Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis II
12. Übung

19. Mai 2011

Die Lösungen sind am Donnerstag, den 26. Mai 2011 in der Großen Übung abzugeben.

108. Integralberechnung mit der Jacobischen Transformationsformel.

(a) Es sei $a := (2,2) \in \mathbb{R}^2$, $b := (1,2) \in \mathbb{R}^2$ und

$$M := \{\, sa + tb \,|\, s,t \in [0,1] \,\} \subset \mathbb{R}^2 .$$

Skizziere M und *berechne* $\int_M xy \, \mathrm{d}\mu$ mit Hilfe der Jacobischen Transformationsformel für die Substitution $x = u - v$, $y = 2u - v$. *(5 Punkte)*

(b) Es sei

$$M := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x,y > 0 \text{ und } x + y \leq 2 \,\} .$$

Berechne $\int_M \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right) \mathrm{d}\mu$ mit Hilfe der Transformationsformel. *(5 Punkte)*

(c) Es sei M diejenige Teilmenge von $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x,y > 0 \,\}$, die durch die Transformation $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ auf das Rechteck

$$R := \{\, (u,v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \tfrac{1}{4} \leq u \leq 4,\ \tfrac{1}{3} \leq v \leq 3 \,\}$$

abgebildet wird. *Skizziere* M, und verwende die Transformationsformel, um den Flächeninhalt von M zu *berechnen.* *(5 Punkte)*

[Tipp. Man überlege sich, wie x und y durch u und v ausgedrückt werden.]

(d) Es sei D das durch die Ellipsen $x^2 + 9y^2 = 9$ und $x^2 + 9y^2 = 81$ sowie die Geraden $y = x$ und $y = 0$ eingeschlossene Gebiet im ersten Quadranten der xy-Ebene.

(i) *Bestimme* das Gebiet $\widetilde{D}$ der $r\varphi$-Ebene, in das D unter der Koordinatentransformation $x = 3r \cdot \cos(\varphi)$, $y = r \cdot \sin(\varphi)$ übergeht. *(3 Punkte)*

(ii) *Skizziere* D in der xy-Ebene sowie $\widetilde{D}$ in der $r\varphi$-Ebene. *(2 Punkte)*

(iii) *Berechne* die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (r,\varphi) \mapsto (x,y) = (3r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) ,$$

die zu der Transformation aus (i) gehört, sowie ihre Determinante. *(3 Punkte)*

(iv) *Berechne* mit Hilfe von (i)–(iii) das Integral

$$\int_D \frac{xy}{x^2 + 9y^2} \, \mathrm{d}\mu . \qquad (4 \text{ Punkte})$$

[Tipp. Der Wert $\sin(\arctan(3)) = \frac{3}{\sqrt{10}}$ könnte nützlich sein.]

109. Polarkoordinaten.

(a) Es sei $R \in (0, \infty]$, $B_R := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq R^2 \,\}$ die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius R um Null in $\mathbb{R}^2$ und $f \in L^1(B_R)$. *Zeige*, dass dann gilt:

$$\int_{B_R} f \, \mathrm{d}\mu = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} r \cdot f(r\,\cos(\varphi),\ r\,\sin(\varphi)) \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r .$$

Diese Formel beschreibt die sogenannte *Integration in Polarkoordinaten.* *(6 Punkte)*

[Tipp. Sei $O := B_R \setminus \big((-\infty, 0] \times \{0\} \cup \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = R^2 \,\} \big)$ und $U := (0,R) \times (-\pi, \pi)$ sowie $\Phi : U \to O,\ (r,\varphi) \mapsto (r\,\cos(\varphi), r\,\sin(\varphi))$. Man zeige, dass in dieser Situation die Voraussetzungen der Jacobischen Transformationsformel (Satz 12.33) erfüllt sind. Warum gilt $\int_{B_R} f \, \mathrm{d}\mu = \int_O f \, \mathrm{d}\mu$?]

(b) Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \exp(-(x^2 + y^2))\ .$$

Zeige, dass $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ist, und *berechne* $\int_{\mathbb{R}^2} f \, \mathrm{d}\mu$. *(5 Punkte)*

[Tipp. (a); zuerst $f \cdot \chi_{B_R}$.]

(c) Verwende das Ergebnis von (b), um zu *zeigen*, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

gilt. *(4 Punkte)*

110. Eine L^1-Nullfolge, die nirgends punktweise konvergiert.

Wir bezeichnen mit A die Menge der Zahlenpaare (n, k) mit $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{-n^2+1, -n^2+2, \ldots, n^2-1, n^2\}$. Für $(n, k) \in A$ sei $\chi_{(n,k)}$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$. Weiter sei $\Phi : \mathbb{N} \to A$ die „aufsteigende" Abzählung von A, die Folge $(\Phi(m))_{m \in \mathbb{N}}$ beginnt also mit den folgenden Elementen von A:

$$(1,0),\ (1,1),\ (2,-3),\ (2,-2),\ (2,-1),\ (2,0),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,-8), \ldots\ .$$

Für $m \in \mathbb{N}$ sei nun $f_m := \chi_{\Phi(m)}$. Dann ist $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ offenbar eine Folge in $L^1(\mathbb{R})$.

(a) *Zeige*, dass $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $L^1(\mathbb{R})$ ist. *(4 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass $(f_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$ für kein $x \in \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. *(4 Punkte)*

Mit dem Abschnitt 12.6 des Skripts und dem vorliegenden Übungsblatt endet der für die Abschlußklausur relevante Stoff der Analysis II.

Informationen zur Abschlußklausur

Die **Abschlußklausur** zur Analysis II findet

am **Samstag, den 18. Juni 2011**, um **9.00–10.30 Uhr**
in **A3, Raum 001**

statt. Sie können eine Woche vor der Klausur im Studierendenportal abfragen, welcher Sitzplatz Ihnen für die Klausur zugewiesen worden ist. Wir empfehlen dringend, spätestens 15 Minuten vor Beginn der Klausur zu erscheinen.

Zur Teilnahme an der Abschlußklausur ist eine *Anmeldung* im Studienbüro erforderlich (Studierende der Universität Heidelberg wenden sich für die Anmeldung direkt an Sebastian Klein). Obwohl die reguläre Anmeldefrist abgelaufen ist, können Sie die Anmeldung auch jetzt noch (gegen Zahlung einer Nachgebühr) nachholen. Falls Sie an der Klausur teilnehmen wollen, aber bisher nicht angemeldet sind, ist es jedoch unbedingt notwendig, dass Sie die Anmeldung so rasch wie möglich nachholen. *Ohne Anmeldung hat niemand die Möglichkeit, an der Abschlußklausur teilzunehmen.*

Bitte bringen Sie zur Klausur die folgenden *Gegenstände* mit:

- mindestens ein Schreibgerät (schwarze oder blaue Tinte, *kein* Rotstift, *kein* Bleistift),
- Ihren Studierendenausweis bzw. ecUM-Karte.

Sie brauchen *kein Schreibpapier* mitzubringen, da dieses von uns gestellt wird. Selbstverständlich dürfen Sie *Nahrungsmittel und Getränke* zur Klausur mitbringen, allerdings nur solche, von denen keine Belästigung der anderen Klausurteilnehmer (etwa durch Geräusch oder Geruch) ausgeht.

Als *Hilfsmittel* dürfen Sie ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt (210×297 mm) mitbringen und während der Klausur verwenden. Dies gilt unabhängig davon, ob es von Hand oder mit dem Computer o.ä. beschriftet ist, und auch die Schriftgröße spielt keine Rolle. Weitere Hilfsmittel (z.B. Taschenrechner, Skripten usw.) sind *nicht* zugelassen, ein etwa mitgebrachtes *Handy* ist während der Klausur abzuschalten.