Kapitel 1

Einführung

Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung in den partiellen Ableitungen einer oder mehrerer gesuchter Funktionen, die von mindestens zwei Variablen abhängen:

Definition 1.1. *Eine gegebenenfalls vektorwertige Gleichung der Form*

$$F\left(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \ldots, Du(x), u(x), x\right) = 0$$

heißt partielle Differentialgleichung der Ordnung k. Hierbei ist F eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion. Die Ausdrücke $D^k u$ bezeichnen die Vektoren aller k-ten partiellen Ableitungen der Funktion u. Eine Funktion u heißt Lösung der Differentialgleichung, wenn sie k mal differenzierbar ist und der obigen Gleichung genügt.

1.1 Beispiele

A. Lineare Differentialgleichungen

1. Laplacegleichung. $$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Lösungen der Laplacegleichung heißen harmonische Funktionen. Die Laplacegleichung ist eine homogene lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die entsprechende inhomogene Gleichung heißt Poissongleichung:

$$-\triangle u = f.$$

Hierbei ist die Funktion f gegeben und die Funktion u gesucht.

2. Helmholtzgleichung. $$-\triangle u - \lambda u = 0.$$

Hierbei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ eine gegebene Zahl und u die gesuchte Funktion. Sie ist eine besonders einfache Form der Poissongleichung.

3. Lineare Transportgleichung. $\dot{u} + b \cdot \nabla u = 0.$

Hierbei ist b eine gegebenes $\mathbb{R}^n$-wertiges Vektorfeld auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und u die gesuchte Funktion auf diesem Gebiet.

4. Liouvillegleichung. $\dot{u} + \nabla(b \cdot u) = 0.$

Hier ist wie bei der Transportgleichung b ein gegebenes $\mathbb{R}^n$-wertiges Vektorfeld auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und u die gesuchte Funktion auf diesem Gebiet. Diese beiden linearen Differentialgleichungen erster Ordnung sind ähnlich.

5. Wärmeleitungsgleichung. $\dot{u} - \triangle u = 0.$

6. Schrödingergleichung. $\imath\dot{u} + \triangle u = 0.$

Hierbei ist u eine gesuchte komplexe Funktion. Der Faktor $\imath$, durch den sich die Schrödingergleichung von der Wärmeleitungsgleichung unterscheidet, führt zu deutlichen Unterschieden dieser beiden Gleichungen.

7. Kolmogorovgleichung. $$\dot{u} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

Sie ist eine Verallgemeinerung der Wärmeleitungsgleichung.

8. Fokker-Planckgleichung. $$\dot{u} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 a_{ij}(t,x)u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i(t,x)u}{\partial x_i} = 0.$$

Die Fokker-Planckgleichung verhält sich zu die Kolmogorovgleichung wie die Liouvillegleichung zu der Transportgleichung.

9. Wellengleichung. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = 0.$$

10. Allgemeine Wellengleichung. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$

Sie verallgemeinert die Wellengleichung genauso wie die Kolmogorovgleichung die Wärmeleitungsgleichung verallgemeinert.

11. Airysche Differentialgleichung. $\dot{u} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$. Hier ist u eine gesuchte Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

12. Balkengleichung. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$

B. Nichtlineare Differentialgleichungen

1. Eikonalgleichung. $|\nabla u| = 1.$

2. Nichtlineare Poissongleichung. $-\triangle u = f(u).$

Hier ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

3. Minimalflächengleichung. $\nabla \cdot \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 0.$

Die Graphen von Lösungen der Minimalflächengleichung sind sogenannte Minimalflächen. Der Flächeninhalt solcher Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$ ändert sich unter infinitesimalen Deformationen nicht. Seifenhäute sind Beispiele solcher Minimalflächen.

4. Monge-Amperegleichung. $\det\left(\nabla \nabla^t u\right) = f$. Hier ist f eine gegebene Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und u die gesuchte Funktion. Dabei steht auf der linken Seite der Gleichung die Determinante der Matrix der zweiten Ableitungen von u.

5. Hamilton-Jacobigleichung. $\dot{u} + H(\nabla u, x) = 0.$

Hierbei ist H eine gegebene Hamiltonfunktion auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, und

u die gesuchte Funktion auf einem entsprechenden Gebiet in $\mathbb{R}^n$.

6. Skalare Erhaltungsgleichung. $\dot{u} + \nabla \cdot F(u) = 0.$

Hierbei ist F eine gegebene $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion und u die gesuchte Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Diese Differentialgleichung hat zur Folge, dass sich das Integral von u über ein gegebenes Teilgebiet von $\mathbb{R}^n$ so mit der Zeit ändert, wie das Integral von $F(u)$ über den Rand des Gebietes. Deshalb lässt sich $F(u)$ als eine Flussdichte der Erhaltungsgröße u interpretieren.

7. Burgers Gleichung. $\dot{u} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

Hier ist u eine gesuchte Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sie ist ein Beispiel für eine skalare Erhaltungsgleichung mit $F(u) = u^2/2$.

8. Reaktions-Diffusionsgleichung. $\dot{u} - \triangle u = f(u).$

Hier ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion.

9. Poröse Mediengleichung. $\dot{u} - \triangle (u^\gamma) = 0.$

Hier ist $\gamma \geq 1$ ein gegebener Exponent. Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung eines idealen Gases in einem porösen Medium wie Sand.

10. Nichtlineare Wellengleichung. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = f(u).$

Hier ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion.

11. Korteweg-de-Vries-Gleichung. $4\dot{u} - 6u\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$

Diese Gleichung besitzt eine sogenannte Laxdarstellung, d.h. sie lässt sich schreiben als

$$\dot{L} = [A, L]$$

mit zwei gewöhnlichen Differentialoperatoren

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u \qquad A = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3u}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Daraus entwickelte sich ein neues Verständnis von integrablen Systemen.

C. Lineare Differentialgleichungssysteme

1. Lineare Elastizität. $\mu\triangle u + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) = 0.$

Hier sind $\lambda > 0$ und $\mu > 0$ gegebene positive Konstanten und u die gesuchte $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion.

2. Elastische Wellen. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu\triangle u - (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) = 0.$

3. Maxwellgleichungen.
$$\begin{array}{cc} \dot{E} - \nabla \times B = -4\pi j & \dot{B} + \nabla \times E = 0 \\ \nabla \cdot E = 4\pi\rho & \nabla \cdot B = 0. \end{array}$$

Hier sind die Ladungsverteilung ρ und die Stromverteilung j gegebene reelle bzw. $\mathbb{R}^3$-wertigen Funktionen auf der Raumzeit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ und das elektrische Feld E und das Magnetfeld B die gesuchten $\mathbb{R}^3$-wertige Funktionen. Weil j ja gerade die Ladungsflussdichte ist erfüllen die gegebenen ρ und j den Erhaltungssatz

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot j = 0.$$

4. Cauchy-Riemanngleichung. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Hier sind $(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (u, v)$ Realteil und Imaginärteil einer holomorphen Funktion auf (Teilgebieten) der komplexen Ebene $x + \imath y = z \in \mathbb{C}$.

D. Nichtlineare Differentialgleichungssysteme

1. Eulergleichung. $\dot{u} + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0 \quad \nabla \cdot u = 0.$

Hier ist $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen reibungsfreien Flüssigkeit und p der Druck.

2. Navier-Stokesgleichung. $\dot{u} + u \cdot \nabla u - \triangle u + \nabla p = 0 \quad \nabla \cdot u = 0.$

Hier ist $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen viskosen Flüssigkeit und p der Druck.

3. Einsteins Feldgleichungen. $R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \kappa T_{ij}.$

Hier ist der Energieimpulstensor einer gegebenen Massenverteilung auf der Raumzeit und g_{ij} ist die entsprechende gesuchte Metrik auf der Raumzeit. Diese Metrik g_{ij} ist eine Lorentzmetrik auf der Raumzeit, d.h. eine symmetrische Bilinearform auf dem Tangentialraum der Raumzeit mit der Signatur $(1,3)$. R_{ij} ist die dazugehörige Riccikrümmung und R die skalare Krümmung.

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{3} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)\\
R_{ij} &= \sum_{k=0}^{3} g^{kl}\left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^k}{\partial x^j} + \sum_{l=0}^{3}\left(\Gamma_{lk}^k\Gamma_{ij}^l - \Gamma_{lj}^k\Gamma_{ik}^l\right)\right)\\
\left(g^{ij}\right) &= (g_{ij})^{-1} \text{ inverse Metrik}\\
R &= \sum_{i,j=0}^{3} g^{ij}R_{ij}.
\end{aligned}$$

4. Riccifluss. $\dot{g}_{ij} = -2R_{ij}.$

Diese Differentialgleichung beschreibt auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten einen diffusionsartigen Fluss der Metrik. Er gleicht Inhomogenitäten und Isotropien der Metrik aus und führt nach langen Zeiten zu Metriken mit sehr großen Isometriegruppen. Richard Hamilton hat in den 70ger Jahren ein Programm entworfen, um mit Hilfe dieses Flusses die Geometrisierungsvermutung von Thurston zu beweisen. Diese besagt, dass sich jede kompakte 3-Mannigfaltigkeit in Teile zerlegen lässt, auf denen eine Isometriegruppe transitiv wirkt. Hamilton versucht durch eine Kontrolle über das Langzeitverhalten des Ricciflusses auf kompakten 3-Mannigfaltigkeiten solche Metriken zu konstruieren. Der russische Mathematiker Grisha Perelman hat 2003 3 Arbeiten ins Netz gestellt und die letzten Hürden überwunden. Das war ein großer Erfolg für die geometrische Analysis.

1.2 Der Gaußsche Satz

Definition 1.2. *(Zerlegung der Eins) Eine glatte Zerlegung der Eins einer Familie von offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ mit der Vereinigung $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist eine abzählbare Familie $(h_l)_{l\in\mathbb{N}}$ von glatten Funktionen $h_l : \Omega \to [0,1]$, so dass*

(i) *für jedes $x \in \Omega$ auf einer Umgebung von x nur endlich viele h_l ungleich Null sind.*

(ii) *Für alle $x \in \Omega$ gilt $\sum_{l=1}^{\infty} h_l(x) = 1$.*

(iii) *Jedes h_l außerhalb einer abgeschlossenen Menge in einem Element verschwindet.*

Jede Familie von offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine glatte Zerlegung der Eins.

Definition 1.3. *Für jede $n \times (n-1)$-Matrix A gibt es genau einen Spaltenvektor $A^{\#} \in \mathbb{R}^n$, so dass $\det(A, x) = x^t \cdot A^{\#}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Er steht senkrecht auf dem Bild von A als Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$ und seine Länge ist der Flächeninhalt des Bildes von $[0,1]^{n-1}$ unter A in $\mathbb{R}^n$. Für eine $n \times n$-Matrix A gilt $(A|_{\mathbb{R}^{n-1}})^{\#} = \det(A)(A^{-1})^t e_n$.*

Definition 1.4. *Eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat differenzierbaren Rand, wenn ihr Abschluss $\bar{\Omega}$ eine Überdeckung von offenen Mengen $O \subset \mathbb{R}^n$ und stetig differenzierbare Abbildungen $\Phi : U \to O$ mit stetig differenzierbaren Umkehrabbildungen $\Phi^{-1} : O \to U$ besitzt, die jeweils $O \cap \Omega$ in die obere Halbebene $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ und $O \cap \partial\Omega$ nach $\mathbb{R}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ abbilden. Seien $\det \Phi' > 0$. Dann ist das Integral einer Funktion f auf $\partial\Omega$ mit einer entsprechenden Zerlegung der Eins $(h_l)_{l\in\mathbb{N}}$ definiert als*

$$\int\limits_{\partial\Omega} f d\sigma = \sum_{l\in\mathbb{N}} \int\limits_{U\cap\mathbb{R}^{n-1}} (h_l f) \circ \Phi \left| (\Phi'|_{\mathbb{R}^{n-1}})^{\#} \right| d\mu_{\mathbb{R}^{n-1}} \text{ wobei jeweils } h_l|_{\mathbb{R}^n \setminus O} = 0.$$

Für eine $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion f und die äußere Normale N auf $\partial\Omega$ definieren wir

$$\int\limits_{\partial\Omega} f \cdot N d\sigma = -\sum_{l\in\mathbb{N}} \int\limits_{U\cap\mathbb{R}^{n-1}} ((h_l f) \circ \Phi) \cdot (\Phi'|_{\mathbb{R}^{n-1}})^{\#} d\mu_{\mathbb{R}^{n-1}} \text{ wobei jeweils } h_l|_{\mathbb{R}^n \setminus O} = 0.$$

Um diese Integrale zu berechnen, genügt es Φ auf $U \cap \mathbb{R}^{n-1}$ zu kennen. Stetig differenzierbare Einbettungen $\Psi : U \cap \mathbb{R}^{n-1} \to O \cap \partial\Omega$, deren Ableitungen Ψ' den Rang $n-1$ haben, lassen sich so stetig differenzierbar auf kleine Umgebungen von $U \cap \mathbb{R}^{n-1}$ fortsetzten, dass sie stetig differenzierbare Umkehrabbildungen haben. Deshalb genügt es die Existenz solcher Abbildungen $\Psi = \Phi|_{U\cap\mathbb{R}^{n-1}}$ vorauszusetzen.

Lemma 1.5. *Auf den $d \times d$ Matrizen ist* det *eine differenzierbare Abbildung mit*

$$\frac{d}{dt} \det(A + tB) \bigg|_{t=0} = \mathrm{Spur}(\det(A) A^{-1} B).$$

Beweis: Für zwei $d \times d$-Matrizen A und B, von denen die erste invertierbar ist, gilt

$$\det(A + tB) = \det(A)\det(\mathbb{1} + tA^{-1}B) = t^d \det(A)\det(t^{-1}\mathbb{1} + A^{-1}B) \text{ für } t \neq 0.$$

Die Ableitung nach t bei $t = 0$ ist also $\det(A)$ mal dem zweithöchste Koeffizient des charakteristischen Polynoms von $-A^{-1}B$, also $\det(A)\,\mathrm{Spur}(A^{-1}B)$. **q.e.d.**

Satz 1.6. *(Gaußscher Satz oder Divergenzsatz) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet mit zweimal differenzierbarem Rand und f eine auf $\overline{\Omega}$ stetige $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion, die auf Ω stetig differenzierbar ist mit Lebesgue-integrablen partiellen Ableitungen. Dann gilt:*

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot f d\mu = \int_{\partial\Omega} f \cdot N d\sigma$$

Hierbei ist N die äußere Normale und $Nd\sigma$ das entsprechende Maß auf dem Rand $\partial\Omega$.

Beweis: Mit einer entsprechenden Zerlegung der Eins genügt es die Aussage für eine Funktion f zu zeigen, die außerhalb einer abgeschlossenen Menge in einer offenen Menge O aus Definition 1.4 verschwindet. Für $\tilde{f} = \det(\Phi')(\Phi')^{-1}(f \circ \Phi)$ gilt wegen Lemma 1.5

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \tilde{f} = \det(\Phi') \sum_{ijkl} (\Phi')^{-1}_{ij} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x_k \partial x_i} (\Phi)^{-1}_{kl} f_l \circ \Phi - \det(\Phi') \sum_{ijkl} (\Phi')^{-1}_{ij} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x_i \partial x_k} (\Phi')^{-1}_{kl} f_l \circ \Phi \\ + \det(\Phi') \operatorname{Spur}((\Phi')^{-1}(f' \circ \Phi)\Phi') = \det(\Phi') \operatorname{Spur}(f' \circ \Phi) = \det(\Phi')(\nabla \cdot f) \circ \Phi.\end{aligned}$$

Aus Jacobi's Transformation von Maßen folgt $\int_O \nabla \cdot f d\mu = \int_U \nabla \cdot \tilde{f} d\mu$. Also genügt es

$$\begin{aligned}\int_U \nabla \tilde{f} d\mu &= - \int_{U \cap \mathbb{R}^{n-1}} (f \circ \Phi) \cdot (\Phi'|_{\mathbb{R}^{n-1}})^{\#} d\mu_{\mathbb{R}^{n-1}} \\ &= - \int_{U \cap \mathbb{R}^{n-1}} \det(\Phi')^{-1} (\Phi' \tilde{f}) \cdot \det(\Phi')((\Phi')^{-1})^t e_n d\mu_{\mathbb{R}^{n-1}} \quad = - \int_{U \cap \mathbb{R}^{n-1}} \tilde{f}_n d\mu_{\mathbb{R}^{n-1}}\end{aligned}$$

zu zeigen. Die Funktion $\tilde{f}$ setzt sich stetig differenzierbar auf einen Quader fort, von dessen Rand eine Seite in der Hyperebene $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ liegt. Weil $\tilde{f}$ nur auf einer Seite des Randes des Quaders nicht verschwindet, reduziert sich mit dem Hauptsatz der Differentialrechnung das linke Integral zu einem Integral über die Seite des Quaders in $\mathbb{R}^{n-1}$ und stimmt mit dem Integral auf der rechten Seite überein. **q.e.d.**

1.3 Existenz von Lösungen

Wir wollen zur Erläuterung ein Beispiel einer Differentialgleichung geben, das keine Lösung besitzt. Dieses Beispiel ist eine Vereinfachung (von Nirenberg) eines Beispieles von H. Lewy: Gegeben ist eine komplexwertige Funktion f auf einem Teilgebiet von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und gesucht ist eine komplexwertige Funktion u auf demselben Teilgebiet, die folgende lineare Differentialgleichung erster Ordnung erfüllt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \imath x \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y).$$

Wir zeigen, dass es für eine glatte Funktion f, die folgende beiden Bedingungen erfüllt, in keiner Umgebung von $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ eine einmal stetig differenzierbare Lösung u gibt:

(i) $f(-x,y) = f(x,y)$

(ii) Es gibt eine Nullfolge $\rho_n \downarrow 0$, so dass f auf einer Umgebung der Kreise $\partial B(0,\rho_n)$ verschwindet, die Integrale $\int\limits_{B(0,\rho_n)} f(x,y)dxdy$ aber ungleich Null sind.

Wenn $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine glatte periodische Funktion ist, die auf einem Intervall aber nicht auf $\mathbb{R}$ verschwindet, dann ist $f(x) = \exp(-1/|x|)h(1/|x|)$ ein solches Beispiel. Wir bezeichen die euklidische Länge eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x|$.
1. Schritt: Wegen (i) ist mit $u(x,y)$ auch $-u(-x,y)$ und $w(x,y) = \frac{1}{2}(u(x,y) - u(-x,y))$ eine Lösung. Deshalb können wir $u(-x,y) = -u(x,y)$ annehmen.
2. Schritt: Jede solche Lösung u verschwindet auf den Kreisen $\partial B(0,\rho_n)$. Um das einzusehen transformieren wir kleine Ringe A folgendermaßen auf Gebiete $\tilde{A}$ im $\mathbb{R}^2$:

$$A \to \tilde{A}, \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} (x^2/2, y) & \text{für } x \geq 0 \\ (-x^2/2, y) & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Diese Abbildungen sind offenbar Homöomorphismen von A auf $\tilde{A}$. Auf dem Teilgebiet $\tilde{A}_+ = \left\{(s,y) \in \tilde{A} \mid s > 0\right\}$ ist die Funktion $\tilde{u}(s,y) = u(x^2/2, y)$ holomorph:

$$2\bar{\partial}\tilde{u} = \frac{\partial \tilde{u}(s,y)}{\partial s} + \imath \frac{\tilde{u}(s,y)}{\partial y} = \frac{dx}{ds}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \imath \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \imath x \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) = 0.$$

Wegen dem 1. Schritt verschwindet $\tilde{u}$ für $s = 0$, und wegen dem Schwarzen Spiegelungsprinzip und dem Identitätssatz auf $\tilde{A}_+$, und wegen dem 1. Schritt auf $\tilde{A}$.
3. Schritt: Wegen dem Gaußschen Satz gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{B(0,\rho_n)} f dxdy &= \int\limits_{B(0,\rho_n)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \imath x \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_{B(0,\rho_n)} \nabla \cdot \begin{pmatrix} u \\ \imath x u \end{pmatrix} dxdy \\ &= \int\limits_{\partial B(0,\rho_n)} \begin{pmatrix} u \\ \imath x u \end{pmatrix} \cdot N(x,y) d\sigma(x,y) = 0, \end{aligned}$$

im Widerspruch zu (ii). Also gibt es keine einmal stetig differenzierbare Lösung.

Man kann aus diesem Beispiel sofort folgern, dass die reelle Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \imath x \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \imath x \frac{\partial}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x} + \imath x \frac{\partial}{\partial y}\right) u = \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = f$$

keine viermal stetig differenzierbare Lösung hat.

1.4 Distributionen

Bei der Untersuchung von partiellen Differentialgleichungen wollen wir einerseits möglichst viele Lösungen bestimmen und andererseits Bedingungen finden, so dass die Lösungen eindeutig werden. Die Anzahl oder sogar die Existenz kann davon abhängen, was wir als Lösung auffassen wollen. Wegen der Ableitungen, die in der partiellen Differentialgleichung vorkommen, muss die Lösung differenzierbar sein, und mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung erfüllen. Der Begriff von differenzierbaren Funktionen lässt sich auf verschiedene Art erweitern. In diesem Abschnitt wollen wir sogenannte Distributionen einführen, die wohl die größte Klasse von verallgemeinerten differenzierbaren Funktionen darstellen, dies sich aber im Allgemeinen nicht mehr miteinander multiplizieren lassen. Im Fall von linearen Differentialgleichungen tauchen in der Differentialgleichung nur die gesuchte Funktion oder ihre Ableitungen auf, so dass für lineare partielle Differentialgleichungen schwache Lösungen wohldefiniert sind. Für nichtlineare partielle Differentialgleichungen werden wir sogenannte Sobolevräume einführen. Diese Sobolevräume lassen sich als Teilmengen der Distributionen auffassen, so dass die letzteren als die allgemeinsten differenzierbaren Funktionen gelten können.

Unter dem Träger einer Funktion f verstehen wir den Abschluss von $\{x \mid f(x) \neq 0\}$. Für eine offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei $C_0^\infty(\Omega)$ die Algebra der glatten Funktionen auf Ω mit kompaktem Träger in Ω. Jedes $f \in L^1(\Omega)$ definiert eine lineare Abbildung

$$F : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad \phi \mapsto \int_\Omega f\phi d\mu.$$

Verallgemeinerte Funktionen auf Ω sind solche Linearformen F auf $C_0^\infty(\Omega)$. Die Elemente von $C_0^\infty(\Omega)$, auf denen die verallgemeinert Funktionen ausgewertet werden, werden Testfunktionen genannt. Mithilfe von partieller Integration erhalten wir

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\phi d^n x = -\int_\Omega f\frac{\partial \phi}{\partial x_i} d^n x.$$

Deshalb sind solche verallgemeinert Funktionen unendlich oft differenzierbar. Für eine beliebige Linearform F auf $C_0^\infty(\Omega)$ definieren wir als die partielle Ableitung

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad \phi \mapsto -F\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right).$$

Weil der Vektorraum der Testfunktionen unendlichdimensional ist, stellen wir an die Linearformen zusätzliche Stetigkeitsbedingungen, um ihn nicht unhandbar groß zum machen. Damit die stetigen Linearformen unendlich oft differenzierbar sind, müssen die partiellen Ableitungen stetige Operatoren auf dem topologischen Vektorraum $C_0^\infty(\Omega)$ bilden. Für $f \in L^1(\Omega))$ sind die entsprechenden verallgemeinerten Funktionen F stetig bezüglich der Supremumsnormen auf kompakten Teilmengen von Ω. Für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ und jeden endlichen Multiindex α definieren wir folgende Halbnorm:

$$\|\cdot\|_{K,\alpha} : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad \phi \mapsto \|\phi\|_{K,\alpha} = \sup_{x\in K} |D^\alpha \phi(x)|\,.$$

Definition 1.7. *Eine Distribution auf einem offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Linearform F auf $C_0^\infty(\Omega)$, die bezüglich der Halbnormen $\|\cdot\|_{K,\alpha}$ stetig ist, d.h. für jede kompakte Teilmenge K gibt es endlich viele Multiindices $\alpha_1, \ldots, \alpha_M$ und $C_1 > 0, \ldots, C_M > 0$, so dass für alle Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit Trägern in K gilt:*

$$|F(\phi)| \leq C_1\|\phi\|_{K,\alpha_1} + \ldots + C_M\|\phi\|_{K,\alpha_M}.$$

Der Raum dieser Distributionen wird mit $\mathcal{D}'(\Omega)$ bezeichnet.

Unter dem Träger einer Distribution verstehen wir das Komplement der Vereinigung aller der offenen Mengen, so dass die Distribution auf allen Testfunktionen verschwindet, deren Träger in den offenen Mengen enthalten ist. Für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $|x|$ die euklidische Länge von des Vektors x. Die Testfunktion

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases}$$

hat den Träger $\overline{B(0,1)}$ und ist nichtnegativ. Durch Umskalieren von x und ϕ und durch Translation lässt sich daraus für jeden Ball $B(x_0,\epsilon)$ eine eindeutige nichtnegative Testfunktion $\phi_{B(x_0,\epsilon)}$ konstruieren, deren Träger gleich $\overline{B(x_0,\epsilon)}$ ist, und mit $\int \phi_{B(x_0,\epsilon)} d\mu = 1$. Also gibt es insbesondere für jede offene Menge eine nichtnegative Testfunktion, deren Träger in der offenen Menge enthalten ist. Weil jede stetige Funktion f auf Ω, die nicht identisch verschwindet, auf einem offenen Ball für ein $\epsilon > 0$ entweder größer als ϵ oder kleiner als $-\epsilon$ ist, gibt es ein $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\int_\Omega f\phi d\mu \neq 0$.

Folgender Distribution auf $\Omega \ni 0$ entspricht keine herkömmliche Funktion:

$$\delta : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R} \qquad \phi \mapsto \phi(0).$$

Eine entsprechende Funktion müsste auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ verschwinden und ihr Integral müsste gleich eins sein. Eine solche Funktion wird Dirac'sche δ-Funktion genannt. Die Familie der Distributionen, die den Funktionen $\phi_{B(0,\epsilon)}$ entsprechen, konvergieren im Grenzwert $\epsilon \to 0$ gegen diese Distribution. Der Träger dieser Distribution ist offenbar nur der Punkt $0 \in \Omega$. Auch alle partiellen Ableitungen dieser Funktion hängen nur von den Werten von der Testfunktionen und ihrer Ableitungen an der Stelle $0 \in \Omega$ ab.

Das Produkt einer Distribution F mit einer Funktion $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist definiert als

$$gF : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad \phi \mapsto F(g\phi).$$

Dieses Produkt ist offensichtlich verträglich mit der Einbettung von glatten Funktionen in die Distributionen und der Multiplikation von Funktionen. Allerdings ist schon das Produkt einer Distribution mit einer stetigen aber nicht differenzierbaren Funktion nicht mehr definiert, geschweige denn das Produkt zwischen beliebigen Distributionen.

Die Faltung definiert eine weitere Produktstruktur auf den Funktionen in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$(g * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)d^ny = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x-y)d^ny.$$

Dieses Produkt ist abelsch und assoziativ (Übungsaufgabe). Wegen der Gleichung

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(g*f)d^nx &= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(x)g(x-y)f(y)d^nyd^nx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\mathsf{T}_x\mathsf{P}g)(y)f(y)d^nyd^nx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(x)g(x-y)f(y)d^nxd^ny = \int\limits_{\mathbb{R}^n}(\phi * \mathsf{P}g)fd^ny\end{aligned}$$

$$\text{mit } \mathsf{T}_x : C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(x+\Omega), \quad \phi \mapsto \mathsf{T}_x\phi, \text{ mit } (\mathsf{T}_x\phi)(y) = \phi(y-x)$$
$$\text{und } \mathsf{P} : C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(-\Omega), \quad \phi \mapsto \mathsf{P}\phi, \text{ mit } (\mathsf{P}\phi)(y) = \phi(-y)$$

ist die Faltung einer glatten Funktion g mit einer Distribution F definiert als

$$g*F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(\mathsf{T}_x\mathsf{P}g) \text{ oder als } g*F : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto F(\phi * \mathsf{P}g).$$

Lemma 1.8. *Die Faltung einer Distribution mit einer glatten Funktion mit kompaktem Träger entspricht einer glatten Funktion, ist also eine Distribution im Bild der Einbettung der glatten Funktionen in die Distributionen. Der Träger dieser Funktion ist enthalten in der Summe des Trägers der Funktion mit dem Träger der Distribution.*

Beweis: Aus der Stetigkeit und Linearität folgt dann für jede Distribution $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$:

$$g*F(\phi) = F(\mathsf{P}g * \phi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(\mathsf{T}_x\mathsf{P}g)\phi(x)d^nx.$$

Augrund der Stetigkeit der Distribution bezüglich der Halbnormen $\|\cdot\|_{K,0}$ ist $x \mapsto F(\mathsf{T}_x\mathsf{P}g)$ stetig. Weil der Differenzenquotient der Ableitung $\frac{\partial \mathsf{T}(y)}{\partial y_i}$ auf den glatten Funktionen bezüglich der von den Halbnormen $\|\cdot\|_{K,\alpha}$ induzierten Topologie gegen den Operator $\mathsf{T}(y)\frac{\partial}{\partial x_i}$ konvergiert, sind diese Funktionen sogar glatte Funktionen. **q.e.d.**

Aufgrund dieses Lemmas ist sogar die Faltung einer Distribution F mit einer Distribution G mit kompaktem Träger definiert:

$$F * G : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad \phi \mapsto F(\phi * \mathsf{P}G) \text{ mit } \qquad \mathsf{P}G(\phi) = G(\mathsf{P}\phi).$$

Die Faltung mit der Dirac'schen δ-Funktion ist gleich der ursprünglichen Funktion. Die Dirac'sche δ-Funktion ist also bezüglich der Faltung das Einselement. Wir hatten eine Familie von Testfunktionen $\phi_{B(0,\epsilon)}$ eingeführt, die im Grenzwert $\epsilon \to 0$ gegen die Dirac'sche δ-Funktion konvergieren. Für eine beliebige Distribution F konvergiert die Familie von glatten Funktionen $f_\epsilon = \phi_{B(0,\epsilon)} * F$ im Grenzwert $\epsilon \to 0$ in einem bestimmten Sinne gegen die Distribution U. Eine solche Familie von glatten Funktionen, die gegen die Dirac'sche δ-Funktion konvergiert, heißt Mollifier. Damit können wir zeigen, dass sich verallgemeinerte Funktionen durch glatte Funktionen annähern lassen.

Lemma 1.9. *Sei f eine stetige Funktion auf Ω. Dann konvergiert die Familie von glatten Funktionen $\phi_{B(0,\epsilon)} * f$ im Grenzwert $\epsilon \to 0$ auf allen kompakten Teilmengen von Ω gleichmäßig gegen f. Wenn f glatt ist gilt dasselbe für alle Ableitungen von f.*

Beweis: Für alle $x \in \Omega$ gilt

$$\left|(\phi_{B(0,\epsilon)} * f)(x) - f(x)\right| \leq \sup_{y \in B(x,\epsilon)} |f(y) - f(x)|.$$

Weil jede stetige Funktion auf kompakten Mengen gleichmäßig stetig ist, folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit auf kompakten Mengen die gleichmäßige Konvergenz gegen f. Aufgrund der Definition der Faltung gilt für zwei glatte Funktionen f und g:

$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_i} = f * \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g.$$

Deshalb zeigen dieselben Argumente für glatte f, dass auch alle die Faltungen von $\phi_{B(0,\epsilon)}$ mit den partiellen Ableitungen von f auf kompakten Mengen gleichmäßig gegen die entsprechenden partiellen Ableitungen von f konvergieren. **q.e.d.**

Der Rieszsche Darstellungssatz besagt, dass sich die Borelmaß auf Ω mit dem Dualraum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in Ω identifizieren lassen. Außerdem lässt sich wegen Lebesgues Zerlegungssatz $L^1(\Omega)$ mit den endlichen und absolut stetigen Borelmaßen auf Ω identifizieren. Deshalb lässt sich $L^1(\Omega)$ mit einem Unterraum von dem Dualraum des Banachraumes der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in Ω identifizieren. Wegen Lemma 1.9 liegt $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in diesem Banachraum. Deshalb ist jedes $f \in L^1(\Omega)$ eindeutig durch die entsprechende Distribution bestimmt, und die Abbildung $f \mapsto F$ bettet $L^1(\Omega)$ in die Distributionen $\mathcal{D}'(\Omega)$ ein.

Eine kurze und empfehlenswerte Einleitung in die Theorie der Distributionen ist das erste Kapitel von Lars Hörmander: "Linear Partial Differential Operators".

1.5 Regularität von Lösungen

Unter der Regularität einer Lösung einer Differentialgleichung versteht man die lokalen Eigenschaften der entsprechenden Funktionen. Wir werden nur solche Lösungen betrachten, die mindestens Distributionen sind. In diesen enthalten sind messbare Funktionen bzw. allgemeiner L^p-Funktionen. Diese enthalten die Funktionen, deren erste oder n-te Ableitungen ebenfalls solche L^p-Funktionen sind. Die Räume solcher Funktionen werden Sobolevräume genannt. In diesen Funktionen sind die glatten Funktionen enthalten. Zuletzt kommen die analytischen Funktionen mit der höchsten Regularität.

1.6 Randwertprobleme

Bei der Untersuchung von Lösungen von partiellen Differentialgleichungen streben wir eine möglichst vollständige Charakterisierung aller Lösungen an. Im Allgemeinen haben partielle Differentialgleichungen unendlich viele Lösungen. Eine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist eindeutig bestimmt durch die Vorgabe der ersten n Ableitungen an einem Punkt. Für partielle Differentialgleichungen streben wir eine analoge Charakterisierung an. Weil die Lösungen auf höherdimensionalen Gebieten definiert sind, liegt es nahe, dass die Vorgabe von Funktionswerten und eventuell einigen Ableitungen auf dem Rand des Gebietes, die Lösung eindeutig festlegt. Solche Vorgaben nennt man Randwertprobleme. In einem zweiten Schritt soll bestimmt werden für welche Randwerte eine Lösung existiert. Mit der Beantwortung beider Fragen sind alle Lösungen eindeutig durch die möglichen Randwerte bzw. Anfangswerte klassifiziert.