Kapitel 12

Das Lebesgueintegral auf dem $\mathbb{R}^d$

12.1 Treppenfunktionen

Zunächst führen wir die Quader im $\mathbb{R}^d$ ein.

Definition 12.1. *Ein Quader ist ein d-faches kartesisches Produkt von Intervallen*

$$Q = I_1 \times \ldots \times I_d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_1 \in I_1, \ldots, x_d \in I_d\} \subset \mathbb{R}^d.$$

Die Intervalle $I_1, \ldots, I_d \subset \mathbb{R}$ können den linken bzw. rechten Rand enthalten oder nicht und nur aus einem Punkt bestehen. Wenn $I_1, \ldots, I_d$ beschränkt sind heißt Q endlich.

Für jeden solchen Quader definieren wir das Volumen als das Produkt der Längen von $I_1, \ldots, I_d$. Wir bezeichnen es mit $\mu(Q)$. Endliche Quader haben endliches Volumen.

Definition 12.2. *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ heißt Nullmenge, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ eine Folge von endlichen Quadern $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^d$ gibt, mit*

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) \leq \epsilon.$$

Beispiel 12.3. *Die Vereinigung von abzählbar vielen Quadern ohne Volumen ist eine Nullmenge. Insbesondere ist jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ eine Nullmenge.*

Lemma 12.4. *Eine höchstens abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.*

Beweis: Sei $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ eine höchstens abzählbare Vereinigung von Nullmengen. Dann besitzt für jedes $\epsilon > 0$ jedes A_n eine Überdeckung von Quadern, deren gesamtes Volumen nicht größer ist als $\epsilon \cdot 2^{-n}$. Die höchstens abzählbare Vereinigung dieser jeweils höchstens abzählbar vielen Quader ist wegen Satz 2.50 eine höchstens abzählbare Menge von Quader mit einem Volumen nicht gößer als $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon 2^{-n} = \epsilon$. Also wird $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ von abzählbar vielen Quadern überdeckt, deren Volumen nicht größer ist als ϵ. **q.e.d.**

Definition 12.5. *Eine Treppenfunktion ist eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen von endlichen Quadern, d.h. der Funktionen, die bei Punkten innerhalb eines Quader gleich* 1*, und außerhalb des Quaders gleich* 0 *sind.*

Proposition 12.6. *Endlich viele Quader lassen sich in endlich viele paarweise disjunkte Quader zerlegen. Jede Treppenfunktion ist eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen von paarweise disjunkten endlichen Quadern.*

Beweis: Für endlich viele Intervalle $I_1, \ldots, I_n$ ordnen wir alle endlichen Intervallgrenzen der Reihe nach an $-\infty < x_1 < \ldots < x_m < \infty$. Dadurch erhalten wir eine Zerlegung

$$\mathbb{R} = (-\infty, x_1) \cup \{x_1\} \cup (x_1, x_2) \cup \{x_2\} \cup \ldots \cup (x_{m-1}, x_m) \cup \{x_m\} \cup (x_m, \infty)$$

von $\mathbb{R}$ in endlich viele paarweise disjunkte Intervalle, so dass jedes der Intervalle $I_1, \ldots, I_n$ eine Vereinigung von endlich vielen dieser Intervalle ist. Für jeden Faktor des kartesichen Produktes sind durch n Quader $Q_1, \ldots, Q_n$ auch n Intervalle vogegeben und damit auch eine solche Zerlegung von $\mathbb{R}$. Die kartesichen Produkte von jeweils einem dieser Intervalle aus den Zerlegungen aller d Faktoren des kartesichen Produktes bilden Quader, die paarweise disjunkt sind und deren Vereinigung gleich $\mathbb{R}^d$ ist. Dabei ist jeder der Quader $Q_1, \ldots, Q_n$ eine Vereinigung von endlich vielen von diesen paarweise disjunkten Quadern. Eine endliche Linearkombination von $\chi_{Q_1}, \ldots, \chi_{Q_n}$ nimmt auf jedem dieser paarweise disjunkten Quader der Zerlegung genau einen Wert an und ist eine endliche Linearkombination von chrakteristischen Funktionen von paarweise disjunkten endlichen Quadern. **q.e.d.**

Als nächstes wollen wir das Integral von Treppenfunktionen definieren. Zunächst definieren wir für jede charakteristische Funktion χ_Q eines Quaders das Integral

$$\int \chi_Q d\mu = \mu(Q).$$

Proposition 12.7. *Sei f eine Treppenfunktion und seien*

$$f = \sum_i c_i \chi_{Q_i} = \sum_j d_j \chi_{R_j}$$

zwei Zerlegungen in endliche Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen von endlichen Quadern. Dann gilt

$$\int f d\mu = \sum_i c_i \mu(Q_i) = \sum_j d_j \mu(R_j).$$

Beweis: Wir zerlegen alle diese endlichen Quader Q_i und R_j wie im vorangehenden Beweis beschrieben in endlich viele paarweise disjunkte endliche Quader P_k. Es folgt

$$f|_{P_k} = \sum_{\{i|Q_i \supset P_k\}} c_i = \sum_{\{j|R_j \supset P_k\}} d_j \qquad \chi_{Q_i} = \sum_{\{k|P_k \subset Q_i\}} \chi_{P_k} \qquad \chi_{R_j} = \sum_{\{k|P_k \subset R_j\}} \chi_{P_k}.$$

Hierbei sei die Summe über eine leere Menge gleich Null. Die Gesamtlänge einer disjunkten Vereinigung von Intervallen ist gleich der Summe der Intervalllängen. Wegen dem Distributivgesetz folgt dann

$$\mu(Q_i) = \sum_{\{k|P_k\subset Q_i\}} \mu(P_k) \qquad \mu(R_j) = \sum_{\{k|P_k\subset R_j\}} \mu(P_k)$$

$$\begin{aligned}\sum_i c_i\mu(Q_i) &= \sum_i c_i \sum_{\{k|P_k\subset Q_i\}} \mu(P_k) = \sum_k \sum_{\{i|Q_i\supset P_k\}} c_i\mu(P_k)\\ = \sum_k \sum_{\{j|R_j\supset P_k\}} d_j\mu(P_k) &= \sum_j d_j \sum_{\{k|P_k\subset R_j\}} \mu(P_k) = \sum_j d_j\mu(R_j).\end{aligned}$$

q.e.d.

Wegen dieser Proposition definiert das Integral $f \mapsto \int f d\mu$ eine lineare Abbildung von dem Raum aller Treppenfunktionen nach $\mathbb{R}$.

Proposition 12.8. *Seien f und g zwei Treppenfunktionen mit $f \geq g$. Dann gilt*

$$\int f d\mu \geq \int g d\mu.$$

Beweis: Wir zerlegen die beiden Vereinigungen von Quadern der Treppenfunktion f und der Treppenfunktion g in eine gemeinsame disjunkte Vereinigung von Quadern. Auf jedem der Quader ist f größer oder gleich g. Deshalb gilt das auch für die Summen, die die entsprechenden Integrale berechnen. **q.e.d.**

12.2 Lebesgueintegrable Funktionen auf dem $\mathbb{R}^d$

Satz 12.9. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, deren Integrale $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt sind. Dann ist fogende Menge eine Nullmenge:*

$$\{x \in \mathbb{R} \mid (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \textit{ konvergiert nicht } \}.$$

Beweis: Sei $M > 0$ eine obere Schranke von $\left(\int (f_n - f_1)d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\int (f_n - f_1)d\mu \leq M \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist für alle $\epsilon > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$, die Menge

$$S_{n,\epsilon} = \left\{x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, f_n(x) - f_1(x) \geq \frac{M}{\epsilon}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, f_n(x) \geq \frac{M}{\epsilon} + f_1(x)\right\}$$

eine monoton wachsende Folge von endlichen Vereinigungen von Quadern. Aus der Konstruktion einer gemeinsamen Zerlegung in eine disjunkte Vereinigung von Quadern im Beweis von Proposition 12.6 folgt, dass das relative Komplement eines Quaders in einem anderen Quader wieder eine disjunkte Vereinigung von Quadern ist. Dann ist

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_{n,\epsilon} = S_{1,\epsilon} \cup (S_{2,\epsilon} \setminus S_{1,\epsilon}) \cup (S_{3,\epsilon} \setminus S_{2,\epsilon})$$

eine abzählbare Vereinigung von disjunkten Quadern. Weil $f_n - f_1$ nichtnegative Funktionen sind, ist $\frac{\epsilon}{M}(f_n - f_1)$ gößer oder gleich $\chi_{S_{n,\epsilon}}$. Also gilt für das Maß von $S_{n,\epsilon}$

$$\int \chi_{S_{n,\epsilon}} d\mu \leq \int \frac{\epsilon}{M}(f_n - f_1) d\mu = \frac{\epsilon}{M} \int (f_n - f_1) d\mu \leq \epsilon.$$

Wegen der Monotonie ist dann auch das Gesamtvolumen der abzählbaren Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_{n,\epsilon}$ nicht größer als ϵ. Weil die kritische Menge S gleich der Schnittmenge

$$S = \{x \in \mathbb{R}^d | (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert nicht } \} = \bigcap_{\epsilon>0} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_{n,\epsilon} \right)$$

ist, folgt, dass diese Menge S eine Nullmenge ist. **q.e.d.**

Die Komplemente von Nullmengen werden fast überall genannt. Also konvergiert jede monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen fast überall.

Satz 12.10. *Für jede Nullmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ gibt es eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen $(\int f_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass A in der Menge enthalten ist, auf der die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert.*

Beweis: Sei A eine Nullmenge. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Überdeckung von A mit abzählbar vielen Quadern, deren Gesamtvolumen nicht größer ist als 2^{-n}. Sei nun $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung der Vereinigung aller dieser Quader. Dann gehört jeder Punkt von A zu unendlich vielen Quadern. Also definiert die Reihe $(\sum \chi_{Q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, die auf A nicht konvergiert. Die Integrale $(\sum \int \chi_{Q_n} d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ sind beschränkt durch $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} = 1$. **q.e.d.**

Für jede monoton wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ können wir jetzt den Grenzwert fast überall definieren:

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) & \text{wenn}(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt ist} \\ 0 & \text{wenn } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ nicht beschränkt ist.} \end{cases}$$

Wir wollen $\int f d\mu$ als $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$ definieren. Die folgenden Lemmata zeigen, dass diese Definition nur von der fast überall definierten Funktion f abhängt.

Lemma 12.11. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Treppenfunktionen, die fast überall gegen Null konvergiert. Dann ist $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.*

Beweis: Kein $\int f_n d\mu$ kann kleiner Null sein, weil sonst f_n auf einem Quader mit positiven Maß negativ ist und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dort nicht gegen Null konvergiert. Offenbar gibt es einen kompakten Quader Q_0 außerhalb dessen f_1 verschwindet. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei A_n die Menge der Unstetigkeitsstellen von f_n, also der Punkte, an denen f_n lokal nicht konstant ist. Dann ist A_n in Q_0 enthalten, und als eine endliche Vereinigung von Quadern ohne Volumen eine Nullmenge. Dann ist auch $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ eine Nullmenge. Sei B die Nullmenge aller Punkte, an denen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen Null konvergiert. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es eine Überdeckung $\bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m \supset (A \cup B)$ durch Quader, deren Gesamtvolumen nicht größer ist als $\frac{\epsilon}{3}$. Indem wir die Kanten der Quader mit positivem Volumen um ein hinreichend kleinen Faktor $1 + \epsilon'$ verlängern, dabei aber den Mittelpunkt festhalten, und die Quader mit verschindendem Volumen durch größere offene Quader mit Volumen $\frac{\epsilon}{3}2^{-m}$ ersetzen, erhalten wir auch eine solche Überdeckung $\bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m \supset (A \cup B)$ durch offene Quader, deren Gesamtvolumen nicht größer ist als ϵ. Für jeden Punkt $x \in Q_0 \setminus (A \cup B)$ gibt es ein N_x mit $f_{N_x}(x) \le \epsilon$. Weil $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, gilt $f_n(x) \le \epsilon$ für alle $n \ge N_x$. Weil alle f_{N_x} bei den Punkten von $Q_0 \setminus (A \cup B)$ lokal konstant sind, gibt es eine offene Überdeckung von offenen Quadern $(R_x)_{x\in Q_0\setminus(A\cup B)}$ von $Q_0 \setminus (A \cup B)$, so dass $f_n \le \epsilon$ auf R_x für $n \ge N_x$ gilt. Dann bilden $(R_x)_{x\in Q_0\setminus(A\cup B)}$ zusammen mit $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von Q_0. Weil Q_0 kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Wenn n größer ist als die entsprechenden endlich vielen N_x's können wir $\int f_n d\mu$ abschätzen durch

$$0 \le \int f_n d\mu \le \epsilon(\max\{f_1(x) \mid x \in Q_0\} + \mu(Q_0)).$$

Auf den Quadern $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ schätzen wir dabei f durch $\max\{f_1(x) | x \in Q_0\}$ ab und auf den endlich vielen der $(R_x)_{x\in Q_0\setminus(A\cup B)}$ durch ϵ. Es folgt $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = 0$. **q.e.d.**

Lemma 12.12. *Seien f und g fast überall definierte Grenzwerte von monoton wachsenden Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit beschränkten $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\int g_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Wenn fast überall $f \ge g$ gilt, dann gilt auch*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \ge \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu.$$

Beweis: Für jedes feste $m \in \mathbb{N}$ erfüllen die Funktionenfolgen

$$((g_m - f_n)^+)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}(g_m - f_n + |g_m - f_n|)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

die Voraussetzungen von dem vorangehenden Lemma, weil fast überall $g_m - f \le g - f \le 0$ gilt. Deshalb konvergieren die entsprechenden Integrale gegen Null. Wegen $g_m - f_n \le (g_m - f_n)^+$ folgt aus Proposition 12.8 und Lemma 12.11

$$\int g_m d\mu - \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \le 0 \quad \text{und damit auch} \quad \lim_{m\to\infty} \int g_m d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$ **q.e.d.**

Aus Lemma 12.12 folgt, dass wir das Integral auf die Grenzwerte von monoton wachsenden Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen konsistent fortsetzen können. Seien nämlich $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsenden Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\int g_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Grenzwerte fast überall übereinstimmen, dann können wir Lemma 12.12 sowohl auf diese Folge, als auch auf die vertauschten Folgen anwenden und erhalten

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty}\int g_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu.$$

Definition 12.13. *Sei $L^1(\mathbb{R}^d)$ die Menge der Äquivalenzklassen von fast überall definierten Funktionen f, für die es monoton wachsende Folgen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen $\left(\int g_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\int h_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, und*

$$f = \lim_{n\to\infty} g_n - \lim_{n\to\infty} h_n$$

fast überall gilt. Hierbei werden zwei Funktionen miteinander identifiziert, wenn sie fast überall miteinander übereinstimmen.

Satz 12.14. *(Eigenschaften der lebesgueintegrablen Funktionen)*

(i) *$L^1(\mathbb{R}^d)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und das Integral über Treppenfunktionen induziert eine lineare Abbildung*

$$\int : L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}, f \to \int f d\mu$$

(ii) *Wenn $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ fast überall nicht negativ ist, dann gilt* $\displaystyle\int f d\mu \geq 0.$

(iii) *Wenn $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, dann ist auch $|f| \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit* $\displaystyle\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu.$

Beweis: (i) Seien $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen. Wenn die Grenzwerte

$$g(x) - h(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) - \lim_{n\to\infty} h_n(x)$$

fast überall mit den Grenzwerten von

$$\tilde{g}(x) - \tilde{h}(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{g}_n(x) - \lim_{n\to\infty} \tilde{h}_n(x)$$

übereinstimmen, dann stimmen auch die Funktionen $g(x) + \tilde{h}(x)$ und $\tilde{g}(x) + h(x)$ fast überall überein und sind fast überall auch die Grenzwerte von

$$(g_n + \tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bzw. } (\tilde{g}_n + h_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Dann folgt aus Lemma 12.12

$$\int (g+\tilde{h})d\mu = \int g d\mu + \int \tilde{h} d\mu = \int \tilde{g} d\mu + \int h d\mu = \int (\tilde{g}+h)d\mu.$$

Daraus folgt wegen der Linearität des Integrals

$$\int (g-h)d\mu = \int g d\mu - \int h d\mu = \int \tilde{g} d\mu - \int \tilde{h} d\mu = \int (\tilde{g}-\tilde{h})d\mu.$$

Deshalb definiert $\int$ eine Abbildung von $L^1(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{R}$. Die Linearität folgt aus den Rechenregeln für Folgen und der Linearität des Integrals auf Treppenfunktionen.
(ii) Wenn $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen sind, so dass fast überall $\lim_{n\to\infty} g_n - \lim_{n\to\infty} h_n$ nichtnegativ ist, dann ist auch fast überall $g = \lim_{n\to\infty} g_n \geq \lim_{n\to\infty} h_n = h$. Aus Lemma 12.12 folgt dann $\int g d\mu \geq \int h d\mu$ bzw. $\int (g-h)d\mu \geq 0$.
(iii) Sei f fast überall die Differenz $g-h$ der Grenzwerte der monoton wachsenden Folgen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen. Aus $\min\{g_n, h_n\} \leq g_n \leq g_{n+1}$ und $\min\{g_n, h_n\| \leq h_n \leq h_{n+1}$ folgt $\min\{g_n, h_n\} \leq \min\{g_{n+1}, h_{n+1}\}$, und aus $\max\{g_{n+1}, h_{n+1}\} \geq g_{n+1} \geq g_n$ und $\max\{g_{n+1}, h_{n+1}\} \geq h_{n+1} \geq h_n$ folgt $\max\{g_{n+1}, h_{n+1}\} \geq \max\{g_n, h_n\}$. Also sind $(\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\max\{g_n, h_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\min\{g_n, h_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen. Aus $g_n \geq \min\{g_1, h_1\}$ und $h_n \geq \min\{g_1, h_1\}$ folgt $\tilde{h}_n \leq \tilde{g}_n \leq g_n - \min\{g_1, h_1\} + h_n - \min\{g_1, h_1\} + \min\{g_1, h_1\}$. Also haben $(\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{h}_n)n \in \mathbb{N}$ beschränkte Integrale. Dann ist $|f|$ fast überall die Differenz der entsprechenden Grenzwerte $\tilde{g}-\tilde{h}$. Deshalb ist $|f| \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Wegen (ii) folgt dann aus $-|f| \leq f \leq |f|$

$$-\int |f| d\mu \leq \int f d\mu \leq \int |f| d\mu \quad \text{bzw.} \quad \left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu.$$ **q.e.d.**

Satz 12.15. *Eine beschränkte Funktion, die außerhalb einer beschränkten Menge verschwindet und deren Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bilden, gehört zu $L^1(\mathbb{R}^d)$.*

Beweis: Wir wählen einen Quader $Q_0 = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d]$, außerhalb dessen die Funktion verschwindet. Wir zerlegen für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i = 1, \ldots, d$ das Intervall $[a_i, b_i]$ in die Vereinigung der Intervalle

$$[a_i, b_i] = \left[a_i, a_i + \tfrac{b_i-a_i}{2^n}\right] \cup \left(a_i + \tfrac{b_i-a_i}{2^n}, a_i + 2\tfrac{b_i-a_i}{2^n}\right] \cup \ldots \cup \left(a_i + (2^n-1)\tfrac{b_i-a_i}{2^n}, b_i\right].$$

Die kartesischen Produkte dieser Zerlegungen ergeben eine Zerlegung $\mathcal{P}_n$ von Q_0 in eine Vereinigung von 2^{nd} paarweise disjunkten Quadern. Dann sei f_n die Treppenfunktion, die auf jedem der 2^{nd} Quader gleich dem Infimum der entsprechenden Funktionswerte von f ist. Offenbar ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, deren Integrale durch $\|f\|_\infty \cdot \mu(Q_0)$ beschränkt sind. An allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}^d$, an denen f stetig ist, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $f(x) \in B(f(x_0), \epsilon)$ aus $x \in B(x_0, \delta)$ folgt. Dann gibt es auch ein $N \in \mathbb{N}$, so dass der Durchmesser von Q_0 kleiner ist als $2^N\delta$. Für alle $n \geq N$ ist dann der Teilquader der 2^{nd} Teilquader von Q, der x_0 enthält, in $B(x_0, \delta)$ enthalten. Deshalb gilt dann

$$f(x_0) - \epsilon < f_n(x_0) \leq f(x_0).$$

Also konvergiert $(f_n(x_0))$ gegen $f(x_0)$. Weil die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge ist, konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann fast überall gegen f. **q.e.d.**

Satz 12.16:* *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\int |f| d\mu = 0$. Dann ist f fast überall gleich Null.*

Beweis:* Seien $(\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen, so dass fast überall gilt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{g}_n(x) - \lim_{n\to\infty} \tilde{h}_n(x).$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien $$g_n = \max\{\tilde{g}_n, \tilde{h}_n\} \text{ und } h_n = \min\{\tilde{g}_n, \tilde{h}_n\}.$$

Dann gilt fast überall $$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} g_n(x) - \lim_{n\to\infty} h_n(x).$$

Wenn $\int |f| d\mu = 0$ gilt also auch $$\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int h_n d\mu.$$

Für $\epsilon, \delta > 0$ sei $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $$\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu - \int h_m d\mu \leq \epsilon\delta.$$

für alle $m \geq N$ gilt. Wir definieren g als den fast überall definierten Grenzwert $\lim_{n\to\infty} g_n$. Weil $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend sind, ist die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid |f(x)| > \delta\} \qquad \text{in den Mengen}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) - h_m(x) > \delta\} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid g_n(x) - h_m(x) > \delta \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$$

enthalten. Sei also $$A_1 = \{x \in \mathbb{R}^d \mid g_1(x) - h_m(x) > \delta\}$$ und für $n = 2, \ldots$

$$A_n = \{x \in \mathbb{R}^d \mid g_n(x) - h_m(x) > \delta \text{ und } g_{n-1}(x) - h_m(x) \leq \delta\}.$$ Dann gilt

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) - h_m(x) > \delta\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\delta} \int (g_n - h_m) d\mu \leq \epsilon$$

für $m \geq N$. Also ist für alle $\delta > 0$ die Menge $\{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) - \lim_{m\to\infty} h_m(x) > \delta\}$ eine Nullmenge. Weil die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, folgt, dass die Menge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) - \lim_{m\to\infty} h_m(x) > \frac{1}{n}\}$ eine Nullmenge ist. Also ist fast überall $g(x) \leq h(x) = \lim_{m\to\infty} h_m(x)$. Aufgrund der Konstruktion gilt aber fast überall $g(x) \geq h(x)$. Also ist fast überall $|f(x)| = g(x) - h(x) = 0$. **q.e.d.**

12.3 Das Riemann- und das Lebesgueintegral

In diesem Abschnitt wollen wir das Riemannintegral mit dem Lebesgueintegral in Beziehung setzen. Für $d > 1$ sind die riemannintegrablen Funktionen f auf einem kompakten Quader Q_0 dadurch charakterisiert, dass das Unterintegral, also das Supremum aller Integrale von Treppenfunktionen nicht größer als f, mit dem Oberintegral, also dem Infimum aller Integrale von Treppenfunktionen nicht kleiner als f, übereinstimmt. Zunächst wollen wir die riemannintegrablen Funktionen charakterisieren.

Satz 12.17. *(Lebesguekriterium) Eine beschränkte Funktion auf einem kompakten Quader $Q_0 = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d]$ ist genau dann riemannintegrabel, wenn ihre Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bilden. Insbesondere sind alle riemannintegrablen Funktionen auch lebesgueintegrabel und die beiden Integrale stimmen überein.*

Beweis: Wir zerlegen für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i = 1, \ldots, d$ das Intervall $[a_i, b_i]$ in die Vereinigung der Intervalle

$$[a_i, b_i] = \left[a_i, a_i + \tfrac{b_i-a_i}{2^n}\right] \cup \left(a_i + \tfrac{b_i-a_i}{2^n}, a_i + 2\tfrac{b_i-a_i}{2^n}\right] \cup \ldots \cup \left(a_i + (2^n-1)\tfrac{b_i-a_i}{2^n}, b_i\right].$$

Das entspricht für $d = 1$ der Partition $p_n \in \mathcal{P}[a, b]$ aus dem Beweis von Korollar 8.11. Die kartesischen Produkte dieser Zerlegungen ergeben eine Zerlegung $\mathcal{P}_n$ von Q_0 in eine Vereinigung von 2^{nd} paarweise disjunkte Quadern. Für alle $f \in B(Q_0, \mathbb{R})$ seien

$$f_n(x) = \inf \{f(y) \mid y \in Q \text{ mit } Q \in \mathcal{P}_n \text{ und } x \in Q\}$$
$$F_n(x) = \sup \{f(y) \mid y \in Q \text{ mit } Q \in \mathcal{P}_n \text{ und } x \in Q\}$$

Es sind $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende bzw. monoton fallende Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen. Wenn die Folgen $(\int f_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\int F_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert konvergieren, dann ist f riemannintegrabel.

Sei f bei x stetig. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass alle $x' \in B(x, \delta) \cap Q_0$ auch $|f(x') - f(x)| < \epsilon/2$ erfüllen. Dann gilt für $2^n > \frac{\|b-a\|}{\delta}$ oder $n > \frac{1}{\ln(2)} \ln(\frac{\|b-a\|}{\delta})$

$$|F_n(x) - f_n(x)| \leq |F_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon.$$

Es folgt $\lim_{n\to\infty}(F_n(x) - f_n(x)) = 0$. Also ist $\{x \in Q_0 \mid \lim_{n\to\infty}(F_n(x) - f_n(x)) > 0\}$ eine Nullmenge, wenn die Unstetigkeitsstelen von f eine Nullmenge bilden. Weil die Folge $(F_n - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann die Voraussetzungen von Lemma 12.11 erfüllt, ist f riemannintegrabel, wenn die Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge bilden.

Wenn umgekehrt f riemannintegrabel ist, dann gibt es zwei Folgen von Treppenfunktionen nicht kleiner bzw. nicht größer als f, deren Integrale gegen die gleiche Zahl konvergieren. Die Minima bzw. Maxima der jeweils ersten n Folgenglieder dieser Folgen definieren eine monoton fallende Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen bzw. monoton wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen, so dass der Grenzwert von $(\int F_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht größer ist der von $(\int f_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Differenz $(F_n - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist dann eine monoton fallende Folge von nichtnegativen Treppenfunkltionen, deren Integrale gegen Null konvergieren. Wegen Satz 12.16 (siehe auch Korollar 12.23) konvergieren dann beide Folgen fast überall gegen die gleiche Funktion f. Die Unstetigkeitsstellen aller dieser Treppenfunktionen beider Folgen sind abzählbare Vereinigungen von Nullmengen und damit Nullmengen. Von jedem Punkt im Komplement dieser Nullmenge sind alle Quader der Treppenfunktionen, die den Punkt enthalten, eine Umgebung. Wenn f bei x im Komplement dieser Nullmenge unstetig ist, dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$

$$\sup\{f(x') \mid x' \in B(x,\delta) \cap Q_0\} - \inf\{f(x') \mid x' \in B(x,\delta) \cap Q_0\} \geq \epsilon$$

gilt. Deshalb konvergieren diese beiden Folgen nur dann fast überall gegen die gleiche Funktion, wenn die Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge bilden. **q.e.d.**

Beispiel 12.18. (i) *Sei* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Abzählung aller rationalen Zahlen in* $(0,1)$. *Dann ist für* $0 < \epsilon < 1$ *das Komplement der Teilmenge*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left((r_n - 2^{-(n+1)}\epsilon, r_n + 2^{-(n+1)}\epsilon) \cap [0,1]\right)$$

von $[0,1]$ *keine Nullmenge, weil alle offenen Intervalle*

$$I_n = \left(r_n - 2^{-(n+1)}\epsilon, r_n + 2^{-(n+1)}\epsilon\right) \cap [0,1]$$

höchstens das Maß $\epsilon 2^{-n}$ *haben und* $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon 2^{-n} = \epsilon < 1$. *Also ist die Folge*

$$\left(\prod_{k=1}^{n}(1-\chi_{I_k})\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine monoton fallende Folge von Treppenfunktionen, die gegen eine lebesgueintegrable Funktion konvergiert. Weil die rationalen Zahlen dicht in $[0,1]$ *liegen, ist diese Funktion an allen Punkten im Komplement der offenen Menge* $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ *unstetig. Also ist der Grenzwert von* $(\prod_{k=1}^{n}(1-\chi_{I_k}))_{n\in\mathbb{N}}$ *eine lebesgueintegrable Funktion, die nicht riemannintegrabel ist. Diese offene Menge ist also ein Beispiel für eine offene Menge, deren Rand positives Lebesguemaß hat, also eine charakteristische Funktion mit nicht verschwindendem Lebesgueintegral.*

(ii) *Sei* $p \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$ *und* χ *die Funktion* $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \chi(x)$ *mit*

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn es eine ganze Zahl } q \in \mathbb{Z} \text{ gibt mit } x - q\cdot p \in (1,2) \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann definiert die Folge $\left(\prod_{k=1}^{n} \chi(p^k \cdot x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Folge von Treppenfunktionen auf* $[0,1]$ *mit beschränkten Integralen. Auf* $[0,1]$ *ist die Funktion also* *lebesgueintegrabel. Sie hat aber offenbar Unstetigkeitsstellen bei allen Zahlen, deren p-adische Bruchdarstellung aus endlich vielen Ziffern aus $\{0, 2, \ldots, p-1\}$ besteht, und am Ende eine 1 oder 2 hat. Der Abschluss dieser Menge besteht aus allen Zahlen aus den Komplementen der Vereinigung von den offenen Mengen mit p-adischen Büchen*

$$(0.z_1 \ldots z_n 1, \quad 0.z_1 \ldots z_n 2) \qquad\qquad z_1, \ldots, z_n \in \{0, 2, \ldots, p-1\}.$$

Für $p = 3$ ist das die Cantormenge aus Beispiel 11.23 (i). Das Maß dieser Menge ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p} \left(\frac{p-1}{p} \right)^n = 1.$$

Also ist das Komplement dieser offenen Menge eine Nullmenge. Diese Nullmenge ist aber gleichmächtig zu der Menge aller Folgen mit Werten in $\{0, 2, \ldots, p-1\}$. Wenn $p > 2$ ist diese Menge nicht abzählbar. Aber der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \left(\prod_{k=1}^{\infty} \chi(p^k x) \right)$ ist riemannintegrabel und lebesgueintegrabel.

12.4 Der Satz von Fubini

Für jeden Quader $Q = I_1 \times \ldots \times I_d \times I_{d+1} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ und jedes $x \in \mathbb{R}^d$ ist die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \chi_Q(x, y)$ eine Treppenfunktion auf $\mathbb{R}$. Wenn wir diese Funktion integrieren erhalten wir eine Treppenfunktion auf dem $\mathbb{R}^d$:

$$\int \chi_Q(x, y) d\mu(y) = \begin{cases} \text{Länge von } I_{d+1} & \text{wenn } x \in I_1 \times \ldots \times I_d, \\ 0 & \text{wenn } x \notin I_1 \times \ldots \times I_d. \end{cases}$$

Also ist

$$\int \left(\int \chi_Q(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \mu(Q).$$

Wegen der Linearität des Integrals definiert die Abbildung $\int d\mu(y)$ also eine lineare Abbildung von den Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ in die Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^d$. Und für jede Treppenfunktion f auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ gilt

$$\int \left(\int f(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int f d\mu.$$

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass diese Abbildung eine Abbildung

$$\int d\mu(y) : L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R}^d)$$

induziert, so dass für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ gilt

$$\int \left(\int f(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int f d\mu.$$

Wenn $f \geq g$ zwei Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ sind, dann erfüllen für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ die entsprechenden Treppenfunktionen $f_x : y \to f(x,y)$ bzw. $g_x : y \to g(x,y)$ auch $f_x \geq g_x$. Wegen Proposition 12.8 gilt für die Integrale auch

$$\int f(x,y)d\mu(y) \geq \int g(x,y)d\mu(y).$$

Also definiert $\int d\mu(y)$ eine lineare monotone Abbildung von den Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ in die Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^d$. Damit diese Abbildungen eine Abbildung von $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ nach $L^1(\mathbb{R}^d)$ induziert, müssen zwei fast überall definierte Grenzwerte von monoton wachsenden Treppenfunktionen, die fast überall übereinstimmen, auch auf zwei fast überall definierte Grenzwerte von monoton wachsenden Treppenfunktionen abgebildet werden, die fast überall übereinstimmen.

Lemma 12.19. *Sei $S \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ eine Nullmenge. Dann ist fast überall in $x \in \mathbb{R}^d$, die Menge $S_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in S\}$ eine Nullmenge von $\mathbb{R}$.*

Beweis: Wegen Satz 12.10 gibt es eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$von Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ mit beschränkten Integralen, die auf S divergiert. Dann sind auch die entsprechenden Integrale $(\int f_n d\mu(y))_{n\in\mathbb{N}}$ über $\mathbb{R}$ monoton wachsende Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen auf $\mathbb{R}^d$. Wegen Satz 12.9 konvergieren die entsprechenden Integrale dann fast überall auf $x \in \mathbb{R}^d$. Für alle $x \in \mathbb{R}^d$, für die die Integrale konvergieren, sind die entsprechenden Einschränkungen auf $\{x\} \times \mathbb{R}$ monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}$ mit beschränkten Integralen. Wegen Satz 12.9 sind also für alle $x \in \mathbb{R}^d$, so dass die Integrale über $\mathbb{R}$ konvergieren, die Mengen S_x Nullmengen. **q.e.d.**

Proposition 12.20. *Die Integration über $\mathbb{R}$ induziert eine lineare monotone Abbildung von $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ nach $L^1(\mathbb{R}^d)$, so dass für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ gilt*

$$\int \left(\int f(x,y)d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int f d\mu.$$

Beweis: Weil die Integration über $\mathbb{R}$ eine monotone lineare Abbildung von den Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ in die Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^d$ definiert und wegen Lemma 12.19, induziert sie eine Abbildung von den Äquivalenzklassen von den Grenzwerten von monoton wachsenden Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ in die entsprechenden Äquivalenzklassen auf $\mathbb{R}^d$. Wegen der Konstruktion des Lebesgueintegrals induziert sie also auch eine Abbildung von $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ nach $L^1(\mathbb{R}^d)$. Weil für alle Treppenfunktionen f auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ gilt

$$\int \left(\int f(x,y)d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int f d\mu.$$

gilt das auch für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$. **q.e.d.**

Die Argumente zeigen die analoge Aussage auch für die vertauschten Faktoren $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Wenn wir die mehrfach anwenden erhalten wir also

Korollar 12.21. *(Satz von Fubini) Für alle Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'})$ gilt*

$$\int \left(\int f(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int \left(\int f(x, y) d\mu(x) \right) d\mu(y). \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Mit dem Satz von Fubini und dem Lebesguekriterium können wir jetzt auch Integrale auf dem $\mathbb{R}^d$ ausrechnen. Als erstes können wir für fast alle $(x_2, \ldots, x_s) \in \mathbb{R}^d$ das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_d) dx_1$ ausrechnen. Wenn f riemannintegrabel ist können wir dabei die Methoden der eindimensionalen Integration, wie wir sie bei dem Riemannintegral kennen, benutzen. Wenn f außerhalb einer kompakten Menge verschwindet, benutzen wir das Riemannintegral und ansonten das uneigentliche Riemannintegral. Dann integrieren wir genauso über $dx_2, \ldots, dx_d$ bis wir schließlich haben

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_d) dx_1 \ldots dx_d.$$

Wir können die Reihenfolge dieser eindimensionalen Integrale beliebig vertauschen.

12.5 Konvergenzsätze

In diesem Abschnitt werden wir drei Aussagen darüber beweisen, wann Grenzwertbildungen mit der Integration vertauschen. Als erstes werden wir die Konvergenz von monotonen Folgen mit beschränkten Integralen beweisen.

Satz 12.22. *(Satz der monotonen Konvergenz von Beppo Levi) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monotone Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit beschränkten Integralen. Dann konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fast überall gegen eine Funktion f in $L^1(\mathbb{R}^d)$ und es gilt*

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Beweis: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monotone Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit beschränkten Integralen. Durch Übergang zu $(\pm f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ können wir annehmen, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Funktionen mit beschränkten Integralen ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ seinen $(\tilde{g}_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{h}_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen, so dass fast überall gilt

$$f_n = \lim_{m \to \infty} \tilde{g}_{nm} - \lim_{m \to \infty} \tilde{h}_{nm}.$$

Die entsprechenden Folgen der Integrale $(\int \tilde{g}_{nm}d\mu)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(\int \tilde{h}_{nm}d\mu)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $M(n) \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass für alle $m, m' \geq M(n)$ gilt

$$\left|\int \tilde{h}_{nm}d\mu - \int \tilde{h}_{nm'}d\mu\right| \leq 2^{-n}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien h_{nm} und g_{nm} induktiv definiert durch

$$h_{nm} = \begin{cases} h_{n-1m} & \text{für } m < M(n) \\ \tilde{h}_{nm} - \tilde{h}_{nM(n)} + h_{n-1m} & \text{für } m \geq M(n) \end{cases} \quad \text{und} \quad g_{nm} = \tilde{g}_{nm} - \tilde{h}_{nM(n)} + h_{n-1m}$$

mit $h_{0m} = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Weil die Folgen $(\tilde{h}_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend sind, folgt induktiv für alle $n \in \mathbb{N}$ dass die Folgenglieder der Folgen $(h_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ nicht negativ sind. Weil auch die Folgen $(\tilde{g}_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend sind, gilt dies auch für $(g_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ und $(h_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$. Aufgrund der Wahl von $M(n)$ sind die Integrale $(\int h_{nm}d\mu - \int h_{n-1m}d\mu)_{m\in\mathbb{N}}$ beschränkt durch 2^{-n}. Also sind alle Integrale $(\int h_{nm}d\mu)_{n,m\in\mathbb{N}}$ beschränkt durch 1. Weil $(\int f_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt sind, und fast überall $g_{nm} \leq f_n + \lim_{m\to\infty} h_{nm}$ gilt, sind auch die Integrale $(\int g_{nm}d\mu)_{n,m\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ bzw. $m \in \mathbb{N}$ seien

$$g_n = \lim_{m\to\infty} g_{nm} \qquad \text{und} \qquad h_n = \lim_{m\to\infty} h_{nm},$$
$$\tilde{g}_m = \max\{g_{1m}, \ldots, g_{mm}\} \qquad \text{und} \qquad \tilde{h}_m = \max\{h_{1m}, \ldots, h_{mm}\}.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ auch fast überall $f_n = g_n - h_n$. Außerdem ist die Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Grund der Definition von h_{nm} fast überall monoton wachsend und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_n + h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch. Dann sind $(\tilde{g}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{h}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen, deren Integrale beschränkt sind durch $\int \tilde{g}_m d\mu \leq 1 + \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$ und $\int \tilde{h}_m d\mu \leq 1$. Seien $\tilde{g}$ und $\tilde{h}$ die entsprechenden Grenzwerte. Für $n \leq m$ gilt

$$g_{nm} \leq \tilde{g}_m \quad \text{und} \quad h_{nm} \leq \tilde{h}_m.$$

Im Grenzwert $m \to \infty$ folgt fast überall die Existenz der Grenzwerte $n \to \infty$

$$g_n \leq \tilde{g} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} g_n = g \leq \tilde{g} \quad \text{und} \quad h_n \leq \tilde{h} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} h_n = h \leq \tilde{h}.$$

Weil $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall monoton wachsende Folgen sind, gilt fast überall

$$\tilde{g}_m \leq \max\{g_1, \ldots, g_m\} = g_m \quad \text{und} \quad \tilde{h}_m \leq \max\{h_1, \ldots, h_m\} = h_m.$$

Also gilt fast überall $g = \tilde{g}$ und $h = \tilde{h}$ bzw. $f = \tilde{g} - \tilde{h} = g - h$. Aus Lemma 12.12 folgt

$$\int f d\mu = \lim_{m\to\infty} \int \left(\tilde{g}_m - \tilde{h}_m\right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (g_n - h_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Korollar 12.23. *(Norm $\|\cdot\|_1$) Auf $L^1(\mathbb{R}^d)$ definiert*

$$\|\cdot\|_1 : \quad L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_1 = \int |f| d\mu \qquad \textit{eine Norm.}$$

Beweis: Die Dreiecksungleichung und die Eigenschaft

$$\|\lambda f\|_1 = \int |\lambda| \cdot |f| d\mu = |\lambda| \cdot \int |f| d\mu = |\lambda| \|f\|_1$$

folgt aus der Monotonie und der Linearität des Lebesgueintegrals. Zu zeigen bleibt noch, dass aus $\|f\|_1 = 0$ folgt $f = 0$ fast überall. Sei also $\int |f| d\mu = 0$. Dann konvergiert wegen dem Satz der monotonen Konvergenz die Folge $(n|f|)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall. Also gilt auch fast überall $|f| = 0$. **q.e.d.**

Korollar 12.24. *(Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$ und $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ fast überall $|f_n| \leq k$ gilt. Wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen f konvergiert, dann ist $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\int f d\mu$.*

Beweis: Seien $(g_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ und $(h_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$g_{nm} = \min\{f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+m}\} \quad \text{und} \quad h_{nm} = \max\{f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+m}\}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind wegen den Eigenschaften der lebesgueintegrablen Funktionen $(g_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton fallende Folgen in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit durch $\int k d\mu$ beschränkten Integralen, und $(h_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Funktionen mit durch $\int k d\mu$ beschränkten Integralen. Wegen dem Satz der monotonen Konvergenz konvergieren diese Folgen fast überall gegen Funktionen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Fast überall sind

$$g_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots\} \quad \text{und} \quad h_n = \sup\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots\}$$

monotone Folgen in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit beschränkten Integralen. Also konvergieren $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen f. Dann gilt auch

$$\int g_n d\mu \leq \int f_n d\mu \leq \int h_n d\mu \quad \text{und} \quad \int f d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu. \quad \textbf{q.e.d.}$$

Korollar 12.25. *(Vollständigkeit von $L^1(\mathbb{R}^d)$, Satz von Riesz-Fischer) $L^1(\mathbb{R}^d)$ ist mit $\|\cdot\|_1$ ein Banachraum.*

Beweis: Sei $(f_n)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $\|f_{n_{m+1}} - f_{n_m}\|_1 \leq 2^{-m}$. Die Reihe $\left(\sum_{m=1}^{n} \left|f_{n_{m+1}} - f_{n_m}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt dann die Voraussetzungen des Satzes der monotonen Konvergenz. Also konvergiert sie fast überall gegen eine Funktion $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann konvergiert auch die Folge $(f_{n_m} - f_{n_1})_{m\in\mathbb{N}}$ fast überall und erfüllt mit $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$ die Voraussetzungen von Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz. Dann konvergiert auch die Teilfolge gegen einen Grenzwert $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Weil $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, konvergiert $(\|f_n - f\|_1)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null, und damit auch $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f. **q.e.d.**

Im Allgemeinen konvergieren in $L^1(\mathbb{R}^d)$ konvergente Folge nicht fast überall gegen den Grenzwert, sondern nur Teilfolgen von ihnen.

Beispiel 12.26. *Wir betrachten für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \{1-n^2, 2-n^2, \ldots, n^2\}$ die charakteristische Funktion $\chi_{n,k}$ der abgeschlossenen Intervalle $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$. Sei $m \mapsto (n,k)$ eine Abzählung solcher Paare (n,k) mit $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1-n^2, 2-n^2, \ldots, n^2\}$. Dann ist die entsprechende Folge $(\chi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ eine Nullfolge, weil es für alle $n \in \mathbb{N}$ nur endlich viele $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $\|\chi_m\|_1 \geq \frac{1}{n}$. Andererseits gibt es für alle $x \in \mathbb{R}$ unendlich viele $m \in \mathbb{N}$ mit $\chi_m(x) = 1$. Also konvergiert $(\chi_m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ für kein $x \in \mathbb{R}$ gegen 0.*

Satz 12.27. *(Fatou's Lemma) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$ von fast überall nicht negativen Funktionen, die fast überall gegen f konvergieren. Wenn $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, dann ist $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und es gilt*

$$\int f d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \left\{ \int f_{n+m} d\mu \mid m \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Beweis: Sei wieder $g_{nm} = \min\{f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+m}\}$. Dann erfüllen für alle $n \in \mathbb{N}$ die Folgen $(g_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen des Satzes der monotonen Konvergenz. Also konvergieren für alle $n \in \mathbb{N}$ diese Folgen gegen $g_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $g_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, \ldots\}$. Die Folgen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllen wieder die Voraussetzungen des Satzes der monotonen Konvergenz und konvergieren fast überall gegen f. Also gilt auch $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und fast überall $f_{n+m} \geq g_n$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Es folgt $\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu$ und $\int f d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf\{\int f_{n+m} d\mu \mid m \in \mathbb{N}_0\}$. **q.e.d.**

12.6 Jacobis Transformation von Maßen

In diesem Abschnitt untersuchen wir, wie sich die Integration unter Koordinatentransformationen verhält. Wir verallgemeinern also die Substitutionsregel auf $\mathbb{R}^d$. Wir benutzen in diesem Abschnitt auf $\mathbb{R}^d$ die Norm $\|\cdot\|_\infty$ aus Definition 9.9. Dann sind nämlich die offenen Bälle genau die offenen Quader mit gleichen Kantenlängen.

Definition 12.28. *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ heißt messbar, wenn für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ das Produkt $f \cdot \chi_A$ mit der charakteristischen Funktion von A in $L^1(\mathbb{R}^d)$ liegt.*

Satz 12.29. **(i)** *Das Komplement einer messbaren Menge ist messbar.*

(ii) *Die Schnittmenge von abzählbar vielen messbaren Mengen ist messbar.*

(iii) *Jede offene Menge ist messbar.*

Beweis: (i) Weil die charakteristische Funktion des Komplements gerade 1 minus der charakteristischen Funktion ist, folgt (i) daraus, dass $L^1(\mathbb{R}^d)$ ein Vektorraum ist.
(ii) Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbar und $A = \bigcap_n A_n$. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ konvergiert die Folge $(f\prod_{k=1}^n \chi_{A_k})_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen $f\chi_A$ und ihre Absolutbeträge sind beschränkt durch $|f| \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Aus Lebesgues Satz der beschränkten Konvergenz folgt $f\chi_A \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
(iii) Jeder Quader ist messbar, weil die Multiplikation einer Treppenfunktion mit der charakteristischen Funktion eines Quaders eine Treppenfunktion ist. Für eine offene Menge $U \neq \mathbb{R}^d$ und $x \in U$ enthält $B(x, \sup\{\frac{r}{3} > 0 \mid B(x,r) \subset U\})$ ein Element $y \in U \cap \mathbb{Q}^d$, so dass $B(y, \sup\{\frac{r}{2} > 0 \mid B(x,r) \subset U\}) \subset U$ das Element x enthält. Deshalb ist U folgende abzählbare Vereinigung von offenen bzw. kompakten Quadern

$$U = \bigcup_{y\in U\cap\mathbb{Q}^d} B(y, \sup\{\tfrac{r}{2} > 0 \mid B(x,r) \subset U\}) = \bigcup_{y\in U\cap\mathbb{Q}^d} \overline{B(y, \sup\{\tfrac{r}{2} > 0 \mid B(x,r) \subset U\})}.$$

Dann folgt (iii) aus (i) und (ii) und den de Morganschen Regeln. **q.e.d.**

Für messbare Mengen A bilden die Produkte von lebesgueintegrablen Funktionen mit der charakteristischen Funktion χ_A von A den Teilraum von $L^1(\mathbb{R}^d)$ aller lebesgueintegrablen Funktionen, die außerhalb von A verschwinden.

Definition 12.30. *Für messbare Teilmengen A von $\mathbb{R}^d$ sei $L^1(A) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ der Teilraum aller lebesgueintegrablen Funktionen auf $\mathbb{R}^d$, die außerhalb von A verschwinden.*

Lemma 12.31. (i) *Die Multiplikation mit einer beschränkten stetigen Funktion f ist eine lineare Abbildung in $\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^d))$, deren Norm beschränkt ist durch $\|f\|_\infty$.*

(ii) *Sei $\Phi : U \to O$ eine bijektive lipschitzstetige Abbildung zwischen den offenen Mengen $U, O \subset \mathbb{R}^d$ mit Lipschitzkonstante L. Dann ist $f \mapsto f\circ\Phi^{-1}$ eine lineare stetige Abbildung $L^1(U) \to L^1(O)$, deren Norm beschränkt ist durch L^d.*

(iii) *Sei $\Phi : U \to O$ eine bijektive Abbildung zwischen offenen Mengen $U, O \subset \mathbb{R}^d$ mit $\|\Phi(x) - \Phi(y) - (x-y)\|_\infty \le \epsilon\|x-y\|_\infty$ für $x, y \in U$ und ein $\epsilon \in (0,1)$. Dann gilt*

$$\left|\int_U f\circ\Phi d\mu - \int_O f d\mu\right| \le ((1-\epsilon)^{-d} - 1)\|f\|_1 \qquad \text{für alle } f \in L^1(O).$$

Beweis: (i) Für eine beschränkte stetige Funktion f und eine Treppenfunktion g gilt $|fg| \le \|f\|_\infty |g|$ und wegen Satz 12.15 $gf \in L^1(\mathbb{R}^d)$, und wegen Satz 12.14 auch (i).
(ii) Für eine monoton wachsende Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen gilt entweder $g_n - g_m \ge 0$ oder $g_n - g_m \le 0$. Deshalb ist $\|g_n - g_m\|_1$ beschränkt durch $|\int g_n d\mu - \int g_m d\mu|$. Also konvergiert $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_1$, und die Treppenfunktionen liegen dicht in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Für jeden Quader Q ist χ_Q bezüglich $\|\cdot\|_1$ der Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen, dessen Quader rationale Koordinaten haben. Jede solche Treppenfunktion ist eine Linearkombination von $\{(\chi_{\overline{B(x,r)}}) \mid x \in$

$\mathbb{Q}^d, r \in \mathbb{Q}^+\}$. Deshalb liegen diese Linearkopmbinationen dicht in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Im Beweis von Satz 12.29 (iii) haben wir gezeigt, dass die Schnittmengen $B(x,r) \cap U$ abzählbare Vereinigungen von kompakten Bällen in U sind. Deshalb liegen die Linearkombinationen von $\{\chi_{\overline{B(x,r)}} \mid \overline{B(x,r)} \subset U\}$ auch dicht in $L^1(U)$. Für $\overline{B(x,r)} \subset U$ ist $\Phi[\overline{B(x,r)}]$ kompakt und in $\overline{B(\Phi(x), Lr)}$ enthalten. Wegen Lemma 12.29 gilt für $f = \chi_{\overline{B(x,r)}}$

$$f \circ \Phi^{-1} \in L^1(O) \quad \text{und} \quad \|f \circ \Phi^{-1}\|_1 \leq L^d \|f\|_1.$$

Dann gilt dies auch für alle Linearkombinationen von $\{\chi_{\overline{B(x,r)}} \mid \overline{B(x,r)} \subset U\}$, für alle Treppenfunktionen und ihre Grenzwerte $f \in L^1(U)$. Dann folgt (ii) aus Satz 9.56.
(iii) Aus $\|\Phi(x) - \Phi(y) - (x-y)\|_\infty \leq \epsilon \|x-y\|_\infty$ folgt

$$(1-\epsilon)\|x-y\|_\infty \leq \|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty \leq (1+\epsilon)\|x-y\|_\infty.$$

Wegen (ii) wird $L^1(O)$ durch $f \mapsto f \circ \Phi \in L^1(U)$ stetig auf $L^1(U)$ abgebildet. Wie in (ii) genügt es die Behauptung für $f \in \{\chi_{\overline{B(x,r)}} \mid \overline{B(x,r)} \subset O\}$ zu zeigen. Wegen $\overline{B(\Phi^{-1}(x), \frac{r}{1+\epsilon})} \subset \Phi^{-1}[\overline{B(x,r)}] \subset \overline{B(\Phi^{-1}(x), \frac{r}{1-\epsilon})}$ und $1-(1+\epsilon)^{-d} \leq (1-\epsilon)^{-d} - 1$ folgt

$$\left| \int \chi_{\overline{B(x,r)}} \circ \Phi d\mu - \int \chi_{\overline{B(x,r)}} d\mu \right| \leq \left((1-\epsilon)^{-d} - 1\right) \|\chi_{\overline{B(x,r)}}\|_1. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Satz 12.32. *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ ein invertierbare lineare Abbildung. Dann ist*

$$\pi(A) : L^1(\mathbb{R}^d) \to L^1(\mathbb{R}^d), \quad f \mapsto \pi(A)f \quad \textit{mit } (\pi(A)f)(x) = f(A^{-1}x)$$

eine stetige lineare Abbildung, deren Norm beschränkt ist durch $\|A\|^d$.Es gilt

$$\int \pi(A) f d\mu = |\det A| \int f d\mu \quad \textit{für alle } f \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

Beweis: Aus Lemma 12.31 (ii) folgt $\pi(A) \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^d))$ und $\|\pi(A)\| \leq \|A\|^d$. Wie im Beweis von Lemma 12.31 (ii) genügt es die letzte Gleichung für $f = \chi_{\overline{B(x,r)}}$ zu zeigen. Weil dann beide Seiten der Gleichung nicht von x abhängen, genügt es den Fall $x = 0$ zu zeigen. Für diagonale Matrizen A folgt die Gleichung aus dem Satz von Fubini. Für $r > 0$ gilt $A = r\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d} \circ A \circ \frac{1}{r}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}$ und $(\frac{1}{r}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d})[B(0,r)] = B(0,1)$. Dann folgt

$$\int f \circ A^{-1} d\mu = \alpha(A) \int f d\mu \quad \text{für alle } f \in L^1(\mathbb{R}^d) \quad \text{mit} \quad \alpha(A) = \frac{\int \chi_{A[\overline{B(0,1)}]} d\mu}{\int \chi_{\overline{B(0,1)}} d\mu}$$

für invertierbare A. Für zwei invertierbare $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ gilt $\pi(A \cdot B) = \pi(A) \cdot \pi(B)$. Also gilt $\alpha(A \cdot B) = \alpha(A)\alpha(B)$. Aus $\alpha(\mathbb{1}) = 1$ folgt $\alpha(A^{-1}) = \alpha^{-1}(A)$. Dann gilt $\alpha(A) = |\det A|$ für diagonalisierbare Matrizen A, also alle A mit paarweise verschiedenen Eigenwerten. Weil die Diskriminante $\mathrm{Dis}(A)$ des charakteristischen Polynoms als

Polynom in den Einträgen von A mit ihrer Taylorreihe bei jedem $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ übereinstimmt, verschwindet Dis auf keiner offenen Teilmenge in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Dann liegen die diagonalisierbaren dicht in den invertierbaren Matrizen. Wegen Lemma 12.31 (iii) folgt $|\alpha(A^{-1}) - \alpha(\mathbb{1})| \leq ((1-\epsilon)^{-d} - 1)\alpha(\mathbb{1})$ aus $\|A^{-1} - \mathbb{1}\| \leq \epsilon$. Es folgt $|\alpha(A) - \alpha(B)| \leq |\alpha(A)|((1 - \|A^{-1}\| \cdot \|B - A\|)^{-d} - 1)$. Also ist α stetig und $\alpha(A) = |\det A|$. **q.e.d.**

Satz 12.33. *(Jacobis Transformationsformel) Sei $\Phi : U \to O$ eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung von der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ auf die offene Menge $O \subset \mathbb{R}^d$. Wenn Φ' auf U in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ invertierbar ist, dann ist die Abbildung $f \to |\det(\Phi')|\,(f \circ \Phi)$ eine Isometrie von $L^1(O)$ nach $L^1(U)$, d.h. für $f \in L^1(O)$ gilt*

$$\int_U |\det \Phi'| f \circ \Phi d\mu = \int_O f d\mu.$$

Beweis: Im Beweis von Lemma 12.31 (ii) haben wir gesehen, dass die Linearekombinationen von $\{\chi_{\overline{B(x,r)}} \mid \overline{B(x,r)} \subset O\}$ dicht in $L^1(O)$ liegen. Deshalb genügt es

$$\int |\det \Phi'| \chi_Q \circ \Phi d\mu = \int \chi_Q d\mu$$

für kompakte Quader $Q \subset O$ zu zeigen. Weil Φ' auf U in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ invertierbar ist, ist wegen dem Satz der inversen Funktion Φ^{-1} stetig differenzierbar und $\Phi^{-1}[Q] \subset U$ kompakt. Wegen Korollar 9.35 gilt $M^{-1} \leq \|\Phi'^{-1}\| \leq L$ auf $\Phi^{-1}[Q]$ für positive L und M. Wegen dem Schrankensatz Korollar 10.6 ist L eine Lipschitzkonstante von Φ^{-1}. Weil Φ' wegen Satz 9.39 auf $\Phi^{-1}[Q]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es für jedes $0 < \epsilon < 1$ eine Zerlegung $Q = Q_1 \cup \ldots \cup Q_N$ in paarweise disjunkte Quader, auf deren Urbildern $\Phi^{-1}[Q_1], \ldots, \Phi^{-1}[Q_N]$ jeweils $\|\Phi' - A_n\| \leq M\epsilon$ oder auch $\|\Phi' \circ A_n^{-1} - \mathbb{1}\| \leq \|A_n^{-1}\| M\epsilon \leq \epsilon$ gilt. Hierbei ist $A_n = \Phi'(\Phi^{-1}(x_n))$ am Zentrum x_n von Q_n. Aus dem Schrankensatz folgt $\|(\Phi \circ A_n^{-1})(x) - (\Phi \circ A_n^{-1})(y) - (x - y)\|_\infty \leq \epsilon \|x - y\|_\infty$, und mit Lemma 12.31 (iii)

$$\left| \int \chi_{Q_n} \circ \Phi \circ A_n^{-1} d\mu - \int \chi_{Q_n} d\mu \right| \leq \left((1-\epsilon)^{-d} - 1\right) \|\chi_{Q_n}\|_1 \quad \text{für } n = 1, \ldots, N.$$

Auf dem Quader Q_n liegen jeweils alle Eigenwerte von $\Phi'(x) \circ A_n^{-1}$ in $(1-\epsilon, 1+\epsilon)$. Es folgt $|\det \Phi' - \det A_n| \leq |\det A_n|((1+\epsilon)^d - 1)$. Satz 12.32 ergibt

$$\begin{aligned}\left| \int |\det \Phi'| \chi_{Q_n} \circ \Phi d\mu - \int \chi_{Q_n} \circ \Phi \circ A_n^{-1} d\mu \right| &\leq \int \big||\det \Phi'| - |\det A_n|\big| \chi_{Q_n} \circ \Phi d\mu \\ &\leq \left((1+\epsilon)^d - 1\right) \int |\det A_n| \chi_{Q_n} \circ \Phi d\mu \leq \left((1+\epsilon)^d - 1\right)(1-\epsilon)^{-d} \|\chi_{Q_n}\|_1.\end{aligned}$$

Für $\epsilon \to 0$ folgt $\left| \int |\det \Phi'| \chi_Q \circ \Phi d\mu - \int \chi_Q d\mu \right| \leq C\epsilon \|\chi_Q\|_1 \to 0.$ **q.e.d.**

12.7 Integration über den Rand einer Menge

In diesem Abschnitt definieren wir die Integration über den stetig differenzierbaren Rand einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Wir benutzen auf $\mathbb{R}^d$ die euklidische Norm.

Definition 12.34. *(Zerlegung der Eins) Eine glatte Zerlegung der Eins bezüglich einer offenen Überdeckung einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, ist eine abzählbare Familie $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von glatten Funktionen $h_n : \Omega \to [0,1]$, so dass*

(i) *für jedes $x \in \Omega$ auf einer Umgebung von x nur endlich viele h_n ungleich Null sind.*

(ii) *Für alle $x \in \Omega$ gilt $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) = 1$.*

(iii) *Jedes h_n außerhalb eines Elementes der offenen Überdeckung verschwindet.*

Satz 12.35. *(Existenz der Zerlegung der Eins) Jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ besitzt eine glatte Zerlegung der Eins.*

Beweis: Für $0 < a < b < \infty$ sei $h_{a,b} \in C^\infty(\mathbb{R})$ definiert durch

$$h_{a,b} : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto h_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le |x| \le a \\ \exp\left(\frac{1}{x^2-b^2}\exp\left(\frac{-1}{x^2-a^2}\right)\right) & \text{für } a < |x| < b \\ 0 & \text{für } b \le |x| \end{cases}.$$

Im Beweis von Lemma 12.29 (ii) haben wir gezeigt, dass jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine abählbare Vereinigung von offenen Quadern ist, deren Abschlüsse kompakte Teilmengen von Ω sind. Weil der Abschluss von endlich vielen dieser abzählbaren Überdeckung jeweils kompakt ist, und deshalb von endlich vielen Elementen der Überdeckung überdeckt wird, gibt es eine Folge von offenen Teilmengen $(O_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von Ω, die Ω überdecken, und deren Abschlüsse $\bar{O}_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ in O_{m+1} enthalten sind. Wir setzen $O_0 = O_{-1} = \emptyset$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jeden Punkt $x \in \bar{O}_m \setminus O_{m-1}$ ist $B(x, 3r)$ für ein $r > 0$ in $O_{m+1} \setminus \bar{O}_{m-2}$ und in einer der offenen Mengen von $\mathcal{U}$ enthalten. Also wird die kompakte Menge $\bar{O}_m \setminus O_{m-1}$ von endlich vielen solchen Bällen $B(x, r)$ überdeckt. Wir erhalten induktiv eine Folge von offenen Bällen $(B(x_n, r_n))_{n\in\mathbb{N}}$, die Ω überdecken, und deren Bälle $(B(x_n, 3r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils in einer der offenen Mengen von $\mathcal{U}$ enthalten, und jeweils nur mit endlich vielen anderen Bällen $(B(x_n, 3r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht schnittfremd sind. Dann ist die Familie $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} h_n : \Omega \to [0,1], \quad x \mapsto h_n(x) &= h_{r_n,2r_n}(\|x - x_n\|) \prod_{m=1}^{n-1} (1 - h_{r_m,2r_m}(\|x - x_m\|)) \\ &= \prod_{m=1}^{n-1} (1 - h_{r_m,2r_m}(\|x - x_m\|)) - \prod_{m=1}^{n} (1 - h_{r_m,2r_m}(\|x - x_m\|)). \end{aligned}$$

eine glatte Zerlegung der Eins bezüglich der Überdeckung $\mathcal{U}$. Denn induktiv gilt

$$h_1(x)+\ldots+h_n(x)+(1-h_{r_1,2r_1}(\|x-x_1\|)\cdots(1-h_{r_n,2r_n}(\|x-x_n\|)=1 \quad \text{für jedes } n\in\mathbb{N},$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ verschwindet $(1-h_{r_n,2r_n}(\|x-x_n\|)$ auf $B(x_n, r_n)$. **q.e.d.**

Satz 12.36. *Für jede $d\times(d-1)$-Matrix A gibt es genau einen Spaltenvektor $A^{\#}\in\mathbb{R}^d$, so dass $\det(A,x) = x^t\cdot A^{\#}$ für alle $x\in\mathbb{R}^d$ gilt. Er steht senkrecht auf dem Bild von A als Hyperfläche in $\mathbb{R}^d$ und seine Länge ist der Flächeninhalt des Bildes von $[0,1]^{d-1}$ unter A in $\mathbb{R}^d$. Für eine $d\times d$-Matrix A gilt $A|^{\#}_{\mathbb{R}^{d-1}} = \det(A)(A^{-1})^t e_d$.*

Beweis: Weil det multilinear ist, ist $x\mapsto\det(A,x)$ linear und deshalb gleich

$$\begin{aligned}\det(A,x) &= x_1\det(A,e_1)+\ldots+x_d\det(A,e_d)\\ &= x^t\cdot A^{\#} \quad \text{mit} \quad A^{\#} = (\det(A,e_1),\ldots,\det(A,e_d)).\end{aligned}$$

Für $x\in A[\mathbb{R}^{d-1}]$ verschwindet $\det(A,x)$. Für den Normalenvektor N, der auf dem Bild von A senkrecht steht, und die Länge Eins hat, ist $|\det(A,N)|$ das zwischen $A[[0,1]^{d-1}]$ und $N+A[[0,1]^{d-1}]$ eingespannte Volumen, also der Flächeninhalt von $A[[0,1]^{d-1}]$. Auch für nichtinvertierbare $A\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ gilt $\det(A|_{\mathbb{R}^{d-1}},x) = \det(Ae_1,\ldots,Ae_{d-1},x) = \det(e_1,\ldots,e_{d-1},\det(A)A^{-1}x) = e_d\cdot\det(A)A^{-1}x = x^t\cdot\det(A)(A^{-1})^t e_d$. **q.e.d.**

Die Mengen, die wir im Gaußschen Satz betrachten wollen, sollen einen zweimal differenzierbaren Rand haben.

Definition 12.37. *Eine offene Menge $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ hat einen k–mal (stetig) differenzierbaren Rand $\partial\Omega = \overline{\Omega}\cap\Omega^c$, wenn für jeden Punkt $x\in\overline{\Omega}$ eine bijektive, k–mal (stetig) differenzierbare Abbildung $\Phi: U\to O\subset\mathbb{R}^d$ auf eine in $\mathbb{R}^d$ offene Umgebung O von x mit k–mal (stetig) differenzierbarer Umkehrabbildung existiert, so dass*

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}[\Omega\cap O] &= U\cap\{x\in\mathbb{R}^d\mid x_d>0\}\\ \Phi^{-1}[\Omega^c\cap O] &= U\cap\{x\in\mathbb{R}^d\mid x_d\le 0\}\\ \Phi^{-1}[\partial\Omega\cap O] &= U\cap\{x\in\mathbb{R}^d\mid x_d=0\}\end{aligned}$$

Bei $\Phi(x)\in\partial\Omega$ gehört $y\in\mathbb{R}^d$ genau dann zum Tangentialraum an $\partial\Omega$, wenn gilt

$$(\Phi'(x))^{-1}y\cdot e_d = 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad y\cdot\left((\Phi'(x))^{-1}\right)^t e_d = 0 \qquad \text{mit } e_d=(0,\ldots,0,1).$$

Die äußere Normale $N(x)$ ist im Punkt $\Phi(x)$ jenachdem ob $\det\Phi'\gtrless 0$ gegeben durch

$$N(x) = -\left\|\left((\Phi'(x))^{-1}\right)^t e_d\right\|^{-1}\left((\Phi'(x))^{-1}\right)^t e_d = \mp\|\Phi'(x)|^{\#}_{\mathbb{R}^{d-1}}\|^{-1}\Phi'(x)|^{\#}_{\mathbb{R}^{d-1}}.$$

Unter stetig differenzierbaren Abbildungen Φ mit stetig differenzierbaren Umkehrabbildungen transformieren sich der Tangentialraum an den Rand durch die Jacobimatrix und der Normalenvektor durch die transponierte der Jacobimatrix.

Beispiel 12.38. **(i):** *Sei f eine einmal stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^d$, deren Gradient ∇f keine gemeinsamen Nullstellen mit f hat. Dann hat die Menge $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) < 0\}$ einen stetig differenzierbaren Rand. Der Rand $\partial\Omega$ ist die Hyperfläche, auf der f verschwindet, die wegen dem Satz der impliziten Funktion lokal das Bild einer stetig differenzierbaren Abbildung von offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^{d-1}$ nach $\mathbb{R}^d$ ist. Auf dem Rand $\partial\Omega$ ist ∇f ein Vektor, der orthogonal auf dem Tangentialraum an den Rand steht, und nach außen zeigt. Deshalb ist $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ die äußere Normale.*

(ii): *Der Ball $B(y,r)$ mit $y \in \mathbb{R}^d$ und $r > 0$ im $\mathbb{R}^d$ ist gleich der Menge $B(y,r) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (x-y)^2 - r^2 < 0\}$. Die Funktion $f(x) = (x-y)^2 - r^2$ ist offenbar unendlich oft differenzierbar, und der Gradient $\nabla f(x) = 2(x-y)$ hat nur eine Nullstelle bei $x = y$. Also hat der Ball $B(y,r)$ einen unendlich oft differenzierbaren Rand.*

Lemma 12.39. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge mit stetig differenzierbarem Rand und $\Phi : U \to O \subset \mathbb{R}^d$ eine stetig differenzierbare Abbildung wie in Definition 12.37. Sei f eine stetige Funktion auf $\partial\Omega$ mit kompaktem Träger die außerhalb von O verschwindet. Dann ist das folgende Integral unabhängig von der Wahl von Φ:*

$$\int_{\Phi^{-1}[\partial\Omega\cap O]} \|\Phi'|^{\#}_{\mathbb{R}^{d-1}}\| f \circ \Phi d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}}.$$

Beweis: Seien Φ und $\tilde{\Phi}$ zwei solche stetig differenzierbare Abbildungen von den offenen Teilmengen U bzw. $\tilde{U}$ nach O. Dann ist $\tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi$ eine stetig differenzierbare Abbildung von U nach $\tilde{U}$. Im Folgenden seien $x = \Phi^{-1}(y)$ die entsprechenden Koordinate von U und $\tilde{x} = \tilde{\Phi}^{-1}(y)$ von $\tilde{O}$. Dann ist die letzte Komponente von x bzw. $\tilde{x}$ auf dem Rand $\partial\Omega$ identisch gleich Null. Also verschwinden auf dem Rand $\partial\Omega$ alle Einträge der letzten Zeile bis auf den letzten $(\tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi)'_{dd} > 0$ von der Jacobimatrix $(\tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi)'$. Außerdem ist die Determinante dieser Jacobimatrix gleich dem Produkt von $(\tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi)'_{dd}$ mit der Unterdeterminante der entsprechenden $(d-1) \times (d-1)$ Matrix, in der die letzte Zeile und die letzte Spalte gestrichen wurde. Also sind folgende Vektoren gleich:

$$\begin{aligned}
(\tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi)'_{dd} e_d &= \left((\tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi)'\right)^t e_d \\
\left((\tilde{\Phi}')^{-1}\right)^t e_d &= ((\Phi')^{-1})^t \left((\tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi)'\right)^t e_d = (\tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi)'_{dd} \left((\Phi')^{-1}\right)^t e_d.
\end{aligned}$$

Dann ergibt Satz 12.33

$$\int_{\tilde{\Phi}^{-1}[\partial\Omega\cap O]} \left\|\left((\tilde{\Phi}')^{-1}\right)^t e_d\right\| \cdot \left|\det(\tilde{\Phi}')\right| f \circ \tilde{\Phi} d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}} =$$

$$\int_{\tilde{\Phi}^{-1}[\partial\Omega\cap O]} \frac{|\det((\tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi)')|}{|(\tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi)'_{dd}|} \left(\left\|\left((\tilde{\Phi}')^{-1}\right)^t e_d\right\| \cdot \left|\det(\tilde{\Phi}')\right| f \circ \tilde{\Phi}\right) \circ (\tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi) d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}} =$$

$$= \int_{\Phi^{-1}[\partial\Omega\cap O]} \left\|\left((\Phi')^{-1}\right)^t e_d\right\| \cdot |\det(\Phi')| f \circ \Phi d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}}. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Definition 12.40. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge mit stetig differenzierbarem Rand, und f eine stetige Funktion auf $\partial\Omega$. Wir definieren mit einer Überdeckung von $\partial\Omega$ durch offene Mengen O und stetig differenzierbare Abbildungen $\Phi : U \to O$ mit* $\det \Phi' \gtrless 0$ *wie in Definition 12.37 und einer entsprechenden Zerlegung der Eins $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$:*

$$\int_{\partial\Omega} f d\sigma = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{U\cap\mathbb{R}^{d-1}} (h_n f) \circ \Phi \left\| \Phi'|^{\#}_{\mathbb{R}^{d-1}} \right\| d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}} \text{ wobei jeweils } h_n|_{\mathbb{R}^n\setminus O} = 0,$$

Für eine $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion f und die äußere Normale N auf $\partial\Omega$ definieren wir

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot N d\sigma = \mp \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{U\cap\mathbb{R}^{d-1}} ((h_n f) \circ \Phi) \cdot \Phi'|^{\#}_{\mathbb{R}^{d-1}} d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}} \text{ wobei jeweils } h_n|_{\mathbb{R}^n\setminus O} = 0.$$

Um diese Integrale zu berechnen, genügt es Φ auf $U \cap \mathbb{R}^{d-1}$ zu kennen. Stetig differenzierbare Einbettungen $\Psi : U \cap \mathbb{R}^{d-1} \to O \cap \partial\Omega$, deren Ableitungen Ψ' den Rang $d-1$ haben, lassen sich so stetig differenzierbar auf kleine Umgebungen von $U \cap \mathbb{R}^{d-1}$ fortsetzten, dass sie stetig differenzierbare Umkehrabbildungen haben. Deshalb genügt es die Existenz solcher Abbildungen $\Psi = \Phi|_{U\cap\mathbb{R}^{d-1}}$ vorauszusetzen.

12.8 Der Gaußsche Satz

Für den Beweis des Gaußschen Saztes benötigen wir noch

Lemma 12.41. *Auf den $d \times d$ Matrizen ist* det *eine differenzierbare Abbildung mit*

$$\frac{d}{dt} \det(A + tB)\bigg|_{t=0} = \operatorname{Spur}(\det(A)A^{-1}B).$$

Beweis: Für zwei $d \times d$–Matrizen A und B gilt

$$\det(A + tB) = \det(A) \det(\mathbb{1} + tA^{-1}B).$$

Die Determinante ist ein Polynom vom Grad d in den Einträgen der $d \times d$-Matrix. Also ist $\det(\mathbb{1} + tA^{-1}B)$ ein Polynom in t vom Grad d, und die Koeffizienten sind Polynome in den Einträgen von $A^{-1}B$. Die Unterdeterminanten von $\mathbb{1}$ sind genau dann Eins, wenn die genausovielte Spalte wie Zeile gestrichen wird und ansonsten Null. Also gilt

$$\det(\mathbb{1} + tA^{-1}B) = 1 + t \operatorname{Spur}(A^{-1}B) + \text{Terme höherer Ordnung}.$$

Damit folgt $\frac{d}{dt} \det(A + tB)\Big|_{t=0} = \det(A) \operatorname{Spur}(A^{-1}B)$. **q.e.d.**

Satz 12.42. *(Gaußscher Satz oder Divergenzsatz) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein offenes beschränktes Gebiet mit zweimal differenzierbarem Rand und f eine auf $\overline{\Omega}$ stetig $\mathbb{R}^d$-wertige Funktion, die auf Ω stetig differenzierbar ist, und deren partielle Ableitungen sich stetig auf $\bar{\Omega}$ forstsetzen lassen. Dann gilt mit der äußeren Normalen N auf $\partial\Omega$:*

$$\int_\Omega \nabla \cdot f d\mu = \int_{\partial\Omega} f \cdot N d\sigma.$$

Beweis: Mit einer entsprechenden Zerlegung der Eins genügt es solche f zu betrachten, die außerhalb einer offenen Menge O aus Definition 12.37 verschwinden. Für $\tilde{f} = \det(\Phi')(\Phi')^{-1}(f \circ \Phi)$ gilt wegen dem Satz von Schwarz, Korollar 11.7 und Lemma 12.41

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \tilde{f} &= \det(\Phi') \sum_{ijkl} (\Phi')^{-1}_{ij} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x_k \partial x_i} (\Phi')^{-1}_{kl} f_l \circ \Phi - \det(\Phi') \sum_{ijkl} (\Phi')^{-1}_{ij} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x_i \partial x_k} (\Phi')^{-1}_{kl} f_l \circ \Phi \\ &\quad + \det(\Phi') \operatorname{Spur}((\Phi')^{-1}(f' \circ \Phi)\Phi') = \det(\Phi') \operatorname{Spur}(f' \circ \Phi) = \det(\Phi')(\nabla \cdot f) \circ \Phi.\end{aligned}$$

Aus Jacobi's Transformation von Maßen folgt $\int_{O\cap\Omega} \nabla \cdot f d\mu = \pm \int_{\Phi^{-1}[O\cap\Omega]} \nabla \cdot \tilde{f} d\mu$, jenachdem, ob $\det \Phi' \gtrless 0$ gilt. Nach Definition 12.40 genügt es in beiden Fällen

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Phi^{-1}[O\cap\Omega]} \nabla \tilde{f} d\mu &= - \int\limits_{\Phi^{-1}[O\cap\partial\Omega]} (f \circ \Phi) \cdot (\Phi'|_{\mathbb{R}^{d-1}})^{\#} d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}} \\ &= - \int\limits_{\Phi^{-1}[O\cap\partial\Omega]} \det(\Phi')^{-1}(\Phi' \tilde{f}) \cdot \det(\Phi')((\Phi')^{-1})^t e_d d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}} = - \int\limits_{\Phi^{-1}[O\cap\partial\Omega]} \tilde{f}_n d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}}\end{aligned}$$

zu zeigen. Die Funktion $\tilde{f}$ setzt sich stetig differenzierbar auf einen hinreichnd großen abgeschlossenen Quader $Q \supset \Phi^{-1}[O \cap \Omega]$ fort, von dessen Rand eine Seite in der Hyperebene $\mathbb{R}^{d-1} \subset \mathbb{R}^n$ liegt. Mit dem Satz von Fubini und dem Hauptsatz der Differentialrechnung reduziert sich das linke Integral zu einem Integral über den Rand ∂Q. Weil $\tilde{f}$ nur auf der Seite des Randes des Quaders in $\mathbb{R}^{d-1}$ nicht verschwindet, stimmt die linke Seite mit dem Integral auf der rechten Seite überein. **q.e.d.**

Beispiel 12.43. *Sei $\Omega = B(0,r) \subset \mathbb{R}^d$ und $f(x) = x$. Auf dem Rand $\partial B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = r\}$ ist die äußere Normale gleich $N(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Dann folgt mit $\nabla \cdot f = d$*

$$\int\limits_{B(0,r)} d \cdot d\mu = d \int \chi_{B(0,r)} d\mu = \int\limits_{\partial B(0,r)} x \cdot \frac{x}{\|x\|} d\sigma = r \int\limits_{\partial B(0,r)} d\sigma.$$

Also ist die Oberfläche von $\partial B(0,r)$ gleich $\frac{d}{r}$ mal dem Volumen von $B(0,r)$.

12.9 Maßtheorie

In diesem Abschnitt untersuchen wir, wann wir eine lebesgueintegrable Funktion über eine Teilmenge integrieren können. Das führt dann zu einer allgemeineren Definition vom Volumen von sogenannten messbaren Mengen. Dieses Volumen heißt Maß.

Definition 12.44. *Eine Teilmenge $\mathcal{B}$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X heißt σ–Algebra, wenn diese Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ unter Komplementbildung und dem Schnitt von abzählbar vielen Elementen von $\mathcal{B}$ abgeschlossen ist. Wenn X ein metrischer Raum ist, dann heißen die Elemente der kleinsten σ–Algebra, die alle offenen (und abgeschlossenen) Mengen enthält, Borelmengen.*

Definition 12.45. *Sei $\mathcal{B}$ eine σ–Algebra auf der Menge X. Dann heißt $\mu : \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{R}}_0^+$ Maß, wenn für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Mengen in $\mathcal{B}$ gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Satz 12.46. *(Lebesguemaß) Seien $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ die messbaren Mengen von $\mathbb{R}^d$. Dann definiert*

$$\mu : \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \to \bar{\mathbb{R}}_0^+, \quad A \mapsto \lim_{n\to\infty} \int \chi_{Q_n}\chi_A d\mu \qquad \textit{mit} \qquad Q_n = (-n,n)^d \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}$$

ein Maß auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Es heißt Lebesguemaß. Weil die Borelmengen $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ messbar sind, definiert es auch ein Borelmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Beweis: Wegen Satz 12.29 bilden die messbaren Mengen eine σ-Algebra, die die Borelmengen enthält. Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkte messbare Mengen und

$$f_n = 1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - \chi_{A_k}) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen χ_A mit $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Für alle $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ sind $|gf_n|$ durch $|g|$ beschränkt. Wegen Lebesgues Satz der beschränkten Konvergenz konvergiert die Folge $(gf_n)_{n\mathbb{N}}$ gegen eine Funktion gf in $L^1(\mathbb{R}^d)$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int gf_n d\mu = \int gf d\mu.$$

Wenn wir diese Aussage auf die Folge $(\chi_{Q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ der charakteristischen Funktionen von den Quadern Q_n anwenden, dann konvergiert die entsprechende Folge $(\chi_{Q_n} f)_{n\mathbb{N}}$ entweder gegen eine lebesgueintegrable Funktion, und $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$ ist endlich, oder das Maß der disjunkten Vereinigung der Borelmengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist undendlich. In beiden Fällen folgt die σ–Additivität aus den Rechenregeln für Folgen. **q.e.d.**

Lemma 12.47. *(Translationsinvarianz des Lebesguesmaßes) Für $x \in \mathbb{R}^d$ ist eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ genau dann messbar bzw. eine Borelmenge, wenn $A+x = \{y \in \mathbb{R}^d \mid y-x \in A\}$ messbar bzw. eine Borelmenge ist. Wenn A messbar ist, dann gilt $\mu(A+x) = \mu(A)$.*

Beweis: Für alle Quader $Q \subset \mathbb{R}^d$ und $x \in \mathbb{R}^d$ ist $Q+x$ ein Quader mit $\mu(Q+x) = \mu(Q)$. Deshalb folgt $f_x \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $\int f_x d\mu = \int f d\mu$ aus $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $x \in \mathbb{R}^d$ für $f_x(y) = f(y-x)$. Für jede Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ gilt $\chi_{A+x} = (\chi_A)_x$. Das Lemma folgt.**q.e.d.**

Satz 12.48. *(Vitali) Die Relation $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ definiert eine Äquivalenzrelation. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ enthält $(x-1, x]$ genau eine ganze Zahl n_x. Deshalb enthält jede Äquivalenzklasse $[x]$ einen Repräsentanten $x - n_x \in [0,1)$. Sei $V \subset [0,1)$ eine Menge, die für jedes $x \in \mathbb{R}$ genau einen Repräsentanten in der entsprechenden Äquivalenzklasse $[x]$ enthält. Dann ist V nicht messbar.*

Die Definition der Menge V benutzt das sogenannte Auswahlaxiom der Mengenlehre. Es besagt, dass aus jeder nicht leeren Menge ein Element ausgewählt werden kann. In der Mengenlehre unterscheidet man zwischen Aussagen, die das Auswahlaxiom voraussetzen, und solchen, die das nicht tun. Dieser Satz gehört zu den ersteren.
Beweis: Sei $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$ und $V_n = q_n + V$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Definition von V sind die Mengen $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt und es gilt

$$[0,1] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \subset [-1,2).$$

Wegen dem vorangehenden Lemma sind entweder alle Mengen $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbar oder keine. Im ersten Fall haben alle das gleiche Maß und es folgt $1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V) \leq 3$, was unmöglich ist. Also ist V nicht messbar. **q.e.d.**

Dieser Satz zeigt auch, dass es unter der Annahme des Auswahlaxiomes unmöglich ist ein Maß auf allen Teilmengen von $\mathbb{R}$ zu definieren, das translationsinvariant ist, also das vorhergehende Lemma erfüllt, und $[0,1]$ eine positives endliches Maß zuordnet.

Definition 12.49. *Eine Äquivalenzklasse von fast überall definierten reellen Funktionen auf $\mathbb{R}^d$ heißt messbar, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen gibt, die fast überall gegen einen Repräsentanten der Äquivalenzklasse konvergiert.*

Satz 12.50. **(i)** *Die messbaren Funktionen bilden mit der punktweisen Addition und Multiplikation und der Skalarmultiplikation eine Algebra, die $L^1(\mathbb{R}^d)$ enthält.*

(ii) *Wenn f und g messbar sind, dann auch $|f|$, $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$. Ist außerdem fast überall f ungleich Null, dann ist auch $\frac{1}{f}$ messbar.*

(iii) *Der Grenzwert einer fast überall konvergenten Folge von messbaren Funktionen ist messbar.*

(iv) *Die Äquivalenzklassen von stetigen Funktionen sind messbar.*

(v) *Eine messbare Funktion ist genau dann lebesgueintegrabel, wenn ihr Betrag durch eine lebesgueintegrable Funktion beschränkt ist.*

(vi) *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ ist genau dann messbar, wenn χ_A messbar ist.*

Beweis (i): Die Treppenfunktionen bilden eine Algebra, und damit auch die messbaren Funktionen. Alle lebesgueintegrablen Funktionen sind nach unserer Definition messbar.
(ii): Der Betrag, das Maximum und das Minimum von Treppenfunktionen sind wieder Treppenfunktionen. Wenn eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen fast überall gegen eine nicht verschwindende Funktion f konvergiert, dann konvergiert die Folge

$$(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad g_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{f_n(x)} & \text{wenn } f_n(x) \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } f_n(x) = 0 \end{cases}$$

von Treppenfunktionen fast überall gegen $\frac{1}{f}$.
(iii): Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Funktionen, die fast überall gegen f konvergiert. Sei h folgende positive lebesgueintegrable Hilfsfunktion auf $\mathbb{R}^d$:

$$h : x \mapsto h(x) = \frac{2^{-n-d}}{n^d - (n-1)^d} \text{ mit } n \in \mathbb{N} \text{ so dass } x \in (-n,n)^d \setminus (1-n, n-1)^d.$$

Die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von messbaren Funktionen

$$g_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g_n(x) = \frac{h(x)f_n(x)}{h(x) + |f_n(x)|} < h(x) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

konvergiert fast überall gegen $g = \frac{h \cdot f}{h+|f|}$. Wegen Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz sind alle $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und dann auch g lebesgueintegrabel und damit auch messbar. Dann ist wegen (i) und (ii) auch folgende Funktion messbar:

$$\frac{hg}{h-|g|} = \frac{h\frac{hf}{h+|f|}}{h - \frac{h|f|}{h+|f|}} = \frac{h^2 f}{h^2 + h|f| - h|f|} = f.$$

(iv): Für jede stetige Funktion f und jeden Quader Q ist wegen Satz 12.15 das Produkt von f mit der charakteristischen Funktion von Q lebesgueintegrabel. Die Folge $(f\chi_{Q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ der Produkte mit den charakteritischen Funktionen der Quader $Q_n = (-n,n)^d$ konvergiert punktweise gegen f. Also folgt (iv) aus (i) und (iii).
(v): Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen, die fast überall gegen f konvergiert und $|f| \leq k$ für ein $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann konvergiert auch $(\max\{-k, \min\{k, f_n\}\})_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen f. Aus Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz folgt (v).
(iv): Für eine messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ konvergieren die Produkte $(\chi_A\chi_{Q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ der charakteristischen Funktionen mit denen der Quader $Q_n = (-n,n)^d$ punktweise gegen χ_A. Wegen (iii) ist also χ_A messbar. Die Umkehrung folgt aus (i) und (v). **q.e.d.**

Satz 12.51. **(i)** *Eine Äquivalenzklasse f von fast überall definierten reellen Funktionen auf $\mathbb{R}^d$ ist genau dann messbar, wenn*

(ii) *Für alle $a \in \mathbb{R}$ sind die Mengen $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \leq a\}$ messbar.*

(iii) *Für alle $a \in \mathbb{R}$ sind die Mengen $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \geq a\}$ messbar.*

(iv) *Für alle $a \in \mathbb{R}$ sind die Mengen $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) < a\}$ messbar.*

(v) *Für alle $a \in \mathbb{R}$ sind die Mengen $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) > a\}$ messbar.*

(vi) *Für alle $k \geq 0$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ liegt die Funktion $\max\{-k, \min\{k, f\}\}$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$.*

Beweis (i)⇒(ii) folgt aus Satz 12.50, weil die Folge $n\,(\max(a + 1/n, f) - \max(a, f))$ gegen die charakteristische Funktion der Menge $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \leq a\}$ konvergiert.
(ii)⇔(iii)⇔(iv)⇔(v): Wegen Satz 12.29 sind (ii) und (iv) bzw. (iii) und (v) äquivalent. Wegen $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) < a\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \leq a - \frac{1}{n}\}$ und $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \leq a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) < a + \frac{1}{n}\}$ sind auch (ii) und (iv) äquivalent.
(v)⇒(vi): Wenn eine Funktion f die äquivalenten Bedingungen (ii)–(v) erfüllt, dann sind folgende Funktionen für alle $n \in \mathbb{N}$ messbar:

$$f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n^2} \chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^d \mid f(x)\geq \frac{l}{n^2}\right\}} - \chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^d \mid f(x)\leq -\frac{l}{n^2}\right\}}.$$

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen f. Aus Satz 12.50 (iii) und (v) folgt (vi).
(vi)⇒(i): Sei Q_n für alle $n \in \mathbb{N}$ der Quader $Q_n = (-n, n)^d$. Wegen (vi) besteht die Folge $(\max\{-n\chi_{Q_n}, \min\{n\chi_{Q_n}, f\}\})_{n\in\mathbb{N}}$ aus lebsgueintegrablen Funktionen und konvergiert punktweise gegen f. Also folgt (i) aus Satz 12.50 (i) und (iii). **q.e.d.**

12.10 Die Räume $L^p(\mathbb{R}^d)$

Eine komplexwertige Funktion ist genau dann lebesgueintegrabel bzw. messbar, wenn sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil lebesgueintegrabel bzw. messbar sind. Eine messbare komplexe Funktion ist offenbar genau dann lebesgueintegrabel, wenn der Absolutbetrag lebesgueintegrabel ist. Aus Satz 12.51 folgt, dass für jede messbare Funktion f und $p \in \mathbb{R}$ auch die Funktion $|f|^p$ messbar ist.

Definition 12.52. *Für alle $1 < p < \infty$ sei $L^p(\mathbb{R}^d)$ die Menge aller Äquivalenzklassen von fast überall definierten messbaren Funktionen von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{K}$, für die die Funktion $|f|^p$ lebesgueintegrabel ist. Der Raum $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist definiert als die Menge aller Äquivalenzklassen von messbaren beschränkten Funktionen von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{K}$.*

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $p = 1$ stimmt diese Definition mit Definition 12.13 überein.

Satz 12.53. *Für alle $1 \le p \le \infty$ ist $L^p(\mathbb{R}^d)$ zusammen mit der Abbildung*

$$\|\cdot\|:\quad L^p(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R},\quad f \mapsto \|f\|_p = \begin{cases} \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \le p < \infty \\ \inf\{C \in \mathbb{R}_0^+ \mid |f| \le C \text{ a.e.}\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

ein normierter Vektorraum. Für $1 \le p, q, r \le \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ gilt $fg \in L^r(\mathbb{R}^d)$ und die Höldersche Ungleichung: $\|fg\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$.

Die Dreiecksungleichung der Norm $\|\cdot\|_p$ wird wieder Minkowski–Ungleichung genannt: für alle $f, g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ gilt $f + g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.
Beweis: Wir beweisen zuerst die Höldersche Ungleichung. Indem wir zu den Funktionen $|f|^r$ und $|g|^r$ übergehen anstatt der Funktionen f und g, und den Exponenten 1, $\frac{r}{p}$ und $\frac{r}{q}$ anstatt r, p und q, genügt es den Fall $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ für nicht–negative reelle Funktionen zu betrachten. Es gilt nämlich $\|f\|_p^r = \||f|^r\|_{\frac{p}{r}}$ bzw. $\|g\|_q^r = \||g|^r\|_{\frac{q}{r}}$. Für $p = 1,\ q = \infty$ bzw. $p = \infty,\ q = 1$ folgt die Höldersche Ungleichung aus den Eigenschaften der lebesguesintegrablen Funktionen. Für $f = 0$ oder $g = 0$ ist die Aussage offensichtlich. Sei also $f \ne 0$, $g \ne 0$ und $1 < p, q < \infty$ mit $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Die Youngsche Ungleichung ergibt für die Funktionen $\frac{|f|}{\|f\|_p}$ und $\frac{|g|}{\|g\|_q}$

$$\frac{|f|}{\|f\|_p} \frac{|g|}{\|g\|_q} \le \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \text{ fast überall.}$$

Wegen $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ ist die rechte Seite lebesguesintegrabel und das Integral gleich 1. Also ist auch die linke Seite lebesguesintegrabel und das Integral kleiner oder gleich 1. Daraus folgt $fg \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q$.

Wegen Korollar 12.23 erfüllen die Abbildungen $f \mapsto \|f\|_p$ die Positivität. Die Linearität ist offensichtlich. Für $p = 1$ und $p = \infty$ ist die Dreieckungleichung schon gezeigt. Sei also $1 < p < \infty$ und $f, g \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Offenbar gilt für $f, g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ fast überall $|f + g|^p \le 2^p \max^p\{|f|, |g|\} \le 2^p(|f|^p + |g|^p)$. Also liegt $f + g$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$. Die Höldersche Ungleichung ergibt für die Funktionen $|f + g|^p = |f + g||f + g|^{p-1} \le (|f| + |g|)|f + g|^{p-1}$ mit $f, g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Leftrightarrow (p - 1)q = p$

$$\|f + g\|_p^p \le \|f \cdot |f + g|^{p-1}\|_1 + \|g \cdot |f + g|^{p-1}\|_1 \le (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f + g\|_p^{p-1}.$$

Daraus folgt die Minkowski Ungleichung. **q.e.d.**

Satz 12.54. *(Satz von Riesz Fischer) Für alle $1 \le p \le \infty$ ist $L^p(\mathbb{R}^d)$ ein Banachraum.*

Beweis: Für $p = \infty$ folgt die Aussage aus den Sätzen 9.44 (iii) und 12.50 (iii). Sei $1 \le p < \infty$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^p(\mathbb{R}^d)$. Sei $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit $\|f_{n_{m+1}} - f_{n_m}\|_p \le 2^{-m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Die monoton wachsende Folge $g_m = |f_{n_1}| + \sum_{l=1}^m |f_{n_{l+1}} - f_{n_l}|$ für alle $m \in \mathbb{N}$ erfüllt wegen der Minkowskiungleichung $\|g_m\|_p \le 1 + \|f_{n_1}\|_p$ für alle

$m \in \mathbb{N}$. Wegen dem Satz der monotonen Konvergenz, konvergiert $(g_m^p)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen eine Funktion $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Wegen dem Monotonieprinzip konvergiert $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen eine messbare Funktion g. Dann konvergiert $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen eine messbare Funktionen f. Wegen Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz ist $|f|^p$ lebesgueintegrabel und damit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Außerdem gilt fast überall $|f - f_{n_{m+1}}| \leq |g - g_m|$ und $\|g - g_m\|_p \leq 2^{-m}$. Also konvergiert $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ gegen f. Weil $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist konvergiert sogar $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ gegen f. **q.e.d.**

Definition 12.55. *Für jede messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ und alle $1 \leq p \leq \infty$ sei $L^p(A)$ der Unterraum von $L^p(\mathbb{R}^d)$ aller Äquivalenzklassen von Funktionen, die außerhalb von A verschwinden.*

Für messbare Mengen A und $1 \leq p \leq \infty$ ist offenbar $L^p(A) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ abgeschlossen.

Korollar 12.56. *Für A messbar und $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p(A)$ ein Banachraum.* **q.e.d.**

Satz 12.57. *Für alle messbaren Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$ und alle $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist folgende Abbildung eine Isometrie:*

$$j : L^q(A) \to \mathcal{L}(L^p(A), \mathbb{K}), \quad g \mapsto j(g) \text{ mit } \quad j(g) : L^p(A) \to \mathbb{K}, \quad f \mapsto \int_A fg d\mu.$$

Beweis: Für messbaren Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$ und $1 \leq p \leq \infty$ ist j wegen der Hölderschen Ungleichung lipschitzstetig mit $L = 1$. Wir definieren f so, dass im Beweis der Hölderschen Ungleichung die Youngsche Ungleichung eine Gleichheit wird. Sei also

$$f = \frac{|g|^{\frac{q}{p}+1}}{g} = \frac{|g|^{q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}}{g} = \frac{|g|^q}{g} \quad \text{mit } f(x) = 0 \text{ für } g(x) = 0.$$

Für $1 \leq q < \infty$ ist f messbar und liegt in $L^p(A)$. Es gilt $\|f\|_p^p = \|g\|_q^q$ und $\|fg\|_1 = \|g\|_q^q$. Daraus folgt

$$\|g\|_q = \|g\|_q^{q-q\left(1-\frac{1}{q}\right)} = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}} = \frac{\|gf\|_1}{\|f\|_p} \leq \|j(g)\| \leq \|g\|_q \text{ für alle } g \in L^q(A) \setminus \{0\}.$$

Also ist für $1 < p \leq \infty$ die Abbildung j eine Isometrie. Für $p = 1$, $q = \infty$ und jedes $\epsilon > 0$ ist $\{x \in \mathbb{R}^d \mid |g(x)| \geq \|g\|_\infty - \epsilon\}$ keine Nullmenge und messbar. Auf allen Funktionen $f \in L^1(A)$, die außerhalb dieser Menge verschwinden, nimmt $|j(g)|$ größere Werte als $(\|g\|_\infty - \epsilon)\|f\|_1$ an. Also gilt für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $g \in L^\infty(A) \setminus \{0\}$ auch $\|g\|_\infty - \epsilon \leq \|j(g)\| \leq \|g\|_\infty$. Dann ist j auch für $p = 1$ eine Isometrie. **q.e.d.**

Mithilfe von weiteren Sätzen der Maßtheorie kann man zeigen, dass für $1 < q \leq \infty$ diese Abbildung sogar ein Isomorphismus von Banachräumen ist.