Topologische Konjugation und strukturelle Stabilität

Martin Bergerhausen

17.10.2018

Erinnerung: Auch in diesem Kapitel ist X ein kompakter, metrischer Raum und $f : X \to X$ ein Homöomorphismus.

Definition 1. *Zwei Homöomorphismen $f : X \to X$ und $g : X \to X$ heißen* topologisch konjugiert, *wenn es einen Homöomorphismus $h : X \to X$ gibt, sodass $h \circ f = g \circ h$, wobei wir h eine* topologische Konjugation *oder* Konjugation *von f nach g nennen.*

Beispiel 2. *Ein einfaches Beispiel für topologische Konjugation in einem nicht-kompakten Raum bietet die Drehung um einen Winkel α um einen Punkt a in $\mathbb{R}^2$. Während die direkte Wirkung auf einen Punkt kompliziert zu berechnen ist, lässt sich f auch wie folgt darstellen: $f = T_a \circ d_\alpha \circ T_{-a}$. Dabei bezeichne T_a eine Verschiebung um a und d_α eine Drehung um den Winkel α um den Ursprung, eine lineare Abbildung, die sich durch $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ darstellen lässt.*

Proposition 3. *Zueinander konjugiert sein definiert eine Äquivalenzrelation auf dem Raum der Homöomorphismen von X nach X.*

Beweis.

1. Reflexivität: Klar mit $h = id$.

2. Symmetrie: Sei f konjugiert zu g. Es gibt also einen Homöomorphismus h mit $h \circ f = g \circ h$. Also gilt auch $f \circ h^{-1} = h^{-1} \circ g$. Da h^{-1} als Umkehrabbildung eines Homöomorphismus selber ein Homöomorphismus ist, ist also auch g konjugiert zu f.

3. Transitivität: Es seien e, f, g Homöomorphismen in X, wobei e konjugiert zu f und f konjugiert zu g sind. Also existieren Homöomorphismen h_1, h_2 in X mit $h_1 \circ e = f \circ h_1$ und $h_2 \circ f = g \circ h_2$, also gilt $h_2 \circ h_1 \circ e = g \circ h_2 \circ h_1$.

$\square$

Proposition 4. *Es seien $f, g : X \to X$ zueinander konjugierte Homöomorphismen mit der Konjugation $h : X \to X$. Dann gilt $h \circ f^n = g^n \circ h \ \forall n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. $h \circ f = g \circ h \Rightarrow f = h^{-1} \circ g \circ h$
Also gilt $f^n = (h^{-1} \circ g \circ h)^n = h^{-1} \circ g \circ h \circ h^{-1} \circ g \cdots \circ g \circ h = h^{-1} \circ g^n \circ h$.
Es folgt $h \circ f^n = g^n \circ h$. $\square$

Proposition 5. *Es seien $f, g : X \to X$ zueinander konjugierte Homöomorphismen mit der Konjugation $h : X \to X$. Dann erhält die Konjugation h die Orbiten, d.h. $h[Orb(x, f)] = Orb(h(x), g)$.*

Beweis.
$h[Orb(x, f)] = \{h(f^n(x))\}_{n=-\infty}^{\infty} = \{g^n(h(x))\}_{n=-\infty}^{\infty} = Orb(h(x), g)$
$\forall x \in X$ $\square$

Korollar 6. *Eine Konjugation $h : X \to X$ erhält periodische Menge, Limesmengen, nonwandering set, und das chain recurrent set, d.h. für zueinander topologisch konjugierte Homöomorphismen $f, g : X \to X$ gilt*

$$\begin{aligned} h[P(f)] &= P(g) \\ h[\omega(x, f)] &= \omega(h(x), g) \\ h[\Omega(f)] &= \Omega(g) \\ h[CR(f)] &= CR(g) \end{aligned}$$

Außerdem ist h eine Bijektion von Fix (f) nach Fix (g).

Beweis. Folgt direkt aus Proposition 5.

Die Behauptung für Fixpunkte wird gesondert gezeigt, da sie später noch von Relevanz ist: Es seien $f, g : X \to X$ zueinander konjugierte Homöomorphismen mit der Konjugation $h : X \to X$. Es sei x_0 Fixpunkt von f, also $f(x_0) = x_0$, und $y_0 = h(x_0)$. Dann gilt

$$g(y_0) = g(h(x_0)) = h(f(x_0)) = h(x_0) = y_0.$$

Also ist $h(x_0)$ Fixpunkt von g und es gilt $h[Fix(f)] \subseteq Fix(g)$. Sei nun umgekehrt $g(y_0) = y_0$. Dann gilt

$$f(x_0) = f(h^{-1}(y_0)) = h^{-1}(g(y_0)) = h^{-1}(y_0) = x_0$$

Also wird jeder Fixpunkt von g unter h^{-1} auf einen Fixpunkt von f abgebildet und es gilt $h^{-1}[Fix(g)] \subseteq Fix(f)$. $\square$

Am liebsten würde man alle Homöomorphismen gemäß ihrer Konjugationsklassen klassifizieren, was aber kaum möglich ist. Deswegen beschränken wir uns im folgenden auf abgeschlossene Intervalle $X = [a, b]$.

Definition 7. *Wir nennen einen Homöomorphismus* $f : [a, b] \to [a, b]$ orientierungserhaltend*, wenn er streng monoton wachsend ist, und* orientierungsumkehrend*, wenn er streng monoton fallend ist.*

Man kann sich mit einer kleinen Skizze leicht davon überzeugen, dass jeder Homöomorphismus auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ entweder orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend sein muss, dass also kein weiterer Fall möglich sein kann.
Die theoretische Grundlage hierfür liefert die Hinrichtung von Satz 6.3 aus dem Skript zur Analysis I von Professor Schmidt: „Eine steitge reelle Funktion f auf einem Intervall ist genau dann injektiv, wenn f entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.“ Der Satz lässt sich auf das f in Definition 7 anwenden, da f auf dem Intervall $[a, b]$ als Homöomorphismus insbesondere stetig und injektiv ist.

Proposition 8. *Ein orientierungserhaltender Homöomorphismus kann nicht zu einem orientierungsumkehrenden Homöomorphismus konjugiert sein.*

Beweis. Seien $f, g : [a, b] \to [a, b]$ Homöomorphismen, wobei f orientierungserhaltend und g orientierungsumkehrend ist. Angenommen, f ist konjugiert zu g mit Konjugation h. Da h selber ein Homöomorphismus auf $[a, b]$ ist, ist h entweder orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend, also bildet er entweder a auf a und b auf b ab, oder er bildet a auf b und b auf a ab. Da aber f auf $\{a, b\}$ zwei Fixpunkte hat und g keinen, folgt aus Korollar 6, dass sie nicht zueinander konjugiert sein können. $\square$

Korollar 9. *Sei* $f : [a, b] \to [a, b]$ *ein orientierungserhaltender Homöomorphismus. Dann gilt* $CR(f) = Fix(f)$.

Beweis.
"$\subseteq$" Sei $x \notin Fix(f)$, $f(x) > x$ und $\epsilon = |f(x) - x|/2$. Dann gibt es keine ε -Kette von x nach x. Sei $x_0 = x$. Dann muss x_1 nach Definition die

Ungleichung $d(f(x_0), x_1) = |f(x_0) - x_1| < \epsilon$ erfüllen, also ist

$$x_1 > f(x_0) - \epsilon = (x_0 + f(x_0))/2 = x_0 + \epsilon > x_0.$$

Da f streng monoton wachsend ist, ist $f(x_1) > f(x_0)$, also muss $x_2 > f(x_1) - \epsilon > f(x_0) - \epsilon > x_0$ sein. Induktiv folgt, dass es keine ϵ-Kette von x nach x gibt.
Für den Fall $f(x) < x$ folgt die Behauptung durch einen analogen Beweis.
"$\supseteq$" Bekannt aus dem vorigen Kapitel / nach Definition. □

Theorem 10. *Zwei orientierungserhaltende Homöomorphismen auf $[a, b]$ ohne Fixpunkte in (a, b) sind topologisch konjugiert.*

Beweis. Seien f und g zwei orientierungserhaltende Homöomorphismen auf $[a, b]$ ohne Fixpunkte in (a, b). Wir führen den Beweis für $f(x) > x$, $g(x) < (x)\ \forall x \in (a, b)$. Für andere Fälle verläuft er ähnlich.

Für ein beliebiges $p \in (a, b)$ definieren wir einen beliebigen Homöomorphismus $h_0 : [p, f(p)] \to [p, g(p)]$, der $h_0(p) = p$ und $h_0(f(p)) = g(p)$ erfüllt.

Des weiteren sei für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$h_n : [f^n(p), f^{n+1}(p)] \to [g^n(p), g^{n+1}(p)], x \mapsto g^n(h_0(f^{-n}(x))).$$

h_n ist als Verknüpfung stetiger Abbildungen stetig. Außerdem gilt

$$h_n(f^n(p)) = g^n(h_0(f^{-n}(f^n(p)))) = g^n(h_0(p)) = g^n(p)$$

und

$$h_n(f^{n+1}(p)) = g^n(h_0(f^{-n}(f^{n+1}(p)))) = g^n(h_0(f(p))) = g^n(g(p)) = g^{n+1}(p)$$

Mit dem Zwischenwertsatz folgt, dass h_n surjektiv auf $[g^n(p), g^{n+1}(p)]$ abbildet. Wegen $h_n(f^{n+1}(p)) = g^{n+1}(p) = h_{n+1}(f^{n+1}(p))$ stimmen alle h_n und h_{n+1} auf dem Schnitt ihrer Definitionsmenge, der gerade aus $\{f^{n+1}(p)\}$ besteht, überein.

Daraus folgt, dass die Abbildung

$$h : \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [f^n(p), f^{n+1}(p)] \to \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [g^n(p), g^{n+1}(p)], x \in [f^n(p), f^{n+1}(p)] \mapsto h_n(x)$$

wohldefiniert und stetig ist, da die h_n stetig sind und jeweils auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereich übereinstimmen (s.o.). Außerdem ist h surjektiv, da die h_n surjektiv auf $[g^n(p), g^{n+1}(p)]$ abbilden (s.o.).

g und f sind streng monoton wachsend, da sie orientierungserhaltende Homöomorphismen sind (Definition 7). Damit ist auch f^{-n} als Umkehrfunktion einer streng monoton wachsenden Funktion streng monoton wachsend. Außerdem ist h_0 streng monoton wachsend laut dem bereits zitierten Satz aus dem Analysis-Skript und weil $h_0(f(p)) > h_0(p)$. Also ist auch h_n streng monoton wachsend und damit injektiv. Mit der bereits gezeigten Stetigkeit von h folgt, dass h streng monoton wachsend und damit selbst injektiv ist.

Nun zeigen wir, dass $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[f^n(p), f^{n+1}(p)] = (a, b)$. Dies ist klar, wenn $\lim_{n\to-\infty} f^n(p) = a$ und $\lim_{n\to\infty} f^n(p) = b$. Wir zeigen nur $\lim_{n\to\infty} f^n(p) = b$, der linke Grenzwert folgt aus analoger Rechnung:
Sei $\epsilon > 0$ beliebig klein. Da f keine Fixpunkte in (a, b) hat, hat $f(x) - x$ ein Minimum m in $[p, b - \epsilon]$. Angenommen, es existiert ein $c \in [p, b - \epsilon]$ mit $\lim_{n\to\infty} f^n(p) = c$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $c - f^N(p) < m$ und $f^N(p) < c$. Dann ist $f^{N+1}(p) \geq f^N(p) + m > c$. Da f streng monoton wachsend ist, ist $\lim_{n\to\infty} f^n(p) \neq c$. Also ist $\lim_{n\to\infty} f^n(p) = b$.

Ebenso lässt sich $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[g^n(p), g^{n+1}(p)] = (a, b)$ zeigen.

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in (a, b), die gegen b konvergiert. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gibt es dann ein $K \in \mathbb{N}$, sodass $x_k \geq f^N(p)\ \forall k \geq K$. Also ist $h(x_k) \geq g^N(p)$. Wegen $\lim_{n\to\infty} g^n(p) = b$ folgt, dass sich h stetig fortsetzen lässt auf $(a, b]$ mit $h(b) = b$. Analoges gilt für a. Es sei h im Folgenden diese stetig fortgesetzte Funktion auf $[a, b]$.

Es bleibt zu zeigen, dass der Homöomorphismus h die Gleichung $h \circ f = g \circ h$ erfüllt. Für $q \in \{a, b\}$ ist dies trivial erfüllt. Sei also $q \in [f^n(p), f^{n+1}(p)]$.
$\Rightarrow\ f(q) \in [f^{n+1}(p), f^{n+2}(p)]$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow h(f(q)) &= h_{n+1}(f(q)) \\
&= g^{n+1}(h_0(f^{-(n+1)}(f(q)))) \\
&= g(g^n(h_0(f^{-n}(q)))) \\
&= g(h_n(q)) \\
&= g(h(q))
\end{aligned}$$

□

Definition 11. *Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Wir bezeichnen mit Diff$^r([a, b])$ den Raum der C^r-Diffeomorphismen $f : [a, b] \to [a, b]$, also der*

bijektiven Abbildungen, die auf (a,b) r-mal stetig differenzierbar sind und deren Umkehrabbildung auf (a,b) r-mal stetig differenzierbar ist. Wir identifizieren $Diff^r([a,b])$ mit $d(f,g) = \sum_{k=0}^{r} \|f^{(k)} - g^{(k)}\|_\infty$.
*Ein $f \in Diff^r([a,b])$ nennen wir C^r*strukturell stabil, *wenn es eine C^r-Umgebung U von f in $Diff^r(M)$ gibt, sodass jedes $g \in U$ topologisch konjugiert zu f ist.*
Man kann dies auch allgemeiner auf kompakten C^∞-Mannigfaltigkeiten ohne Rand definieren.

Bemerkung 12. *f ist strukturell stabil, wenn "kleine" Störungen die topologische Struktur des Orbits nicht ändern. Was hierbei klein bedeutet, wird durch die Topologie festgelegt.*

Proposition 13. *Ist f C^rstrukturell stabil, dann ist f auch C^{r+1}strukturell stabil.*

Beweis.

$$\begin{aligned}
&f\ C^r\text{-strukturell stabil}\\
\Rightarrow &\exists \varepsilon > 0\ \forall g \in \mathrm{Diff}^r([a,b])\ \exists h \in \mathrm{Hom}([a,b]):\\
&d_r(f,g) = \sum_{k=0}^{r} \|f^{(k)} - g^{(k)}\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow h \circ f = g \circ h\\
\Rightarrow &\exists \varepsilon > 0\ \forall g \in \mathrm{Diff}^{r+1}([a,b])\ \exists h \in \mathrm{Hom}([a,b]):\\
&d_{r+1}(f,g) = \sum_{k=0}^{r+1} \|f^{(k)} - g^{(k)}\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow h \circ f = g \circ h\\
\Rightarrow &f\ C^{r+1}\text{-strukturell stabil}
\end{aligned}$$

□

Proposition 14. *Ist f ein C^1-Diffeomorphismus, so gibt es eine C^1-Umgebung U, sodass alle $g \in U$ ebenfalls C^1-Diffeomorphismen sind.*

Theorem 15. *Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus ohne Fixpunkte in (a,b). Für alle $r \geq 1$ ist f C^r-strukturell stabil genau dann wenn $f'(a) \neq 1$ und $f'(b) \neq 1$.*

Beweis. $\Leftarrow$ Es seien $f'(a) \neq 1$ und $f'(b) \neq 1$. Wegen Proposition 13 genügt es, die Aussage für $r = 1$ zu zeigen. Definiere V_1 als eine Umgebung von a und V_2 als Umgebung von b, wobei $b \notin V_1$ und $a \notin V_2$

Wir konstruieren eine C^1-Umgebung W_1 von f in $\mathrm{Diff}^1([a,b])$, sodass jedes

$g \in W_1$ orientierungserhaltend ist und in V_1 nur den Fixpunkt a hat. Auf dieselbe Art und Weise kann man eine Umgebung W_2 konstruieren, die in V_2 nur den Fixpunkt b hat. Der Schnitt dieser beiden Umgebungen nennen wir dann U_1.
Zur Vereinfachung nehmen wir $f'(a) < 1$ und $f(x) < x \ \forall x \in (a, b)$ an (für andere Fälle verläuft der Beweis ähnlich). Da die Ableitung in a kleiner 1 ist, folgt $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-a}{x-a} < 1$. Also hat $\frac{x-f(x)}{x-a} = \frac{x-a+a-f(x)}{x-a} = 1 - \frac{f(x)-a}{x-a}$ ein positives Infimum in $(a, a+\epsilon_1]$, wobei $sup(V_1) < a + \epsilon_1 < b$ gelten soll. Es sei nun ϵ_2 kleiner diesem Infimum und W_1 der ϵ_2-Ball um f. Also gilt für alle $g \in W_1$: $\|f^{(1)} - g^{(1)}\| \leq d_r(f, g) < \epsilon_2$.
Daraus folgt $\forall x \in (0, \epsilon_1) : g(x) < f(x) + (x-a)\ \epsilon_2 < f(x) + (x-a)\ \frac{x-f(x)}{x-a} = x$. Also hat g keinen Fixpunkt in V_1.

Da f keine Fixpunkte in der kompakten Menge $B := [a, b] \setminus V_1 \cap V_2$ hat, besitzt $|f(x) - x|$ auf B ein positives Minimum. Sei ϵ_3 kleiner als dieses Minimum. Dann ist $B(f, \epsilon_3)$ eine C^1-Umgebung U_2 von f, sodass jedes $g \in U_2$ keine Fixpunkte in B hat, denn $|x - g(x)| \geq |x - (f(x) - \epsilon_3)| = |x - f(x)| - \epsilon_3 > 0 \ \forall x \in B$. Sei $U = U_1 \cap U_2$. Dann sind alle $g \in U$ orientierungserhaltend und haben keinen Fixpunkt in (a, b). Nach Theorem 10 sind f und g topologisch konjugiert.

$\Rightarrow$ *Widerspruchsbeweis*: Sei $f'(a) = 1$ oder $f'(b) = 1$. Der Einfachheit halber wird $f'(a) = 1$, sowie $a = 0$ und $b = 1$ und $f(x) \geq x \ \forall x \in [0, 1]$ angenommen.

Wir definieren eine C$^\infty$-Funktion $\alpha : [0, 1] \to [0, 1]$ wie folgt:

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1/3] \\ \exp(\frac{1}{x-(2/3)} \exp(\frac{1}{(1/3)-x})) & x \in (1/3, 2/3) \\ 0 & x \in [2/3, 1] \end{cases}$$

Wir definieren für alle $\varepsilon > 0$ die Funktion $g(x) = g_\varepsilon(x) = f(x) - \varepsilon\alpha(x)x$. Für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ ist g ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus. Für $\varepsilon \to 0$ geht g gegen f. Offensichtlich sind $x = 0$ und $x = 1$ Fixpunkte von g und es gilt $g'(0) \overset{\alpha(x)=1}{=} f'(0) - \varepsilon = 1 - \varepsilon$. Also $\exists x > 0$ mit $g(x) < x$. Da $g(x) > x \ \forall x > 2/3$ hat g also mindestens einen dritten Fixpunkt. Also kann g nicht topologisch konjugiert zu f sein (siehe Korollar 6). Also ist f nicht strukturell stabil. □

Korollar 16. *Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus ohne Fixpunkte in (a, b). Für beliebige $i, j \in \mathbb{N}$ gilt: Ist f C^i strukturell stabil, so ist f auch C^j strukturell stabil.*

Beweis. Folgt aus Theorem 15, da r beliebig gewählt war. $\square$