Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis II
10. Übung

5. Mai 2011

Die Lösungen sind am Donnerstag, den 12. Mai 2011 in der Großen Übung abzugeben.

99. Über Quader, Treppenfunktionen und charakteristische Funktionen.

(a) Seien Q_1, Q_2 zwei Quader von $\mathbb{R}^d$.

(i) *Zeige:* $Q_1 \cap Q_2$ ist die leere Menge oder ein Quader von $\mathbb{R}^d$. *(3 Punkte)*

(ii) *Beweise oder widerlege:* $Q_1 \cup Q_2$ ist ein Quader von $\mathbb{R}^d$. *(2 Punkte)*

(b) Wie in der Vorlesung definieren wir zu einer jeden Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ die *charakteristische Funktion* $\chi_M : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch $\chi_M(x) = 1$ für $x \in M$ und $\chi_M(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^d \setminus M$. Es seien nun Q_1, Q_2 zwei Quader in $\mathbb{R}^d$. *Zeige*:

(i) $\chi_{Q_1 \cap Q_2} = \chi_{Q_1} \cdot \chi_{Q_2}$ *(2 Punkte)*

(ii) $\chi_{Q_1 \cup Q_2} = \chi_{Q_1} + \chi_{Q_2} - \chi_{Q_1} \cdot \chi_{Q_2}$ *(3 Punkte)*

(c) Es seien $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zwei Treppenfunktionen. *Zeige*, dass dann auch

$$f + g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad f \cdot g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

Treppenfunktionen sind. *(4 Punkte)*

100. Ein Beispiel für Nullmengen im $\mathbb{R}^2$.

Sei g eine Gerade in $\mathbb{R}^2$. *Zeige*, dass g eine Nullmenge ist. *(9 Punkte)*

[Tipp. Man untersuche zunächst ein Teilstück von g von endlicher Länge, und verwende dann Lemma 12.4.]

101. Lesbegue-integrable Funktionen.

(a) *Zeige*, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lesbegue-integrabel (Kapitel 12), aber auf dem Intervall $[0, 1]$ nicht Riemann-integrabel (Kapitel 8) ist, und *berechne* $\int f \, \mathrm{d}\mu$ im Sinne der Lesbegueschen Theorie. *(6 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} n & \text{falls } x \in (\frac{1}{(n+1)!}, \frac{1}{n!}] \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lesbegue-integrabel ist. *(5 Punkte)*

(c) *Berechne* $\int g \, \mathrm{d}\mu$ für die Funktion g aus (b). *(5 Sonderpunkte)*

102. Das Cantorsche Diskontinuum.

Wir definieren rekursiv eine Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen von $\mathbb{R}$ durch

$$C_0 := [0,1] \quad \text{und} \quad C_{n+1} := \tfrac{1}{3}\,C_n \cup (\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\,C_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Dann heißt $C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ das *Cantorsche Diskontinuum.*

(a) *Skizziere* C_n für $n = 0,1,2,3$. *(2 Punkte)*

(b) *Zeige,* dass C eine kompakte Nullmenge in $\mathbb{R}$ ist. *(8 Punkte)*

[Tipp. Man zeige der Reihe nach: (1) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C_{n+1} \subset C_n \subset [0,1]$. (2) C_n ist kompakt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, und daher ist auch C kompakt. (3) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist C_n eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen endlichen Quadern von $\mathbb{R}$ und die Summe der Maße dieser Quader beträgt $(\frac{2}{3})^n$. (4) C ist eine Nullmenge.]

(c) *Zeige,* dass C überabzählbar ist. *(6 Punkte)*

[Tipp. Zeige zunächst, dass $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^{i+1}} \in C$ für jede Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $a_i \in \{0,2\}$ gilt, und konstruiere sodann mithilfe der Darstellung reeller Zahlen zur Basis 2 eine injektive Abbildung $[0,1] \to C$.]