Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis II
7. Übung

31. März 2011

Die Lösungen sind am Donnerstag, den 7. April 2011 in der Großen Übung abzugeben.

86. Extremwertsuche.

(a) *Bestimme* alle lokalen Extrema der Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ aus Aufgabe 83(b), und *entscheide* jeweils, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt. *(5+5 Punkte)*

(b) Es sei X ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus X$. Wir betrachten die Funktion

$$f : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x - x_0\|^2 ,$$

wobei $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$ die euklidische Norm von $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Indem man die Methoden der Extremwertsuche auf f anwendet, *zeige* man, dass es genau einen Punkt $x_1 \in X$ gibt, in dem f ein lokales Minimum annimmt, und dass der Verbindungsvektor $x_1 - x_0$ senkrecht zu X ist. (Tatsächlich hat f in x_1 sogar ein globales Minimum.) *(5 Punkte)*

(c) *Bestimme* $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $[0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto at + b$ die Wurzelfunktion $\sqrt{t}$ auf dem Intervall $[0,1]$ optimal quadratisch approximiert, das heißt so, dass

$$\int_0^1 (\sqrt{t} - (at+b))^2 \,\mathrm{d}t$$

möglichst klein wird. *(5 Punkte)*

87. Zu Satz 10.27 (Hinreichendes Kriterium für lokale Extremwerte).

(a) Es sei $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. *Zeige:* Wenn β *positiv definit* (bzw. *negativ definit*) ist, d.h. wenn $\beta(x,x) > 0$ (bzw. $\beta(x,x) < 0$) für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, dann gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\beta(x,x) \geq \delta\,\|x\|^2 \quad \text{bzw.} \quad \beta(x,x) \leq -\delta\,\|x\|^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. *(5 Punkte)*

[Tipp. Man verwende ohne Beweis, dass es eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix A gibt, so dass $\beta(x,y) = x \cdot Ay$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt. Auf A wende man das Ergebnis von Aufgabe 85(b) an.]

(b) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $x_0 \in U$ ein kritischer Punkt von f. Indem man zeigt, dass die Voraussetzungen von Satz 10.27 erfüllt sind, *beweise* man: Wenn

$$f''(x_0)(x,x) > 0 \quad \text{bzw.} \quad f''(x_0)(x,x) < 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, so besitzt f in x_0 ein lokales Minimum (bzw. ein lokales Maximum). *(2 Punkte)*

Bemerkung. Diese Verschärfung von Satz 10.27 gilt nicht, wenn f auf einem unendlich-dimensionalen normierten Vektorraum definiert ist, siehe Beispiel 10.28.

88. Gradient, Rotation, Divergenz.

(a) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $c : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ eine *Niveaulinie* von f, das ist eine differenzierbare Abbildung, so dass die Funktion $f \circ c : (a,b) \to \mathbb{R}$ konstant ist. *Zeige*, dass für $t \in (a,b)$ dann gilt: $(\nabla f)(c(t)) \cdot (c'(t)1) = 0$. *(4 Punkte)*

Interpretation. Der Gradient $(\nabla f)(x)$ steht senkrecht auf der „Niveaufläche“ $f^{-1}[\{f(x)\}]$ von f. (Beachte, dass c eine Kurve in dieser Niveaufläche beschreibt.)

(b) Es sei nun $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. *Berechne* $\operatorname{div}(\operatorname{rot} g)$. *(4 Punkte)*

(c) *Zeige*, dass das differenzierbare Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ nur dann Gradient einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sein kann, wenn $\operatorname{rot}(g) = 0$ ist. *(4 Punkte)*

(d) Es sei

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (\, 2x + y^2 - z^2,\ 2y(x - z^2),\ -2z(x + y^2)\,)\ .$$

(i) *Zeige* $\operatorname{rot}(g) = 0$. *(3 Punkte)*

(ii) *(Zum Knobeln.) Finde* eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, deren Gradient das Vektorfeld g ist. *(5 Zusatzpunkte)*

89. Ein Taylorpolynom.

Es sei

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^y\ .$$

(a) *Berechne* das Taylorpolynom zweiter Ordnung $P_2(x,y)$ von f an der Stelle $(1,1)$. *(5 Punkte)*

(b) Benutze $P_2(x,y)$, um eine Näherung für $1.05^{1.02}$ zu *berechnen* und *vergleiche* diese Näherung mit dem Ergebnis des Taschenrechners. *(3 Punkte)*

Information

Um an der **Abschlußklausur** zur Analysis II teilnehmen zu können, müssen Sie sich zwischen dem **6. April** und dem **20. April** zur Prüfung anmelden. Dies erfolgt elektronisch über das Studierendenportal (*Prüfungen* $\to$ *Prüfungsanmeldung*). Falls Sie die Analysis II unter den bei Ihnen vom System angezeigten Prüfungen nicht finden (dies kann insbesondere bei Nebenfachstudierenden der Fall sein), oder sonst bei der Anmeldung ein Problem auftreten sollte, wenden Sie sich bitte an das Studienbüro.

Bitte beachten Sie, dass Ihre Anmeldung ab dem Ende der Anmeldefrist *verbindlich* ist, und ein Rücktritt von der Prüfung ab diesem Zeitpunkt nur noch aus wichtigem Grund (wie z.B. Krankheit) möglich ist. Lediglich in dem Fall, dass Sie die Zulassung zur Abschlußklausur nicht erreichen, wird die Anmeldung von uns storniert und gilt dann als nicht erfolgt.