

Die Lösungen sind am Donnerstag, den 3. März 2011
in der Großen Übung abzugeben.

67. Folgenkonvergenz im \mathbb{R}^n .

- (a) Es sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge im \mathbb{R}^n . Wir schreiben das Element $x_k \in \mathbb{R}^n$ jeweils in „Komponenten“, d.h. in der Form $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$ mit $x_k^j \in \mathbb{R}$.

Zeige: Die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in \mathbb{R}^n bezüglich der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$, wenn für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ die „Komponentenfolge“ $(x_k^j)_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} konvergiert. Ist dies der Fall, so gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^1, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^n \right) \in \mathbb{R}^n. \quad (4 \text{ Punkte})$$

Bemerkung. In Satz 9.37 werden wir sehen, dass je zwei Normen auf dem \mathbb{R}^n äquivalent sind. Die obige Aussage gilt deshalb nicht nur bezüglich der Maximumnorm, sondern auch bezüglich jeder beliebigen anderen Norm auf dem \mathbb{R}^n . Dieser Konvergenzbegriff ist gemeint, wenn von der „Konvergenz im \mathbb{R}^n “ (ohne ausdrückliche Angabe einer Metrik bzw. Norm) die Rede ist.

- (b) *Untersuche*, ob die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_k := \left(\sqrt[k]{k}, \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k, \frac{1}{k} \right) \in \mathbb{R}^3$$

in \mathbb{R}^3 konvergiert, und *bestimme* gegebenenfalls den Grenzwert. (4 Punkte)

- (c) Konvergiert die Folge aus (b) bezüglich der diskreten Metrik (Beispiel 9.2(i)) auf \mathbb{R}^3 ? (2 Punkte)

68. Diverses zu metrischen Räumen.

- (a) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine Funktion, die die Voraussetzungen von Aufgabe 63(c)(i) erfüllt. Nach jener Aufgabe ist dann

$$\tilde{d} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(d(x, y))$$

eine weitere Metrik auf X .

Zeige, dass eine Teilmenge $O \subset X$ genau dann bezüglich d offen ist, wenn sie bezüglich \tilde{d} offen ist.

Man sagt auch: „ d und \tilde{d} erzeugen dieselbe Topologie auf X .“ (4 Punkte)

- (b) *Beweise oder widerlege:* Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen X und Y , und ist $K \subset Y$ kompakt, so ist auch $f^{-1}[K] \subset X$ kompakt. (2 Punkte)
- (c) Man *gebe explizit* eine offene Überdeckung des Intervalls $(0, 1)$ an, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. (3 Punkte)
- (d) *Finde (mit Begründung)* eine Teilmenge von \mathbb{R} , die ein Maximum und ein Minimum besitzt, aber nicht kompakt ist. (2 Punkte)
- (e) *Beweise oder widerlege:* Für jede Menge X ist die diskrete Metrik auf X (siehe Beispiel 9.2(i)) vollständig. (3 Punkte)

69. Vervollständigung metrischer Räume. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir werden in dieser Aufgabe eine „Vervollständigung“ von X konstruieren.

- (a) Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Cauchyfolgen von X . Zeige: Die reelle Zahlenfolge $(d(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in \mathbb{R} . (3 Punkte)

[Tipp. Man verwende die Ungleichung aus Beispiel 9.33(iii) („Parallelogrammungleichung“), um $|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)|$ auszurechnen.]

- (b) Seien $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei weitere Cauchyfolgen von X mit $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \tilde{x}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, \tilde{y}_n) = 0$. Zeige, dass dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

gilt. (3 Punkte)

[Tipp. Man verwende wieder die Parallelogrammungleichung.]

- (c) Sei \mathfrak{C} die Menge der Cauchyfolgen von X . Für zwei Cauchyfolgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{C}$ schreiben wir $(x_n) \sim (\tilde{x}_n)$, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \tilde{x}_n) = 0$ gilt.

Zeige, dass durch \sim eine Äquivalenzrelation auf \mathfrak{C} definiert wird (siehe Abschnitt 1.3).

(3 Punkte)

- (d) Sei \tilde{X} die Menge der Äquivalenzklassen von \mathfrak{C} bezüglich \sim . Zeige: Dann gibt es genau eine Abbildung $\tilde{d}: \tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $(x_n), (y_n) \in \mathfrak{C}$ gilt:

$$\tilde{d}([(x_n)], [(y_n)]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n).$$

Dabei bezeichnen wir für $(x_n) \in \mathfrak{C}$ mit $[(x_n)] \in \tilde{X}$ die Äquivalenzklasse von (x_n) bezüglich \sim . (2 Punkte)

- (e) Zeige, dass \tilde{d} eine Metrik auf \tilde{X} ist. (3 Punkte)

- (f) Für $x \in X$ bezeichnen wir mit $(x) = (x)_{n \in \mathbb{N}}$ auch die Folge in X , die konstant gleich x ist; offenbar ist $(x) \in \mathfrak{C}$. Dann betrachten wir die Abbildung

$$\Phi: X \rightarrow \tilde{X}, x \mapsto [(x)].$$

Zeige: Φ ist eine Isometrie, das heißt, es gilt

$$\forall x, y \in X : \tilde{d}(\Phi(x), \Phi(y)) = d(x, y).$$

Folgere hieraus: Φ ist injektiv und stetig. (3 Punkte)

- (g) Zeige: Das Bild $\Phi[X]$ liegt dicht in \tilde{X} . (3 Punkte)

- (h) Beweise, dass (\tilde{X}, \tilde{d}) ein vollständiger metrischer Raum ist. (6 Punkte)

[Tipp. Es sei eine Cauchyfolge $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \tilde{X} gegeben. Da nach (g) das Bild $\Phi[X]$ dicht in \tilde{X} liegt, existiert zu $n \in \mathbb{N}$ jeweils ein $x_n \in X$ mit $\tilde{d}(\Phi(x_n), \xi_n) < \frac{1}{n}$. Man zeige, dass die hierdurch definierte Folge (x_n) in X eine Cauchyfolge ist, die also ein Element $\xi := [(x_n)] \in \tilde{X}$ repräsentiert, und dass die Folge (ξ_n) in \tilde{X} gegen ξ konvergiert.]

Wegen (f) ist das Bild $\Phi[X] \subset \tilde{X}$ eine „Kopie“ von X , die in \tilde{X} enthalten ist. Indem man $\Phi[X]$ mit X identifiziert, kann man daher \tilde{X} als eine „Vervollständigung“ von X auffassen.