Martin Schmidt
Sebastian Klein

# Analysis II
## 5. Übung

17. März 2011

**Die Lösungen sind am Donnerstag, den 24. März 2011 in der Vorlesung um 12 Uhr abzugeben.**

**78. Ableitungen im Mehrdimensionalen.**

**(a)** Man *untersuche* für die folgenden Funktionen $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jeweils, an welchen Stellen $f$ partiell differenzierbar ist, und *berechne* dort $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$.

**(i)** $f(x,y) = x^2 y^3 - 2y$ *(3 Punkte)*

**(ii)** $f(x,y) = y \cdot \sqrt{x^2+y^2}$ *(3 Punkte)*

**(iii)** $f(x,y) = x^2 \cdot \ln(x^2+y^2)$ *(3 Punkte)*

**(iv)** $f(x,y) = x^y$ *(3 Punkte)*

**(b)** Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x \cdot \exp(y), \sin(x+y)) .$$

*Begründe* ausführlich, warum $f$ differenzierbar ist, und *berechne* $f'(1, \ln 2)$. *(4 Punkte)*

**(c)** Es sei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (x^2+y^2+z^2, x+y) \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (xy, x-y) .$$

*Berechne* $(g \circ f)'$ auf zweierlei Art, nämlich

**(i)** durch Bestimmung eines Ausdrucks für die Funktion $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und Differentiation dieses Ausdrucks, und *(4 Punkte)*

**(ii)** durch Anwendung der Kettenregel (Satz 10.4(iii)). *(4 Punkte)*

Ergibt sich wirklich beide Male dasselbe Ergebnis?

**79. Der Zusammenhang zwischen den Differenzierbarkeitsbegriffen aus Analysis I und Analysis II.**

Es sei $Y$ ein normierter Vektorraum.

**(a)** *Zeige*, dass die Abbildung

$$\Phi : \mathcal{L}(\mathbb{R}, Y) \to Y,\ A \mapsto A(1)$$

ein Vektorraum-Isomorphismus, d.h. eine bijektive lineare Abbildung ist, und *bestimme* die Umkehrabbildung $\Phi^{-1} : Y \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, Y)$. *(3 Punkte)*

Es sei nun $a < b$ und $f$ eine Abbildung von dem offenen Intervall $(a,b) \subset \mathbb{R}$ nach $X$ und $x_0 \in (a,b)$.

**(b)** Sei $f$ in $x_0$ differenzierbar im Sinne von Definition 10.1. *Zeige,* dass dann die Abbildung

$$g : (a,b) \to Y,\ x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{für } x \neq x_0 \\ \Phi(f'(x_0)) & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

in $x_0$ stetig ist.

(Im Falle $Y = \mathbb{R}$ bedeutet das: $f$ ist in $x_0$ auch im Sinne von Definition 7.1 differenzierbar, und $\Phi(f'(x_0))$ ist die Ableitung von $f$ an der Stelle $x_0$ im Sinne von Kapitel 7.)

*(3 Punkte)*

**(c)** Wir setzen nun umgekehrt voraus, dass der für $x \neq x_0$ definierte Differenzenquotient $g(x) := \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ zu einer stetigen Funktion $g : (a,b) \to Y$ fortgesetzt werden kann. (Im Falle $Y = \mathbb{R}$ bedeutet diese Bedingung: $f$ ist in $x_0$ im Sinne von Definition 7.1 differenzierbar, und $g(x)$ ist die Ableitung von $f$ in diesem Sinne.)

*Zeige,* dass $f$ im Sinne von Definition 10.1 differenzierbar ist, und $f'(x_0) = \Phi^{-1}(g(x_0))$ gilt. *(3 Punkte)*

**80. Ableitung von Potenzreihen.** Es sei $X$ ein Banachraum und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten $a_n$ und Konvergenzradius $R > 0$. *Zeige*, dass die Abbildung (siehe den Schluß von Abschnitt 9.5)

$$f : B(0,R)_{\mathcal{L}(X)} \to \mathcal{L}(X),\ A \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, A^n$$

in $0 \in \mathcal{L}(X)$ differenzierbar ist und *berechne* $f'(0)$. (Hier bezeichnet $B(0,R)_{\mathcal{L}(X)}$ den Ball vom Radius $R$ um $0$ in $\mathcal{L}(X)$.) *(6 Punkte)*

[Tipp. Es ist doch nicht schwer, die „lineare Approximation" von $f$ an der Stelle $A = 0$ zu raten. Außerdem beachte man, dass die reelle Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}|\, x^n$ ebenfalls den Konvergenzradius $R$ besitzt.]

**81. Über die Lipschitz-Stetigkeit differenzierbarer Funktionen.**

Es seien $X, Y$ normierte Vektorräume und $f : X \to Y$ eine differenzierbare Funktion, so dass $\|f'\|$ beschränkt ist. *Zeige,* dass $f$ Lipschitz-stetig ist. *(4 Punkte)*

**82. Ableitung affiner Abbildungen.**

Es seien $X, Y$ normierte Vektorräume und $f : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung.

**(a)** *Beweise:* Ist $f'(x) = 0 \in \mathcal{L}(X,Y)$ für jedes $x \in X$, so ist $f$ konstant. *(4 Punkte)*
[Tipp. Schrankensatz.]

**(b)** *Beweise:* Ist $f'$ konstant, d.h. gibt es ein $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit $f'(x) = A$ für jedes $x \in X$, so gibt es ein $c \in Y$ mit $f(x) = A(x) + c$ für jedes $x \in X$. *(3 Punkte)*
[Tipp. $x \mapsto f(x) - A(x)$.]

## Information

Die Vorlesung am **Mittwoch, den 23. März 2011** fällt wegen des „Uni lebt"-Tags aus. Stattdessen findet am **Donnerstag, den 24. März 2011** an Stelle der großen Übung eine weitere Vorlesung statt. Die große Übung wird am **Freitag, den 25. März 2011, 15.30–17.00 Uhr** in **B6, Raum A0.01** nachgeholt.

Die Übungen sind wie gewohnt am Donnerstag, den 24. März um 12.00 Uhr abzugeben.