Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis II
6. Übung

24. März 2011

Die Lösungen sind am Donnerstag, den 31. März 2011 in der Großen Übung abzugeben.

83. Richtungsableitungen, kritische Punkte, Gradient, Rotation und Divergenz.

(a) *Berechne* die Richtungsableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^3 + e^y \cdot \sin(z)$$

an der Stelle $x_0 = (1, \log 3, \frac{\pi}{3})$ in Richtung $v = (3, -2, 6)$. *(4 Punkte)*

(b) *Berechne* den Gradienten und *bestimme* alle kritischen Punkte der folgenden Abbildungen:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^3 + xy^2 - x$ *(4 Punkte)*

(ii) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ *(6 Punkte)*

(c) *Berechne* die Rotation und die Divergenz des Vektorfelds

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (xz, yz, zz)\ .$$ *(3+3 Punkte)*

84. Mehr Rechenregeln für die Ableitung.

(a) Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit dem Skalarprodukt $x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k\, y_k$ und der hiervon induzierten Norm $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$. Es sei die Abbildung

$$h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

gegeben.

(i) *Zeige*, dass für die k-te partielle Ableitung von h an einer Stelle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt: $\frac{\partial h}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{\|x\|}\, e_k - \frac{x_k}{\|x\|^3}\, x$. Dabei ist $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der k-te Standardeinheitsvektor von $\mathbb{R}^n$. *(4 Punkte)*

(ii) *Folgere* aus (i): h ist differenzierbar, und für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$h'(x)v = \frac{1}{\|x\|}\, v - \frac{x \cdot v}{\|x\|^3}\, x\ .$$

(Dabei bedeutet der Ausdruck $h'(x)v$ die Anwendung der linearen Abbildung $h'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf den Richtungsvektor v.)

(b) Es seien X_1, X_2, Y normierte Vektorräume und $\beta : X_1 \times X_2 \to Y$ eine stetige, bilineare Abbildung. *Zeige*, dass β als Abbildung des Produkt-Vektorraums $X_1 \times X_2$ differenzierbar ist, und dass für alle $(x_1, x_2), (v_1, v_2) \in X_1 \times X_2$ gilt:

$$\beta'(x_1, x_2)(v_1, v_2) = \beta(v_1, x_2) + \beta(x_1, v_2)\ .$$ *(4 Punkte)*

[Tipp. Satz 10.11.]

85. Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen.

In dieser Aufgabe bezeichnen wir mit $x \cdot y$ das übliche Skalarprodukt von Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Es sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ eine lineare Abbildung, die bezüglich dieses Skalarprodukts *symmetrisch* ist, das heißt, es gelte:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n\ :\ x \cdot Ay = y \cdot Ax\ . \qquad (*)$$

Wir wollen in dieser Aufgabe zeigen, dass A *orthogonal diagonalisierbar* ist, d.h. dass es eine Basis von $\mathbb{R}^n$ aus zueinander senkrechten Eigenvektoren von A gibt.

Dazu zeige man im Einzelnen folgendes:

(a) Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$, mit $X \neq \{0\}$, so dass das Bild $A[X]$ in X enthalten ist. Wir betrachten die Abbildung

$$f : X \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x \cdot Ax}{x \cdot x} \ .$$

(i) *Zeige*, dass f differenzierbar ist, und dass für alle $x \in X \setminus \{0\}$ und $v \in X$ gilt

$$f'(x)v = \frac{2}{\|x\|^2} \left(v \cdot Ax - f(x)\, v \cdot x \right) . \qquad \textit{(4 Punkte)}$$

[Tipp. Es ist $f(x) = h(x) \cdot (A \circ h)(x)$ mit der Funktion h aus Aufgabe 84(a). Nun verwende man die Produktregel in der Gestalt von Aufgabe 84(b) (mit $\beta =$ Skalarprodukt), die Kettenregel Satz 10.4(iii) und für h' Aufgabe 84(b)(ii).]

(ii) *Zeige*, dass es ein $x_0 \in X$ mit $\|x_0\| = 1$ gibt, in dem f ein (globales) Maximum annimmt. *(3 Punkte)*
[Tipp. Da die Einheitssphäre $S := \{ x \in X \,\big|\, \|x\| = 1 \}$ kompakt ist, nimmt $f|S$ ein globales Maximum an, etwa in einem Punkt $x_0 \in S$. Da $f(cx) = f(x)$ für alle $x \in X \setminus \{0\}$ und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt, nimmt auch f in x_0 ein globales Maximum an.]

(iii) Sei $x_0 \in X$ wie in (ii). *Zeige*, dass dann für alle $v \in X$ gilt:

$$x_0 \cdot Av = v \cdot Ax_0 = f(x_0)\, v \cdot x_0 \ . \qquad \textit{(3 Punkte)}$$

[Tipp. Für das erste Gleichheitsszeichen benutze man $(*)$, für das zweite Satz 10.19 und (i).]

(iv) Sei $X' := \{ v \in X \,|\, v \cdot x_0 = 0 \}$. *Folgere* aus (iii), dass das Bild $A[X']$ in X' enthalten ist, und dass $Ax_0 = f(x_0)\, x_0$ gilt. *(4 Punkte)*
[Tipp zum zweiten Teil. Mit $x' := Ax_0 - f(x_0)\, x_0$ zeige man, dass $\|x'\|^2 = x' \cdot x' = x' \cdot (Ax_0 - f(x_0)x_0) = \ldots = 0$ und somit $x' = 0$ gilt.]

(b) Man *beweise*, und zwar durch einen Induktionsbeweis, dessen Induktionsschritt gerade aus (a) besteht, die folgende Aussage: Es existiert eine Basis $(x_1, \ldots, x_n)$ des $\mathbb{R}^n$, sowie Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, so dass für jedes $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$ mit $k \neq \ell$ gilt: $\|x_k\| = 1$, $x_k \cdot x_\ell = 0$ und $Ax_k = \lambda_k\, x_k$. *(4 Punkte)*