$ bestimmt. Durch Ableiten nach x erhalten wir ähnliche Formeln für die Werte der Ableitungen von u. Diese Formel impliziert auch die Mittelwerteigenschaft. Weil der Integralkern als Funktion von x analytisch ist, zeigt sie sogar folgendes:

Korollar 2.11. *Jede harmonische Funktion ist analytisch.* **q.e.d.**

Korollar 2.12. *Es gibt eine Konstante $C(n,k)$, die nur von der Dimension n und der Ordnung k abhängt, so dass alle partiellen k-ten Ableitungen einer auf einer offenen Menge $\Omega \supset B(x,r)$ harmonischen Funktion u beschränkt sind durch*

$$\left| \frac{\partial^k u(x)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} \right| \le \frac{C(n,k)}{r^k} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x,r))}.$$

Beweis: Die Ungleichung folgt aus der Poissonschen Darstellungsformel (2.2). **q.e.d.**

Satz von Liouville 2.13. *Eine auf $\mathbb{R}^n$ beschränkte harmonische Funktion ist konstant.*

Beweis: Weil u beschränkt ist, sind die Normen $\|u\|_{L^\infty(\partial B(x,r))}$ beschränkt. Dann folgt aus der Poissonschen Darstellungsformel, dass die ersten partiellen Ableitungen von u durch ein Vielfaches von $1/r$ beschränkt sind. Aus dem Grenzwert $r \to \infty$ folgt, dass alle ersten partiellen Ableitungen von u verschwinden und u konstant ist. **q.e.d.**

Lemma 2.14. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet, das 0 enthält, und u sei eine harmonische beschränkte Funktion auf $\Omega \setminus \{0\}$. Dann lässt sich u harmonisch auf Ω fortsetzten.*

Beweis: Wir wählen einen kleinen Ball $\overline{B(0,r)} \subseteq \Omega$. Dann gibt es wegen der Poissonschen Darstellungsformel eine eindeutige Lösung $\tilde{u}$ zu dem Dirichletproblem mit den Randwerten von u auf $\partial B(0,r)$. Sei $G_{B(0,r)}(x,y) := r^{2-n} G_{B(0,1)}(\frac{x}{r}, \frac{y}{r})$. Die Familie von Funktionen $u_\epsilon(x) := \tilde{u}(x) - u(x) + \epsilon G_{B(0,r)}(x,0)$ auf $B(0,r) \setminus \{0\}$ ist harmonisch. Aufgrund der Konstruktion verschwinden diese Funktionen auf dem Rand $\partial B(0,r)$. Wenn eine dieser Funktionen u_ϵ mit $\epsilon > 0$ auf $B(0,r) \setminus \{0\}$ einen negativen Wert annimmt, dann besitzt sie wegen der Beschränktheit von u und der Unbeschränktheit von $G_{B(0,1)}(\cdot, 0)$ ein negatives Minimum im Inneren, was dem Starken Maximumprinzip widerspricht. Deshalb sind diese Funktionen nicht negativ. Analog gilt für negative ϵ, dass u_ϵ nicht positiv ist, weil andernfalls diese harmonische Funktion ein positives Maximum im Inneren von $B(0,r) \setminus \{0\}$ hätte. Dann muss $u_0 := \tilde{u} - u$ identisch verschwinden. Also ist $\tilde{u}$ eine harmonische Fortsetzung von u auf $B(0,r)$. **q.e.d.**

2.4 Klassische Maximumprinzipien

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir das Maximumprinzip von harmonischen Funktionen auf Lösungen von elliptischen Differentialoperatoren.

Definition 2.15. *Eine elliptischer Differentialoperator in Nicht-Divergenzform auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ hat folgende Gestalt $L : C^2(\Omega) \to C(\Omega), u \mapsto Lu$ mit*

$$(Lu)(x) := \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_i\partial_j u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x). \tag{2.3}$$

Hier sind a_{ij}, b_i und c reelle Funktionen auf Ω, die für ein $1 \leq \Lambda < \infty$ folgendes erfüllen

(i) $|a_{ij}| \leq \Lambda, |b_i| \leq \Lambda, |c| \leq \Lambda$ *auf* Ω

(ii) $\sum_{ij}^{n} a_{i,j}(x)\lambda_i\lambda_j \geq \Lambda^{-1}|\lambda|^2 = \Lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$ *für* $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

Definition 2.16. *Für $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt ein $u \in C^2(\Omega)$ mit $Lu \leq f$ bzw. $Lu \geq f$ Ober- bzw. Unterlösung von $Lu = f$ auf Ω. Eine Ober- und Unterlösung heißt Lösung.*

Wir zeigen zuerst das schwache Maximumprinzip.

Schwaches Maximumprinzip 2.17. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator auf einer offenen beschränkten Teilmenge $\Omega \Subset \mathbb{R}$ mit $c = 0$. Dann gilt*

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) = \sup_{x\in\partial\Omega} u(x) \qquad \text{für} \qquad u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega}) \qquad \text{mit} \qquad Lu \geq 0.$$

Beweis: Falls $\sup_{x\in\Omega} u(x) > \sup_{x\in\partial\Omega} u(x)$ nimmt u sein Maximum bei $x_0 \in \Omega$ an mit

$$\nabla u(x_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad D^2u(x_0) \leq 0$$

Die zweite Ungleichung bedeutet $\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\partial_i\partial_j u(x_0) \leq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Weil die Hessische eine symmetrische Matrize ist, lässt sie sich mit einer orthogonalen Matrix diagonalisieren. Kein Eigenwert ist positiv. Dann gibt es eine Matrix $(d_{ij})_{i,j=1\ldots,n}$ mit

$$\partial_i\partial_j u(x_0) = -\sum_{k=1}^{n} d_{ik}d_{jk} \quad \text{und} \quad (Lu)(x_0) = -\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ij}(x_0)d_{ik}d_{jk} \leq -\Lambda^{-1}\|d\|_2^2 \leq 0.$$

Sei $v(x) := e^{\alpha x_1}$. Dann folgt für hinreichend großes α

$$(Lv)(x) = \alpha^2 a_{11}(x) + \alpha b_1(x) > 0 \qquad L(u+\epsilon v) > 0 \qquad \text{für alle } \epsilon > 0.$$

Deshalb nehmen für alle $\epsilon > 0$ die Funktionen $u + \epsilon v$ ihr Maximum auf $\partial\Omega$ an.

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) + \epsilon\inf_{x\in\Omega} v(x) \leq \sup_{x\in\Omega} u(x) + \epsilon v(x) = \sup_{x\in\partial\Omega} u(x) + \epsilon v(x) \leq \sup_{x\in\partial\Omega} u(x) + \epsilon\sup_{x\in\partial\Omega} v(x).$$

Weil v auf $\overline{\Omega}$ beschränkt ist, und das für alle $\epsilon > 0$ gilt, folgt die Aussage. **q.e.d.**

Korollar 2.18. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator auf einer offenen beschränkten Teilmenge $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ mit $c \leq 0$. Für $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ folgt aus $Lu \geq 0$ bzw. $Lu = 0$*

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) \leq \sup_{x\in\partial\Omega} u_+(x) \ \textit{mit}\ u_+ := \tfrac{1}{2}(u + |u|) \qquad \textit{bzw.} \qquad \sup_{x\in\Omega} |u(x)| = \sup_{x\in\partial\Omega} |u(x)|$$

Beweis: Für $\sup_{x\in\Omega} u(x) \leq 0$ ist die erste Aussage richtig. Andernfalls folgt wegen $Lu - cu \geq -cu \geq 0$ auf $\Omega' := \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}$ aus dem Schwachen Maximumprinzip 2.17

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) = \sup_{x\in\Omega'} u(x) = \sup_{x\in\partial\Omega'} u(x) \leq \sup_{x\in\partial\Omega} u_+(x),$$

wegen $u(x) = 0$ bei $x \in \partial\Omega' \setminus \partial\Omega$. Falls $Lu = 0$, dann folgt auch für $-u$

$$\inf_{x\in\Omega} u(x) = -\sup_{x\in\Omega} -u(x) \geq -\sup_{x\in\partial\Omega} (-u(x))_+ \quad \text{und} \quad \sup_{x\in\Omega} |u(x)| = \sup_{x\in\partial\Omega} |u(x)|. \quad \textbf{q.e.d.}$$

Korollar 2.19. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator auf einem offenen beschränkten Gebiet $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ mit $c \leq 0$. Dann hat für gegebene Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $g \in C(\partial\Omega)$ folgendes Dirichletproblem höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$:*

$$Lu = f \ \textit{auf}\ \Omega \quad \textit{mit} \quad u\,|_{\partial\Omega} = g. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Für das starke Maximumprinzip zeigen wir zuerst folgendes Randpunktlemma.

Randpunktlemma 2.20. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator auf einer beschränkten offenen Menge $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ und $u \in C^2(\Omega)$ erfülle $Lu \geq 0$ auf Ω. Außerdem sei u stetig in $x_0 \in \partial\Omega$ mit $u(x_0) > u(x)$ für alle $x \in \Omega$, und Ω enthalte einen offenen Ball $B \subseteq \Omega$ mit $x_0 \in \partial B$. Schließlich gelte eine der folgenden Bedingungen:*
(i) $c = 0$. **(ii)** $c \leq 0$ *und* $u(x_0) \geq 0$. **(iii)** $u(x_0) = 0$.
Existiert die Ableitung von u in x_0 in Richtung der äußere Normalen, so ist sie positiv.

Beweis: In jedem der drei Fälle gilt für $\tilde{L} = L - c_+$ auf Ω

$$\tilde{L}(u - u(x_0) = Lu - cu(x_0) - c_+(u - u(x_0)) \geq 0.$$

Also können wir o.B.d.A. $c \leq 0, u < 0$ und $u(x_0) = 0$ annehmen. Weiterhin sei o.B.d.A. $B(0,R) \subseteq \Omega$ mit $x_0 \in \partial B(0,R) \cap \partial\Omega$. Für $v(x) := e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha R^2}$ gilt $e^{\alpha|x|^2} Lv =$

$$= 4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j - 2\alpha \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_ix_i) + e^{\alpha|x|^2} cv \geq 4\alpha^2\Lambda^{-1}|x|^2 - 2|\alpha|(\Lambda + \Lambda|x|) - \Lambda,$$

wegen $c \leq 0$ und $e^{\alpha|x|^2} v \leq 1$. Für $0 < \varrho < R$ und hinreichend großes α folgt

$$L(u + \epsilon v) \geq \epsilon Lv \geq 0 \qquad \text{auf} \qquad \Omega' = B(0,R) - \overline{B(0,\varrho)}.$$

Auf $\partial B(0,\varrho)$ gilt $u<0$ und auf $\partial B(0,R)$ gilt $v=0$. Für hinreichend kleines $\epsilon>0$ gilt dann $u+\epsilon v\leq 0$ auf $\partial\Omega'$, und wegen Korollar 2.18 auch auf Ω'. Wegen $x_0\in\partial\Omega'$ und $u(x_0)=0=v(x_0)$ folgt für die äußere Normalenableitung von $B(0,R)$ in x_0

$$N\cdot\nabla u(x_0)\geq -\epsilon N\cdot\nabla v(x_0)=2\epsilon\alpha Re^{-\alpha R^2}>0.$$ **q.e.d.**

Wenn $N\cdot\nabla u(x_0)$ nicht existiert, gilt für alle $\delta>0$ und die Normale N von B in x_0

$$\lim_{x\to x_0}\inf\frac{u(x)-u(x_0)}{|x-x_0|}<0 \qquad \text{auf} \qquad \{x\in\Omega\mid |(x-x_0)\cdot N|\geq\delta|x-x_0|\}$$

Nun können wir folgendes Maximumprinzip von Hopf beweisen.

Hopfs Maximumprinzip 2.21. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator auf einer offenen und zusammenhängenden Menge $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ und $u\in C^2(\Omega)$ erfülle $Lu\geq 0$ auf Ω. Falls u sein Maximum im Inneren von Ω annimmt und entweder*
(ii) $c=0$ *oder* **(ii)** $c\leq 0$ *und* $\sup_{x\in\Omega}u(x)\geq 0$ *gilt, dann ist u konstant.*

Beweis: Für das Maximum $\sup_{x\in\Omega}u(x)=u(x_0)$ gilt in beiden Fällen (i) und (ii)

$$L(u-u(x_0))=Lu-cu(x_0)\geq 0.$$

Deshalb können wir o.B.d.A. $c\leq 0, u\leq 0$ und $u(x_0)=0$ annehmen. Falls u nicht konstant ist, also u nicht identisch verschwindet, so ist

$$\emptyset\neq\Omega'=\{x\in\Omega\mid u(x)<0\}\neq\Omega.$$

Da Ω zusammenhängend ist, gilt $\partial\Omega'\cap\Omega\neq\emptyset$. Sei $x\in\Omega'$ mit $\varrho:=d(x,\partial\Omega'\cap\Omega)<d(x,\partial\Omega)$. Daraus folgt $B(x,\varrho)\subseteq\Omega'$ und $\overline{B(x,\varrho)}\subseteq\Omega$. Und es existiert ein $y\in\partial B(x,\varrho)\cap\partial\Omega'\cap\Omega$ mit $u(y)=0$. Da $u\in C^2(\Omega)$ folgt aus Randpunktemma 2.20 $\nabla u(y)\neq 0$. Das widerspricht der Eigenschaft, dass u sein Maximum in y annimmt. **q.e.d.**

Als zweite Anwendung erhalten wir die Eindeutigkeit des Neumannproblems.

Satz 2.22. *Sei L ein elliptischer Operator auf einer zusammenhängenden offenen und beschränkten Menge $\Omega\Subset\mathbb{R}^n$ mit $c\leq 0$ und jeder Randpunkt $x\in\partial\Omega$ sei auch Randpunkt eines Balles $B\subseteq\Omega$. Weiter seien $f:\Omega\to\mathbb{R}$ und $\varrho:\partial\Omega\to\mathbb{R}$ reelle Funktionen. Dann hat folgendes Neumannproblem bis auf eine Konstante höchstens eine Lösung $u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, deren äußere Normalenableitung $N\cdot\nabla u$ auf ganz $\partial\Omega$ existiert:*

$$Lu=f \text{ auf } \Omega \qquad\qquad \text{und} \qquad\qquad N\cdot\nabla u=\varrho \text{ auf } \partial\Omega$$

Beweis: Die Differenz $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ zweier Lösungen erfüllt $Lu = 0$ auf Ω und $N \cdot \nabla u = 0$ auf $\partial\Omega$. Wenn sie nicht konstant ist, gilt $\sup_{x\in\Omega} \pm u(x) > 0$. Sei also o.B.d.A.

$$M := \sup_{x\in\Omega} u(x) > 0.$$

Gilt $u(x_0) = M$ für ein $x_0 \in \Omega$ so folgt aus Hopfs Maximumprinzip Satz 2.21, dass u konstant ist. Also gilt $u(x_0) = M$ für eine $x_0 \in \partial\Omega$. Dann folgt aus dem Randpunktlemma 2.20 $N \cdot \nabla u(x_0) > 0$ im Widerspruch zur Annahme. **q.e.d.**

Schließlich schätzen wir Lösungen von inhomogenen Gleichungen punktweise ab.

Satz 2.23. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator auf einer offenen beschränkten Menge $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ mit $c \leq 0$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ erfülle $Lu \geq f$ für $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) \leq \sup_{x\in\partial\Omega} u + C(\Omega, \Lambda) \sup_{x\in\Omega} f_-(x)$$

wobei $C(\Omega, \Lambda) := e^{C(\Lambda)d} - 1$ mit $\quad d = d(\Omega) := \inf_{e\in\partial B(0,1)} \sup_{x,y\in\Omega} (x \cdot e - y \cdot e) \leq \operatorname{diam}(\Omega)$.

Beweis: Wir können o.B.d.A. $\Omega \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_1 < d\}$ annehmen. Auf Ω gilt dann

$$\begin{aligned}
(L - c)e^{\alpha x_1} &= e^{\alpha x_1}(\alpha^2 a_{11} + \alpha b_1) \geq e^{\alpha x_1}\alpha(\alpha\Lambda^{-1} - \Lambda) \geq 1 \quad \text{für} \quad \alpha \geq \Lambda + \Lambda^2\\
L(u - v) &= Lu - (L - c)v - cv \geq f + \sup_{y\in\Omega} f_-(y) \geq 0 \quad \text{mit}\\
v(x) &:= \sup_{y\in\partial\Omega} u_+(y) + (e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}) \sup_{y\in\Omega} f_-(y) \geq 0 \quad \text{und} \quad f_- := \tfrac{1}{2}(|f| - f).
\end{aligned}$$

Weil $u - v \leq u - \sup_{y\in\partial\Omega} u_+(y) \leq 0$ auf $\partial\Omega$ gilt, folgt $u - v \leq 0$ aus Korollar 2.18, also

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) \leq \sup_{x\in\Omega} v(x) \leq \sup_{x\in\partial\Omega} u_+(x) + (e^{\alpha d} - 1) \sup_{x\in\Omega} f_-(x)$$ **q.e.d.**

Korollar 2.24. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator auf einer offenen beschränkten Menge $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung $Lu = f$ zu $f : \Omega \to \mathbb{R}$, und mit der Konstante $C(\Omega, \Lambda)$ aus Satz 2.23 sei $c_0 := 1 - C(\Omega, \Lambda) \sup_{x\in\Omega} c_+(x) > 0$, dann folgt*

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leq c_0^{-1}(\sup_{x\in\partial\Omega} |u(x)| + C(\Omega, \Lambda) \sup_{x\in\Omega} |f(x)|).$$

Beweis: Für $L_0 := L - c_+$ gilt $L_0 u = Lu - c_+ u = f - c_+ u$. Aus der Anwendung von Satz 2.23 auf $\pm u$ und L_0 folgt folgende Ungleichung und daraus auch die Behauptung:

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leq \sup_{x\in\partial\Omega} |u(x)| + C(\Omega, \Lambda) \sup_{x\in\Omega} |f(x)| + C(\Omega, \Lambda) \sup_{x\in\Omega} c_+(x) \sup_{x\in\Omega} |u(x)|.$$ **q.e.d.**