# Kapitel 4

# Apriori Abschätzungen für lineare Differentialgleichungen

## 4.1 Schwache Lösungen

**Definition 4.1.** *Ein elliptischer Differentialoperator in Divergenzform auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist*

$$Lu := \sum_{i=1}^n \left( \partial_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \partial_j u + b_i u \right) + c_i \partial_i u \right) + du \qquad \textit{mit} \tag{4.1}$$

$$\sum_{ij} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \Lambda^{-1} |\xi|^2 \qquad \textit{fast überall auf } x \in \Omega \textit{ und für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \tag{4.2}$$

$$\|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda, \quad \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda, \quad \|c_i\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda, \quad \|d\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda \tag{4.3}$$

*für ein $1 < \Lambda < \infty$. Für $f \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$ heißt $u \in W^{1,2}(\Omega)$ schwache Lösung von $Lu \leq f$ bzw. $Lu \geq f$, falls $-\mathcal{L}(u,v) \leq$ bzw. $\geq \langle f, v \rangle$ für alle $0 \leq v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt, mit*

$$\mathcal{L}(u,v) := \int_\Omega \left( \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \partial_j u + b_i u \right) \partial_i v - \left( \sum_{i=1}^n c_i \partial_i u + du \right) v \right).$$

Oft ist $f$ gegeben durch $f + \nabla \cdot g$ mit $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in (L^2(\Omega))^n$ mit

$$\langle f + \nabla \cdot g, v \rangle := \int_\Omega \left( fv - \sum_{i=1}^n g_i \partial_i v \right) \text{ für } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

$\mathcal{L}$ ist eine stetige Bilinearform auf $W_0^{1,2}(\Omega)$, da mit (4.3) folgendes gilt:

$$|\mathcal{L}(u,v)| \leq C(n) \Lambda \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}. \tag{4.4}$$

Aus (4.2) und (4.3) folgt für $u \in W^{1,2}(\Omega)$ die Gardingungleichung

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u,u) &\geq \Lambda^{-1} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - C(n) \Lambda \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} - \Lambda \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{2\Lambda} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - C(n,\Lambda) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{1}{4\Lambda} \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 - C'(n,\Lambda) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Wir erweitern das schwache Maximumprinzip 2.18 auf Operatoren in Divergenzform.

**Schwaches Maximumprinzip 4.2.** *Es sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $L$ ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Divergenzform, der (4.1)-(4.3) in $\Omega$ erfüllt und es gelte*

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n b_i \partial_i v - dv\Big) \geq 0 \qquad \text{für alle} \qquad 0 \leq v \in W_0^{1,1}(\Omega). \tag{4.6}$$

*Dann gilt für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $Lu \geq 0$*

$$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u_+ := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid (u_+ - t)_+ \in W_0^{1,2}(\Omega)\}.$$

**Beweis:** Für $u \in W^{1,2}(\Omega), v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt $uv \in W_0^{1,1}(\Omega)$ und (3.19). Dann folgt

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}\partial_j u \partial_i v - (c_i + b_i)\partial_i uv\Big) \leq \int_\Omega \Big(-\sum_{i=1}^n b_i \partial_i(uv) + duv\Big) \leq 0$$

für alle $v \geq 0$ mit $uv \geq 0$ aus $Lu \geq 0$. Für $M := \sup_{\partial\Omega} u_+$ und $M \leq t$ erfüllt $v_t := (u-t)_+ = (u_+ - t)_+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$ wegen Proposition 3.27 diese Bedingungen mit

$$\nabla v_t = \begin{cases} \nabla u & \text{fast überall auf } [u > t], \\ 0 & \text{fast überall auf } [u \leq t]. \end{cases}$$

Im Spezialfall $c_i + b_i = 0$ folgt $\nabla v_m \equiv 0$ und mit Proposition 3.32 $v_M \equiv 0$:

$$0 \leq \Lambda^{-1} \int_\Omega |\nabla v_M|^2 = \Lambda^{-1} \int_{[u>M]} |\nabla u|^2 \leq \int_\Omega \sum_{ij} a_{ij}\partial_j u \partial_i v_M \leq 0.$$

Falls die Behauptung im allgemeinen Fall nicht gilt, folgt für $M \leq t < \sup_\Omega u$ aus (4.3)

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1} \int_\Omega |\nabla v_t|^2 &\leq \int_\Omega \sum_{ij} a_{ij}\partial_j u \partial_i v_t \leq \int_\Omega \sum_{i=1}^n (c_i + b_i)\partial_i u v_t \leq 2\Lambda \int_\Omega v_t |\nabla v_t| \\ &\leq 2\Lambda \|\nabla v_t\|_{L^2(\Omega)} \|v_t\|_{L^2(\Gamma_t)} \quad \text{mit} \quad \Gamma_t := [\nabla v_t \neq 0] = [\nabla u \neq 0] \cap [u > t]. \end{aligned}$$

Mit der Soboleveinbettung $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für ein $2 < q < \infty$, siehe Satz 3.43, und der Poincaréungleichung 3.40, da $v_t \in W_0^{1,2}(\Omega)$, erhalten wir für $\delta := \frac{1}{2} - \frac{1}{q} > 0$

$$\|v_t\|_{L^2(\Gamma_t)} \leq \mu^\delta(\Gamma_t)\|v_t\|_{L^q(\Omega)} \leq \mu^\delta(\Gamma_t) C(\Omega, n)\|v_t\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C'(\Omega, n)\mu^\delta(\Gamma_t)\|\nabla v_t\|_{L^2(\Omega)}.$$

Falls $\nabla v_t \not\equiv 0$, folgt $C\Lambda^{-\frac{2}{\delta}} \leq \mu(\Gamma_t)$ für alle $M < t < \sup_\Omega u$. Für $t \nearrow \sup_\Omega u \leq \infty$ folgt $0 < \mu([\nabla u \neq 0] \cap [u = \sup_\Omega u])$. Wegen $u \in L^2(\Omega)$ gilt $\mu(u = \infty) = 0$, und es folgt zuerst $0 \leq M \leq \sup_\Omega u < +\infty$. Zweitens widerspricht das Proposition 3.27, gemäß der $\nabla u = 0$ fast überall auf $[u = \tau]$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$ gilt.Damit ist der Satz bewiesen. **q.e.d.**

Dies ergibt die Eindeutigkeit der Lösung des Dirichletproblems unter der Bedingung (4.6). Die Existenz besagt folgender Satz.

**Existenz von schwachen Lösungen des Dirichletproblems 4.3.** *Sei* $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $L$ *ein elliptischer Operator in Divergenzform, der auf* $\Omega$ (4.1)–(4.3) *und* (4.6) *erfüllt,* $f \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$ *und* $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$*. Dann existiert genau eine schwache Lösung* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *von* $Lu = f$ *mit* $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$*. Sie erfüllt die folgende Ungleichung:*

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C(n, L)(\|f\|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} + \|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)}).$$

*Für eine Familie* $\{L_m\}_{m \in M}$ *von solchen Operatoren, für die* $K := \{a_{i,j,m}, c_{i,m}\}_{i,j,m} \subseteq L^1(\Omega)$ *kompakt ist, existieren gleichmäßige obere Schranken* $C(n, L_m) \leq C(n, \Lambda, K)$*.*

**Beweis:** Die Eindeutigkeit ist klar mit Satz 4.2. Da $Lu = f$ als Distribution auf $\Omega$ äquivalent zu $L(u - \varphi) = \tilde{f}$ ist, wobei $\tilde{f} \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$ definiert ist durch

$$\langle \tilde{f}, v \rangle := \langle f, v \rangle + \int\limits_\Omega \left( \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \partial_j \varphi \partial_i v + b_i \varphi \partial_i v - c_i \partial_i \varphi v \right) - d \varphi v \right) \text{ für } v \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

können wir $\varphi = 0$ annehmen. Wegen (4.4) definiert folgende Gleichung

$$\langle -Lu, v \rangle := \mathcal{L}(u, v) = \int_\Omega \left( \sum\nolimits_{i=1}^n \left( \sum\nolimits_{j=1}^n a_{ij} \partial_j u \partial_i v + b_i u \partial_i v - c_i \partial_i u v \right) - duv \right)),$$

einen linearen Operator $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)^* \cong W_0^{1,2}(\Omega)$. Genauso definiert

$$\langle Ku, v \rangle := \int_\Omega uv.$$

einen kompakten Operator $K : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)^* \cong W_0^{1,2}(\Omega)$, da $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ wegen dem Satz von Rellich 3.39 kompakt ist. Genäß der Gardingungleichung (4.5) gilt

$$\langle (-L + C(n, \Lambda)K)u, u \rangle \geq c_0(\Lambda) \|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \qquad \text{für alle} \qquad u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Wegen dem Satz von Lax und Milgram 3.1 ist $-L + C(n, \Lambda)K$ ein Isomorphismus ist. Da $L$ nach Satz 4.2 injektiv ist und $K$ kompakt ist, ist $L$ mit Lemma 3.4 auch ein Isomorphismus. Folglich existiert eine Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ von $Lu = f$. Weiter gilt

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \|L^{-1}\| \cdot \|f\|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*}.$$

Die gleichmäßige Abschätzung von $C(n, L_n)$ folgt aus dem nächsten Lemma. **q.e.d.**

**Lemma 4.4.** *Seien* $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ *und* $L_m, L$ *elliptische Differentialoperatoren, die* (4.1)–(4.3) *auf* $\Omega$ *erfüllen. Konvergieren* $a_{ij,m} \to a_{ij}$ *und* $c_{i,m} \to c_i$ *fast überall auf* $\Omega$ *und* $b_{i,m} \to b_i$ *und* $d_m \to d$ *schwach in* $L^2(\Omega)$*, und erfüllt* $L$ (4.6)*, so existiert* $C < \infty$ *mit*

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C \|L_m u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} \quad \textit{für alle } u \in W_0^{1,2}(\Omega) \textit{ und für hinreichend großes } m.$$

**Beweis:** Angenommen, das Lemma ist falsch. Dann existieren $u_m \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit

$$\|f_m\|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} \leq \frac{1}{m}\|u_m\|_{W^{1,2}(\Omega)} \qquad \text{und} \qquad f_m := L_m u_m$$

Mit der Gardingungleichung (4.5) folgt

$$c_0(\Lambda)\|u_m\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} - C(n,\Lambda)\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \langle -L_m u_m, u_m\rangle \leq \|f_m\|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*}\|u_m\|_{W^{1,2}(\Omega)},$$

$$\text{also} \qquad \|u_m\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C(n,\Lambda)(\|f_m\|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} + \|u_m\|_{L^2(\Omega)}) \leq 2C(n,\Lambda)\|u_m\|_{L^2(\Omega)}$$

für $m \geq 2C(n,\Lambda)$. Wir setzen O.B.d.A. $\|u_m\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Wegen dem Satz von Rellich 3.39 konvergiert eine Teilfolge $u_m \to u$ stark in $L^2(\Omega)$, wegen dem Satz[1] von Banach und Alaoglu schwach in $W_0^{1,2}(\Omega)$, und wegen der Annahme $f_m \to 0$ stark in $W_0^{1,2}(\Omega)^*$. Für $v \in C_0^1(\Omega)$ folgt $Lu = 0$ schwach auf $\Omega$ aus $\quad 0 \leftarrow \langle f_m, v\rangle = \langle L_m u_m, v\rangle =$

$$= \int_\Omega \Big(\sum\nolimits_{i=1}^n \Big(-\sum\nolimits_{j=1}^n a_{ij,m}\partial_j u_m \partial_i v - b_{i,m} u_m \partial_i v + c_{i,m}\partial_i u_m v\Big) + d_m u_m v\Big) \to \langle Lu, v\rangle.$$

Da $L$ (4.6) in $\Omega$ erfüllt, ergibt das Schwache Maximumprinzip 4.2 $u = 0$. Dies widerspricht $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leftarrow \|u_m\|_{L^2(\Omega)} = 1$, da $u_m \to u$ stark in $L^2(\Omega)$. **q.e.d.**

Eine innere Apriori Abschätzung ist die Caccioppoliungleichung.

**Caccioppoliungleichung 4.5.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$ und $L$ erfülle (4.1)–(4.3) auf $\Omega$. Auf $\Omega' \Subset \Omega$ erfüllt jede schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $Lu = f$*

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega')} \leq C(\Omega,\Omega',\Lambda,n)(\|f\|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \tag{4.7}$$

**Beweis:** Wir wählen $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\eta \equiv 1$ auf $\Omega'$ und $0 \leq \eta \leq 1$ und setzen $v := u\eta^2 \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Dann folgt gemäß Definition 4.1 und mit (4.2)

$$\int_\Omega \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j u \partial_i v = \int_\Omega \Big(\sum\nolimits_{i=1}^n (-b_i u \partial_i v + c_i \partial_i u) + v + duv\Big)) - \langle f, v\rangle, \quad \text{also}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Lambda}\int_\Omega |\nabla u|^2\eta^2 &\leq \int_\Omega \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j u \partial_i u \cdot \eta^2 \\
&\leq -\int_\Omega \Big(\sum\nolimits_{i=1}^n \Big(\sum\nolimits_{j=1}^n a_{ij}\partial_j u \partial_i \eta 2\eta u + b_i u \partial_i u \eta^2 + b_i u^2 \partial_i \eta 2\eta - c_i \partial_i u u \eta^2\Big) - du^2\eta^2\Big) + \\
&\qquad + \|f\|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*}\|u\eta^2\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \\
&\leq C(\Lambda,n)\int_\Omega \big(|\nabla u|\cdot|u|\cdot|\nabla\eta|\cdot|\eta| + |\nabla u|\cdot|u|\eta^2 + u^2\left(|\nabla\eta||\eta| + \eta^2\right)\big) + \\
&\qquad + \frac{1}{4\Lambda}\int_\Omega |\nabla u|^2\eta^2 + C'(\Lambda,n)\int_\Omega u^2\eta^2|\nabla\eta|^2 + C'(\Lambda,n)\|f\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} \leq \\
&\leq \frac{1}{2\Lambda}\int_\Omega |\nabla u|^2\eta^2 + C(\Lambda,\eta,n)(\|f\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}),
\end{aligned}$$

[1] $\overline{B(0,R)} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ ist schwach folgenkompakt (Theorem III.3.7 in Werner: "Funktionalanalysis").

wobei wir wiederholt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung angewandt haben. Wir absorbieren den ersten Term der rechten Seite und erhalten wegen $\eta|_{\Omega'} \equiv 1$ (4.7). **q.e.d.**

Höhere Regularität der Koeffizienten von $L$ und von $f$ überträgt sich auf die Lösung.

**Satz von Friedrichs im Inneren 4.6.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^2(\Omega)$ und $L$ erfülle*

$$(4.1)\text{–}(4.3) \text{ auf } \Omega \qquad \text{und} \qquad \|a_{ij}\|_{C^{0,1}(\Omega)} \leq \Lambda \text{ und } \|b_i\|_{C^{0,1}(\Omega)} \leq \Lambda. \tag{4.8}$$

*Für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $Lu = f$ auf $\Omega$ gilt dann für $k = 0$*

$$u \in W^{k+2,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ mit } \|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega')} \leq C(\Omega, \Omega', \Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) \text{ für } \Omega' \Subset \Omega. \tag{4.9}$$

*Die schwachen Ableitungen von $u$ erfüllen fast überall auf $\Omega$ $Lu = f$ d.h.*

$$\sum_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i u + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \partial_j a_{ij} + b_i + c_i\right)\partial_i u + \left(\sum_{i=1}^n \partial_i b_i + d\right) u = f. \tag{4.10}$$

**Beweis:** Wir vereinfachen $Lu = f$ zu $L_0 u = \hat{f}$, mit einem $L_0$ das (4.8) erfüllt:

$$\begin{aligned} L_0 u := \sum_{ij} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) &= -\sum_{i=1}^n \partial_i(b_i u) - \sum_{i=1}^n c_i \partial_i u - du + f \\ &= -\sum_{i=1}^n \partial_i b_i u - \sum_{i=1}^n (b_i + c_i)\partial_i u - du + f =: \hat{f} \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Für $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega''' \Subset \Omega$ folgt mit der Caccioppoliungleichung (4.7)

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\Omega''')} \leq C(\Omega, \Omega''', \Lambda, n)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \tag{4.11}$$

Für $\Omega'' \Subset \Omega''' \Subset \Omega$ und $0 < |h|$ so klein, dass $\{x \mid d(x, \Omega'') < |h|\} \Subset \Omega'''$ gilt, liegt der Differenzenquotient (3.13) $\partial_l^h u \in W^{1,2}(\Omega'')$. Für $v \in W^{1,2}_0(\Omega'')$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \langle -L_0(\partial_l^h u), v\rangle = \mathcal{L}_0(\partial_l^h u, v) &= \int_{\Omega''} \sum_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_l^h u \partial_i v = \int_{\Omega''} \sum_{ij} a_{ij}\partial_l^h \partial_j u \partial_i v \\ = -\int_\Omega \sum_{ij} \partial_j u \partial_l^{-h}(a_{ij}\partial_i v) &= -\int_\Omega \sum_{ij} a_{ij}\partial_j u \partial_i \partial_l^{-h} v - \int_\Omega \sum_{ij} \partial_l^{-h} a_{ij} \partial_j u \partial_i v(. - he_l) \\ = \int_{\Omega'''} \hat{f}\partial_l^{-h} v &- \int_{\Omega''} \sum_{ij} \partial_l^h a_{ij}\partial_j u(. + he_l)\partial_i v =: \langle -f_l^h, v\rangle. \end{aligned} \tag{4.12}$$

mit diskreter partieller Integration und $L_0 u = \hat{f}$. Wegen Proposition 3.22 (3.14) gilt $\|\partial_l^{-h} v\|_{L^2(\Omega''')} \leq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega'')}$ und $f_l^h \in W^{1,2}_0(\Omega'')^*$. Aus (4.7) und (4.11) folgt

$$\begin{aligned} \|f_l^h\|_{W^{1,2}_0(\Omega'')^*} &\leq C(n)(\|\hat{f}\|_{L^2(\Omega''')} + \|a_{ij}\|_{C^{0,1}(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega''')}) \\ &\leq C(\Lambda, n)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned} \tag{4.13}$$

(4.12) besagt $L_0(\partial_l^h u) = f_l^h$ schwach auf $\Omega''$. Mit (3.14) und (4.7) folgt $\|\partial_l^h u\|_{W^{1,2}(\Omega')} \le$

$$\le C(\Omega'', \Omega', \Lambda, n)(\|f_l^h\|_{W_0^{1,2}(\Omega'')^*} + \|\partial_l^h u\|_{L^2(\Omega'')}) \le C(\Omega, \Omega', \Lambda, n)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Mit Proposition 3.22 (3.16) folgt (4.9) mit $k = 0$, da $\partial_l^h u \to \partial_l u$ stark in $L^2(\Omega')$ nach Proposition 3.24 (3.14). Da $a_{ij}, b_i \in C^{0,1}(\Omega) \subseteq W^{1,2}(\Omega)$ und $\nabla u \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$, folgt mit der Produktregel Proposition 3.25 $a_{ij}\partial_j u \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ und $b_i u \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ mit $\nabla(a_{ij}\partial_j u) = (\nabla a_{ij})\partial_j u + a_{ij}\partial_j \nabla u$ und $\nabla(b_i u) = (\nabla b_i)u + b_i \nabla u$. Für $v \in C_0^1(\Omega)$ folgt

$$-\int_\Omega fv = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\partial_j u \partial_i v + b_i u \partial_i v - c_i \partial_i uv\right) - duv\right) =$$
$$= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n -\partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) - c_i \partial_i u\right) - du\right) v.$$

Da $v \in C_0^1(\Omega)$ beliebig war, folgt die letzte Aussage (4.10). **q.e.d.**

Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichne $\Omega_\pm := \mathbb{R}^{n-1} \times \pm(0, \infty) \subset \mathbb{R}^n$ und $\Omega_0 = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$.

**Caccioppoliungleichung am Rand 4.7.** *Sei $f \in W_0^{1,2}(B(0,2)_+)^*$, $\varphi \in W^{1,2}(B(0,2)_+)$ und $L$ erfülle (4.1)–(4.3) auf $B(0,2)_+$. Für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(B(0,2)_+)$ von $Lu = f$ auf $B(0,2)_+$ mit $u = \varphi$ auf $B(0,2)_0$ gemäß Definition 3.33 gilt dann*

$$\|u\|_{W^{1,2}(B(0,1)_+)} \le C(\Lambda, n)(\|f\|_{W_0^{1,2}(B(0,2)_+)^*} + \|\varphi\|_{W^{1,2}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{L^2(B(0,2)_+)}).$$

**Beweis:** Wegen $\|L\varphi\|_{W_0^{1,2}(B(0,2)_+)^*} \le C(n)\Lambda\|\varphi\|_{W^{1,2}(B(0,2)_+)}$ genügt es $\varphi = 0$ zu betrachten. Wir wählen $\eta \in C_0^\infty(B(0,2))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B(0,1)$ und $0 \le \eta \le 1$ und setzen $v := u\eta^2 \in W_0^{1,2}(B(0,2)_+)$ mit Definition 3.33, da $u = 0$ auf $B(0,2)_0$. Der Rest des Beweises verläuft wie der Beweis der Caccioppoliungleichung 4.5. **q.e.d.**

**Globaler Satz von Friedrichs 4.8.** *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{1,1}$, $f \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in W^{2,2}(\Omega)$ und $L$ erfülle (4.8) auf $\Omega$. Für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $Lu = f$ auf $\Omega$ mit $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt dann fast überall auf $\Omega$ (4.10) und für $k = 0$*

$$u \in W^{k+2,2}(\Omega) \text{ mit } \|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} \le C(\Omega, \Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \quad (4.14)$$

**Beweis:** Aus dem Satz von Friedrichs im Inneren 4.6 folgt $u \in W^{2,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ und (4.10). Wegen $\|L\varphi\|_{L^2(\Omega)} \le C(n)\Lambda\|\varphi\|_{W^{2,2}(\Omega)}$ genügt es $\varphi = 0$ zu betrachten. Wegen $\partial\Omega \in C^{1,1}$ gibt es für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ eine Umgebung $U(x_0)$ von $x_0$ und einen $C^{1,1}$-Diffeomorphismus $\Psi : U(x_0) \cong B(0,2)$ mit $\Psi(x_0) = 0$ und $\Psi(U(x_0) \cap \Omega) = B(0,2)_+$. Wir definieren

$$\tilde{u} := u \circ \Psi^{-1} \in W^{1,2}(B(0,2)_+) \cap W^{2,2}_{\text{loc}}(B(0,2)_+).$$

Aus Proposition 3.28 und $\Psi \in C^{1,1}(U(x_0))$ folgt $\partial_j u = ((\partial_l \tilde{u}) \circ \Psi)\, \partial_j \Psi_l$. Da $u = 0$ auf $\partial\Omega$, gilt $\tilde{u} = 0$ auf $B(0,2)_0$. Für $\tilde{v} \in C_0^1(B(0,2)_+)$ ist $v := \tilde{v} \circ \Psi \in C_0^1(\Omega)$ mit

$$
\begin{aligned}
&-\int_\Omega fv = \int_\Omega \left(\sum\nolimits_{i=1}^n \left(\sum\nolimits_{j=1}^n a_{ij}\partial_j u \partial_i v + b_i u \partial_i v - c_i \partial_i u v\right) - duv\right)\\
&= \int_\Omega \sum\nolimits_{ijkl} a_{ij}\partial_j \Psi_l \partial_i \Psi_k (\partial_l \tilde{u} \circ \Psi)(\partial_k \tilde{v} \circ \Psi) + \int_\Omega \sum\nolimits_{ik} b_i \partial_i \Psi_k (\tilde{u} \circ \Psi)(\partial_k \tilde{v} \circ \Psi) -\\
&\quad - \int_\Omega \sum\nolimits_{ik} c_i \partial_i \Psi_k (\partial_k \tilde{u} \circ \Psi)(\tilde{v} \circ \Psi) - \int_\Omega d(\tilde{u} \circ \Psi)(\tilde{v} \circ \Psi)\\
&= \int_{B(0,2)_+} \sum_{ijkl} (a_{ij}\partial_j \Psi_l \partial_i \Psi_k) \circ \Psi^{-1} |\det(D\Psi^{-1})| \partial_l \tilde{u} \partial_k \tilde{v} + \int_{B(0,2)_+} \sum_{ik} (b_i \partial_i \Psi_k) \circ \Psi^{-1} |\det(D\Psi^{-1})| \tilde{u} \partial_k \tilde{v}\\
&\quad - \int_{B(0,2)_+} \sum\nolimits_{ik} (c_i \partial_i \Psi_k) \circ \Psi^{-1} \cdot |\det(D\Psi^{-1})| \partial_k \tilde{u} \tilde{v} - \int_{B(0,2)_+} d \circ \Psi^{-1} \cdot |\det(D\Psi^{-1})| \tilde{u}\tilde{v}.
\end{aligned}
$$

Dann gilt $\quad \tilde{L}\tilde{u} := \sum\nolimits_k \left(\partial_k \left(\sum\nolimits_l \tilde{a}_{kl}\partial_l \tilde{u} + \tilde{b}_k \tilde{u}\right) + \tilde{c}_k \partial_k \tilde{u}\right) + \tilde{d}\tilde{u} = \tilde{f}$ auf $B(0,2)_+$ mit

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_{kl} &:= \sum\nolimits_{ij} (a_{ij}\partial_j \Psi_l \partial_i \Psi_k) \circ \Psi^{-1} |\det(D\Psi^{-1})| \qquad & \tilde{d} &:= d \circ \Psi^{-1} \cdot |\det(D\Psi^{-1})|\\
\tilde{b}_k &:= \sum\nolimits_i (b_i \partial_i \Psi_k) \circ \Psi^{-1} \cdot |\det(D\Psi^{-1})| & \tilde{f} &:= f \circ \Psi^{-1} \cdot |\det(D\Psi^{-1})|\\
\tilde{c}_k &:= \sum\nolimits_i (c_i \partial_i \Psi_k) \circ \Psi^{-1} \cdot |\det(D\Psi^{-1})|.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Weiter gilt $\quad \|\tilde{a}_{kl}\|_{C^{0,1}(B(0,2)_+)} \le C(\Psi) \max_{ij} \|a_{ij}\|_{C^{0,1}(\Omega)}$

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{b}_k\|_{C^{0,1}(B(0,2)_+)} &\le C(\Psi) \max_i \|b_i\|_{C^{0,1}(\Omega)} \qquad & \|\tilde{d}\|_{L^\infty(B(0,2)_+)} &\le C(\Psi)\|d\|_{L^\infty(\Omega)}\\
\|\tilde{c}_k\|_{L^\infty(B(0,2)_+)} &\le C(\Psi) \max_i \|c_i\|_{L^\infty(\Omega)} & \|\tilde{f}\|_{L^2(B(0,2)_+)} &\le C(\Psi)\|f\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

und für alle $y = \Psi(x)$ mit (4.2)

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{kl} \tilde{a}_{kl}(y)\xi_k \xi_l = \sum\nolimits_{ijkl} a_{ij}(x)\partial_i \Psi_k(x)\xi_k \partial_j \Psi_l(x)\xi_l \cdot |\det(D\Psi^{-1}(y))| \ge\\
&\quad \ge \Lambda^{-1} \sum\nolimits_i \left|\sum\nolimits_k \partial_i \Psi_k(x)\xi_k\right|^2 \cdot |\det(D\Psi^{-1}(y))| \ge c_0(\Psi,\Lambda)|\xi|^2 \quad \text{für} \quad \xi \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}
$$

da $\Psi$ ein Diffeomorphismus ist, also $D\Psi(x)$ invertierbar ist. Also erfüllen $\tilde{L}$ und $\tilde{u}$ alle Bedingungen des Satzes in $B(0,2)_+$ mit geeignetem $\tilde{\Lambda} = C(\Psi,\Lambda)$. Wie im Beweis von Satz 4.6 vereinfachen wir dies zu $\tilde{L}_0\tilde{u} := \sum_{kl} \partial_k(\tilde{a}_{kl}\partial_l \tilde{u}) = \hat{f}$ schwach auf $B(0,2)_+$ mit

$$
\begin{aligned}
&\|\hat{f}\|_{L^2(B(0,\frac{3}{2})_+)} \le C(\Psi,\Lambda)(\|\hat{f}\|_{L^2(B(0,\frac{3}{2})_+)} + \|\tilde{u}\|_{W^{1,2}(B(0,\frac{3}{2})_+)}) \le\\
&\quad \le C(\Psi,\Lambda)(\|\tilde{f}\|_{L^2(B(0,2)_+)} + \|\tilde{u}\|_{L^2(B(0,2)_+)}) \le C(\Psi,\Lambda)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}),
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

wobei wir die Caccioppoliungleichung am Rand 4.7 verwendet haben. Für $0 < |h| < \frac{1}{4}$, $l = 1, \ldots, n-1$ ist $\partial_l^h \tilde{u} \in W^{1,2}(B(0, \frac{5}{4})_+)$ mit $\partial_l^h \tilde{u} = 0$ auf $B(0, \frac{5}{4})_0$. Mit (4.12) gilt

$$\tilde{L}_0(\partial_j^h \tilde{u}) = \tilde{f}_l^h \qquad \text{schwach auf} \qquad B(0, \tfrac{5}{4})_+.$$

Mit der Caccioppoliungleichung am Rand 4.7, (4.13) und (4.16) folgt

$$\|\tilde{f}_l^h\|_{W_0^{1,2}(B(0,\frac{5}{4})_+)^*} \leq C(\Psi, \Lambda)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$
$$\|\partial_l^h \tilde{u}\|_{W^{1,2}(B(0,1)_+)} \leq C(\Psi, \Lambda)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Da $\partial_l^h \tilde{u} \to \partial_l \tilde{u}$ stark in $L^2_{\text{loc}}(B(0,1)_+)$, folgt $\partial_l \tilde{u} \in W^{1,2}(B(0,1)_+)$ und, da wir $\tilde{u} \in W^{2,2}_{\text{loc}}(B(0,2)_+)$ bereits wissen, folgt $\partial_k \partial_l \tilde{u} \in L^2(B(0,1)_+)$ und zunächst

$$\|\partial_k \partial_l \tilde{u}\|_{L^2(B(0,1)_+)} \leq C(\Psi, \Lambda)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) \qquad \text{für} \qquad (k,l) \neq (n,n).$$

Mit (4.10) aus Satz 4.6 angewandt auf $\tilde{L}_0 \tilde{u} = \hat{f}$ erhalten wir für die verbleibenden

$$\partial_n^2 \tilde{u} = \tilde{a}_{nn}^{-1} \left( -\sum\nolimits_{(k,l)\neq(n,n)} \tilde{a}_{kl} \partial_k \partial_l \tilde{u} - \sum\nolimits_{k,l=1}^n \partial_k \tilde{a}_{kl} \partial_l \tilde{u} + \hat{f} \right) \text{ in } B(0,2)_+,$$

also mit (4.2) und der Caccioppoliungleichung am Rand 4.7 ebenfalls

$$\|\partial_n^2 \tilde{u}\|_{L^2(B(0,1)_+)} \leq C(\Psi, \Lambda)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Es folgt $\tilde{u} \in W^{2,2}(B(0,1)_+)$ und für $V(x_0) := \Psi^{-1}(B(0,1))$ der Anteil von (4.14) in $W^{2,2}(V(x_0) \cap \Omega)$ aus Proposition 3.28 mit der Konstanten $C(\Psi, \Lambda)$. Da $\partial\Omega$ kompakt ist, existieren endlich viele $x_1, \ldots, x_N \in \partial\Omega$ und $\delta > 0$ mit

$$\partial\Omega \subseteq \{x \mid d(x, \partial\Omega) < 2\delta\} \subseteq V(x_1) \cup \ldots \cup V(x_N).$$

aus Satz 4.6 (4.9) für $\Omega' := \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) > \delta\} \Subset \Omega$ folgt (4.14) für $k = 0$. **q.e.d.**

Aus dem Sätzen von Friedrichs 4.6 und 4.8 ergibt sich folgender Regularitätssatz.

**Satz 4.9.** *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \geq 1$, $f \in W^{k,2}(\Omega)$ und $L$ erfülle für ein $1 \leq \Lambda < \infty$ (4.1),(4.2) und $\|a_{ij}\|_{C^{k,1}(\Omega)} \leq \Lambda$, $\|b_i\|_{C^{k,1}(\Omega)} \leq \Lambda$, $\|c_i\|_{C^{k-1,1}(\Omega)} \leq \Lambda$ und $\|d\|_{C^{k-1,1}(\Omega)} \leq \Lambda$. Für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $Lu = f$ auf $\Omega$ folgt (4.9)*

*Falls $\partial\Omega \in C^{k+1,1}$ und $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $\varphi \in W^{k+2,2}(\Omega)$, so folgt (4.14).*

**Beweis:** Wieder können wir $\varphi = 0$ annehmen. Für $k = 0$ mit $C^{-1,1}(\Omega)$ ersetzt durch $L^\infty(\Omega)$ sind dies die Aussagen der Sätze von Friedrichs, Sätze 4.6 und 4.8.

Wenn die obige Aussage für $0, \ldots, k-1$ gilt, dann folgt $u \in W^{k+1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ und

$$\text{für } \Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega \quad \|u\|_{W^{k+1,2}(\Omega'')} \leq C(\Omega, \Omega'', \Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k-1,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}), \tag{4.17}$$

$$\text{bzw. } u \in W^{k+1,2}(\Omega) \text{ mit } \|u\|_{W^{k+1,2}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k-1,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \tag{4.18}$$

Wie im Beweis von Satz 4.6 vereinfachen wir die Differentialgleichung zu

$$\begin{aligned}
L_0 u := \sum\nolimits_{ij} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) &= -\sum\nolimits_{i=1}^n \partial_i(b_i u) - \sum\nolimits_{i=1}^n c_i \partial_i u - du + f \\
&= -\sum\nolimits_{i=1}^n \partial_i b_i u - \sum\nolimits_{i=1}^n (b_i + c_i)\partial_i u - du + f =: \hat{f} \in W^{k,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ mit}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\hat{f}\|_{W^{k,2}(\Omega'')} &\leq C(\Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega'')} + \|u\|_{W^{k+1,2}(\Omega'')}) \\
&\leq C(\Omega, \Omega'', \Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) \qquad \text{für } \Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega, \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

$$\text{bzw. } \hat{f} \in W^{k,2}(\Omega) \text{ mit } \quad \|\hat{f}\|_{W^{k,2}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \qquad (4.20)$$

Wegen $a_{ij} \in C^{k,1}(\Omega) \subseteq W^{k+1,\infty}(\Omega)$ und $u \in W^{k+1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ folgt mit der Produktregel Proposition 3.25 $a_{ij}\partial_j u \in W^{k,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\partial_l a_{ij}\partial_j u \in W^{k,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und für $v \in C^\infty_0(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_l u \partial_i v &= -\int_\Omega \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j u \partial_i \partial_l v - \int_\Omega \sum\nolimits_{ij} \partial_l a_{ij}\partial_j u \partial_i v = \\
&= \int_\Omega \hat{f}\partial_l v + \int_\Omega \sum\nolimits_{ij} \partial_i\left(\partial_l a_{ij}\partial_j u\right) v = \int_\Omega \left(-\partial_l \hat{f} + \sum\nolimits_{ij} \partial_i\left(\partial_l a_{ij}\partial_j u\right)\right) v.
\end{aligned}$$

Dies ergibt $$L_0(\partial_l u) = \partial_l \hat{f} - \sum\nolimits_{ij} \partial_i\left(\partial_l a_{ij}\partial_j u\right) =: \bar{f}_l \text{ schwach auf } \Omega. \qquad (4.21)$$

Weiter gilt $$\begin{aligned}
&\left\|\sum\nolimits_{ij} \partial_i\left(\partial_l a_{ij}\partial_j u\right)\right\|_{W^{k-1,2}(\Omega'')} \leq \sum\nolimits_i \left\|\sum\nolimits_j \partial_l a_{ij}\partial_j u\right\|_{W^{k,2}(\Omega'')} \leq \\
&\leq C(n, \Lambda)\|u\|_{W^{k+1,2}(\Omega'')} \leq C(\Omega, \Omega'', \Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k-1,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})
\end{aligned}$$

mit (4.17). Aus (4.17) für $k-1$ folgt $\partial_l u \in W^{k+1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ also $u \in W^{k+2,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, und aus (4.17), (4.19) und (4.21) schließlich (4.9): $\|\partial_l u\|_{W^{k+1,2}(\Omega')} \leq$

$$\begin{aligned}
&\leq C(\Omega, \Omega', \Lambda, n, k)\left(\|\partial_l \hat{f}\|_{W^{k-1,2}(\Omega'')} + \left\|\sum\nolimits_{ij} \partial_i\left(\partial_l a_{ij}\partial_j u\right)\right\|_{W^{k-1,2}(\Omega'')} + \|\partial_l u\|_{L^2(\Omega'')}\right) \\
&\leq C(\Omega, \Omega', \Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).
\end{aligned}$$

Im Fall mit Rand können wir den Rand mit einem $C^{k+1,1}$-Diffeomorphismus $\Psi$ glattbiegen, und, da $\|v\|_{W^{k+2,2}(V)} \sim \|v \circ \Psi^{-1}\|_{W^{k+2,2}(\Psi(V))}$ mit einer von $\Psi$ und $n$ abhängigen Konstanten, genügt es lokal $\Omega \cap B(0,2) = B(0,2)_+$ zu betrachten. Aus (4.18) folgt

$$\begin{aligned}
\left\|\sum\nolimits_{ij} \partial_i\left(\partial_l a_{ij}\partial_j u\right)\right\|_{W^{k-1,2}(\Omega)} &\leq \left\|\sum\nolimits_{ij} \partial_l a_{ij}\partial_j u\right\|_{W^{k,2}(\Omega)} \leq C(n, \Lambda)\|u\|_{W^{k+1,2}(\Omega)} \\
&\leq C(\Omega, \Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k-1,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}),
\end{aligned}$$

Mit (4.20) und (4.21) folgt $L_0(\partial_l u) = \bar{f}_l$ schwach auf $B(0,2)_+$ für $l = 1\ldots, n$ mit

$$\|\bar{f}_l\|_{W^{k-1,2}(B(0,2)_+)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \qquad (4.22)$$

Wir wählen $B(0, \frac{4}{3})_+ \subseteq \Omega_0 \subseteq B(0, \frac{5}{3})_+$ mit $\partial\Omega_0 \in C^\infty$ und $\eta \in C_0^\infty(B(0, \frac{4}{3}))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B(0,1)$. Mit Proposition 3.37 und Definition 3.33 folgt $\eta\partial_l u \in W_0^{1,2}(\Omega_0)$ für $l = 1, \ldots, n-1$ und aus $L_0(\partial_l u) = \bar{f}_l$, $u \in W_{\mathrm{loc}}^{k+2,2}(B(0,2)_+)$ und $a_{ij} \in C^{k,1}(B(0,2)_+)$,

$$\begin{aligned} L_0(\eta\partial_l u) &= \sum\nolimits_{ij} \partial_i(a_{ij}\partial_j(\eta\partial_l u)) = \sum\nolimits_{ij} \partial_i(a_{ij}\eta\partial_j\partial_l u) + \sum\nolimits_{ij} \partial_i(a_{ij}\partial_j\eta\partial_l u) \\ &= \sum\nolimits_{ij} \partial_i(a_{ij}\partial_j\partial_l u)\eta + \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_l u\partial_i\eta + \sum\nolimits_{ij} \partial_i(a_{ij}\partial_j\eta\partial_l u) \\ &= \bar{f}_l\eta + \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_l u\partial_i\eta + \sum\nolimits_{ij} \partial_i(a_{ij}\partial_j\eta\partial_l u) := \bar{f}_{l,\eta} \text{ schwach in } B(0,2)_+, \end{aligned}$$

$$\text{wobei} \qquad \|\bar{f}_{l,\eta}\|_{W^{k-1,2}(B(0,2)_+)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

wegen (4.18) und (4.22). Mit (4.18) folgt $\eta\partial_l u \in W^{k+1,2}(\Omega_0)$ für $k-1$ und

$$\begin{aligned} \|\partial_l u\|_{W^{k+1,2}(B(0,1)_+)} &\leq \|\eta\partial_l u\|_{W^{k+1,2}(\Omega_0)} \leq C(\Lambda, n, k)\|\bar{f}_{l,\eta}\|_{W^{k-1,2}(\Omega_0)} + \|\eta\partial_l u\|_{L^2(\Omega_0)}) \\ &\leq C(\Omega, \Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}), \qquad \text{also zunächst} \\ \|\partial_i\partial_j u\|_{W^{k,2}(B(0,1)_+)} &\leq C(\Omega, \Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für} \quad (i,j) \neq (n,n), \end{aligned}$$

da wir $u \in W_{\mathrm{loc}}^{k+2,2}(\Omega)$ bereits wissen. Wie am Ende von Beweis von Satz 4.8, erhalten wir mit (4.10) aus Satz 4.6 angewandt auf $L_0 u = \hat{f}$ für die verbleibenden

$$\partial_n^2 u = a_{nn}^{-1}\left(-\sum\nolimits_{(i,j)\neq(n,n)} a_{ij}\partial_i\partial_j u - \sum\nolimits_{i,j=1}^n \partial_i a_{ij}\partial_j u + \hat{f}\right) \qquad \text{auf } B(0,2)_+,$$

also mit (4.2), (4.20) und (4.18) ebenfalls

$$\|\partial_n^2 u\|_{W^{k,2}(B(0,1)_+)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Es folgt $u \in W^{k+2,2}(B(0,1)_+)$ zuerst lokal

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(B(0,1)_+)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

und dann mit endlich vielen Bällen $\supset \partial\Omega$ und (4.9) $u \in W^{k+2,2}(\Omega)$ mit (4.14). **q.e.d.**

Für glatte Daten sind auch die Lösungen glatt.

**Korollar 4.10.** *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ und $L$ erfülle (4.1) und (4.2) auf $\Omega$ mit glatten Koeffizienten. Dann gilt $u \in C_{\mathrm{loc}}^\infty(\Omega)$ für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $Lu = f$. Ist weiter $\partial\Omega \in C^\infty$ und $u|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$ für ein $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, so gilt $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.*

**Beweis:** Aus Satz 4.9 folgt $u \in W_{\mathrm{loc}}^{k,2}(\Omega) \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Aus dem Satz von Morrey 3.46 ergibt sich $u \in C_{\mathrm{loc}}^\infty(\Omega)$. Im Fall mit Rand folgt aus Satz 4.9 $u \in W^{k,2}(\Omega) \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Wieder ergibt der Satz von Morrey 3.46 $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. **q.e.d.**

## 4.2 Schauderabschätzungen

Wir betrachten einen elliptischen Differentialoperator $L$ (2.3) in Nicht-Divergenzform auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen für $u \in C^2(\Omega)$. Dabei seien $a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, $b_ij \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ und $c \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ für ein $0 < \alpha < 1$, kurz $L \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, und es gelte für ein $1 \leq \Lambda < \infty$

$$\|a_{ij}\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda \qquad \|b_i\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda \qquad \|c\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda \tag{4.23}$$

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \Lambda^{-1}|\xi|^2 \qquad \text{für alle} \qquad x \in \Omega \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{4.24}$$

**Innere Schauderabschätzung 4.11.** *Ein elliptisches $L$ in Nicht-Divergenzform* (2.3) *erfülle* (4.23) *und* (4.24). *Dann gilt für $u \in C^{2,\alpha}(B(0,2))$*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1))} \leq C(\Lambda, n, \alpha) \left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{L^2(B(0,2))}\right).$$

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir zuerst $L = \triangle$ auf $\mathbb{R}^n$.

**Proposition 4.12.** *Für $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit $0 < \alpha < 1$ und $\mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2u < \infty$ gilt*

$$\mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2u \leq C(n, \alpha)\, \mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} \triangle u.$$

**Beweis**[2]**:** Angenommen die Aussage ist falsch, d.h. es existiert kein $C(n, \alpha) < \infty$. Dann existiert eine Folge $u_m \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} \triangle u_m < \frac{1}{m}\, \mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2u_m < \infty.$$

Ersetzen wir $u_m$ durch $\lambda_m u_m$ mit geeignetem $\lambda_m > 0$, so können wir $\mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2u_m = 1$ annehmen. Dann existiert ein Multiindex $\gamma$ mit $|\gamma| = 2$ und ein $i \in 1, \ldots, n$, so dass für eine Teilfolge jeweils für ein $x_m \in \mathbb{R}^n$ und $h_m > 0$ folgendes gilt:

$$\frac{|\partial^\gamma u_m(x_m + h_m e_i) - \partial^\gamma u_m(x_m)|}{h_m^\alpha} \geq \frac{1}{2n}\, \mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} \partial^\gamma u_m \geq \frac{1}{2n^3} > 0.$$

Reskalieren wir $\tilde{u}_m(x) := h_m^{-2-\alpha} u_m(x_m + h_m x)$ so bleiben die bisherigen Annahmen unverändert. Also können wir o.B.d.A. zusätzlich folgendes annehmen:

$$|\partial^\gamma u_m(e_i) - \partial^\gamma u_m(0)| \geq \frac{1}{2n^3} > 0$$

Das Substrahieren eines beliebigen Polynoms höchstens zweiten Grades läßt diese und die bisherigen Annahmen unverändert. Zusätzlich können wir also folgendes annehmen:

$$u_m(0) = 0 \qquad \nabla u_m(0) = 0 \qquad D^2u_m(0) = 0.$$

[2]siehe Theorem 1 in L.Simon: "Schauder estimates by scaling", Calc. of var. and Par. Diff. Eq. 5.

Aus $\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2u_m = 1$ und dem Mittelwertsatz folgt

$$\|D^2u_m|_{L^\infty(B(0,R))} \leq R^\alpha \quad \|\nabla u_m\|_{L^\infty(B(0,R))} \leq C(n)R^{1+\alpha} \quad \|u_m\|_{L^\infty(B(0,R))} \leq C(n)R^{2+\alpha}.$$

Mit $\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2u_m = 1$ folgt $\qquad \|u_m\|_{C^{2,\alpha}(B(0,R))} \leq C(n,\alpha,R)$.
Damit konvergiert für eine weitere Teilfolge $u_m \to u$ stark in $C^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Aus allen diesen Bedingungen folgt $u \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} \triangle u = 0$, also $\triangle u \equiv \text{const}$ in $\mathbb{R}^n$ und

$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2u \leq 1 \qquad \partial^\gamma u(e_i) \neq \partial^\gamma u(0) \qquad D^2u(0) = 0 \qquad \|u\|_{L^\infty(B(0,R))} \leq C(n)R^{2+\alpha}.$$

Daraus folgt $\triangle u = 0$. Auf $x \in B(0,R)$ ergibt Korollar 2.12 wegen $\partial B(x,R) \subseteq \overline{B(0,2R)}$

$$\|\partial^\gamma u\|_{L^\infty(B(0,R))} \leq C(n,|\gamma|)R^{-|\gamma|+2+\alpha} \qquad \text{für beliebige Multiindices } \gamma.$$

Für $|\gamma| \geq 3$ und $R \to \infty$ folgt $D^3u = 0$ auf $\mathbb{R}^n$, und $u$ ist ein quadratisches Polynom. Insbesondere ist $D^2u$ konstant. Dies widerspricht $\partial^\gamma u(e_i) \neq \partial^\gamma u(0)$, da $|\gamma| = 2$. **q.e.d.**

Betrachtet man eine lineare Transformation, so erhält man folgende Proposition:

**Proposition 4.13.** *Es sei* $1 \leq \Lambda < \infty$ *und* $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit*

$$\sum_{ij} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \Lambda^{-1}|\xi|^2 \textit{ für } \xi \in \mathbb{R}^n \qquad |a_{ij}| \leq \Lambda.$$

*Für* $0 < \alpha < 1$ *und* $u \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2u < \infty$ *gilt dann*

$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2u \leq C(\Lambda,n,\alpha)\,\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}\left(\sum_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j u\right).$$

**Beweis:** Da $\partial_i\partial_j u$ symmetrisch in $i,j$ ist, können wir $a_{ij} = a_{ji}$ annehemen. Dann ist $A := (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, positiv definit und $\Lambda^{-1}I \leq A \leq C(n)\Lambda I$. Die positive Wurzel $B = (b_{ij})$ von $A$ erfüllt $A = B^2$, $B^t = B$ und $\Lambda^{-1/2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} \leq B \leq C(n)\Lambda^{1/2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$. Setzen wir $\tilde{u}(x) := u(Bx)$, so ist $\tilde{u} \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\partial_k\tilde{u}(x) = \sum_i \partial_i u(Bx)b_{ik} \quad \partial_k\partial_l\tilde{u}(x) = \sum_{ij}\partial_i\partial_j u(Bx)b_{ik}b_{jl} \quad \triangle\tilde{u}(x) = \sum_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j u(Bx)$$

$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}\triangle\tilde{u} \leq C(n)\Lambda^{\alpha/2}\,\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}\left(\sum_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j u\right) < \infty$$

$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2\tilde{u} \leq C(n)\Lambda^{1+\alpha/2}\,\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2u < \infty \quad \text{höl}_{\mathbb{R}^n\alpha} D^2u \leq C(n)\Lambda^{1+\alpha/2}\,\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2\tilde{u}.$$

Also erfüllt $\tilde{u}$ die Voraussetzungen von Proposition 4.12 und die Poposition folgt aus

$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2\tilde{u} \leq C(n,\alpha)\,\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}\triangle\tilde{u}. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Wir beweisen zuerst folgende schwächere Version von Satz 4.11.

**Proposition 4.14.** *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.11 gilt*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1))} \leq C(\Lambda, n, \alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{C^2(B(0,2))}\right).$$

**Beweis:** Wir wählen $\eta \in C_0^\infty(B(0,2))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B(0,1)$ und betrachten zunächst alle $0 < \varrho < 1/2$. Für $x_0 \in \overline{B(0,1)}$ gilt $B := B(x_0, 2\varrho) \subseteq B(0,2)$, und wir setzen

$$\eta_{x_0,\varrho}(x) := \eta(\tfrac{x-x_0}{\varrho}) \qquad\qquad v := u\eta_{x_0,\varrho} \in C_0^{2,\alpha}(B).$$

Es gilt $v = u$ auf $B(x_0, \varrho)$. Aus der Proposition 4.13 folgt mit (4.23) und (4.24)

$$\operatorname{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 v \leq C(\Lambda, n, \alpha) \operatorname{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}\left(\sum\nolimits_{ij} a_{ij}(x_0)\partial_i\partial_j v\right).$$

Wir schreiben $\quad \sum\nolimits_{ij} a_{ij}(x_0)\partial_i\partial_j v - \sum\nolimits_{ij}\left(a_{ij}\partial_i\partial_j v - (a_{ij} - a_{ij}(x_0))\partial_i\partial_j v\right)$

$$= Lv - \sum\nolimits_i b_i\partial_i v - cv - \sum\nolimits_{ij}(a_{ij} - a_{ij}(x_0))\partial_i\partial_j v.$$

Dann ergibt sich aus obiger Abschätzung, Proposition 3.9 und (3.4) $\quad \operatorname{höl}_{B,\alpha} D^2 v \leq$

$$\begin{aligned}
&\leq C(\Lambda, n, \alpha)\Big(\operatorname{höl}_{B,\alpha}(Lv) + \operatorname{höl}_{B,\alpha}\Big(\sum\nolimits_{ij}(a_{ij} - a_{ij}(x_0))\partial_i\partial_j v\Big) + \operatorname{höl}_{B,\alpha}\Big(\sum\nolimits_i b_i\partial_i v + cv\Big)\Big)\\
&\leq C(\Lambda, n, \alpha)\max_{ij}\big(\|a_{ij} - a_{ij}(x_0)\|_{L^\infty(B)}\operatorname{höl}_{B,\alpha}(D^2 v) + \operatorname{höl}_{B,\alpha}(a_{ij} - a_{ij}(x_0))\|D^2 v\|_{L^\infty(B)}\big) +\\
&\qquad + C(\Lambda, n, \alpha)\left(\operatorname{höl}_{B,\alpha}(Lv) + \left(\max_i \|b_i\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|c\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))}\right)\|v\|_{C^{1,\alpha}(B)}\right)\\
&\leq C(\Lambda, n, \alpha)\left(\varrho^\alpha \operatorname{höl}_{B,\alpha}(D^2 v) + \operatorname{höl}_{B,\alpha}(Lv) + \|v\|_{C^2(B)}\right).
\end{aligned}$$

Wir absorbieren für hinreichend kleines $\varrho = \varrho(\Lambda, n, \alpha)$ den ersten Term und erhalten

$$\operatorname{höl}_{B,\alpha} D^2 v \leq C(\Lambda, n, \alpha)\left(\operatorname{höl}_{B,\alpha}(Lv) + \|v\|_{C^2(B)}\right).$$

Schließlich rechnen wir und schätzen ab

$$\begin{aligned}
\|v\|_{C^2(B)} &\leq C\|u\|_{C^2(B(0,2))}\|\eta_{x_0,\varrho}\|_{C^2(B)} \leq C(\varrho)\|u\|_{C^2(B(0,2))} \leq C(\Lambda, n, \alpha)\|u\|_{C^2(B(0,2))}\\
Lv &= \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j(u\eta_{x_0,\varrho}) + \sum\nolimits_i b_i\partial_i(u\eta_{x_0,\varrho}) + cu\eta_{x_0,\varrho}\\
&= Lu \cdot \eta_{x_0,\varrho} + \sum\nolimits_{ij}(a_{ij}\partial_i u\partial_j\eta_{x_0,\varrho} + \partial_j u\partial_i\eta_{x_0,\varrho} + ua_{ij}\partial_i\partial_j\eta_{x_0,\varrho} + ub_i\partial_i\eta_{x_0,\varrho}\\
\operatorname{höl}_{B,\alpha}(Lv) &\leq C\|Lu, \nabla u, u\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))}\|1, a_{ij}, b_i, c\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))}\|\eta_{x_0,\varrho}\|_{C^{2,\alpha}(B)}\\
&\leq C(\Lambda, n, \alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{C^{1,\alpha}(B(0,2))}\right).
\end{aligned}$$

Zusammen mit $v|_{B(x_0,\varrho)} = u|_{B(x_0,\varrho)}$ ergeben ergeben alle diese Abschätzungen

$$\text{höl}_{B(x_0,\varrho),\alpha} D^2u \leq C(\Lambda, n, \alpha) \left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{C^2(B(0,2))}\right).$$

Da $x_0 \in B(0,1)$ beliebig war und $\varrho = \varrho(\Lambda, n, \alpha)$, folgt die Aussage aus

$$\begin{aligned}
\text{höl}_{B(0,1),\alpha} D^2u &\leq C(\Lambda, n, \alpha) \left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{C^2(B(0,2))}\right) \\
\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1))} &\leq \text{höl}_{B(0,1),\alpha} D^2u + C(n)\|u\|_{C^2(B(0,2))} \\
&\leq C(\Lambda, n, \alpha) \left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{C^2(B(0,2))}\right).
\end{aligned}$$

**q.e.d.**

**Beweis von Satz 4.11:** Sei $S := |D^2u|^{(n/2+2)}_{0,B(0,2)} := \sup_{x \in B(0,2)} d(x, \partial B(0,2))^{n/2+2} |D^2u(x)|$ mit $S < \infty$ wegen $u \in C^{2,\alpha}(B(0,2))$. Für $x_0 \in B(0,2)$ sei $\varrho := \frac{1}{3} d(x_0, \partial B(0,2)) < 1$, also $B(x_0, 2\varrho) \subseteq B(0,2)$ und $d(x, \partial B(0,2)) \geq \varrho$ für alle $x \in B(x_0, 2\varrho)$. Wir reskalieren folgendermaßen für $x \in B(0,2)$ und erhalten mit (4.23) und $\varrho \leq 1$

$$\tilde{u}(x) := u(x_0 + \varrho x) \quad \tilde{a}_{ij}(x) := a_{ij}(x_0 + \varrho x) \quad \tilde{b}_i(x) := \varrho b_i(x_0 + \varrho x) \quad \tilde{c} := \varrho^2 c(x_0 + \varrho x)$$

$$\begin{aligned}
Lu(x_0 + \varrho x) &= \left(\sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j u + \sum\nolimits_i b_i \partial_i u + cu\right)(x_0 + \varrho x) \\
&= \left(\varrho^{-2} \sum\nolimits_{ij} \tilde{a}_{ij}\partial_i\partial_j \tilde{u} + \varrho^{-1} \sum\nolimits_i \tilde{b}_i \varrho^{-1} \partial_i \tilde{u} + \varrho^{-2} \tilde{c}\tilde{u}\right)(x) = \varrho^{-2} \tilde{L}\tilde{u}(x) \quad (4.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(0,1))} &= \varrho^2 \|D^2u\|_{L^\infty(B(x_0,\varrho))} \qquad \|\tilde{u}\|_{L^2(B(0,2))} \leq \varrho^{-n/2} \|u\|_{L^2(B(0,2))} \\
\varrho^{n/2} \|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(0,2))} &= \varrho^{n/2+2} \|D^2u\|_{L^\infty(B(x_0,2\varrho))} \leq S \\
\|\tilde{L}\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} &= \varrho^2 \|Lu\|_{L^\infty(B(x_0,2\varrho))} + \varrho^{2+\alpha} \text{höl}_{B(x_0,2\varrho),\alpha}(Lu) \leq \|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} \\
\|\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i, \tilde{c}\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} &\leq \|a_{ij}, b_i, c\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} \leq \Lambda.
\end{aligned}$$

Insbesondere erfüllt $\tilde{L}$ (2.3), (4.23) und(4.24) auf $B(0,2)$. Wegen Proposition 3.12 erfüllen folgende Abbildungen die Vorrausetzungen von dem Lemma von Ehrling 3.3: $C^2(B(0,2)) \to C^1(B(0,2)) \hookrightarrow L^2(B(0,2))$ und $C^{2,\alpha}(B(0,1)) \to C^2(B(0,1)) \hookrightarrow L^2(B(0,1))$. Mit $\|\tilde{u}\|_{C^2(B(0,2))} = \|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(0,2))} + \|\tilde{u}\|_{C^1(B(0,2))}$ absorbieren wir in der entsprechenden ersten Interpolationsungleichung den Term $\|\tilde{u}\|_{C^1(B(0,2))}$ und erhalten für $0 < \epsilon < 1$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}\|_{C^2(B(0,2))} = \|\tilde{u}\|_{C^1(B(0,2))} + \|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(0,2))} &\leq C(n)(\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(0,2))} + \|\tilde{u}\|_{L^2(B(0,2))}) \\
\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(0,1))} \leq \|\tilde{u}\|_{C^2(B(0,1))} &\leq \epsilon \|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1))} + C(n, \alpha, \epsilon) \|\tilde{u}\|_{L^2(B(0,1))}.
\end{aligned}$$

Zusammen ergeben alle diese Abschätzungen mit Proposition 4.14 wegen $\varrho \leq 1$

$$\begin{aligned}
d(x_0, \partial B(0,2))^{n/2+2} |D^2u(x_0)| &\leq (3\varrho)^{n/2+2} \|D^2u\|_{L^\infty(B(x_0,\varrho))} = 3^{n/2+2} \varrho^{n/2} \|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(0,1))} \\
&\leq \epsilon \varrho^{n/2} \|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1))} + C(n, \alpha, \epsilon) \varrho^{n/2} \|\tilde{u}\|_{L^2(B(0,1))} \\
&\leq C(\Lambda, n, \alpha) \epsilon \varrho^{n/2} \left(\|\tilde{L}\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|\tilde{u}\|_{C^2(B(0,2))}\right) + C(n, \alpha, \epsilon) \varrho^{n/2} \|\tilde{u}\|_{L^2(B(0,1))} \\
&\leq C(\Lambda, n, \alpha) \left(\|\tilde{L}\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \epsilon \varrho^{n/2} \|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(0,2))}\right) + C(\Lambda, n, \alpha, \epsilon) \varrho^{n/2} \|\tilde{u}\|_{L^2(B(0,2))} \\
&\leq C(\Lambda, n, \alpha, \epsilon) \left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{L^2(B(0,2))}\right) + C(\Lambda, n, \alpha) \epsilon S.
\end{aligned}$$

Das Supremum der linken Seite über $x_0 \in B(0,2)$ ergibt für kleines $\epsilon = \epsilon(\Lambda, n, \alpha)$

$$S \leq C(\Lambda, n, \alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{L^2(B(0,2))}\right).$$

Wir reskalieren und überdecken $B(0,1)$ durch kleine Bälle. Aus Proposition 4.14 folgt mit der obigen ersten Interpolationsungleichung auf $B(0,\frac{3}{2})$ anstatt $B(0,2)$

$$\begin{aligned}\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1))} &\leq C(\Lambda, n, \alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,\frac{3}{2}))} + \|u\|_{C^2(B(0,\frac{3}{2}))}\right)\\ &\leq C(\Lambda, n, \alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,\frac{3}{2}))} + \|u\|_{L^2(B(0,\frac{3}{2}))} + \|D^2u\|_{L^\infty(B(0,\frac{3}{2}))}\right).\end{aligned}$$

Aus $\|D^2u\|_{L^\infty(B(0,\frac{3}{2}))} \leq 2^{n/2+2}S$ folgt dann die Behauptung. **q.e.d.**

Für die Existenz klassischer Lösungen brauchen wir Abschätzungen am Rand.

**Schauderabschätzungen am Rand 4.15.** *Ein elliptisches $L$ (2.3) erfülle (4.23) und (4.24) auf $B(0,2)_+ \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt für $u, \varphi \in C^{2,\alpha}(B(0,2)_+)$ mit $u = \varphi$ auf $B(0,2)_0$*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)} \leq C(\Lambda, n, \alpha)(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{L^2(B(0,2)_+)}).$$

Aus Proposition 3.9 folgt $\|L\varphi\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} \leq C(\Lambda, n, \alpha)\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(B(0,2)_+)}$. Also können wir o.B.d.A. $\varphi = 0$ setzen. Zuerst betrachten wir wieder $L = \triangle$ auf $\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$.

**Proposition 4.16.** *Für $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ mit $0 < \alpha < 1$, $u|_{\mathbb{R}^n_0} = 0$ und $\mathrm{höl}_{\mathbb{R},\alpha^n_+}(D^2u) < \infty$ gilt*

$$\mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(D^2u) \leq C(n, \alpha)\,\mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(\triangle u).$$

**Beweis**[3]**:** Falls die Aussage ist falsch, dann existiert eine Folge $u_m \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ mit

$$u_m|_{\mathbb{R}^n_0} = 0 \qquad \mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(\triangle u_m) < m^{-1}\,\mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(D^2u_m) < \infty.$$

Wir renormieren $\mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(D^2u_m) = 1$. Wieder existiert ein Multiindex $\gamma$ mit $|\gamma| = 2$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$, so dass für eine Teilfolge und geeignete $x_m \in \mathbb{R}^n$ und $h_m > 0$ folgendes gilt

$$\frac{|\partial^\gamma u_m(x_m + h_m e_i) - \partial^\gamma u_m(x_m)|}{h_m^\alpha} \geq \frac{1}{2n}\,\mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}\,\partial^\gamma u_m \geq \frac{1}{2n^3} > 0.$$

Nach einer Translation um einen Vektor aus $\mathbb{R}^n_0$ können wir $|x_m| = \langle x_m, e_n\rangle$ annehmen. Wir unterscheiden zwischen $\lim\limits_{m\to\infty} h_m^{-1}\langle x_m, e_n\rangle = +\infty$ und $\lim\inf\limits_{m\to\infty} h_m^{-1}|x_m| < +\infty$:

Im Fall $\lim\limits_{m\to\infty} h_m^{-1}\langle x_m, e_n\rangle = \infty$ reskalieren wir durch $\tilde{u}_m(x) := h_m^{-2-\alpha}u_m(x_m + h_m x)$. Nach Subtraktion eines Polynoms vom Grad höchstens zwei konvergiert eine Teilfolge $u_m \to u$ in $C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, was wie in Proposition 4.12 zum Widerspruch führt.

[3]siehe Theorem 4 in L.Simon: "Schauder estimates by scaling", Calc. of var. and Par. Diff. Eq. 5.

Im zweiten Fall $\lim\inf_{m\to\infty} h_m^{-1}|x_m| < \infty$ reskalieren wir $\tilde{u}_m(x) := h_m^{-2-\alpha} u_m(h_m x)$. Dadurch bleiben alle bisherigen Annahmen unverändert, und wir können o.B.d.A.

$$|\partial^\gamma u_m(x_m + e_i) - \partial^\gamma u_m(x_m)| \geq \frac{1}{2n^3} > 0$$

annehmen. Nach Übergang zu einer Telfolge konvergiert $x_m$ gegen $x_0 \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$. Bei Subtraktion der Taylorpolynome

$$P_m(x) := u_m(0) + \nabla u_m(0) \cdot x + \tfrac{1}{2} x^t D^2 u_m(0) x$$

bleiben alle Annahmen unverändert, und wir können O.B.d.A.

$$u_m(0) = 0 \qquad \nabla u_m(0) = 0 \qquad D^2 u_m(0) = 0.$$

annehmen. Aus $\text{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(D^2 u_m) = 1$ und dem Mittelwertsatz folgt

$$\|D^2 u_m\|_{L^\infty(B(0,R)_+)} \leq R^\alpha \quad \|\nabla u_m\|_{L^\infty(B(0,R)_+)} \leq C(n) R^{1+\alpha} \quad \|u_m\|_{L^\infty(B(0,R)_+)} \leq C(n) R^{2+\alpha}.$$

also $\|u_m\|_{C^{2,\alpha}(B(0,R)_+)} \leq C(n,\alpha,R)$.. Damit konvergiert in $C^2_{\text{loc}}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ eine weitere Teilfolge $u_m \to u$. Aus diesen Annahmen folgt $u \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ mit

$$\begin{array}{ccc} u|_{\mathbb{R}^n_0} = 0 & \triangle u \equiv \text{const} & \text{höl}_{\overline{\mathbb{R}^n_+},\alpha}(D^2 u) \leq 1 \\ \partial^\gamma u(x_0 + e_i) \neq \partial^\gamma u(x_0) & D^2 u(0) = 0 & \|u\|_{L^\infty(B(0,R)_+)} \leq C(n) R^{2+\alpha}. \end{array}$$

Wegen den mittleren Bedingungen ist $u$ harmonisch auf $\mathbb{R}^n_+$. Wegen der ersten gilt $\partial_l^2 u = 0$ auf $\mathbb{R}^n_0$ für $l = 1, \ldots, n-1$, also $\partial_n^2 u = -\sum_{l=1}^{n-1} \partial_l^2 u = 0$ auf $\mathbb{R}^n_0$. Setzen wir $u(y,t) := -u(y,-t)$ für $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $t \leq 0$, so sehen wir zuerst $u \in C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Weiter ist $\partial_l \partial_n u$ stetig für $l = 1, \ldots, n-1$, und dasselbe gilt für $1 \leq l, k \leq n-1$ oder $(l,k) = (n,n)$, da $\partial_l \partial_k u(y,0) = 0$ für diese $l,k$. Somit ist $u \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, also $\triangle u = 0$ auf $\mathbb{R}^n$. Mit Korollar 2.12 folgt $\|D^k u\|_{L^\infty(B(0,R))} \leq C(n,k) R^{-|k|+2+\alpha}$ für beliebige Multiindizes $k$. Für $|k| \geq 3$ und $R \to \infty$ folgt $D^3 u = 0$ auf $\mathbb{R}^n$, und $u$ ist ein quadratisches Polynom. Insbesondere ist $D^2 u$ konstant, also $D^2 u \equiv D^2 u(0) \equiv 0$. Dies widerspricht $\partial^\gamma u(x_0 + e_i) \neq \partial^\gamma u(x_0)$ wegen $|\gamma| = 2$. Damit ist die Proposition bewiesen. **q.e.d.**

Wie bei den inneren Abschätzungen folgt

**Proposition 4.17.** *Es sei* $1 \leq \Lambda < \infty$ *und* $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit*

$$\sum_{ij} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \Lambda^{-1} |\xi|^2 \text{ für } \xi \in \mathbb{R}^n \qquad |a_{ij}| \leq \Lambda.$$

*Für* $u \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ *mit* $0 < \alpha < 1$ *und* $u|_{\mathbb{R}^n_+} = 0$ *und* $\text{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(D^2 u) < \infty$ *gilt dann*

$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(D^2 u) \leq C(\Lambda, n, \alpha)\, \text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}(a_{ij} \partial_i \partial_j u). \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Wieder beweisen wir zuerst eine schwächere Version von Satz 4.15

**Proposition 4.18.** *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.15 für L auf* $B(0,2)_+$ *gilt*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)} \leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{C^2(B(0,2)_+)}\right).$$

**Beweis:** Wieder können wir $\varphi = 0$ annehmen. Wir wählen $\eta \in C_0^\infty(B(0,2))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B(0,1)$ und $0 < \varrho < 1/2$ klein, wie unten beschrieben. Für $x_0 \in \overline{B(0,1)_+}$ gilt $B := B(x_0, 2\varrho) \subseteq B(0,2)$, und wie im Beweis von Proposition 4.14 definieren wir

$$\begin{array}{rcl}
\eta_{x_0,\varrho} \in C_0^\infty(B) & \text{mit} & \eta_{x_0,\varrho}(x) := \eta(\frac{x-x_0}{\varrho}) \\
v \in C^{2,\alpha}(B_+) & \text{mit} & v := u \cdot \eta_{x_0,\varrho} \in C_0^{2,\alpha}(B_+ \cup B_0) \\
\operatorname{supp} v \subseteq B_+ \cup B_0 & & v|_{B_0} = 0 \qquad v|_{B(x_0,\varrho)_+} = u|_{B(x_0,\varrho)_+}.
\end{array}$$

Aus (4.23),(4.24) und $v|_{B_0} = 0$ folgt mit Proposition 4.17

$$\text{höl}_{B_+,\alpha} D^2 v \leq C(\Lambda,n,\alpha)\, \text{höl}_{B_+,\alpha}\left(\sum\nolimits_{ij} a_{ij}(x_0)\partial_i\partial_j v\right).$$

Daraus ergibt sich dann wie im Beweis von Proposition 4.14

$$\text{höl}_{B_+,\alpha} D^2 v \leq C(\Lambda,n,\alpha)\varrho^\alpha\, \text{höl}_{B_+,\alpha} D^2 v + C(\Lambda,n,\alpha)\left(\text{höl}_{B_+,\alpha}(Lv) + \|v\|_{C^2(B_+)}\right).$$

Wählen wir $\varrho = \varrho(\Lambda,n,\alpha)$ klein genug, so erhalten wir

$$\text{höl}_{B_+,\alpha} D^2 v \leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\text{höl}_{B_+,\alpha}(Lv) + \|v\|_{C^2(B_+)}\right).$$

Wie im Beweis von Proposition 4.14 ergibt sich daraus mit $v|_{B(x_0,\varrho)_+} = u|_{B(x_0,\varrho)_+}$

$$\text{höl}_{B(x_0,\varrho),\alpha}(D^2 u) \leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{C^2(B(0,2)_+)}\right).$$

Da $x_0 \in \overline{B(0,1)_+}$ beliebig war und $\varrho = \varrho(\Lambda,n,\alpha)$, erhalten wir schließlich

$$\text{höl}_{B(0,1)_+,\alpha} D^2 u \leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha(B(0,2)_+)}} + \|u\|_{C^2(B(0,2)_+)}\right)$$

$$\begin{aligned}\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)} &\leq \text{höl}_{B(0,1)_+,\alpha}(D^2 u) + C(n)\|u\|_{C^2(B(0,2)_+)} \leq \\ &\leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{C^2(B(0,2)_+)}\right).\end{aligned}$$

**q.e.d.**

**Beweis von Satz 4.15:** Analog zum Beweis von Satz 4.11 setzen wir

$$S := |D^2 u|^{(n/2+2)}_{0,B(0,2)_+ \cup \{X_n=0\}} := \sup_{x \in B(0,2)_+} d(x, \partial B(0,2))^{n/2+2} |D^2 u(x)|$$

Wegen $u \in C^{2,\alpha}(B(0,2)_+)$ gilt $S < \infty$. Für $x_0 \in B(0,2)_+$ setzen wir

$$\varrho := \begin{cases} \frac{1}{8}d(x_0, \partial B(0,2)) \\ \frac{1}{4}(x_0, \partial B(0,2)) \end{cases} \quad \text{und } x_0' := \begin{cases} x_0 & \text{falls } x_{0,n} \geq \frac{1}{4}d(x_0, \partial B(0,2)) \\ x_0 - x_{0,n}e_n & \text{falls } x_{0,n} < \frac{1}{4}d(x_0, \partial B(0,2)). \end{cases}$$

In beiden Fällen gilt

$$\begin{array}{rr} x_0 \in B(x_0', \varrho)_+ & B(x_0', 2\varrho) \subseteq B(0,2) \\ d(y, \partial B(0,2)) \geq \varrho \text{ für alle } y \in B(x_0', 2\varrho) & d(x_0, \partial B(0,2)) \leq 8\varrho. \end{array}$$

Außerdem gilt im ersten Fall $B(x_0', 2\varrho) \subseteq \mathbb{R}^n_+$ und im zweiten Fall $x_0' \in \mathbb{R}^n_0$. Wir reskalieren $\tilde{u}(y) := u(\varrho y)$, für $y \in B(y_0', 2)_+$ mit $y_0' = \varrho^{-1}x_0'$ und erhalten wie in (4.25)

$$Lu(\varrho y) = \varrho^{-2}\tilde{L}\tilde{u}(y) \text{ für } y \in B(y_0', 2)_+$$

mit geeignetem $\tilde{L}$. Sei jetzt $B := B(y_0', 2) = B(\varrho^{-1}x_0', 2)$. Wegen Proposition 3.12 erfüllen folgende Abbildungen die Vorrausetzungen von dem Lemma von Ehrling 3.3: $C^2(B_+) \to C^1(B_+) \hookrightarrow L^2(B_+)$ und $C^{2,\alpha}(B(y_0', 1)_+) \to C^2(B(y_0', 1)_+) \hookrightarrow L^2(B(y_0', 1)_+)$. Wir absorbieren in der entsprechenden ersten Interpolationsungleichung wieder den Term $\|\tilde{u}\|_{C^1(B_+)}$ mit $\|\tilde{u}\|_{C^2(B_+)} = \|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B_+)} + \|\tilde{u}\|_{C^1(B_+)}$ und erhalten für $0 < \epsilon < 1$

$$\|\tilde{u}\|_{C^2(B_+)} \leq C(n)\left(\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B_+)} + \|\tilde{u}\|_{L^2(B_+)}\right)$$
$$\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(y_0',1)_+)} \leq \epsilon\|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(B(y_0',1)_+)} + C(n,\alpha,\epsilon)\|\tilde{u}\|_{L^2(B(y_0',1)_+)}.$$

Mit den Propositionen 4.14 und 4.18 ergibt dies wegen $\varrho \leq 1$ wieder

$$\begin{aligned} d(x_0\partial B(0,2))^{n/2+2}|D^2u(x_0)| &\leq (8\varrho)^{n/2+2}\|D^2u\|_{L^\infty(B(x_0',\varrho)_+)} = 8^{n/2+2}\varrho^{n/2}\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(y_0',1)_+)} \\ &\leq \epsilon\varrho^{n/2}\|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(B(y_0',1)_+)} + C(n,\alpha,\epsilon)\varrho^{n/2}\|\tilde{u}\|_{L^2(B(y_0',1)_+)} \\ &\leq C(\Lambda,n,\alpha)\epsilon\varrho^{n/2}\left(\|\tilde{L}\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(B_+)} + \|\tilde{u}\|_{C^2(B_+)}\right) + C(n,\alpha,\epsilon)\varrho^{n/2}\|\tilde{u}\|_{L^2(B(y_0',1)_+)} \\ &\leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|\tilde{L}\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(B_+)} + \epsilon\varrho^{n/2}\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B_+)}\right) + C(\Lambda,n,\alpha,\epsilon)\varrho^{n/2}\|\tilde{u}\|_{L^2(B_+)} \\ &\leq C(\Lambda,n,\alpha,\epsilon)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{L^2(B(0,2)_+)}\right) + C(\Lambda,n,\alpha)\epsilon S. \end{aligned}$$

Das Supremum der linken Seite über $x_0 \in B(0,2)_+$ ergibt für kleines $\epsilon = \epsilon(\Lambda,n,\alpha)$

$$S \leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{L^2(B(0,2)_+)}\right).$$

Wir reskalieren und überdecken $B(0,1)$ durch kleine Bälle. Aus Proposition 4.18 folgt zusammen mit der obigen ersten Interpolationsungleichung auf $B(0,\frac{3}{2})_+$ anstatt $B_+$

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)} &\leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,\frac{3}{2})_+)} + \|u\|_{C^2(B(0,\frac{3}{2})_+)}\right) \\ &\leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,\frac{3}{2})_+)} + \|u\|_{L^2(B(0,\frac{3}{2})_+)} + \|D^2u\|_{L^\infty(B(0,\frac{3}{2})_+)}\right). \end{aligned}$$

Dann folgt die Behauptung aus $\|D^2u\|_{L^\infty(B(0,\frac{3}{2})_+)} \leq 2^{n/2+2}S$. **q.e.d.**

Mit der Proposition 4.14 und 4.18 beweisen wir schließlich

**Globale Schauder Abschätzungen 4.19.** *Sei* $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $0 < \alpha < 1$*,* $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$*,* $\varphi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ *und* $L$ (2.3) *erfülle* (4.23)–(4.24). *Dann gilt für* $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ *mit* $u|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

**Beweis:** Wie oben bemerkt, genügt es, $\varphi = 0$ zu betrachten. Sei $x_0 \in \partial\Omega$ beliebig. Wegen $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ von $x_0$ und einen $C^{2,\alpha}$-Diffeomorphismus $\Psi : U(x_0) \cong B(0,2)$ mit $\Psi(x_0) = 0$ und $\Psi(U(x_0) \cap \Omega) = B(0,2)_+$. Wir definieren $\tilde{u} = u \circ \Psi^{-1} \in C^{2,\alpha}(B(0,2)_+)$. Wegen $u|_{\partial\Omega} = 0$ gilt $\tilde{u}|_{B(0,2)_0} = 0$. Wir rechnen

$$Lu = \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j u + \sum\nolimits_i b_i\partial_i u + cu =$$
$$= \sum\nolimits_{ijkl} a_{ij}\partial_i\Psi_k\partial_j\Psi_l(\partial_k\partial_l\tilde{u})\circ\Psi + \sum\nolimits_{ik}\left(\sum\nolimits_j a_{ij}\partial_i\partial_j\Psi_k + b_i\partial_i\Psi_k\right)\partial_k\tilde{u}\circ\Psi + c\cdot(\tilde{u}\circ\Psi).$$

Dann erfüllt $\tilde{L}$ mit $\tilde{L}\tilde{u} := (Lu)\circ\Psi^{-1} = \sum\nolimits_{kl}\tilde{a}_{kl}\partial_k\partial_l\tilde{u} + \sum\nolimits_k \tilde{b}_k\partial_k\tilde{u} + \tilde{c}\tilde{u}$ und

$$\tilde{a}_{kl} := \sum\nolimits_{ij}(a_{ij}\partial_i\Psi_k\partial_j\Psi_l)\circ\Psi^{-1} \quad \tilde{b}_k := \sum\nolimits_i\Big(\sum\nolimits_j a_{ij}\partial_i\partial_j\Psi_k + b_i\partial_i\Psi_k\Big)\circ\Psi^{-1} \quad \tilde{c} := c\circ\Psi^{-1}$$
$$\sum\nolimits_{kl}\tilde{a}_{kl}(y)\xi_k\xi_l \geq c_0(\Psi,\Lambda,n)|\xi|^2 \qquad \text{für alle} \qquad y \in B(0,2)_+ \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n$$
$$\max\left\{\|\tilde{a}_{kl}\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)}, \|\tilde{b}_k\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)}, \|\tilde{c}\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)}\right\} \leq C(\Psi,\Lambda,n,\alpha).$$

Mit $V(x_0) := \Psi^{-1}(B(0,1))$ erhalten wir aus Proposition 4.18 $\|u\|_{C^{2,\alpha}(V(x_0)\cap\Omega)} \leq$

$$\leq C(\Psi,n,\alpha)\|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)} \leq C(\Psi,\Lambda,n,\alpha)\left(\|\tilde{L}\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|\tilde{u}\|_{C^2(B(0,2)_+)}\right)$$
$$\leq C(\Psi,\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^2(\Omega)}\right). \tag{4.26}$$

Nun betrachten wir $x_0 \in \Omega$. Dann existiert $\varrho_{x_0} > 0$ mit $B(x_0, 2\varrho_{x_0}) \subseteq \Omega$ und aus Proposition 4.14 folgt nach Reskalieren von $V(x_0) = B(x_0, \varrho_{x_0})$

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(V(x_0))} \leq C(\Lambda, \varrho_{x_0}, n, \alpha)\left(\|Lu\|_{C^2(\Omega)} + \|u\|_{C^2(\Omega)}\right). \tag{4.27}$$

Da $\bar{\Omega}$ kompakt ist, existieren endlich viele $x_1, \ldots, x_N \in \bar{\Omega}$ mit

$$\bar{\Omega} \subseteq V(x_1) \cup \ldots \cup V(x_N).$$

Aus (4.26) und (4.27) folgt

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^2(\Omega)}\right).$$

Die Behauptung folgt nun für hinreichend kleine $\epsilon$ aus der Interpolationsungleichung

$$\|u\|_{C^2(\Omega)} \leq \epsilon\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} + C(\Omega,\epsilon)\|u\|_{L^2(\Omega)},$$

die aus dem Lemma von Ehrling 3.3 und der Proposition 3.10 folgt. **q.e.d.**

Aus den globalen Schauder-Abschätzungen ergibt sich zusammen mit der höheren Regularität aus der $L^2$-Theorie die Lösbarkeit des Dirichletproblems.

**Existenz von klassischen Lösungen des Dirichletproblems 4.20.** *Sei* $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $0 < \alpha < 1$, $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ *und* $L$ (2.3) *erfülle* (4.23)–(4.24) *mit* $c \leq 0$. *Dann existiert eine eindeutige Lösung* $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ *des Dirichletproblems*

$$Lu = f \text{ auf } \Omega \qquad \text{mit} \qquad u|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}, \qquad \text{und diese erfüllt}$$

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha) \left( \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \right). \tag{4.28}$$

**Beweis:** Wieder genügt es $\varphi = 0$ zu betrachten. Die Eindeutigkeit der Lösung in $C^{2,\alpha}(\Omega)$ folgt aus dem Maximumprinzip Korollar 2.18 mit $c \leq 0$.

Zuerst beweisen wir die Abschätzung (4.28) für $C^{2,\alpha}$-Lösungen des Dirichletproblems. Angenommen (4.28) gilt nicht, dann existieren $L_m$ (2.3), die (4.23)–(4.24) erfüllen mit $c_m \leq 0$, $u_m \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, $f_m \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ mit $u_m|_{\partial\Omega} = 0$ und

$$\|f_m\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \tfrac{1}{m} \|u_m\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}.$$

Andererseits folgt aus Satz 4.19 durch absorbieren für $m \geq 2C(\Omega, \Lambda, n, \alpha)$

$$\begin{aligned}
\|u_m\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} &\leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha) \left( \|f_m\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u_m\|_{C^0(\Omega)} \right) \\
&< C(\Omega, \Lambda, n, \alpha) \left( \tfrac{1}{m} \|u_m\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} + \|u_m\|_{C^0(\Omega)} \right) < 2C(\Omega, \Lambda, n, \alpha) \|u_m\|_{C^0(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Wir nehmen o.B.d.A. $\|u_m\|_{C^0(\Omega)} = 1$ an. Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt dann

$$u_m \to u \text{ stark in } C^2(\bar{\Omega}) \qquad L_m \to L \text{ stark in } C^0(\bar{\Omega}) \qquad f_m \to 0 \text{ stark in } C^{0,\alpha}(\Omega).$$

Es folgt $Lu = 0$ auf $\Omega$ mit $u|_{\partial\Omega} = 0$. Wegen $0 \geq c_m \to c$ folgt aus dem Maximumprinzip Korollar 2.18 $u = 0$ im Wiederspruch zu $\|u\|_{C^0(\Omega)} \leftarrow \|u_m\|_{C^0(\Omega)} = 1$. Also gilt (4.28).

Zum Beweis der Existenzaussage wählen wir glatte $L_m$ (2.3) mit $c_m \leq 0$, die (4.23)–(4.24) erfüllen und in $C^0(\bar{\Omega})$ gegen $L$ konvergieren. Dazu wählen wir glatte beschränkte $f_m$, die in $C^0(\bar{\Omega})$ gegen $f$ konvergieren. Gibt es Lösungen $u_m$ der entsprechenden Dirichletprobleme, dann sind diese wegen (4.28) beschränkt in $C^{2,\alpha}(\Omega)$. Somit konvergiert eine Teilfolge $u_m$ in $C^2(\bar{\Omega})$ gegen ein $u \in C^2(\bar{\Omega})$ mit $Lu = f$ und $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Also genügt es die Existenz für glatte $L \in C^\infty(\bar{\Omega})$ und $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ zu beweisen. Solche $L$ können wir mit glatten Koeffizienten in Divergenzform (4.1) schreiben. Wegen $c \leq 0$ erfüllt $L$ die Bedingung (4.6) des Maximumprinzip Satz 4.2, und nach Satz 4.3 existiert eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $L_d u = f$ auf $\Omega$ mit $u|_{\partial\Omega} = 0$. Aus $L, f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ folgt $u \in C^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ und $Lu = f$ auf $\Omega$ aus Korollar 4.10. Ist darüberhinaus $\partial\Omega \in C^\infty$, so folgt auch $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ und $u|_{\partial\Omega} = 0$. Dann ist $u$ eine klassische Lösung.

Unter den Voraussetzungen $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ des Satzes müssen wir $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ zeigen. Bzw., da wir $u \in C^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ schon wissen, dass $u \in C^{2,\alpha}(V(x_0) \cap \Omega)$ für alle $x_0 \in \partial\Omega$

auf einer Umgebung $V(x_0)$ gilt. Wegen $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ können wir $\partial\Omega$ mit dem $C^{2,\alpha}$-Diffeomorphismus $\Psi : U(x_0) \cong B(0,2)$ in einer Umgebung $U(x_0)$ glattbiegen, und $\tilde{u} := u \circ \Psi^{-1} \in W^{1,2}(B(0,2)_+)$ erfüllt $\tilde{u}|_{B(0,2)_0} = 0$. Setzen wir gemäß (4.15)

$$\tilde{a}_{kl} := \sum\nolimits_{ij} (a_{ij}\partial_j\Psi_l\partial_i\Psi_k) \circ \Psi^{-1} \cdot |\det D\Psi^{-1}| \qquad \tilde{c} := c \circ \Psi^{-1}|\det D\Psi^{-1}|$$
$$\tilde{b}_k := \sum\nolimits_i \left(\left(b_i - \sum\nolimits_j \partial_j a_{ji}\right)\partial_i\Psi_k\right) \circ \Psi^{-1} \cdot |\det D\Psi^{-1}| \qquad \tilde{f} := f \circ \Psi^{-1}|\det D\Psi^{-1}|$$
$$\tilde{L}_d\tilde{u} := \sum\nolimits_{ij} \partial_i(\tilde{a}_{ij}\partial_j\tilde{u}) + \sum\nolimits_i \tilde{b}_i\partial_i\tilde{u} + \tilde{c}\tilde{u}, \quad \tilde{L}_d \in C^{1,\alpha}(B(0,2)_+), \quad \tilde{f} \in C^{1,\alpha}(B(0,2)_+),$$

so transformiert sich $L_d u = f$ auf $B(0,2)_+$ zu $\tilde{L}_d\tilde{u} = \tilde{f}$. Wir zeigen $\tilde{u} \in C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)$. Dafür wählen wir $\tilde{L}_{d,m}, \tilde{f}_m \in C^\infty(\overline{B(0,2)_+})$ mit $\tilde{c}_m \leq 0$ die in $C^1(B(0,2)_+$ gegen $L$ bzw. $f$ konvergieren und in $C^{1,\alpha}(B(0,2)_+)$ beschränkt sind. Weiter wählen wir $B(0,\frac{4}{3})_+ \subseteq \Omega_0 \subseteq B(0,\frac{5}{3})_+$ mit $\partial\Omega_0 \in C^\infty$ und mit Proposition 3.35 $\tilde{\varphi}_m \in C^\infty(\overline{B(0,2)_+})$ mit $\tilde{\varphi}|_{B(0,2)_0} = 0$, die in $W^{1,2}(B(0,2)_+)$ stark gegen $\tilde{u}$ konvergieren. Wegen Satz 4.3 existieren schwache Lösungen $\tilde{u}_m \in W^{1,2}(\Omega_0)$ von $\tilde{L}_{d,m}\tilde{u}_m = \tilde{f}$ auf $\Omega_0$ mit $\tilde{u}_m|_{\partial\Omega_0} = \tilde{\varphi}_m|_{\partial\Omega_0}$ und

$$\|\tilde{u}_m\|_{W^{1,2}(\Omega_0)} \leq C\left(\|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\tilde{\varphi}_m\|_{W^{1,2}(\Omega_0)}\right)$$

mit einer von $m$ unabhängigen Konstanten $C < \infty$. Die rechte Seite bleibt imGrenzwert $m \to \infty$ beschränkt, und somit konvergiert für eine Teilfolge $\tilde{u}_m \to \bar{u}$ schwach in $W^{1,2}(\Omega_0)$. Es folgt, dass $\bar{u}$ eine schwache Lösung von $\tilde{L}_d\bar{u} = \tilde{f}$ auf $\Omega_0$ mit $\bar{u}|_{\partial\Omega_0} = \tilde{u}_{\partial\Omega_0}$ ist, und wegen $\tilde{c} \leq 0$ folgt mit dem Maximumprinzip Satz 4.2 $\bar{u} = \tilde{u}$, also dass $\tilde{u}_m$ in $W^{1,2}(\Omega_0)$ schwach gegen $\tilde{u}$ konvergiert. Aus $\tilde{L}_{d,m}, \tilde{f}_m, \tilde{\varphi}_m \in C^\infty(\overline{\Omega_0})$ und $\partial\Omega_0 \in C^\infty$ folgt mit Korollar 4.10 $\tilde{u}_m \in C^\infty(\overline{\Omega_0})$ und $\tilde{L}_m\tilde{u}_m = \tilde{f}_m$ auf $\Omega_0$, wobei $\tilde{L}_m$ der ausdifferenzierte Nicht-Divergenzform Operator von $\tilde{L}_{d,m}$ ist. Die Koeffizienten von $L_{d,m}$ sind beschränkt in $C^{1,\alpha}(B(0,2)_+)$ und die von $\tilde{L}_m$ in $C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)$. Aus Satz 4.15 folgt

$$\|\tilde{u}_m\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)} \leq C\left(\|\tilde{f}_m\|_{C^{0,\alpha}(B(0,\frac{4}{3})_+)} + \|\tilde{u}_m\|_{L^2(B(0,\frac{4}{3})_+)}\right)$$

mit einer von $m$ unabhängigen Konstanten $C < \infty$, da $\tilde{u}_m|_{B(0,\frac{4}{3})_0} = \tilde{\varphi}_m|_{B(0,\frac{4}{3})_0} = 0$. Aufgrund der Konstruktion bleibt die rechte Seite im Grenzwert $m \to \infty$ beschränkt. Also folgt $\tilde{u} \in C^{2\alpha}(B(0,2)_+)$ aus der Konvergenz $\tilde{u}_m \to \tilde{u}$. **q.e.d.**

Schließlich zeigen wir, dass $C^2$-Lösungen so regulär sind, wie die Daten.

**Satz 4.21.** *Es sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 < \alpha < 1$ und $L$ (2.3) erfülle (4.23) und für $k \geq 0$*

$$\|a_{ij}\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda \qquad \|b_i\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda \qquad \|c\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda. \tag{4.29}$$

*Für $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ und eine Lösung $u \in C^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ von $Lu = f$ auf $\Omega$ gilt dann für $\Omega' \Subset \Omega$*

$$u \in C^{k+2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ mit } \|u\|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega')} \leq C(\Omega,\Omega',\Lambda,n,\alpha,k)\left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}\right) \tag{4.30}$$

*Aus* $\partial\Omega \in C^{k+2,\alpha}$ *und* $u|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$ *mit* $\varphi \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$ *folgt*

$$u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega) \text{ mit } \|u\|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k)\left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|\varphi\|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}\right). \tag{4.31}$$

**Beweis:** Wir betrachten konzentrische Bälle $B' \Subset B \Subset \Omega$ und wählen $\varphi_m \in C^\infty(\bar{B})$ mit $\varphi_m \to u$ stark in $C^2(\bar{B})$. Mit Satz 4.20 existiert $u_m \in C^{2,\alpha}(B)$ mit

$$L_0 u_m = \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j u_m + \sum\nolimits_i b_i \partial_i u_m = f - cu =: \tilde{f} \in C^{0,\alpha}(B) \quad u_m|_{\partial B} = \varphi_m|_{\partial B}.$$

Da $L_0(u_m - u) = 0$ in $B$, folgt mit dem Maximumprinzip Korollar 2.18

$$\|u_m - u\|_{L^\infty(B)} \leq \|u_m - u\|_{L^\infty(\partial B)} \leq \|\varphi_m - u\|_{L^\infty(B)} \to 0,$$

also dass $u_m$ in $C^0(\bar{B})$ stark gegen $u$ konvergiert. Mit Satz 4.11 folgt

$$\|u_m\|_{C^{2,\alpha}(B')} \leq C(\Lambda, B, B', n, \alpha, k)\left(\|\tilde{f}\|_{C^{0,\alpha}(B)} + \|u_m\|_{C^0(B)}\right).$$

Wegen der Konvergenz von $u_m$ ist die rechte Seite im Grenzwert $m \to \infty$ beschränkt. Es folgt $u \in C^{2,\alpha}(B')$, also (4.30) für $k = 0$ aus Satz 4.11.

Nun sei $k \geq 1$ und (4.30) für $0, \ldots, k-1$ bewiesen. Dann folgt $u \in C^{k+1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Wir wählen $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega''' \Subset \Omega$. Für die endliche Differenz $\partial_l^h u$ (3.13), $l = 1, \ldots, n$, $0 < |h| < d(\Omega'', \partial\Omega''')$, und $\bar{u}(x) := u(x + he_l)$ gilt

$$L(\partial_l^h u) = \partial_l^h f - \sum\nolimits_{ij}(\partial_l^h a_{ij})\partial_i\partial_j\bar{u} - \sum\nolimits_i(\partial_l^h b_i)\partial_i\bar{u} - (\partial_l^h c)\bar{u} =: f_l^h \quad \text{auf } \Omega''. \tag{4.32}$$

Für $v \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ gilt auf $x \in \Omega''$ $\quad \|\partial_l^h v\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega'')} \leq \|\partial_l v\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega''')}$ $\quad$ wegen

$$\partial_l^h v(x) = \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{d}{dt} v(x + the_l)\,\mathrm{dt} = \int_0^1 \partial_l v(x + the_l)\,\mathrm{dt}.$$

Daraus folgt mit (4.29) $\quad \|f_l^h\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega'')} \leq \|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega''')} + C(n)\Lambda\|u\|_{C^{k+1,\alpha}(\Omega''')}$.

Aus (4.30) für $k-1$ und (4.32) folgt

$$\begin{aligned}
\|\partial_l^h u\|_{C^{k+1,\alpha}(\Omega')} &\leq C(\Omega'', \Omega', \Lambda, n, \alpha, k)\left(\|\partial_l^h f\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega'')} + \|\partial_l^h u\|_{C^0(\Omega'')}\right) \\
&\leq C(\Omega''', \Omega'', \Omega', \Lambda, n, \alpha, k)\left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega''')} + \|u\|_{C^{k+1,\alpha}(\Omega''')}\right) \\
&\leq C(\Omega''', \Omega'', \Omega', \Lambda, n, \alpha, k)\left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega''')} + \|u\|_{C^0(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Für $h \to 0$ konvergiert $\partial_l^h u \to \partial_l u$ in $C^0(\Omega')$. Dann folgt $\partial_l u \in C^{k+1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und (4.30).

Im Fall mit Rand können wir $\varphi = 0$ annehmen. Wir biegen den Rand glatt zu $\Omega \cap B(0,2) = B(0,2)_+$. Durch Reskalieren $c \mapsto \varrho x$ transformieren sich die Koeffizienten

$$\tilde{a}_{ij}(x) := a_{ij}(\varrho x) \qquad \tilde{b}_i(x) := \varrho b_i(\varrho x) \qquad \tilde{c}(x) := \varrho^2 c(\varrho x) \qquad \tilde{f}(x) := \varrho^2 f(\varrho x)$$

von $L$ und $f$. Daher können wir annehmen, dass $L$ (2.3) die Voraussetzung (4.23) mit $\Lambda$ ersetzt durch geeignetes $\Lambda_0$ erfüllt und $\|c\|_{L^\infty(B(0,2)_+)} \leq \epsilon$ für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$ gilt, das wir erst später festlegen. Weiter sei $B(0, \frac{4}{3})_+ \subseteq \Omega_0 \subseteq B(0, \frac{5}{3})_+$ mit $\partial\Omega_0 \in C^\infty$ und $\varphi_m$ eine Folge in $C^{2,\alpha}(B(0,2)_+)$ mit $\varphi_m|_{B(0,2)_0} = 0$, die in $C^0(\overline{B(0,2)_+})$ stark gegen $u$ konvergiert. Wir suchen dazu Lösungen $u_m \in C^{2,\alpha}(\Omega_0)$ von $Lu_m = f$ auf $\Omega_0$ mit $u_m|_{\partial\Omega_0} = \varphi_m|_{\partial\Omega_0}$. Wir betrachten die stetigen linearen Abbildungen $L, L_0 : C^{2,\alpha,0}(\Omega_0) := \{v \in C^{2,\alpha}(\Omega_0) \mid v = 0 \text{ auf } \partial\Omega_0\} \to C^{0,\alpha}(\Omega_0)$. Mit dem Satz 4.20 ist $L_0$ ein Isomorphismus, und $L - L_0$ ist kompakt. Wählen wir $\epsilon > 0$ so klein, dass $c_0 := 1 - C(\Omega_0, \Lambda_0)\epsilon > 0$ in Korollar 2.24 gilt, so folgt mit Korollar 2.24, dass $L$ injektiv ist und mit Lemma 3.4, dass $L$ ein Isomorphismus ist. Damit existiert $u_m - \varphi_m \in C^{2,\alpha}(\Omega_0)$ mit $L(u_m - \varphi_m) = f$ und $u_m - \varphi_m = 0$ auf $\partial\Omega_0$, also sind $u_m \in C^{2,\alpha}(\Omega_0)$ solche Lösungen. Mit Hopfs Maximumprinzip 2.21 folgt wegen $c_0 := 1 - C(\Omega_0(\Lambda_0)\epsilon > 0$,

$$\|u_m - u\|_{C^0(\overline{\Omega_0})} \leq c_0^{-1} \|u_m - u\|_{C^0(\partial\Omega_0)} \leq c_0^{-1} \|\varphi_m - u\|_{C^0(\overline{B(0,2)_+})} \to 0.$$

Also konvergiert $u_m$ in $C^0(\overline{\Omega_0})$ stark gegen $u$. Mit Satz 4.15 folgt

$$\|u_m\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)} \leq C(\Lambda, n, \alpha) \left( \|f\|_{C^{0,\alpha}(B(0,\frac{4}{3})_+)} + \|u_m\|_{C^0(B(0,\frac{4}{3})_+)} \right).$$

Wegen der Konvergenz von $u_m$ ist die rechte Seite im Grenzwert $m \to \infty$ beschränkt, und es folgt $u \in C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)$. Überdecken wir $\partial\Omega$ mit endlich vielen Bällen, so folgt (4.31) für $k = 0$ aus Satz 4.19.

Nun sei $k \geq 1$ und (4.31) für $0, \ldots, k-1$ bewiesen. Daher gilt $u \in C^{k+2,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$ und

$$u \in C^{k+1,\alpha}(\Omega) \quad \text{mit} \quad \|u\|_{C^{k+1,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k) \left( \|f\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)} \right). \quad (4.33)$$

Weiter gilt $\partial_l u \in C^{k+1,\alpha}_{\text{loc}}(B(0,2)_+) \cap C^{k,\alpha}(B(0,2)_+)$ mit $\partial_l u|_{B(0,2)_0} = 0$ für $l = 1, \ldots, n-1$ wegen $u|_{B(0,2)_0} = 0$. Wir wählen $\eta \in C^\infty_0(B(0, \frac{4}{3})), \eta \equiv 1$ auf $B(0,1)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
&\text{für} \quad v := \eta \partial_l u \in C^{k+1,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega_0) \cap C^{k,\alpha}(\Omega_0) \qquad \text{und} \quad v|_{\partial\Omega_0} = 0 \\
&\sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j v = \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j(\eta\partial_l u) = \\
&\qquad = \sum\nolimits_{ij} (\eta a_i \partial_i\partial_j\partial_l u + a_{ij}(\partial_i\eta\partial_j\partial_l u + \partial_j\eta\partial_i\partial_l u) + a_{ij}\partial_l u \partial_i\partial_j\eta) = \\
&\qquad =: \sum\nolimits_{ij} \eta a_{ij}\partial_i\partial_j\partial_l u + R_l \qquad \text{mit} \qquad \|R_l\|_{C^{k-1,\alpha}(B(0,2)_+)} \leq \\
&\leq C(\Lambda, n, \alpha, k)\|u\|_{C^{k+1,\alpha}(B(0,2)_+)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k) \left( \|f\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)} \right)
\end{aligned}$$

wobei wir (4.33) verwendet haben. Aus $Lu = f$ folgt auf $B(0,2)_+$ wieder mit (4.33)

$$\begin{aligned}\sum_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j\partial_l u &= \sum_{ij} (\partial_l(a_{ij}\partial_i\partial_j u) - (\partial_l a_{ij})\partial_i\partial_j u)\\ &= \partial_l \left(f - \sum_i b_i\partial_i u - cu\right) - \sum_{ij}(\partial_l a_{ij})\partial_i\partial_j u =: \hat{f}\\ \|\hat{f}\|_{C^{k-1,\alpha}(B(0,2)_+)} &\le C(\Lambda, n, \alpha, k)\left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{C^{k+1,\alpha}(B(0,2)_+)}\right)\\ &\le C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k)\left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Wenden wir (4.31) für $k-1$ auf $v$ in $\Omega_0$ an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\|\partial_l u\|_{C^{k+1,\alpha}(B(0,1)_+)} \le \|v\|_{C^{k+1,\alpha}(\Omega_0)} &\le C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k)\left(\|a_{ij}\partial_i\partial_j v\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega_0)} + \|v\|_{C^0(\Omega_0)}\right)\\ &\le C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k)\left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Da $l = 1, \ldots, n-1$ und $u \in C^{k+2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ folgt wegen $Lu = f$, (4.23) und (4.33)

$$\begin{aligned}\|\partial_i\partial_j u\|_{C^{k,\alpha}(B(0,1)_+)} &\le C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k)\left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}\right) && \text{für } i,j \neq (n,n)\\ \partial_n^2 u &= a_{nn}^{-1}\left(-\sum_{(i,j)\neq(n.n)} a_{ij}\partial_i\partial_j u - \sum_{i=1}^n b_i\partial_i u - cu + f\right) && \text{auf } B(0,2)_+\\ \|\partial_n^2 u\|_{C^{k,\alpha}(B(0,1)_+)} &\le C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k)\left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}\right)\\ \|u\|_{C^{k+2,\alpha}(B(0,1)_+)} &\le C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k)\left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Überdecken wir $\partial\Omega$ mit endlich vielen Bällen, so folgt mit (4.30) auch (4.31). **q.e.d.**