Conleys Fundamentalsatz der dynamischen Systeme

Nicolas Hasse

31.10.2018

In diesem Seminarvortrag wird erörtert, inwiefern wir für zeitdiskrete dynamische Systeme mit den bekannten Voraussetzungen Lyapunov-Funktionen konstruieren können. Dabei wird chain recurrence verwendet. Zunächst wiederholen wir das Thema der chain recurrence.
Erinnerung: Auch in diesem Kapitel ist X ein kompakter, metrischer Raum und $f : X \to X$ ein Homöomorphismus.

Definition 1. *Eine ϵ-Kette von x nach y ist eine endliche Folge $x = x_0, \dots, x_n = y$, sodass $d(f(x_n), x_{n+1}) < \epsilon \ \forall \ n \in \{0, \dots, k-1\}$.*

Definition 2. *Ein Punkt $x \in X$ heißt chain recurrent, wenn es für alle $\epsilon > 0$ eine ϵ-Kette von x nach x gibt. $CR(f)$ ist die Menge aller rekurrenten Punkte bezüglich f.*

Definition 3. *$x \sim y :\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists \ \epsilon$-Ketten von x nach y und von y nach x, wobei $x, y \in CR(f)$.*

Satz 4. *$\sim$ definiert eine Äquivalenzrelation.*

Beweis.
Reflexivität folgt, da $x \in CR(f)$.
Symmetrie folgt aus der Definition.
Transitivität: $x \sim y \wedge y \sim z$.
Sei $\epsilon > 0$ beliebig.
$\Rightarrow \exists$ ϵ-Ketten von x nach y, y nach z.
$\Rightarrow \exists$ endliche Folgen $x = x_0, x_1, \dots, x_k = y; y = \tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_j = z :$
$\quad \forall n \in \{0, \dots, k-1\} : d(f(x_n), x_{n+1}) < \epsilon \wedge$
$\quad \forall m \in \{0, \dots, j-1\} : d(f(x_m), x_{m+1}) < \epsilon$
$\Rightarrow \exists$ eine Folge $x = x_0, \dots, y, \dots, z$, sodass
$\quad \forall i \in \{0, \dots, k+j-1\} : d(f(x_i), x_{i+1}) < \epsilon$
$\Rightarrow \exists \epsilon$-Kette von x nach z.
Analog lässt sich eine ϵ-Kette von z nach x konstruieren. $\square$

Definition 5. *Eine offene Menge $U \subset X$ heißt trapping region bezüglich f, wenn $f[\bar{U}] \subset U$.*

Definition 6. *Eine kompakte, invariante Menge $A \subset X$ heißt Attraktor von f, wenn es eine trapping region U gibt, sodass*

$$A = \bigcap_{n \geq 0} f^n[\bar{U}]$$

U ist die isolierende Umgebung von A.

Satz 7. *Wenn f eine trapping region von U ist, dann ist $V := X \setminus \bar{U}$ eine trapping region von f^{-1}.*

Beweis.
Wir wollen zeigen, dass $f^{-1}[\bar{V}] \subset V = X \setminus \bar{U}$.
Nun ist U offen, also $X \setminus U$ abgeschlossen. Genauso ist $V = X \setminus \bar{U}$ offen.
$V = X \setminus \bar{U} \subset X \setminus U$ ist also offene Teilmenge der abgeschlossenen Menge $X \setminus U$.
$\Rightarrow \bar{V} \subset X \setminus U$.
Es reicht also, $f^{-1}[X \setminus U] \subset X \setminus \bar{U}$ zu zeigen.
Da U trapping region ist, gilt $f[\bar{U}] \subset U$.
$\Rightarrow \bar{U} \subset f^{-1}[U]$.
$\Leftrightarrow X \setminus f^{-1}[U] \subset X \setminus \bar{U}$.
Da f ein Homöomorphismus ist, gilt $f^{-1}[X] = X$.
$\Rightarrow f^{-1}[X \setminus U] = X \setminus f^{-1}[U] \subset X \setminus \bar{U}$.

□

Definition 8. *Wir definieren nun $A^* = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}[\overline{V}]$, wobei $V = X \setminus \bar{U}$.*
A^* heißt dual repelling set zu A.

Bemerkung 9. *A^* ist ein Attraktor von f^{-1}.*

Bemerkung 10. *Wir definieren den Attraktor einzig über die trapping region. Nun gibt es für jeden Attraktor sehr viele isolierende Umgebungen, sodass diese Definition nicht eindeutig ist. Daher betrachten wir zwei Paare $(U_1, A_1), (U_2, A_2)$ als äquivalent, wenn sie denselben Attraktor besitzen. Es kommt daher oft auf die Wahl der trapping region an.*

Lemma 11. *Die Menge der Attraktoren von X ist abzählbar*

Beweis.
Da X ein metrischer Raum ist, können wir über die Metrik eine Topologie auf X definieren und den toplogischen Raum $(X, \mathcal{P}(X))$ betrachten. Nun

ist X kompakt, und daher erfüllt unser topologischer Raum das 2. Abzählbarkeitsaxiom. Sei also $\mathfrak{B} = (\{B_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis von X. Per Definition einer Basis können wir eine Menge $V \subset \mathfrak{B}$ wählen, sodass $\bigcup\limits_{V_i \in V} V_i = U$, wobei A ein beliebiger Attraktor und U eine trapping region dazu ist.
Da U trapping region ist, gilt $f[\overline{U}] \subset U$. Weil auch f ein Homöomorphismus ist folgt $f[\overline{U}] = \overline{f[U]}$. Diese ist als abgeschlossene Menge in der kompakten Menge X wieder kompakt. Es gibt also eine endliche Teilmenge $N \subset V$ sodass $f[\bar{U}] \subset \bigcup\limits_{V_n \in N} V_n \subset U$ gilt.
Sei also $W = \bigcup\limits_{V_n \in N} V_n$.
Dann folgt $f[\overline{W}] \subset f[\overline{U}] \subset W$ und damit ist W eine trapping region zwischen A und U. Wir betrachten

$$\bigcap_{n\geq 0} f^n[\overline{W}]$$

und zeigen, dass dies A gleicht. Nun können wir $\overline{U}$ nicht durch ein $f^n[\overline{W}]$ überdecken, da aber $A \subset f[\overline{U}]$ gilt, ist dies auch nicht nötig.
Damit gilt $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}_0$ sodass $f^n[\overline{U}] \subset f^m[\overline{W}]$ also $A \subset \bigcap\limits_{n\geq 0} f^n[\overline{W}]$
Analog gilt natürlich $\forall n \in \mathbb{N}_0\ \exists m \in \mathbb{N}_0$, sodass $f^n[\overline{W}] \subset f^m[\overline{U}]$ und damit auch $\bigcap\limits_{n\geq 0} f^n[\overline{W}] \subset A$. Das bedeutet $\bigcap\limits_{n\geq 0} f^n[\overline{W}] = A$. Damit gibt es für jeden Attratkor A eine endliche Teilmenge der Basis. Jede endliche Teilmenge kann nur einer Basis zugeordnet werden, da wenn 2 Attraktoren dieselbe Teilmenge zugeordnet bekommen, auch die Attraktoren gleich sind. Es folgt, dass es maximal so viele Attraktoren wie endliche Teilmengen von $\mathfrak{B}$, also höchstens abzählbar viele, gibt. $\square$

Sei also $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ die Menge der Attraktoren und $\{A_i^*\}_{i\in\mathbb{N}}$ die Menge der dazugehörigen dual repelling sets.

Definition 12. *Den Abstand von einem Punkt x zu einer Menge M definieren wir als*

$$d(x, M) := \inf_{y\in M} d(x, y)$$

und analog den Abstand von 2 Mengen M, X als

$$d(X, M) := \inf_{x\in X, y\in M} d(x, y)$$

Proposition 13. *Für jede trapping region U von f gibt es ein $\epsilon_0 > 0$, sodass es keine ϵ_0-Kette von $f^2[U]$ nach $X \setminus f[U]$ gibt.*

Beweis.
Sei $\epsilon_0 = \frac{1}{2}d(X \setminus f[U], f^2[\bar{U}])$.
Nun ist $f[U]$ offen, also sind die Mengen $X \setminus f[U]$ und $f^2[\bar{U}]$ abgeschlossen und daher kompakt als Teilmengen des kompakten Raumes X. Zudem gilt offensichtlich $f^2[\bar{U}] \subset f[U]$.
Also sind die Mengen schnittfremd, und damit ist für jedes Paar von Punkten (x, y) aus den Mengen $f^2[U]$, $X \setminus f[U]$ der Abstand positiv. Weil der Abstand als Metrik in beiden Argumenten stetig ist, nimmt er auf den kompakten Mengen ein Minimum an, welches dadurch positiv ist.
Sei nun $x \in f^2[U]$ und $y \in X \setminus f[U]$ und unsere ϵ_0-Kette soll $x_0 = x$ als Startpunkt und ihr Ende $x_n = y$ haben.
Es gilt: $d(f(x_0), x_1) < \epsilon_0 = \frac{1}{2}d(X \setminus f[U], f^2[\bar{U}])$
$\Rightarrow x_1 \notin X \setminus f[U]$
$\Rightarrow x_1 \in f[U]$, $f(x_1) \in f^2[U]$ Also muss jedes weitere Element in $f^2[U]$ sein und der Beweis folgt induktiv. □

Definition 14. $\Omega(x, \epsilon) = \{y \in X | \exists \epsilon$*-Kette von x nach y*$\}$

Korollar 15. $\Omega(x, \epsilon)$ *ist für alle Paare* $(x, \epsilon) \in X \times \mathbb{R}_+$ *eine trapping region von f.*

Beweis.
Wir müssen folgendes zeigen

$$f[\overline{\Omega(x, \epsilon)}] \subset \Omega(x, \epsilon)$$

Sei $y \in \Omega(x, \epsilon)$
$\Rightarrow \exists\epsilon$-Kette von x nach y.
$d(f(y), f(y)) = 0 < \epsilon$
$\Rightarrow$ von x nach $f(y)$.
$\Rightarrow f(y) \in \Omega(x, \epsilon)$, $f[\Omega(x, \epsilon)] \subset \Omega(x, \epsilon)$
Sei nun $z \in \partial\Omega(x, \epsilon)$. Also existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\Omega(x, \epsilon)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = z$
f ist stetig, daher ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$
Also gilt: $\exists$ N $\in \mathbb{N}$: $d(f(x_n), f(z)) < \epsilon \; \forall n \geq N$
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist in $\Omega(x, \epsilon)$
$\Rightarrow \exists\epsilon$-Kette von x nach x_N
$\Rightarrow \exists\epsilon$-Kette von x nach $f(z)$
Daher ist $f[\partial\Omega(x, \epsilon)] \subset \Omega(x, \epsilon) \Rightarrow f[\overline{\Omega(x, \epsilon)}] \subset \Omega(x, \epsilon)$ □

Lemma 16.

$$CR(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup A_n^*)$$

Beweis.
Sei $x \notin A_n \cup A_n^*$ für ein n.
Wir betrachten eine dazugehörige trapping region U und die trapping region $V = X \ \setminus \overline{U}$ von f^{-1}.
Also gilt

$$x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} f^n[\overline{U}] \cup \bigcap_{m \in \mathbb{N}_0} f^{-m}[\overline{V}]$$

$\Leftrightarrow \exists n, m \in \mathbb{N} : x \notin f^n[\overline{U}], x \notin f^{-m}[\overline{V}]$
$\Rightarrow x \in f^n[X \setminus \overline{U}] = X \setminus f^n[\overline{U}]$, $x \in f^{-m}[\overline{U}]$
Es gibt also ein $k \in \mathbb{Z} : f^k(x) \in U \setminus f[U]$.
Wir definieren damit W $= f^{-k}[U]$ und damit ist $x \in W \setminus f[W]$.
Nun wollen wir eine ϵ-Kette von $x_0 = x$ konstruieren. Wir zeigen, dass es ein $\epsilon_1 > 0$ gibt, sodass jede ϵ_1-Kette mit 3 Elementen und $x_0 \in W \setminus f[W]$, $x_2 \in f^2[W]$ haben muss.
Nun ist U offen, und damit auch $f^k[U] = W$ und $f[W]$. Also gibt es ein $\epsilon_{11} > 0$, sodass $B(f(x_0), \epsilon_{11}) \subset f[W]$.
Mit $d(f(x_0), x_1) < \epsilon_{11}$ folgt $x_1 \in f[W]$.
Nach demselben Argument gilt:
$\exists\ \epsilon_{12} > 0$ mit $B(f(x_1), \epsilon_{12}) \subset f^2[W]$
Mit $d(f(x_1), x_2) < \epsilon_{12}$ folgt $x_2 \in f^2[W]$. Sei nun $\epsilon_1 = min\{\epsilon_{11}, \epsilon_{12}\}$.
Dann gilt die Aussage. Sei ϵ_0 gewählt wie in der vorangegangenen Proposition.
$\epsilon = min\{\epsilon_1, \epsilon_0\}$. Dann gibt es offensichtlich keine ϵ-Kette von x nach x.
Also ist x nicht rekurrent.

Umgekehrt sei nun $x \notin CR(f)$.
Dann existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $x \notin \Omega(x, \epsilon)$.
Nach dem vorangegangenen Korollar ist dies eine trapping region.
Also ist x nicht in dem betreffenden Attraktor.
Nun ist offensichtlich $f^n(x) \in \Omega(x, \epsilon)\ \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow f(x) \notin X \setminus \overline{\Omega(x, \epsilon)}$
$\Rightarrow x \notin A^* = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}[\overline{X \setminus \overline{\Omega(x, \epsilon)}}]$
Also ist $x \notin A \cup A^*$
Damit folgt die Behauptung. □

Korollar 17. *Seien $x, y \in CR(f)$. Dann ist $x \sim y$ genau dann, wenn $\forall i \in \mathbb{N}$ x und y beide in A_i oder beide in A_i^* sind.*

Beweis.
Angenommen es würde ein $i \in \mathbb{N}$ geben, sodass $x \in A_i$ und $y \in A_i^*$.
Sei nun U eine trapping region zu A. Per Definition gilt $x \in U$, es gibt aufgrund der Offenheit von U ein $\epsilon_1 > 0$ sodass jede ϵ_0-Kette mit $x = x_0, x_1, x_2$ sowohl $x_1 \in f[U]$, als auch $x_2 \in f^2[U]$ hat wie im Beweis von Lemma 16.

$$y \in \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}[\overline{V}], V = X \setminus \overline{U}$$

Mit $A^* \subset \overline{V} = \overline{X \setminus \overline{U}} \subset X \setminus U$ können wir uns wieder die trapping region Eigenschaft von U zunutze machen: $f[U] \subset f[\overline{U}] \subset U$, was uns $X \setminus U \subset X \setminus f[U]$ liefert. Das beweist $y \in X \setminus f[U]$. Mit Proposition 12 gibt es ein $\epsilon_1 > 0$, sodass es keine ϵ_1-Kette von $f^2[U]$ nach $X \setminus f[U]$ gibt. Für $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_0\}$ gibt es damit keine ϵ-Kette von x nach y. Also sind x und y nicht äquivalent.
Seien nun x und y nicht äquivalent. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass $y \notin \Omega(x, \epsilon)$. Nun ist offensichtlich x als rekurrenter Punkt in $\Omega(x, \epsilon)$. Seien A und A^* das dazugehörige Attraktor repelling set Paar. Dann ist $x \in A$ und $y \notin A$, also mit dem vorangehenden Lemma $y \in A^*$. □

Lemma 18. *Sei (A, A^*) ein Attraktor repelling Paar von f. Dann existiert eine stetige Abbildung $\Phi : X \to [0, 1]$ sodass folgendes gilt:*
(i) $\Phi|A^* = 1, \Phi|A = 0$ und $\Phi(x) \in (0, 1)$ $\forall x \notin A \cup A^*$
(ii) $\Phi(f(x)) < \Phi(x)$ $\forall x \notin A \cup A^*$

Beweis.
Sei U die trapping region zu A. Wir definieren die Abbildung:

$$\alpha : X \to [0, 1] \; mit \; x \mapsto \frac{d(x, f[\bar{U}])}{d(x, X \setminus U) + d(x, f[\bar{U}])}$$

Da $f[\bar{U}]$ und $X \setminus U$ abgeschlossen und schnittfremd sind, ist die Abbildung stetig.
Zudem gilt $\alpha[X \setminus U] = 1$, $\alpha[f[\bar{U}] = 0$ und $\alpha(x) \in (0, 1)$ $\forall x \in U \setminus f[U]$.
Sei $(\alpha_n(x))_{n \in \mathbb{Z}} = (\alpha(f^n(x)))_{n \in \mathbb{Z}}$
Für alle x $\in$ A ist $\alpha_n(x) = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, da $f^n(x) \in A$ und damit in $f[\bar{U}]$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und für alle x $\in A^*$ ist die Folge konstant 1, da $f^n(x) \in A^*$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ und damit in $X \setminus U$
Sei x $\notin A \cup A^*$.

$\Rightarrow \exists n, m \in \mathbb{N}$ sodass $x \notin f^n[\bar{U}]$, $x \notin f^{-m}[\bar{V}]$
Also gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$, sodass $f^n(x) \in U \setminus f[U]$ Also ist $\alpha_m(x) \in (0,1)$ oder 0, wenn $\alpha_m(x)$ den Rand von $U \setminus f[U]$ trifft.
Es folgt, dass $f^{m+1}(x) \in f[U \setminus f[U]] = f[U] \setminus f^2[U]$.
$\Rightarrow \alpha_{m+1}(x) = 0$. Da f trapping region ist, ist auch $f^{m+k}(x) \in f[U] \forall k \in \mathbb{N}$
Also ist die Folge hier konstant 0.
Nun ist $f^{m-1}(x) \in f^{-1}[U \setminus f[U] = f^{-1}[U] \setminus U$
Das bedeutet, dass $\alpha_{m-1}(x) = 1$.
Da auch V $= X \setminus \bar{U}$ eine trapping region ist, folgt analog, dass $\alpha_{m-k}(x) = 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Also ist die Folge monoton fallend, und damit für alle x $\in X$ monoton fallend. Da sie außerdem in $[0,1]$ liegt, also beschränkt ist, konvergiert sie global.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine beliebige Folge sodass $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}$ und $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = 1$
Wir definieren die Folge

$$\Phi_k(x) = \sum_{n=-k}^{k} a_n \alpha_n(x)$$

und behaupten, dass diese Folge gleichmäßig für alle x konvergiert.
Wir definieren nun 2 Teilreihen, eine nicht negative Reihe $(s_{n+})_{n\in\mathbb{N}} = (\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine negative Reihe $(s_{n-})_{n\in\mathbb{N}} = (\sum_{k=-1}^{-n} a_k)$ Unsere Reihe $\sum_{n=-k}^{k} a_n$ konvergiert, also gilt das Cauchykriterium für beide Teilfolgen:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : |\sum_{k=m}^{n} a_k| < \frac{\epsilon}{2}\ \forall\ n, m \geq N$$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : |\sum_{k=-m}^{-n} a_k| < \frac{\epsilon}{2}\ \forall\ n, m \geq N$$

Wir haben gezeigt, dass für alle Folgenglieder $\alpha_n(x) \leq 1$ ist
Dann folgt:

$$\forall x \in X :\ |\Phi_n(x) - \Phi_{m-1}(x)| = |\sum_{k=m}^{n} a_k\alpha_k(x) + \sum_{k=-m}^{-n} a_k\alpha_k(x)| \leq |\sum_{k=m}^{n} a_k| + |\sum_{k=-m}^{-n} a_k| < \epsilon \quad \forall\ n, m \geq N$$

Damit erfüllt unsere Reihe das Cauchykriterium unabhängig von x.
Wir können daher die folgende Funktion definieren:

$$\Phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \alpha_k(x)$$

Da die Reihe über die a_n konvergiert, gilt das Folgende:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : |\sum_{k=-n}^{n} a_k - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k| < \epsilon \ \forall n \geq N$$

Also gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |\Phi_n(x) - \Phi(x)| = |\sum_{k=-n}^{n} a_k \alpha_k(x) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \alpha_k(x)| = |\sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} a_k \alpha_k(x)$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \alpha_k(x)| \leq |\sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k| = |\sum_{k=-n}^{n} a_k - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k| < \epsilon \ \forall n \geq N, \forall x \in X$$

Damit ist $(\Phi_n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ eine gleichmäßig konvergente Folge, und damit $\Phi(x)$ eine stetige Abbildung.
Wir haben gezeigt, dass $\alpha_n(x)$ konstant 1 ist, wenn $x \in A^*$, also ist $\Phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = 1$.
$\alpha_n(x)$ ist konstant 0, wenn $x \in A$ gilt, also $\Phi(x) = 0$.
Sei $x \notin A \cup A^*$. Dann gibt es ein $f^k(x) \in U \setminus f[U]$ und die Folge $\alpha_k(x)$ ist an einer Stelle streng monoton fallend
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$: $\alpha_n(x) > \alpha_{n+1}(x)$
Die Folge ist monoton fallend und an einer Stelle streng monoton, daher gilt:
$0 < \Phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \alpha_k(x) < \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = 1$
Es gilt also $\Phi(x) \in (0, 1)$
Wir haben gezeigt, dass es ein $n \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $\alpha_{n+1}(x) = \alpha_n(f(x)) < \alpha_n(x)$, ansonsten ist $\alpha_n(f(x)) \leq \alpha_n(x) \forall n \in \mathbb{Z}$, da die Folgen monoton fallend ist.
Also gilt $\Phi(f(x)) < \Phi(x)$

□

Definition 19. *Sei* $C = \{x \in [0, 1] | x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}, x_i \in \{0, 2\}\}$ *das Cantor'sche Diskontinuum. Dann ist* C *kompakt, nirgends dicht.*

Satz 20. *(Conleys Fundamentalsatz dynamischer Systeme)*
Sei X *ein kompakter metrischer Raum,* f *ein Homoömorphismus.*
Dann existiert eine stetige Abbildung $\Phi : X \to \mathbb{R}$ *sodass*
(i) wenn $x \notin CR(f)$*, gilt* $\Phi(f(x)) < \Phi(x)$
(ii) für alle x*,* $y \in CR(f)$ *gilt* $\Phi(x) = \Phi(y)$ *genau dann, wenn* x *und* y *äquivalent sind. Außerdem gilt* $\Phi(x) = \Phi(f(x))$ *wenn* $x \in CR(f)$
(iii) $\Phi[CR(f)]$ *ist kompakte, nirgends dichte Teilmenge von* $\mathbb{R}$

Beweis.
Nach dem vorherigen Lemma gibt es $\forall i \in \mathbb{N}$ eine Abbildung $\Phi_i : X \to \mathbb{R}$ mit

$\Phi_i^{-1}[\{1\}] = A_i^*$, $\Phi_i^{-1}[\{0\}] = A_i$ und Φ_i streng monoton fallend entlang der Orbiten von $x \notin A_i \cup A_i^*$.
Nun ist die Reihe $2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3^i}$ absolut konvergent mit Grenzwert 1 als geometrische Reihe. Sie ist also eine Cauchyfolge.
Nun sei

$$\Psi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2\Phi_i(x)}{3^i}$$

Da unsere vorherige Reihe konvergiert, ist sie eine Cauchyfolge.
Also gilt:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : |\Psi_n(x) - \Psi_m(x)| = |\sum_{i=1}^{n} \frac{2\Phi_i(x)}{3^i} - \sum_{i=1}^{m} \frac{2\Phi_i(x)}{3^i}|$$
$$\leq |2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3^i} - 2\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{3^i}| = |2\sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{3^i}| < \epsilon\ \forall n \geq m \geq N, \forall x \in X$$

Damit ist $\Psi_n(x)$ für alle x eine Cauchyfolge.
Sei also

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\Phi_i(x)}{3^i}$$

Ähnlich wie im vorherigen Lemma folgt:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : |\Psi_n(x) - \Phi(x)| \leq |2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3^i} - 1| < \epsilon\ \forall n \geq N, \forall x \in X$$

Also ist die Folge gleichmäßig konvergent und $\Phi(x)$ stetig.
Sei $x \notin CR(f)$. Dann gibt es also ein $i \in \mathbb{N}$, sodass $x \notin A_i \cup A_i^*$ Nach dem vorherigen Lemma folgt also $\Phi_i(f(x)) < \Phi_i(x)$. Damit gilt auch $\Phi(f(x)) < \Phi(x)$.
Damit ist der erste Teil gezeigt
Sei $x \in CR(f)$. Da wir wissen, dass $CR(f) = \bigcap\limits_{n \in N} (A_n \cup A_n^*)$, ist $x \in A_i \cup A_i^*\ \forall i \in \mathbb{N}$. Also ist $\Phi_i(x) \in \{0, 1\} \forall i \in \mathbb{N}$. Damit ist $2\Phi_i(x) \in \{0, 2\}\ \forall i \in \mathbb{N}$ Also ist $\Phi(x) \in C$ und damit ist $\Phi[CR(f)] \subset C$ und als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten, nirgends dichten Menge kompakt und nirgends dicht.
Seien nun x, $y \in CR(f)$. Wir wissen, dass x und y genau dann äquivalent sind, wenn $x, y \in A_i$ oder $A_i^*\ \forall i \in \mathbb{N}$. Daher gilt $\Phi_i(x) = \Phi_i(y) \forall i \in \mathbb{N}$ und

damit $\Phi(x) = \Phi(y)$. Seien nun $x, y \in CR(f)$ mit $\Phi(x) = \Phi(y)$
Aus der Eindeutigkeit der Ternärdarstellung folgt dann $\Phi_i(x) = \Phi_i(y)\ \forall i \in \mathbb{N}$. Da $x, y \in CR(f)$ heißt das $x, y \in A_i$ oder $x, y \in A_i^*$ für alle i. Nach Korollar 16 gilt also $x \sim y$.
Zudem ist auch $f(x) \in CR(f)$, da die Menge invariant ist und weil alle Attraktoren und deren Repelling set invariant sind, gilt $x \in A_i \Rightarrow f(x) \in A_i$ sowie $x \in A_i^* \Rightarrow f(x) \in A_i^*$. Damit folgt aus der Eindeutigkeit der Ternärdarstellung $\Phi(x) = \Phi(f(x))$

□