Der Curve Shortening Flow

Benedikt Schmidt

12.09.2018

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Der *Curve Shortening Flow* ist der eindimensionale Fall eines *Mean Curvature Flows*. Beides sind Beispiele für geometrische Flüsse. Geometrische Flüsse lassen sich in extrinsische Flüsse und intrinsische Flüsse unterteilen. Dabei verändern extrinsische Flüsse sowohl die Riemannsche Metrik als auch die Immersion, während intrinsische Flüsse unabhängig von der Immersion agieren und nur Veränderungen auf der Riemannschen Metrik bewirken. *Mean Curvature Flows* zählen zu den extrinsischen Flüssen. Damit liegt der Fokus dieser Ausarbeitung also auf der ersten Kategorie von geometrischen Flüssen. Diese Flüsse können als Lösung einer quasi-parabolischen partiellen Differentialgleichung beschrieben werden. Im Spezialfall des *Curve Shortening Flows* konnten sehr schöne Resultate über das Langzeit verhalten erzielt werden. So kann für hinreichend gutartige Kurven gezeigt werden, dass die Kurve irgendwann zu einem *runden Punkt* in sich zusammen schrumpft. Diese Eigenschaft kann zum Beispiel in der Bilderkennung verwendet werden, um das Rauschen in Datensätzen zu reduzieren. Dieser Vortrag geht zum Großteil auf die Vorlesung von Robert Haslhofer über den CSF an der University of Toronto zurück [1]. Darüberhinaus sind einige Details aus dem Paper von Huisken übernommen [2]. Kapitel 2 basiert auf dem gut lesbaren Skript von Alexander Bobenko zur Differentialgeometrie von Kurven und Flächen [3].

Sei I ein Intervall, $x \in \Gamma_t$, $\partial_t x$ die Flussgeschwindigkeit in x und $\vec{\kappa}(x)$ die Krümmung in x. Dann fließt eine Familie eingebetteter Kurven $\Gamma_t \subset \mathbb{R}^n$ mit dem *Curve Shortening Flow*, falls die Flussgeschwindigkeit in jedem Punkt dem Krümmungsvektor entspricht, d.h.

$$\partial_t x = \vec{\kappa}(x) \tag{1}$$

$\forall x \in \Gamma_t$ und $\forall t \in I$.

Beispiel 1 (Kreis mit schrumpfendem Radius)**.** *Sei $\Gamma_t = \partial B_{r(t)} \subset \mathbb{R}^2$, wobei $I = (-\infty, R^2/2)$. Der Kreis ist das einfachste Objekt mit konstanter mittlerer Krümmung, sie ist gegeben durch $\kappa(x) = -\frac{1}{r}$. Damit wird die partielle Differentialgleichung zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung der folgenden Gestalt*

$$\dot{r} = -\frac{1}{r}.$$

Die Lösung dieser ODE ist $r(t) = \sqrt{R^2 - 2t}$ für ein gegebenes $r(0) = R$. Ab $t = \frac{R^2}{2}$ ist der Radius also konstant gleich 0, sodass der Kreis tatsächlich zu einem Punkt zusammengeschrumpft ist.

Beispiel 2 (Grim Reaper - Sensenmann). *Ein Beispiel einer Kurve, die nicht gutartig genug ist, ist das der sogenannten Grim Reaper Kurve. Diese wird beschrieben durch* $\Gamma_t = t - \log(\cos x)$*, wobei* $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *und* $t \in (-\infty, \infty)$*. Sie schrumpft nicht zu einem Punkt zusammen. Sie wird nur um* t *translatiert.*

2 Grundlagen der Differentialgeometrie von Kurven

Da der Vortrag vor allem vor Bachelor-Studenten gehalten wurde, werden nun zunächst einige Grundlagen über die Differentialgeometrie von Kurven erläutert. Wir beschränken uns hierbei auf Kurven im $\mathbb{R}^n$.

Definition 3 (Parametrisierte Kurven). *Eine parametrisierte Kurve im* $\mathbb{R}^n$ *ist eine glatte Abbildung*

$$\gamma : M \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,$$

die ein Intervall M *in den* $\mathbb{R}^n$ *abbildet. Die Variable* $t \mapsto \gamma(t)$ *heißt Parameter der Kurve und das Bild* $\gamma(M) \subset \mathbb{R}^n$ *nennt man Spur,* $Sp(\gamma)$*.*

Glatt bedeutet, dass $\forall i = 1, \ldots, n$ *gilt* $\gamma_i \in C^\infty(\mathbb{R})$*.*
Die Ableitung von γ *nach* t *kann man als Geschwindigkeit bezeichnen. Es gilt also* $\frac{d\gamma}{dt}(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$*. Somit kann man* γ *als Trajektorie bezeichnen.*

Definition 4 (Tangentialvektor und reguläre Kurven).

1. *Der Vektor* $T(t) := \gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ *heißt Tangentialvektor*
2. *Ein Punkt in dem gilt* $\gamma'(t) = 0$ *heißt singulärer Punkt*
3. *Eine reguläre Kurve ist eine parametrisierte Kurve, bei der* $\forall t \in M$ *gilt* $\gamma'(t) \neq 0$*.*

Definition 5 (Diffeomorphismus und Äquivalenz von Kurven). *a) Seien* M *und* $\tilde{M}$ *zwei Intervalle, dann heißt* $\varphi : M \to \tilde{M}$ *Diffeomorphismus, falls gilt*

i) φ *ist bijektiv*
ii) $\varphi \in C^\infty$
iii) $\varphi'(t) \neq 0 \forall t \in M$*.*

b) Seine $\gamma : M \to \mathbb{R}^n$ *und* $\tilde{\gamma} : \tilde{M} \to \mathbb{R}^n$ *zwei parametrisierte Kurven. Sie sind genau dann äquivalent, wenn es einen Diffeomorphismus* $\varphi : M \to \tilde{M}$ *gibt, sodass* $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ *gilt. Falls* $\varphi' > 0$ *gilt heißen sie orientiert äquivalent.*

c) Eine (orientierte) immersierte Kurve in $\mathbb{R}^n$ ist eine Äquivalenzklasse von regulären (orientierten) Kurven.

Definition 6 (Länge)**.** *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve, dann ist $L(\gamma) := \int\limits_a^b ||\gamma'(t)||dt$ die Länge von γ. Hierbei ist $||\gamma'(t)||$ die Länge des Tangentialvektors.*

Lemma 7. *Seien $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{\gamma} : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ zwei äquivalente Kurven, dann gilt $L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$.*

Beweis.

$$\begin{aligned}
L(\tilde{\gamma}) &= \int\limits_c^d ||\tilde{\gamma}'(t)||dt \\
&= \int\limits_c^d ||(\gamma(\varphi(t)))'||dt \\
&\overset{\text{Kett.}}{=} \int\limits_c^d ||\gamma(\varphi(t))'\varphi(t)'||dt \\
&= \int\limits_c^d ||\gamma(\varphi(t))'|| \cdot |\varphi(t)'|dt \\
&\overset{\text{Trafo.}}{=} \int\limits_a^b ||\gamma'(t)||dt \\
&= L(\gamma)
\end{aligned}$$

□

Definition 8 (Parametrisiert nach der Bogenlänge)**.** *$\gamma : M \to \mathbb{R}^n$ heißt parametrisiert nach der Bogenlänge, falls $||\gamma'(t)|| = 1 \; \forall t \in M$.*

Satz 9. *Jede reguläre parametrisierte Kurve ist äquivalent zu einer der Bogenlänge nach parametrisierten Kurve, d.h. jede immersierte Kurve lässt sich der Bogenlänge nach parametrisieren.*

Definition 10. *Eine Kurve $\gamma : M \to \mathbb{R}^2$ heißt ebene Kurve.*

Sei $T(t)$ der Tangentialvektor und $N(t)$ der Normalenvektor von γ an t. Dann sind T und N orthogonal. Somit kann N als 90° Drehung von T verstanden werden. Sei J die Drehmatrix, dann ergibt sich

$$N := \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:J} T$$

Es gilt offenbar $||T|| = ||\kappa'(t)|| = 1 \forall t$ und damit $||N|| = 1$ und $< N, T >= 0$.
Damit folgt:

$$\begin{aligned} &||T|| = 1 \\ \Leftrightarrow &< T, T >= 1 \\ \Rightarrow &< T', T > + < T, T' >= 0 \\ \Leftrightarrow &2 < T, T' >= 0 \\ \Leftrightarrow &T \perp T' \\ \Leftrightarrow &T' || N \\ \Leftrightarrow &T' = \kappa N \text{ mit } \kappa : I \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

weiterhin ergibt sich:

$$\begin{aligned} N' = (JT)' &= JT' \\ &= J\kappa N \\ &= \kappa JJT \\ &= -\kappa T \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind Teil der sogenannten Frenet-Gleichungen:
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ nach der Bogenlänge parametrisiert, dann sind die Frenet-Gleichungen, die für die Herleitung der Krümmung ebener Kurven notwendig sind, die folgenden.

$$\begin{aligned} &\gamma' = T \\ &T' = \kappa N \\ &N' = -\kappa T \end{aligned} \tag{2}$$

Außerdem bezeichnet die Abbildung $\kappa : M \to \mathbb{R}$ die Krümmung. Ziel ist es nun eine Formel zur Berechnung der Krümmung zu finden.

Da alle Tangetialvektoren auf Länge 1 fixiert sind unterscheiden sie sich nur durch die Winkel, die sie zum Beispiel zwischen der x-Achse aufspannen. Somit können sie über den Einheitskreis parametrisiert werden und es ergibt sich

$$T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))), \text{ wobei } \theta(s) \text{ den obigen Winkel beschreibt.}$$

Genauso gilt also mit Hilfe der Euler Formel

$$T(s) = e^{i\theta(s)}.$$

Durch ableiten erhält man

$$T'(s) = i\theta'(s)e^{i\theta(s)}.$$

Gleichzeitig gilt mit den Frenet-Gleichungen auch

$T'(s) = \kappa N = \kappa(s)ie^{i\theta(s)}$ (die Multiplikation mit i stellt eine 90 Grad Drehung dar).

$$\Rightarrow \kappa(s) = \theta'(s)$$

Damit ist die Krümmung, im Fall einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve, also die Winkelgeschwindigkeit von T. Es verbleibt nun noch diesen Spezialfall auf den allgemeinen Fall zurückzuführen. Sei dafür

$\tilde{\gamma} : [0, L] \to \mathbb{C}$ eine nach Bogenlänge param. Kurve,
$\varphi : [a, b] \to [0, L]$ ein Diffeomorphismus mit $\varphi' > 0$
und $\gamma(t) := \tilde{\gamma}(\varphi(t))$ eine reguläre aber nicht nach Bogenlänge param. Kurve.

Ziel ist es nun die bekannte Krümmung von $\tilde{\gamma}$ auf die Krümmung von γ zurückzuführen. Es gilt

$$\gamma'(t) \overset{s=\varphi(t)}{=} \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}\varphi'(t) \overset{v=\varphi'(t)}{=} \tilde{\gamma}v = \tilde{T}v$$

$$\overset{||\tilde{T}||=1}{\Rightarrow} v = ||\gamma'||.$$

Da außerdem

$$\frac{d\tilde{T}}{t} = \frac{d\tilde{T}}{s}\varphi'(t) \overset{\text{Frenet}}{=} \tilde{\kappa}v\tilde{N}$$

gilt, folgt

$$\gamma''(t) = \frac{d}{dt}(\tilde{T}v) = \frac{d\tilde{T}}{dt}v + \tilde{T}\frac{dv}{dt} = \tilde{\kappa}v^2\tilde{N} + \tilde{T}v'.$$

Zusammen erhalten wir

$$< \gamma'', N >=< \gamma'', \tilde{N} >=< \tilde{\kappa}v^2\tilde{N}, \tilde{N} > + \underbrace{< \tilde{T}v', \tilde{N} >}_{0} = \tilde{\kappa}v^2 \tag{3}$$

und

$$< \gamma'', N >=< \gamma'', J\tilde{T} >=< \gamma'', J\frac{\gamma'}{v} >= \frac{1}{v} < \gamma'', J\gamma' > . \tag{4}$$

Aus (3) und (4) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\tilde{\kappa} v^2 &= \frac{1}{v} < \gamma'', J\gamma' > \\
\Leftrightarrow \tilde{\kappa} &= \frac{1}{v^3} < \gamma'', J\gamma' > \\
\overset{(5)}{\Leftrightarrow} \tilde{\kappa} &= -\frac{\det(\gamma'', \gamma)}{||\gamma'||^3}.
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt, weil gilt

$$< A, JB >=< \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} >= -a_1 b_2 + a_2 b_1 = \det(A, B). \tag{5}$$

Beispiel 11. *Krümmung eines Graphen*
Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma(x) := \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix},$$

wobei f eine zweimal differenzierbare Funktion ist. Dann folgt

$$\gamma'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}$$

und

$$\gamma'(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f''(x) \end{pmatrix}$$

Somit erhält man für die Krümmung

$$\kappa = \frac{-\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f''(x) & f'(x) \end{pmatrix}}{(1^2 + f'(x)^2)^{3/2}} = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}.$$

3 Analysis des Curve Shortening Flows

Nach diesen Grundlagen können wir uns nun der Analysis des Curve Shortening Flows widmen. Es ist hilfreich die Veränderung durch den *Curve Shortening Flow* anhand einer Familie von Einbettungen

$$\gamma = \gamma(\cdot, t) : S^1 \times I \to \mathbb{R}^2,$$

sodass $\Gamma_t = \gamma(S^1, t)$ gilt, zu beschreiben. Somit gilt $p = \gamma(x, t)$ und damit

$$\delta_t \gamma(x, t) = \kappa(x, t) N(x, t),$$

wobei der Krümmungsvektor durch ein Produkt aus dem inneren Einheitsnormalenvektor N und der Krümmung κ ausgedrückt wird.

Angenommen es gäbe eine glatte Lösung dieses Problems auf dem Zeitintervall $[0,T)$. Sei $A(t)$ die Fläche, die von der Kurve Γ_t eingeschlossen wird, dann gilt

$$\frac{d}{dt}A(t) = -\int\limits_{\Gamma_t} \kappa ds = -2\pi.$$

Damit folgt durch Integration von 0 bis t

$$A(t) = A(0) - 2\pi t.$$

Insbesondere gilt also $T \leq \frac{A(0)}{2\pi}$.

Es ist möglich die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des *Curve Shortening Flows* zu zeigen. Dies ist allerdings etwas komplizierter als üblich, weil es sich hierbei um keine streng parabolische partielle Differentialgleichung handelt, dies wird in Lemma 13 gezeigt.

Satz 12. *Sei $\gamma_0 : S^1 \to \mathbb{R}^2$ eine eingebettete Kurve. Dann gibt es genau eine glatte Lösung $\gamma : S^1 \times [0,T) \to \mathbb{R}^2$ von*

$$\begin{cases} \partial_t \gamma = \partial_s^2 \gamma \\ \gamma|_{t=0} = \gamma_0 \quad \textit{für } t \in [0,T) \end{cases}$$

mit $\sup\limits_{S^1 \times [0,T)} |\kappa(x,t)| = \infty$.

Lemma 13. *Der Curve Shortening Flow ist nicht streng parabolisch.*

Beweis. Fließe $\gamma : S^1 \times [0,T)\mathbb{R}^2$ mit dem CSF, dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_t \gamma = \partial_s^2 \gamma &= |\partial_x \gamma|^{-1} \partial_x (|\partial_x \gamma|^{-1} \partial_x \gamma) \\ &= |\partial_x \gamma|^{-1} \left(\partial_x^2 \gamma - \left\langle \frac{\partial_x \gamma}{|\partial_x \gamma|}, \partial_x^2 \gamma \right\rangle \frac{\partial_x \gamma}{|\partial_x \gamma|} \right). \end{aligned}$$

Mit der Komponentenschreibweise $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ gilt also:

$$\begin{pmatrix} \partial_t \gamma_1 \\ \partial_t \gamma_2 \end{pmatrix} = |\partial_x \gamma|^{-4} \underbrace{\begin{pmatrix} (\partial_x \gamma_1)^2 & \partial_x \gamma_1 \partial_x \gamma_2 \\ \partial_x \gamma_1 \partial_x \gamma_2 & (\partial_x \gamma_2)^2 \end{pmatrix}}_{\text{positiv semidefinit}} \begin{pmatrix} \partial_x^2 \gamma_1 \\ \partial_x^2 \gamma_2 \end{pmatrix}$$

Allerdings ist die Matrix nicht positiv definit, denn

$$\det \begin{pmatrix} (\partial_x \gamma_1)^2 & \partial_x \gamma_1 \partial_x \gamma_2 \\ \partial_x \gamma_1 \partial_x \gamma_2 & (\partial_x \gamma_2)^2 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ Die partielle Differentialgleichung ist nicht parabolisch.
$\Rightarrow$ Neue Theorie ist notwendig. $\square$

Ansatz: Sei γ_0 eine nicht glatte Kurve, dann ist $\tilde{\gamma}(x,t) = \gamma_0(x) + u(x,t)N(x)$ eine glatte Kurve in der Nähe. Sei oBdA γ_0 nach Bogenlänge parametrisiert. Mit den Definitionen aus Kapitel 2 ergeben sich foglende Rechnungen.

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}' &= \underbrace{\gamma_0'(x)}_{T} + u'N + u \underbrace{N'}_{-kT} \\ &= T + u'N - kuT \\ &= u'N + (1-ku)T, \end{aligned}$$

wobei k die Krümmung von γ_0, T die Einheitstangente von γ_0 und N die Einheitsnormale von γ_0 bezeichnet. Genauso folgt auch

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}'' &= u''N + u'(-kT) + (1-ku)'T + (1-ku)T \\ &= u''N - ku'T - k'uT - ku'T + (1-ku)kN \\ &= (u'' + k(1-ku))N - (ku' + 2ku')T \end{aligned}$$

Mit der Definition der Krümmung aus Kaptiel 2 von $\kappa = |\tilde{\gamma}'|^{-3} \det(\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}'')$ ergibt sich für die Krümmung von $\tilde{\gamma}$

$$\kappa = \frac{(1-ku)u'' + 2ku'^2 + k'uu' - 2k^2u + k^3u^2 + k}{((1-ku)^2 + u'^2)^{3/2}}.$$

Durch Rotation um $\frac{\pi}{2}$ von $\frac{\tilde{\gamma}'}{|\tilde{\gamma}'|}$ erhält man den Einheitsnormalenvektor $\tilde{N}$ von $\tilde{\gamma}$ und dieser ist gleich

$$\tilde{N} = \frac{(1-ku)N - u'T}{((1-ku)^2 + u'^2)}.$$

Da $\Gamma_t = \tilde{\gamma}(S^1, t)$ genau dann dem CSF folgt, wenn $< \tilde{N}, u'N >= \kappa$ gilt, erhält man

$$u_t = \frac{u'' + (1-ku)^{-1}(2ku'^2 + k'uu' - 2k^2u + k^3u^2 + k)}{(1-ku)^2 + u'^2}. \tag{6}$$

Gleichung (6) ist nun eine quasilineare strikt parabolische partielle Differentialgleichung. Hierfür kann zum Beispiel der Inhalt aus dem Seminar Diffusion

Equations von Frau Chen verwendet werden, um die Existenz und Eindeutigkeit auf einem kleinen Intervall $[\varepsilon, 0)$ zu zeigen. Damit haben wir also eine Lösung $\tilde{\gamma}$ von

$$\partial_t \tilde{\gamma} = \kappa \tilde{N} + f \partial_x \tilde{\gamma}$$

für eine passende Funktion $f(x,t)$ gefunden. Diese Lösung muss nun noch auf eine Lösung $\gamma(x,t)$ von $\partial_t \gamma = \partial_s^2 \gamma$ zurückgeführt werden. Wähle dafür $\gamma(x,t) = \tilde{\gamma}(\varphi_t(x), t)$, wobei $\varphi : S^1 \to S^1$ die eindeutige Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = -f(x,t)\frac{\partial_x \tilde{\gamma}(x,t)}{\partial_x \tilde{\gamma}(\varphi_t(x),t)}, \quad \varphi_0(x) = x$$

ist. Damit besitzt der CSF also auf einem kleinen Intervall $[\varepsilon, 0)$ eine eindeutige Lösung. Wie üblich kann man nun mit einem Widerspruchsbeweis über das maximale Existenzintervall die Existenz und Eindeutigkeit auf $[0, T)$ zeigen.

4 Satz von Grayson

Ziel des Vortrags war es Satz 23 (Satz von Grayson) zu beweisen. Im Beweis werden mehrere Theoreme verwendet, die leider im Rahmen eines Seminars nicht bewiesen werden konnten. Deshalb werden einige notwendige Resultate im Folgenden ohne Beweis genannt, sodass der Beweis des eigentlich angestrebten Resultates möglich ist. Der Beweis verwendet die Methode so genannter Blow-up Lösungen. Diese beschreiben, in welchem Maße die Krümmung explodiert.

Definition 14 (Blow-up Typen). *Eine Singularität ist für $t \to T$ von Typ I, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass*

$$\max_{\Gamma_t} |\kappa| \leq \frac{C}{\sqrt{T-t}}, \text{ für } C < \infty$$

Andernfalls ist die Singularität von Typ II.

Sei Γ_t eine Familie gesschlossener Kurven, die mit dem CSF fließt und $X_0 = (x_0, t_0)$ ein Punkt in der Raum-Zeit. Außerdem sei

$$\rho_{X_0} = (4\pi(t_0 - t))^{-1/2} e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(t_0-t)}}, \ t < t_0$$

der Wärmeleitungskern, dann konnte Huisken folgendes Resultat zeigen:

Satz 15 (Huiskens Monotonitätsformel)**.**

$$\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_t}\rho_{X_0}ds = -\int_{\Gamma_t}\left|\kappa + \frac{<\gamma, N>}{2(t_0-t)}\right|^2 \rho_{X_0}ds$$

Damit können die Singularitäten des CSF nun mit Hilfe einer Blow-up Analyse untersucht werden.

Definition 16 (Blow-up Punkt)**.** *Der Punkt* $x_0 \in \mathbb{R}^2$ *ist ein Blow-up Punkt, wenn es Folgen* $t_i \to T$ *und* $p_i \in \Gamma_{t_i}$ *gibt, sodass* $|\kappa|(p_i) \to \infty$ *und* $p_i \to x_0$ *gilt.*

Die Krümmung explodiert bei der singulären Zeit T, d.h.

$$\limsup_{t\to T}\max_{\Gamma_t}|\kappa| = \infty.$$

Damit existiert also auch ein Blow-up Punkt.

Definition 17 (Parabolische Reskalierung)**.** *Die parabolische Reskalierung mit dem Zentrum* (x_0, T) *ist für* $\lambda > 0$ *definiert als*

$$\Gamma_t^\lambda := \lambda(\Gamma_{T+\lambda^{-2}t} - x_0),\ t \in [-\lambda^2 T, 0).$$

Unter der Annahme, dass es sich um einen Blow-up von Typ I handelt kann nun ein erstes wichtiges Resultat gezeigt werden:

Satz 18. *Für* $\lambda \to \infty$ *konvergieren die Flüsse* $\{\Gamma_t^\lambda\}_{t\in[-\lambda^2T,0)}$ *gegen eine Familie runder Schrumpfkreise* $\{\partial B_{\sqrt{-2t}}(0)\}_{t\in(-\infty,0)}$.

Das zweite notwendige Resultat, um den Satz von Grayson beweisen zu können, basiert auf dem folgenden Satz.

Satz 19 (Hamiltons Harnack Ungleichung)**.** *Sei* $\{\Gamma_t\}_{t\in[0,T)}$ *eine konvexe Lösung des CSF und geschlossen, dann gilt*

$$\frac{\kappa_t}{\kappa} - \frac{\kappa_s^2}{\kappa^2} + \frac{1}{2t} \geq 0$$

Damit kann man folgendes Resultat zeigen:

Satz 20 (Translationssolitons)**.** *Jede unendlich lang strikt konvexe Lösung des CSF* $\{\Gamma_t\}_{t\in(-\infty,\infty)}$, *die einen einen kritischen Punkt irgendwo in der Raum-Zeit hat muss ein Translationssoliton sein, d.h. es existiert ein Vektor* $V \in \mathbb{R}^2$, *sodass* $\Gamma_t = \Gamma_0 + tV$.

Das einzige strikt konvexe Translationssoliton (bis auf Skalierung, Translation und Drehung) ist der Grim Reaper.

Nun verbleibt noch ein drittes notwendiges Resultat. Dies basiert auf dem Abstandsvergleichsprinzip von Huisken.

Satz 21 (Abstandsvergleichsprinzip)**.** *Sei $X : S^1 \times [0,T) \to \mathbb{R}^2$ eine Familie eingebetteter Kurven, die dem CSF folgt. Sei außerdem $L(t)$ die Länge der Kurve bei Zeit t. Für zwei Punkte $x, y \in S^1$ sei $l(x,y,t)$ der intrinsische Abstand zwischen $X(x,t)$ und $X(y,t)$ und $d(x,yt) = |(X(x,t) - X(y,t)|$ der extrinsche Abstand. Außerdem sei*

$$R := \sup_{x \neq y} \frac{L(t)}{\pi d(x,y,t)} \sin\left(\frac{\pi l(x,y,t)}{L(t)}\right).$$

Damit kann nun folgendes Resultat gezeigt werden:

Satz 22. *Durch Monotonität gilt $R(t) \leq C$, wobei $C := R(0) < \infty$ ist. Außerdem ist R skalierungsinvariant. Das impliziert, dass der Grim Reaper nicht als Blow-up Grenzwert des CSF einer geschlossenes eingebetteten Kurve auftreten kann.*

Mit diesen drei weitreichenden Resultaten kann nun über einen Widerspruchsbeweis des Blow-up Typs Graysons Theorem gezeigt werden, das letztendlich bestätigt, dass geschlossene eingebettete Kurven zu einem Punkt zusammenschrumpfen.

Satz 23 (Graysons Theorem)**.** *Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ eine geschlossene eingebettete Kurve, dann existiert der CSF $\{\Gamma_t\}_{t\in[0,T]}$ mit $\Gamma_0 = \Gamma$ bis $T = \frac{A_\Gamma}{2\pi}$ und konvergiert für $t \to T$ zu einem runden Punkt, d.h. $\exists! x_0 \in \mathbb{R}^2$, sodass der reskalierte Fluss $\Gamma_t^\lambda := \lambda(\Gamma_{T+\lambda^{-2}t} - x_0)$ für $\lambda \to \infty$ gegen den runden Schrumpfkreis $\{\partial B_{\sqrt{-2t}}\}_{t\in(-\infty,0)}$ konvergiert.*

Beweis. Sei $T < \infty$.
Ann.: $\limsup\limits_{t\to T}((T-t)\max_{\Gamma_t}\kappa^2) = \infty$ (Blow-up von Typ II)
Für alle $k \geq \frac{1}{T}$ sei $t_k \in [0, T - \frac{1}{k}], x_k \in S^1$, sodass

$$\kappa^2(x_k, t_k)(T - \frac{1}{k} - t_k) = \max_{t \leq T - \frac{1}{k}, x \in S^1} \kappa^2(x,t)(T - \frac{1}{k} - t)$$

Setze nun $\lambda_k := \kappa(x_k, t_k)$, $t_k^{(0)} = -\lambda\kappa^2 t_k$ und $t_k^{(1)} = \lambda\kappa^2(T - \frac{1}{k} - t_k)$. Nach der Annahme gibt es nun $\bar{t} < T$ und $\bar{x} \in S^1$, sodass für $M < \infty$

$$\kappa^2(\bar{x}, \bar{t}(T - \bar{t}) > 2M$$

für k groß genug gilt dann,

$$\bar{t} < T - \frac{1}{k},\ \kappa^2(\overline{x}, \bar{t})(T - \frac{1}{k} - t_k) > M$$
$$\Rightarrow t_k^{(1)} = \kappa^2(x_k, t_k)(T - \frac{1}{k} - t_k) \geq \kappa^2(\overline{x}, \bar{t})(T - \frac{1}{k} - \bar{t}) > M$$
$$\overset{\text{M bel.}}{\Rightarrow} t_k^{(1)} \to \infty$$
$$\Rightarrow \lambda_k \to \infty, t_k \to T, t_k^{(0)} \to \infty$$
$$\Gamma_t^{\lambda} = \lambda_k(\Gamma_{t_k + \lambda_k^{-2} t} - x_k), t \in [t_k^{(0)}, t_k^{(1)})$$
$$\overset{\text{Wahl von}(x_k, t_k)}{\Rightarrow} \kappa_k^2(x,t) \leq \frac{T - \frac{1}{k} - t_k}{T - \frac{1}{k} - t_k - \lambda_k^2 t^2} = \frac{t_k^{(1)}}{t_k^{(1)} - 1}, t \in [t_k^{(0)},\ t_k^{(1)})$$

$\overset{\text{Arzela-Ascoli}}{\Rightarrow}$ nach dem Runtergehen auf eine Teilfolge existiert ein glatter Grenzwert $\{\Gamma_t^{\infty}\}_{t \in (-\infty, \infty)}$
mit $\kappa = 1$ bei $t = 0$ und $\kappa^2 \leq 1$ überall mit einem Lemma erhält man $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum\limits_{x: \kappa(x,t) = 0} |\kappa_s(x,t)| dt = 0$, d.h. gäbe es einen Punkt mit $\kappa = 0$
$\Rightarrow \kappa_s = 0$ in diesem Punkt
$\overset{\text{Evolutionsgleichung + analytisch}}{\Rightarrow} \{\Gamma_t^{\infty}\}_{t \in (-\infty, \infty)}$ ist eine Gerade $\Rightarrow\Leftarrow$ Widerspruch
$\Rightarrow \kappa > 0$
$\overset{\text{Hamilton-Harnack}}{\Rightarrow} \{\Gamma_t^{\infty}\}_{t \in (-\infty, \infty)}$ ist Grim Reaper $\Rightarrow\Leftarrow$ Widerspruch, denn der Grim Reaper kann nicht als Lösung des CSF für geschlossene Kurven auftreten.
$\Rightarrow \lim\limits_{t \to T}((T - t) \max\limits_{\Gamma_t} \kappa^2) < \infty$ (Typ I Blow-up)
$\Rightarrow T = \frac{A_\Gamma}{2\pi}$ und für $t \to T$ folgt die Konvergenz zu einem rundem Punkt. $\square$

5 Quellen

Literatur

[1] Robert Halhofer *Lectures on the curve shortening flow*. math.toronto.edu, 2016

[2] Gerhard Huisken, Carlo Sinestrari *Mean curvature flow singularities for mean convex surfaces*. Springer, 1999

[3] Alexander Bobenko *Differentialgeometrie von Kurven und Flaechen*. http://page.math.tu-berlin.de/ bobenko/Lehre/Skripte/KuF.pdf, 2006