Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis II
8. Übung

7. April 2011

Die Lösungen sind am Donnerstag, den 14. April 2011 in der Großen Übung abzugeben.

90. Der Banachsche Fixpunktsatz.

(a) **(i)** *Zeige,* dass die Funktion $\cos|[0,1]$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes (Satz 11.1) erfüllt, und deshalb der Cosinus im Intervall $[0,1]$ genau einen Fixpunkt $x^* \in [0,1]$ besitzt. *(4 Punkte)*
[Tipp. Mittelwertsatz; die Zahlenwerte $\sin(1) = 0.841...$ und $\cos(1) = 0.540...$ sind nützlich.]

(ii) Verwende einen Taschenrechner, um einen Näherungswert für x^* zu *berechnen*, und *beschreibe* Dein Vorgehen. *(2 Punkte)*

(b) Wir betrachten die Funktion

$$f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \left(1 - \tfrac{y^2}{3}\,,\, 1 - \tfrac{x^2}{4}\right) .$$

Zeige, dass f genau einen Fixpunkt $(x^*, y^*) \in [0,1] \times [0,1]$ besitzt, und *folgere*, dass die Gleichung $x^4 - 8x^2 + 48x - 32 = 0$ genau eine Lösung in $[0,1]$ besitzt. *(5 Punkte)*
[Tipp. Man verwende die Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^2$.]

91. Picard-Iteration.

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = u(t), \quad u(0) = 1 . \tag{$*$}$$

(a) Verwende das Picardsche Iterationsverfahren

$$u_0(t) = 1\ , \qquad u_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t u_n(s)\,\mathrm{d}s\ ,$$

um die ersten fünf Glieder einer Folge zu *bestimmen*, die nach dem Banachschen Fixpunktsatz gegen die Lösung u von $(*)$ konvergiert (siehe den Beweis von Satz 11.3). *(5 Punkte)*

(b) Wie lautet die Lösung von $(*)$? *(2 Punkte)*

92. Zum Satz 11.8 über die inverse Funktion.

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x + x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} .$$

(a) *Zeige,* dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(0) = 1$, aber in $x = 0$ nicht stetig differenzierbar ist. *(5 Punkte)*
[Tipp. Für die Untersuchung bei $x = 0$ kann man Aufgabe 44(b) auf $f(x) - x$ anwenden.]

(b) *Zeige,* dass f auf keiner Umgebung von $x = 0$ injektiv ist. *(5 Punkte)*
[Tipp. Angenommen, $f|(-\varepsilon, \varepsilon)$ wäre injektiv für ein $\varepsilon > 0$. Dann wäre $f|(-\varepsilon, \varepsilon)$ nach Satz 6.3 streng monoton, und deshalb würde $f'|(-\varepsilon, \varepsilon) \geq 0$ bzw. $f'|(-\varepsilon, \varepsilon) \leq 0$ gelten. Indem man nun für eine geschickt gewählte Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Werte $f'(a_n)$ und $f''(a_n)$ ausrechnet, erhält man einen Widerspruch.]

93. Zum Satz über die implizite Funktion.

(a) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto \cos(x^2) + 2xy + \sin(y^2) - 4x - 1 + y \ .$$

(i) *Zeige,* dass die Gleichung $f(x, y) = 0$ in der Nähe des Punkts $(0, 0)$ lokal in der Form $y = g(x)$ auflösbar ist. *(4 Punkte)*

(ii) *Berechne* $g'(0)$. *(4 Punkte)*

[Tipp. Man differenziere die Gleichung $f(x, g(x)) = 0$ mit Hilfe der Kettenregel.]

(b) *Zeige,* dass man die Schnittmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ der beiden Nullstellenmengen

$$-2x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + e^{y-1} - 2y = 0$$

in der Nähe des Punktes $(1, 1, 1) \in S$ durch eine Kurve in Abhängigkeit von x parametrisieren kann, d.h. dass es eine Umgebung O von 1 in $\mathbb{R}$ und eine Umgebung U' von $(1, 1, 1)$ in $\mathbb{R}^3$ sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $\alpha : O \to \mathbb{R}^2$ (eine „Kurve“) gibt, so dass

$$S \cap U' = \{\, (t, \alpha(t)) \mid t \in O \,\}$$

gilt. *(5 Punkte)*

94. Ein Kriterium für die Definitheit symmetrischer (2×2)-Matrizen.

Es sei $A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ eine symmetrische (2×2)-Matrix. Bekanntlich ist dann die Determinante bzw. die Spur von A

$$\det(A) := ac - b^2 \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Spur}(A) := a + c \ .$$

Wir nennen A positiv bzw. negativ definit, wenn die durch A beschriebene symmetrische Bilinearform $\beta(x, y) := x \cdot Ay$ diese Eigenschaft hat. *Zeige:*

(a) A ist genau dann positiv definit, wenn $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) > 0$ ist. *(3 Punkte)*

(b) A ist genau dann negativ definit, wenn $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) < 0$ ist. *(3 Punkte)*

(c) A ist genau dann indefinit (d.h. es gibt $x, \widetilde{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $\beta(x, x) > 0$ und $\beta(\widetilde{x}, \widetilde{x}) < 0$), wenn $\det(A) < 0$ ist. *(3 Punkte)*

Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass eine symmetrische Matrix genau dann positiv (negativ) definit ist, wenn alle ihre Eigenwerte größer (kleiner) als Null sind.

[Tipp. Man verwende das charakteristische Polynom von A.]

Bemerkung. Diese Kriterien sind vor allem hilfreich, um zu untersuchen, ob die Hessematrix einer Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in einem kritischen Punkt die Voraussetzung von Aufgabe 87(b) erfüllt.