zeitdiskrete dynamische Systeme

Seminar bei Prof. Dr. Martin U. Schmidt, Universität Mannheim

Kapitel 1.1: grundlegende Konzepte, von David Henn

Definition 1.1: zeitdiskretes dynamisches System

Ein zeitdiskretes dynamisches System ist (nach Lan Wen) ein Tupel $(X,\ (f^n)_{n\in\mathbb{Z}})$*,*[1] *mit:*

1.: X kompakter, metrischer Raum
2.: $f : X \to X$ Homöomorphismus, mit:

$$f^n := \underbrace{f \circ ... \circ f}_{n\text{-mal}} \quad \wedge \quad f^0 := id \quad \wedge \quad f^{-n} := (f^n)^{-1}$$

Nach Übungsaufgabe 1.2 in dynamische Systeme definiert diese Iteration ein (spezielles) zeitdiskretes dynamisches System:
Ein Tripel $(X,\ T,\ \phi)$, mit: $T = \bar{\mathbb{Z}} \quad \wedge \quad \phi(n, \cdot) = f^n$, das die besagten Bedingungen erfüllt - jedoch sogar mit der Verstärkung Homöomorphie mit $T = \mathbb{Z}$ statt nur Stetigkeit (im 2. Argument) mit $T = \mathbb{N}$ und zusätzlicher Kompaktheit in X (für stärkere Aussagen).

Definition 1.2: Orbit

Orbit von $x \in X$ unter $f := Orb(x, f) := Orb(x) := \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \phi[\mathbb{Z}, x]$ [2]

positiver Orbit von $x \in X$ unter $f := Orb^+(x) := (f^n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$
negativer Orbit von $x \in X$ unter $f := Orb^-(x) := (f^n(x))_{n\in-\mathbb{N}_0}$

Satz 1.3: *2 Orbits sind entweder disjunkt oder gleich.*

Beweis: Die Zugehörigkeit zu einem Orbit ist eine Äquivalenzrelation, und 2 Äquivalenzklasssen sind entweder disjunkt oder gleich.

Definition 1.4: Periodizität

$x \in X$ periodischer Punkt von $f :\Leftrightarrow \exists\, n \geq 1$[3] *$:\ f^n(x) = x = id(x)$*

(Minimal-) Periode von periodischem Punkt $x \in X := \min\{n \in \mathbb{N} :\ f^n(x) = x\}$

$x \in X$ Fixpunkt von $f :\Leftrightarrow x$ periodischer Punkt mit Periode $= 1 \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow$ x invarianter Punkt unter f

[1] oft nennen wir auch einfach $(f^n)_{n\in Z}$ oder f ein zeitdiskretes dynamisches System
[2] x ist hier also als Startwert (x_0) aufzufassen
ein Orbit ist als Menge definiert - jedoch wird er später im Kontext von Konvergenz zweckmäßigerweise auch als Folge aufgefasst
[3] $\wedge\ n \neq \infty$

Menge aller periodischen Punkte von $f := P(f)$
Menge aller Fixpunkte von $f := Fix(f) =$ *Menge aller invarianten Punkte*

periodischer Orbit := *Orbit von periodischem Punkt*

Satz 1.5: Periodizität

$$\begin{aligned} x \in X \ \textit{periodisch} &\Leftrightarrow \exists\, n \geq 1 : \ f^n(x) = x = id(x) \\ &\Leftrightarrow \exists\, n \geq 1 : f^{-n}(x) = x \\ &\Leftrightarrow \exists\, n \geq 1 : f^{z \cdot n}(x) = x \\ &\Leftrightarrow Orb(x) \ \textit{endlich} \end{aligned}$$

Bemerkung: Es gelten folgende Aussagen:
$Fix(f) \subset P(f) \subset X$.
$P(f)$ ist mögl. leer, invariant.
$Fix(f)$ ist mögl. leer, invariant, kompakt.

Beweis von Satz 1.5:

zweite, dritte Äquivalenz: Folgen beide aus der Halbgruppen-Eigenschaft[4].

letzte Äquivalenz: „$\Rightarrow$“: Sei also $x \in X$ periodisch bezüglich $n \geq 1$. Man hat schnell die Vermutung, dass nach $n-1$ kein neuer Punkt hinzukommt und sich positiver wie negativer Orbit jeweils sozusagen „in einem Kreis der Länge n drehen“, dies ist also zu zeigen: $f^{n+m}(x) = (f^n \circ f^m)(x) = f^m(x)$. Für $m \leq n$ stellt dies keinen neuen Punkt dar. Sei also $m > n$; dann gilt: $f^m(x) = f^{n+m-n} = f^n \circ f^{m-n}$; falls $m-n$ immer noch $> n$, kann man dieses Vorgehen (wegen der 3. Äquivalenz) iterieren, bis $m - z \cdot n \leq n$. Analog für negativen Orbit. „$\Leftarrow$“: Über Widerspruch (bzw. Kontraposition), sei also x nicht periodisch, also $\nexists\, n \geq 1 : \ f^n(x) = x$. Wegen des Beweises der Hinrichtung kommen dann unendlich oft neue Punkte hinzu, also $Orb(x)$ unendlich. Analog für negativen Orbit.

Beweis von Bemerkung:

$P(f)$ mögl. leer: Wähle f folgendermaßen:
$f : \mathbb{Z} \times S^1 \to S^1$ [5], $(n, z) \mapsto f(n, z) = e^{2\pi i \alpha n}$, mit $\alpha \in [0, 1) \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$.
Dann ist jeder Orbit von f nicht periodisch, bzw. es existiert kein periodischer Orbit von f, also existiert kein periodischer Punkt. Diese Aussage gilt, da für $\alpha \in [0, 1)$ gilt, dass jeder Orbit von f periodisch ist, gdw. $\alpha \in \mathbb{Z}$.
Beweis: Es ist offensichtlich, dass f z auf S^1 um $2\pi\alpha n$ dreht. Wegen der Euler'schen Formel und der Periodizität von Sinus und Cosinus erhält man also Periodizität, gdw. $2\pi\alpha n$ ein $\mathbb{Z}$-Vielfaches von 360° ist. Da $2\pi = 360°$, muss also gelten $\alpha n \in \mathbb{Z}$; da $n \in \mathbb{Z}$, muss also gelten $\alpha \in [0, 1) \cap \mathbb{Z}$.

[4] „Halbgruppen-Eigenschaft“ wird hier auch verwendet, wenn statt einer Halbgruppe sogar eine Gruppe vorliegt.
[5] $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

$P(f)$ invariant: Es gilt, dass ein periodischer Orbit aus lauter periodischen Punkten (mit gleicher Minimalperiode) besteht; also ist $P(f)$ eine Vereinigung von periodischen Orbits, also ist $P(f)$ eine Vereinigung von Orbits, also ist nach 1.7.1 $P(f)$ invariant.

Wegen $Fix(f) \subset P(f)$ und $P(f)$ mögl. leer folgt, dass $Fix(f)$ mögl. leer. Sei $x \in Fix(f)$ beliebig, dann gilt $f(x) = x$, also ist $Fix(f)$ invariant.
Kompaktheit: Es gilt $Fix(f) \subset X$ und X kompakt, also ist nur noch zu zeigen, dass $Fix(f)$ in X abgeschlossen ist: Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Folge in $Fix(f)$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) \overset{Fixp}{=} \lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)) \overset{Stet}{=} f(\lim\limits_{n\to\infty}(x_n))$, also $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) \in Fix(f)$, also $Fix(f)$ in X abgeschlossen.

Definition 1.6: invariante Teilmenge

$\Lambda \subset X$ *invariant unter* $f :\Leftrightarrow f(\Lambda) = \Lambda$ [6]

Satz 1.7: invariante Teilmenge

1.: $\Lambda \subset X$ *invariant unter* f
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow f(\Lambda) = \Lambda \\ &\Leftrightarrow \Lambda = \bigcup_{x\in\Lambda} Orb(x,f) \\ &\Leftarrow \Lambda = Orb(x) \qquad \wedge\, x \in X \text{ beliebig} \end{aligned}$$

2.: Invarianz bleibt erhalten unter: Urbild, Potenz; Abschluss, Rand, Innerem

Beweis von 1.:

letzte Implikation: $\Lambda \subset X$ invariant unter f $\Leftarrow \Lambda = Orb(x) \quad \wedge\, x \in X$
Fallunterscheidung: Sei $Orb(x)$ unendlich, dann ist $f(Orb(x))$ eine endliche Verschiebung (um +1), die im Unendlichen keine Relevanz hat, also $f(Orb(x)) = Orb(x)$. Sei also $Orb(x)$ endlich $\overset{1.5.1}{\Longleftrightarrow}$ $Orb(x)$ periodisch bezüglich $n \geq 1$, also hat eine beliebige „Verschiebung“ (hier speziell um +1) keine Wirkung: f^0 ersetzt f^1, f^1 ersetzt f^2, ..., f^{n-2} ersetzt f^{n-1}, f^{n-1} ersetzt $f^n = f^0$, also ersetzt f^0 wiederum f^1 etc. (wir haben also auch am „Rand“ wegen der Periodizität kein Problem). Man kann dies kürzer auch darüber zeigen, dass $f(Orb(x)) = f(f(x)_{n\in\mathbb{N}}) = f(x)_{n\in\mathbb{N}} = Orb(x)$

zweite Äquivalenz: $\Lambda \subset X$ invariant unter f $\Longleftrightarrow \Lambda = \bigcup\limits_{x\in\Lambda} Orb(x,f)$
„$\Leftarrow$“: $f(\Lambda) = f(\bigcup\limits_{x\in\Lambda} Orb(x)) = \bigcup\limits_{x\in\Lambda} f(Orb(x)) \overset{1.7.1}{=} \bigcup\limits_{x\in\Lambda} Orb(x) = \Lambda.$

[6] Teilmenge invariant heißt iA. nicht, dass alle Punkte der Teilmenge invariant (dann wäre Λ eine Menge von Fixpunkten); sondern äquivalenterweise dass (lediglich) eine Teilmenge aus unter f invarianten Punkten besteht und die andere Teilmenge aus unter f permutierenden Punkten

„$\Rightarrow$“: Es ist zu zeigen: $\Lambda = \bigcup\limits_{x\in\Lambda} Orb(x) \Leftrightarrow (\mathbb{A}\colon \tilde{x} \in \Lambda \Rightarrow \exists\, x \in \Lambda\colon \tilde{x} \in Orb(x))$. Sei also $\tilde{x} \in X$ beliebig. Es gilt Λ invariant, also Fallunterscheidung bezüglich der 2 Teilmengen, aus denen sich Λ zusammensetzt (gemäß Fußnote 2):
Fall 1: Alle Punkte invariant $\Leftrightarrow f(\tilde{x}) = \tilde{x} \Rightarrow \exists\, n := 1\colon \tilde{x} \in Orb(\tilde{x}) \Rightarrow \tilde{x} \in Orb(x)$ (für $x := \tilde{x} \in \Lambda$).
Fall 2: Alle Punkte permutieren unter f $\Rightarrow \exists\tilde{\tilde{x}} \in \Lambda, \neq \tilde{x}$[7]: $\quad f(\tilde{\tilde{x}}) = \tilde{x} \Rightarrow \tilde{x} \in Orb(x)$ (für $x := \tilde{\tilde{x}} \in \Lambda$, $n := 1$).

Beweis von 2.:

Urbild, Potenz: Die Permanenz bezüglich des Urbilds (bzw. der Umkehrabbildung) und Potenz folgen (wie in 1.5) direkt aus der Halbgruppen-Eigenschaft (bzw. der Bijektivität).

Abschluss: $f(\bar{\Lambda}) \overset{Stet}{=} \overline{f(\Lambda)} = \bar{\Lambda}$. Rand, Inneres analog.

Satz 1.8: *Orbits konvergieren*[8] *iA. nicht;*
und falls ein Orbit konvergiert, dann ist der Limes ein Fixpunkt.

Beweis:
1.: Wähle f wie im Beweis von Bemerkung 1.5, mit π statt 2π und $\alpha \in [0,1) \cap \mathbb{Z}$. Dann alterniert der Orbit. [9]
2.: Wähle $n^* := N$. Dann ist (wegen der Diskretheit) $f^{n^*}(x)$ ein Fixpunkt.

Definition 1.9: Häufungspunkte

1.: positiv: ω-Limes

$$y \in X \textit{ ist } \omega\textit{-Limespunkt von } x \in X :\Leftrightarrow \exists \textit{ Teilfolge } (n_i)_{i\in I} \geq 0 : \lim_{i\to\infty}(f^{n_i}(x)) = y$$

$$\omega\textit{-Limesmenge von } x := \omega(x) := \textit{Menge von allen } \omega\textit{-Limespunkten von } x$$

2.: negativ: α-Limes: analog für $(-n_i)_{i\in I} \leq 0$ [10]

[7] ansonsten wäre das auch ein Widerspruch zur Bijektivität
[8] wir fassen hier einen Orbit zweckmäßigerweise als Folge auf; wollte man den Orbit wie gewöhnlich als Menge auffassen, dann müsste der Fixpunkt im Abschluss liegen
[9] Man könnte auch allgemeiner den Orbit eines periodischen Punkts mit n=2 wählen.
[10] $\alpha(x) = w(x, f^{-1})$

Satz 1.10: *Falls x periodisch ist, dann gilt:* $\omega(x) = \alpha(x) = Orb(x)$.

Bemerkung: Für beliebiges $x \in X$ gilt:
$\omega(x)$ ist Teilmenge von X, nichtleer, kompakt, invariant und $f^n(x)$ konvergiert (bez. n) gegen $\omega(x)$.

Beweis:

1.: Erste Gleichung: Sei also $x \in \omega(x) \Leftrightarrow \exists$ Teilfolge $(n_i)_{i\in I} \geq 0 : \lim\limits_{i\to\infty}(f^{n_i}(x)) = y$. Wegen x periodisch und 1.5.1 gilt $x = f^{-m}(x)$. Wähle also Teilfolge $(\tilde{n_i})_{i\in I} := (-m \cdot n_i)_{i\in I}$. (Rückrichtung analog). Zweite Gleichung: Wegen x periodisch und 1.5.1 gilt $f^{z\cdot m}(x) = x$. Wähle also Teilfolge $(\tilde{\tilde{n_i}})_{i\in I} := (z \cdot n_i)_{i\in I}$. (Rückrichtung analog)

2.: $\omega(x)$ Teilmenge von X folgt trivialerweise direkt aus der Definition.
$\omega(x)$ nichtleer folgt direkt aus der Kompaktheit von X und $\omega(x)$ Teilmenge von X.
$\omega(x)$ kompakt gilt wegen X kompakt und $\omega(x)$ Teilmenge von X gdw. $\omega(x)$ abgeschlossen in X. Diese Abgeschlossenheit gilt aufgrund der Stetigkeit von f.
Die Invarianz gilt natürlich sofort aufgrund: Sei $y \in \omega(x) \Leftrightarrow \exists$ Teilfolge $(n_i)_{i\in I} \geq 0 :$ $\lim\limits_{i\to\infty}(f^{n_i}(x)) = y \Rightarrow \lim\limits_{i\to\infty}(f^{n_i+1}(x)) = f(y)$. Rückrichtung analolg.

Definition 1.11: Limesmenge von f: $L(f) := \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x) \cup \alpha(x)}$

Bemerkung: L(f) ist nichtleer, kompakt und invariant.

Beweis:
$L(f)$ nichtleer, da $\omega(x)$ nichtleer.
$L(f)$ kompakt, da Teilmenge von X und X kompakt und Abschluss abgeschlossen (die Abschließung wird benötigt, da beliebige Vereinigungen von Abgeschlossenem iA. nicht abgeschlossen sind).
$L(f)$ invariant, da $\omega(x)$ und $\alpha(x)$ invariant.

Definition 1.13: Rekurrenz

1.: $x \in X$ *positiv rekurrent* $:\Leftrightarrow x \in \omega(x)$
2.: $x \in X$ *negativ rekurrent* $:\Leftrightarrow x \in \alpha(x)$
3.: $x \in X$ *rekurrent* $:\Leftrightarrow x$ *negativ rekurrent* $\vee$ *positiv rekurrent*
4.: $R(f) :=$ *Menge aller rekurrenten Punkte von* f

5.: $x \in X$ *nichtwandernd unter* f
$:\Leftrightarrow \forall$ *Umgebungen* $U_x \subset X : \exists n \geq 1 : f^n(U) \cap U \neq \emptyset$
6.: $\Omega(f) :=$ *nichtwandernde Menge von* f

7.: Eine ϵ*-Kette von* x *nach* y *ist eine endliche Folge* $x_0 = x, x_1, ..., x_k = y$,
mit $d(f(x_n), x_{n+1})) < \epsilon \quad \forall n \in \{0, ..., k-1\}$
8.: Eine ϵ*-Kette von* x *nach* y *ist periodisch* $:\Leftrightarrow x = y$
9.: $x \in X$ *Ketten-rekurrent unter* $f :\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists\ \epsilon$*-Kette von* x *nach* x.
10.: $CR(f) :=$ *Menge aller Ketten-rekurrenten Punkte von* f

Bemerkung: 1.: periodisch $\Rightarrow$ rekurrent $\Rightarrow$ nichtwandernd $\Rightarrow$ Ketten-rekurrent

2.: $R(f)$ ist nichtleer, invariant, iA. nicht kompakt.

Definition 1.15: Minimale Teilmenge

$\Lambda \subset X$ *minimal* $:\Leftrightarrow \Lambda$ *nichtleer, kompakt, invariant und keine Untermenge von* Λ
ist nichtleer, kompakt, invariant

Satz 1.16:

1.: Ein periodischer Orbit ist eine minimale Teilmenge.

2.: Eine kompakte, invariante Teilmenge ist minimal, gdw. der Orbit von jedem Punkt dicht in der Teilmenge liegt.

3.: In jeder nichtleeren, kompakten, invarianten Teilmenge von X existiert eine minimale Teilmenge.

4.: Falls X zusammenhängend ist, dann ist jede minimale Teilmenge entweder gleich X oder nirgendwo dicht[11] *in X.*

[11] eine Teilmenge nennt man nirgendwo dicht (nowhere dense), wenn ihr Abschluss kein Inneres hat.

Beweis:

2.: Hinrichtung: Orb(x) dicht in $\Lambda \Leftrightarrow \overline{Orb(x)} = \Lambda$, dies ist also zu zeigen. Sei also $x \in X$ beliebig, dann gilt $\overline{Orb(x)} \subset \Lambda$ und $\overline{Orb(x)}$ nichtleer, invariant, kompakt (da abgeschlossen). Dann folgt wegen der angenommenen Minimalität von Λ, dass $\overline{Orb(x)} = \Lambda$. Rückrichtung (über Widerspruch bzw. Kontraposition): Sei also Λ nicht minimal $\Rightarrow \exists\, \tilde{\Lambda} \subsetneq \Lambda$, mit $\tilde{\Lambda}$ nichtleer, kompakt, invariant. Wähle $x \in \tilde{\Lambda} \Rightarrow x \in \Lambda$ und $\overline{Orb(x)} \subset \tilde{\Lambda} \neq \Lambda$.

3.: über Lemma von Zorn

4.: Sei also Λ eine minimale Teilmenge in zusammenhängendem X. Wegen X kompakt und Rand abgeschlossen ist $\partial(\Lambda)$ kompakt und wegen 1.7.2 invariant. Fallunterscheidung: $\partial(\Lambda) = \emptyset \Rightarrow \Lambda$ offen, also Λ offen und abgeschlossen (da Λ wegen Minimalität kompakt und X kompakt); da X zusammenhängend ist, folgt $\Lambda = X$. 2. Fall: Sei also $\partial(\Lambda) \neq \emptyset$, also ist $\partial(\Lambda)$ nichtleer, kompakt und invariant. Also folgt wegen der angenommenen Minimalität $\partial(\Lambda) = \Lambda$, also $\partial(\Lambda) = \bar{\Lambda}$, also ist das Innere leer.

Definition 1.17: unzerlegbar, (topologisch) transitiv:

1.: invariante Teilmenge ist unzerlegbar $:\Leftrightarrow$ *nicht zerlegbar in eine disjunkte Vereinigung von 2 nichtleeren Teilmengen*

2.: kompakte, invariante Teilmenge Λ *ist (topologisch) transitiv* $:\Leftrightarrow \exists\, x \in \Lambda : \omega(x) = \Lambda$

Satz 1.18:

1.: topologisch transitiv $\Rightarrow$ *unzerlegbar*

2.: Birkhoff: topologisch transitiv
$\Leftrightarrow \forall$ *offene Teilmengen* U, V *von* $\Lambda : \exists\, n \geq 1 : f^n(U) \cap V \neq \emptyset$
$\Leftrightarrow \exists\, x \in \Lambda$, *dessen* $Orb^{+/-}(x)$ *dicht in* Λ *liegt*

Definition 1.19: Ketten-äquivalent

x, y $\in$ *CR(f) sind Ketten-äquivalent* $(x \sim y)$
$:\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists\, \epsilon-$*Kette von x nach y und von y nach x*

Satz 1.20:

1.: Ketten-Äquivalenz stellt eine Äquivalenz-Relation dar (die Äquivalenz-Klasse (C) wird Ketten-Klasse genannt).

2.: $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \;\; \forall x \in C :$ *jede periodische* δ*-Kette durch* x *ist enthalten in* $B(C,\epsilon)$*.*

3.: Ketten-Klassen sind unzerlegbar.

Literaturverzeichnis:

1.: Wen, Lan (2016): Differentiable dynamical systems: an introduction to structural stability and hyperbolicity; American Mathematical Society; Providence, Rhode Island

2. Schmidt, Martin U. (2018): Dynamische Systeme - FSS 18; Mannheim