Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis II
11. Übung

12. Mai 2011

Die Lösungen sind am Donnerstag, den 19. Mai 2011 in der Großen Übung abzugeben.

103. Integralberechnung mit dem Satz von Fubini.

Berechne $\int (f \cdot \chi_M)\,\mathrm{d}\mu$ für die folgenden Mengen $M \subset \mathbb{R}^d$ und Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$:

(a) $d := 2 \quad M := [-1,1] \times [0,2]\,, \quad f(x,y) := 1 - 6\,x^2\,y$ *(3 Punkte)*

(b) $d := 2\,, \quad M := \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq xy \leq x^2\,\}\,, \quad f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2}{y^2} & \text{für } y \neq 0 \\ 0 & \text{für } y = 0 \end{cases}$ *(4 Punkte)*

(c) $d := 3\,, \quad M := \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, -1 \leq x \leq 1,\ -2 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 6 - x^2 - y^2\,\}\,,$ $f(x,y,z) := 1\,.$ *(3 Punkte)*

104. Eine Lesbegue-integrierbare Funktion, die nicht beschränkt ist.

Wir zeigen in mehreren Schritten, dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } x \in [0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lebesgue-integrabel ist, obwohl $f(x)$ in der Nähe von $x = 1$ nicht beschränkt ist.

(a) *Finde* eine monoton wachsende Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen (nicht unbedingt Treppenfunktionen) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$, die fast überall (punktweise) gegen f konvergiert. *(3 Punkte)*

(b) *Begründe*, dass f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ Lebesgue-integrierbar ist und berechne $\int f_n\,\mathrm{d}\mu$. *(4 Punkte)*

(c) Folgere mittels des Satzes der monotonen Konvergenz von Beppo Levi (Satz 12.22), dass f Lebesgue-integrierbar ist und *berechne* den Wert des Integrals $\int f\,\mathrm{d}\mu$. *(3 Punkte)*

105. Eine Funktion, die nicht Lesbegue-integrierbar ist.

Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \in ([0,1] \times [0,1]) \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(a) *Berechne* $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ und $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. *(6 Punkte)*

(b) *Folgere* aus dem Ergebnis von (a), dass f nicht Lesbegue-integrierbar ist. *(2 Punkte)*

106. Warnung vor bedenkenlosem Vertauschen von Integration und Grenzwertbildung.

Man *zeige*, dass die folgenden Funktionenfolgen (f_n) aus Lesbegue-integrierbaren Funktionen bestehen, und fast überall gegen $f \equiv 0$ konvergieren. Man *untersuche* jeweils, ob

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu = 0$$

gilt, und welche der Voraussetzungen des Satzes der monotonen Konvergenz von Beppo Levi (Satz 12.22) und des Satzes der beschränkten Konvergenz von Lesbegue (Korollar 12.24) erfüllt bzw. nicht erfüllt sind.

(a) $f_n := \frac{1}{n} \cdot \chi_{[0,n]}$ *(4 Punkte)*

(b) $f_n := n \cdot \chi_{[1/n,2/n]}$ *(4 Punkte)*

(c) $f_n := n \cdot x^n \cdot \chi_{[0,1]}$ *(4 Punkte)*

107. Weitere Grenzwertaussagen für das Lesbegue-Integral.

Es sei (f_n) eine Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$, die fast überall gegen eine Funktion f konvergiert.

(a) Es existiere ein $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $|f| \le g$ fast überall. *Zeige,* dass dann auch $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist. *(6 Punkte)*

[Tipp. Man wende Lesbegues Satz der beschränkten Konvergenz (Korollar 12.24) auf die Folge (g_n) mit

$$g_n := \max(-g, \min(f_n, g)), \quad \text{d.h.} \quad g_n(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } f_n(x) > g(x) \\ f_n(x) & \text{für } -g(x) \le f_n(x) \le g(x) \\ -g(x) & \text{für } f_n(x) < -g(x) \end{cases}$$

an. Die Formeln $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ und $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$ für $x, y \in \mathbb{R}$ sind vielleicht nützlich.]

(b) Es existiere ein $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $h \ge 0$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ fast überall $|f_n - f| \le h$ gilt. *Zeige*, dass dann auch $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist und dass $\int f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu$ gilt. *(4 Punkte)*

[Tipp. Man verwende zunächst (a), um $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ zu zeigen, und dann Lesbegues Satz, um die Vertauschbarkeit von Integral und Grenzwert zu beweisen.]