Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis II
9. Übung

14. April 2011

Die Lösungen sind am Donnerstag, den 5. Mai 2011 in der Großen Übung abzugeben.

95. Singularitäten.

Es sei
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^2 - x^4 - y^2 \ .$$

(a) *Untersuche* die Niveaumengen von g daraufhin, ob sie glatte Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind, und *bestimme* andernfalls ihre Singularitäten. *(4 Zusatzpunkte)*

(b) *Skizziere* die Niveaumengen von g, die Singularitäten besitzen, sowie einige weitere. *(3 Zusatzpunkte)*

96. Extremwertsuche unter Nebenbedingungen.

(a) Sei $U := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^2$ und
$$f : U \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x+y \quad \text{und} \quad g : U \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy \ .$$

(i) *Zeige*, dass die Niveaumengen zu $g(x,y) = c$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ glatt sind. *(2 Zusatzpunkte)*

(ii) *Bestimme* die Gesamtheit aller kritischen Punkte von f auf Niveaumengen $g(x,y) = c$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. (Wenn man festzustellen versucht, welcher der kritischen Punkte auf einer vorgegebenen Niveaufläche liegt, kommt man auf eine kubische Gleichung, die nicht gelöst zu werden braucht.) *(4 Zusatzpunkte)*

(b) *Begründe*, dass die Funktion
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto 3x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy$$
auf der Menge
$$M := \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \,\}$$
Maximum und Minimum annimmt, und *bestimme* den maximalen und den minimalen Wert. *(5 Zusatzpunkte)*

(c) *Begründe*, dass die Funktion
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \tfrac{1}{2}\, x^2 + y^2$$
unter der Nebenbedingung $y^2 = x^2 - x^4$ Maximum und Minimum annimmt, und *bestimme* die Stellen, an denen die (globalen) Extrema angenommen werden. *(4 Zusatzpunkte)*

97. Ein Tetraeder.

Wir betrachten in $\mathbb{R}^3$ das Tetraeder mit den Eckpunkten $A := (0,0,0)$, $B := (2,0,0)$, $C := (0,3,0)$ und $D := (0,0,4)$.

(a) *Begründe,* dass es einen Punkt in $\mathbb{R}^3$ gibt, für den die Summe S der Quadrate der Entfernungen von den Ecken minimal ist und *bestimme* diesen Punkt sowie den Wert von S. *(4 Zusatzpunkte)*

(b) Wo liegt der gesuchte Punkt, wenn man zusätzlich fordert, dass er auf der Sphäre mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ liegen soll? *(4 Zusatzpunkte)*

(c) Wo liegt der Punkt, wenn er nicht nur auf der Sphäre, sondern außerdem auf der Ebene mit der Gleichung $x + y + z = 0$ liegen soll? *(6 Zusatzpunkte)*

98. Noch einmal Topologie.

Untersuche die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ (versehen mit der euklidischen Norm bzw. Metrik) darauf, ob sie offen und/oder abgeschlossen und/oder beschränkt und/oder kompakt und/oder vollständig sind. Dabei genügt jeweils eine knappe Begründung der Behauptung.

(a) $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$ *(2 Zusatzpunkte)*

(b) $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 \leq 1 \}$ *(2 Zusatzpunkte)*

(c) $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \quad \text{und} \quad y \neq 0 \}$ *(2 Zusatzpunkte)*

(d) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\frac{1}{n}, 1)$ (mit $(\frac{1}{n}, 1)$ ist hier das offene Intervall in $\mathbb{R}$ gemeint) *(2 Zusatzpunkte)*

(e) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{n}, 1]$ *(2 Zusatzpunkte)*

(f) $\mathbb{Q}$ (als Teilmenge von $\mathbb{R}$) *(2 Zusatzpunkte)*

(g) $\bigcup_{a\in\mathbb{Q}} (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (hier ist $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ fest vorgegeben, und mit $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ wieder das reelle Intervall gemeint) *(2 Zusatzpunkte)*

Information

Zur Analysis II wird in den kommenden Semesterferien wieder ein **Wiederholungskurs** angeboten, der vornehmlich denjenigen Teilnehmern, die die Abschlußklausur nicht bestehen, zur Vorbereitung auf die Nachschreibeklausur dienen soll. Dieser Wiederholungskurs findet vom **4. bis zum 8. Juli 2011** täglich **10.30-12.00 Uhr** und **14.00-15.30 Uhr** in **B6, 23-25, Raum A0.01** statt, und wird von Herrn Dipl.-Math. Matthias Leimeister geleitet. Eine Anmeldung ist nicht erforderlich.

Frohe Ostern!