Universität Mannheim

Verhalten eines zeitdiskreten dynamischen Systems in der Umgebung eines hyperbolischen Punktes

Seminararbeit bei Prof.Dr.M.Schmidt

Varvara Shchurova
07.11.2018

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Definition(hyperbolischer linearer Isomorphismus)

Sei E ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum. Ein linearer Isomorphismus $A : E \to E$ heißt *hyperbolisch*, wenn der Absolutbetrag aller Eigenwerte von A ungleich Eins ist, d.h.:

$$\{\lambda \in \sigma(A) \mid |\lambda| = 1\} = \emptyset.$$

Es existiert eine direkte Summenzerlegung:

$$E = E^s \bigoplus E^u$$

mit $E^s = \{v \in E | A^n v \to 0, n \to +\infty\}$ *Raum der Kontraktionen*
und $E^u = \{v \in E | A^{-n} v \to 0, n \to +\infty\}$ *Raum der Expansionen.*
E^s und E^u sind unter A invariant, d.h.: $A(E^s) = E^s$ und $A(E^u) = E^u$.

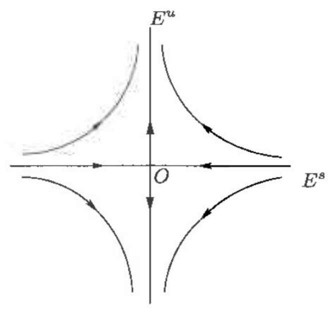

Abbildung 1: Hyperbolischer linearer Isomorphismus

1.2 Definition(hyperbolischer Fixpunkt)

Sei E ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum. Sei $O \subset E$ eine offene Menge. Wir definieren eine C^1-Abbildung $f : O \to E$. Der Fixpunkt $p \in O$ von f heißt *hyperbolisch*, wenn die Ableitung $Df(p) : E \to E$ ein hyperbolischer linearer Isomorphismus ist.

1.3 Vorbereitungen

Wir untersuchen das Verhalten von f in der Umgebung des hyperbolischen Fixpunktes p. Nach dem Satz der Umkehrabbildung ist f ein Diffeomorphismus in der Umgebung von p. Es existiert eine offene Menge U mit $p \in U \subset O$, so dass f Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge von E ist.

Wir definieren $B^1(f, \delta) = B^1(f, \delta; U)$ als die Menge der Diffeomorphismen $g : U \to E$ mit C^1-Abstand zwischen f und g: $d^1(g, f) = \sup_{x \in U}\{|f(x) - g(x)|, |Df(x) - Dg(x)|\} \leq \delta$ mit $\delta > 0$.

1.3.1 Definition(Lipschitzstetige Abbildung)

Die Abbildung $\varphi : E \to E$ heißt *lipschitzstetig*, wenn die Konstante $k \geq 0$ existiert, so dass

$$|\varphi x - \varphi y| \leq k|x - y|$$

für alle $x, y \in E$ gilt. k heißt die Lipschitzkonstante von φ, die mit $Lip\varphi$ bezeichnet wird.

Wir untersuchen die C^1-Störungen, aber es ist leichter die Lipschitz-Störungen zu untersuchen. Deswegen lösen wir das Problem für Lipschitz-Störungen. Daraus folgt der Resultat auch für C^1-Störungen.
Als Hilfsmittel brauchen wir den Schrankensatz.

1.3.2 Schrankensatz

Sei $B \subset E$ eine konvexe offene Menge und $f : B \to E$ eine C^1-Abbildung, so dass $Df(x)$ für alle $x \in B$ beschränkt ist. Dann für alle $x, y \in B$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \text{ mit } k = \sup\{|Df(x)| \mid x \in B\}.$$

Auf einer konvexen offenen Menge ist die Lipschitzkonstante k beschränkt durch das Supremum der Norm der Ableitungen.

Die Folgerungen werden wir im nechsten Kapitel sehen.

2 Verhalten des hyperbolischen Fixpunktes unter kleine Störungen

2.1 Lemma

Seien $f : U \to E$ eine C^1-Abbildung, $p \in U$ ein Punkt und $B(p, r)$ ein abgeschlossener Ball mit Zentrum p und Radius r. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ und $r > 0$, so dass für alle $g \in B^1(f, \delta)$ gilt:

$$Lip(g - Df(p)) \leq \varepsilon \text{ auf } B(p, r).$$

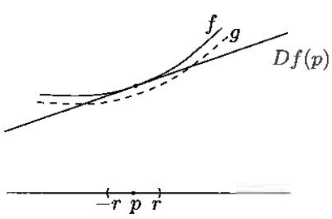

Abbildung 2: Aussage von Lemma 2.1

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Es existieren $\delta > 0$ und $r > 0$, so dass für alle $g \in B^1(f, \delta)$ und alle $x \in B(p, r)$ gilt:

$$|D(g - Df(p))(x)| = |Dg(x) - Df(p)| \leq \varepsilon.$$

Die Behauptung folgt direkt aus dem Schrankensatz.

□

Sei $E = E^s \bigoplus E^u$ die direkte Summenzerlegung. Wir definieren zwei Projektionen

$$\pi_s : E \to E^s$$
$$\pi_u : E \to E^u.$$

Für die Abbildung $\varphi : E \to E$ gilt folgendes:

$$\varphi_s = \pi_s \circ \varphi$$
$$\varphi_u = \pi_u \circ \varphi.$$

Wenn $A : E \to E$ linear ist, dann ist

$$A_{ss} = A_s|_{E^s}$$
$$A_{uu} = A_u|_{E^u}.$$

Wenn E^s und E^u A-invariant sind, dann gilt für $v \in E$:

$$A_s v = A_s v_s = A_{ss} v_s$$
$$A_u v = A_u v_u = A_{uu} v_u.$$

Weiter bezeichnen wir $E(r) = \{v \in E \mid |v| \leq r\}$ als einen abgeschlossenen Ball um Nullpunkt mit Radius r, d.h. $E(r) = B(0, r)$.

Mit der Hilfe von Lemma 2.1 können wir f in der Umgebung von hyperbolischen Fixpunkt $p \in U$ als C^1-Störung g in der Form

$$g = A + \varphi$$

schreiben, wobei A ein hyperbolischer linearer Isomorphismus und $Lip\varphi$ klein ist. Das ist die Form der von uns betrachteten Lipschitz-Störungen von hyperbolischen linearen Isomorphismen.

2.2 Lemma

Sei $A : E \to E$ ein hyperbolischer linearer Isomorphismus mit $E = E^s \bigoplus E^u$. Wir definieren als $\tau = \max\{|A \ |_{E^s}|, |A^{-1} \ |_{E^u}|\} < 1$. Sei $|\cdot|$ eine Norm auf E, die mit A verträglich ist, d.h.:

$$|Av| \leq \tau |v| \ \forall v \in E^s$$
$$|A^{-1}v| \leq \tau |v| \ \forall v \in E^u$$
$$|v| = \max\{|v_s|, |v_u|\} \ \forall v \in E.$$

Wenn die Abbildung $\varphi : E(r) \to E$ mit $r > 0$ lipschitzstetig mit $Lip\varphi < 1 - \tau$ ist, dann hat $A + \varphi$ in $E(r)$ höchstens einen Fixpunkt. Wenn zusäzlich gilt, dass $|\varphi(0)| \leq (1 - \tau - Lip\varphi)r$, dann hat $A + \varphi$ in $E(r)$ genau einen Fixpunkt p_φ und es gilt:

$$|p_\varphi| \leq \tfrac{|\varphi(0)|}{1-\tau-Lip\varphi}.$$

Beweis. Wir wollen folgende Gleichung lösen: $(A + \varphi)v = v$ für $v \in E(r)$.
Bezüglich direkter Summenzerlegung $E = E^s \bigoplus E^u$ ist sie equivalent zu folgender Gleichung:

$$A_s v + \varphi_s v = v_s \text{ und } A_u v + \varphi_u v = v_u$$

oder

$$A_{ss} v_s + \varphi_s v = v_s \text{ und } A_{uu} v_u + \varphi_u v = v_u$$

oder

$$A_{ss} v_s + \varphi_s v = v_s \text{ und } A_{uu}^{-1} v_u - A_{uu}^{-1} \varphi_u v = v_u.$$

Weiter definieren wir die Abbildung $T = T_\varphi : E(r) \to E$

$$T(v) = (A_{ss} v_s + \varphi_s v, A_{uu}^{-1} v_u - A_{uu}^{-1} \varphi_u v).$$

T und $A + \varphi$ haben desselbe Fixpunktmenge.
Um zu zeigen, dass $A + \varphi$ höchstens einen Fixpunkt in $E(r)$ hat, genügt es zu zeigen, dass T eine Kontraktion ist.

Für alle $v, v' \in E(r)$ gilt:

$$|T(v) - T(v')| = |(A_{ss}(v_s - v'_s) + \varphi_s(v) - \varphi_s(v'), A_{uu}^{-1}(v_u - v'_u) + A_{uu}^{-1}(\varphi_u(v') - \varphi_u(v)))| \leq$$
$$\leq \max\{\tau|v_s - v'_s| + Lip\varphi|v - v'|, \tau|v_u - v'_u| + \tau Lip\varphi|v - v'|\} \leq (\tau + Lip\varphi)|v - v'|.$$

Da nach Voraussetzung $Lip\varphi < 1 - \tau$ ist, ist $LipT < 1$, und T ist eine Kontraktion. Daraus folgt, dass $A + \varphi$ höchstens einen Fixpunkt in $E(r)$ hat.

Sei zusätzlich $|\varphi(0)| \leq (1 - \tau - Lip\varphi)r$. Um zu zeigen, dass T genau einen Fixpunkt in $E(r)$ hat, soll gezeigt werden, dass T eine Selbstabbildung ist.
Es gilt:

$$|T(0)| = |(\varphi_s(0), -A_{uu}^{-1}\varphi_u(0))| \leq |\varphi(0)|.$$

Für alle $v \in E(r)$ gilt es:

$$|T(0)| \leq |T(0)| + |T(v) - T(0)| \leq |\varphi(0)| + (\tau + Lip\varphi)|v| \leq$$
$$\leq (1 - \tau - Lip\varphi)r + (\tau + Lip\varphi)|v| = r - (\tau + Lip\varphi)(r - |v|) \leq r.$$

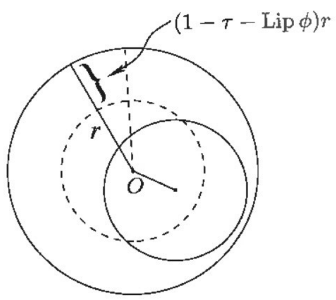

Abbildung 3: Beweis von Lemma 2.2

Das zeigt, dass $T : E(r) \to E(r)$ eine Selbstabbildung ist. Nach Banachscher Fixpunktsatz hat T und auch $A + \varphi$ genau einen Fixpunkt p_φ in $E(r)$.
Weiter sei $p_\varphi = v$. Wir setzen p_φ ein in

$$|T(0)| \leq |\varphi(0)| + (\tau + Lip\varphi)|v|$$

und bekommen

$$|p_\varphi| \leq |\varphi(0)| + (\tau + Lip\varphi)|p_\varphi|.$$

Nach dem Umstellen bekommen wir

$$|p_\varphi| \leq \tfrac{|\varphi(0)|}{1-\tau-Lip\varphi}.$$

□

Der folgende Satz ist die Anwendung von Lemma 2.2 auf die differenzierbare Abbildungen.

2.3 Satz

Sei $f : U \to E$ eine C^1-Abbildung und $p \in U$ ein hyperbolischer Punkt von f. Es existieren $\delta_0 > 0$ und $\varepsilon_0 > 0$, so dass ein beliebiges $g \in B^1(f, \delta_0)$ höchstens einen Fixpunkt in $B(p, \varepsilon_0)$ hat. Ferner existiert für alle $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ein $0 < \delta \leq \delta_0$, so dass ein beliebiges $g \in B^1(f, \delta)$ genau einen Fixpunkt p_g in $B(p, \varepsilon)$ hat.

Beweis. Wir beweisen den Satz für eine Norm auf E, die mit $Df(p)$ verträglich ist. Da E endlich-dimensional ist, gilt er dann für alle Normen auf E.
O.B.d.A. nehmen wir an, dass $p = 0$ ist. Sei $Df(0) = A$ und $0 < \tau < 1$ wie in Lemma 2.2. Wir fixieren $\tau < \lambda < 1$.
Nach Lemma 2.1 existieren $\delta_0 > 0$ und $\varepsilon_0 > 0$, so dass für $\varphi = g - A : E(\varepsilon_0) \to E$ mit $g \in B^1(f, \delta_0)$ gilt:

$$Lip\varphi \leq \lambda - \tau \text{ auf } E(\varepsilon_0).$$

Nach Lemma 2.2 hat $g = A + \varphi$ höchstens einen Fixpunkt in $E(\varepsilon_0)$.
Seien jetzt $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ und $\delta = \min\{\delta_0, (1-\lambda)\varepsilon\}$.
Für alle $g \in B^1(f, \delta)$ gilt:

$$|\varphi(0)| = |g(0) - A(0)| = |g(0) - f(0)| \leq d^1(g, f) \leq \delta = (1-\lambda)\varepsilon.$$

Nach Lemma 2.2 hat $g = A + \varphi$ genau einen Fixpunkt p_g in $E(\varepsilon_0)$. Es gilt:

$$p_g \leq \tfrac{|\varphi(0)|}{1-\tau-Lip\varphi} \leq \tfrac{(1-\lambda)\varepsilon}{1-\tau-(\lambda-\tau)} = \varepsilon.$$

□

Der einzige Fixpunkt p_g von g in $B(p, \varepsilon_0)$ heißt die Fortsetzung von p unter g.

3 Literaturverzeichnis

[1] Lan Wen. Differentiable Dynamical Systems, American Mathematical Society, 2016