Martin Schmidt
Sebastian Klein

**Analysis II**
**4. Übung**

10. März 2011

**Die Lösungen sind am Saint Patrick's Day, den 17. März 2011 in der Großen Übung abzugeben.**

**74. Stetigkeit im $\mathbb{R}^2$.**

Für die folgenden Funktionen $f_k : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f_k(x,y)$ *untersuche* man jeweils, ob $f_k$ in $(0,0)$ stetig fortsetzbar ist (d.h. man untersuche, ob man einen Wert $f_k(0,0) \in \mathbb{R}$ so wählen kann, dass die hierdurch fortgesetzte Funktion $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in $(0,0)$ stetig ist).

**(a)** $f_1(x,y) := \dfrac{x-y}{|x|+|y|}$ *(4 Punkte)*

**(b)** $f_2(x,y) := \dfrac{x\,y^2}{x^2+y^2}$ *(4 Punkte)*

**(c)** $f_3(x,y) = \dfrac{x\,y^2}{x^2+y^4}$ *(4 Punkte)*

**75. Die Exponentialfunktion für Matrizen.**

Wir bezeichnen im Folgenden mit $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ auch den Raum der reellen $(n \times n)$-Matrizen. Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, konvergiert für jedes $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ die Potenzreihe $\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. $\exp : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ heißt die *(matrixwertige) Exponentialabbildung.*

**(a)** Sei $t, s \in \mathbb{R}$. *Berechne* $\exp(A)$ für die folgenden $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$:

**(i)** $A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$ *(3 Punkte)*

**(ii)** $A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$ *(4 Punkte)*

**(iii)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ *(4 Punkte)*

[Tipp. Man rechne jeweils zuerst $A^n$ für $n \leq 3$ aus, um auf Ideen zu kommen, wie $A^n$ allgemein aussieht.]

**(b)** Sei $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $A \cdot B = B \cdot A$. *Zeige:* $\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$. [Es darf ohne Beweis benutzt werden, dass auch für miteinander kommutierende Matrizen die binomische Formel gilt: $(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j}$.] *(4 Punkte)*

**(c)** *Folgere* aus (b): $\exp(A)$ ist stets invertierbar, und zwar gilt $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$. *(3 Punkte)*

**76. Derivationen.** Sei $V$ ein Banachraum. Für $A \in \mathcal{L}(V)$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$D_A : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V),\ B \mapsto A \cdot B - B \cdot A\,.$$

**(a)** *Berechne* $D_A(B)$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. *(2 Punkte)*

**(b)** *Zeige*, dass $D_A$ eine Derivation auf $\mathcal{L}(V)$ ist, d.h. dass für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{L}(V)$ gilt:

$$D_A(B_1 \cdot B_2) = D_A(B_1) \cdot B_2 + B_1 \cdot D_A(B_2) \,.$$ *(3 Punkte)*

**(c)** *Zeige* durch vollständige Induktion, dass für $B \in \mathcal{L}(V)$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$D_A^n(B) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k \, B \, (-A)^{n-k} \,.$$

Dabei bedeutet $D_A^n$ die $n$-fache Anwendung von $D_A$. *(4 Punkte)*

**(d)** *Zeige*: $\exp(D_A)B = \exp(A) \cdot B \cdot \exp(-A)$. Dabei wird $\exp(D_A)$ in $\mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$ und $\exp(\pm A)$ in $\mathcal{L}(V)$ gebildet. *(4 Punkte)*

**77. Eine Anwendung des Satzes von Stone-Weierstraß.**

**(a)** Es sei $0 < a < b$ und $A$ die kleinste Unteralgebra von $C_b([a,b], \mathbb{R})$, die die Funktionen $1|[a,b]$ und $x^2|[a,b]$ enthält. *Zeige:* Der Abschluß von $A$ in $C_b([a,b], \mathbb{R})$ ist gleich $C_b([a,b], \mathbb{R})$. *(4 Punkte)*

**(b)** Gilt die Behauptung aus (a) auch für $a < 0 < b$? *(3 Punkte)*