Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis II
3. Übung

3. März 2011

Die Lösungen sind am Donnerstag, den 10. März 2011 in der Großen Übung abzugeben.

70. Abgeschlossene und offene Mengen.

(a) Man *untersuche*, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ offen oder abgeschlossen sind:

(i) $M_1 := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \}$ *(2 Punkte)*

(ii) $M_2 := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 \leq 1 \}$ *(2 Punkte)*

(iii) $M_3 := \{ (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) \mid n \in \mathbb{N} \}$ *(2 Punkte)*

(b) Es sei nun (X,d) ein metrischer Raum und $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{K}$ stetige Funktionen.

(i) *Zeige:* $\{ x \in X \mid f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0 \}$ ist abgeschlossen in X. *(3 Punkte)*

(ii) *Zeige:* $\{ x \in X \mid f_1(x), \ldots, f_n(x) > 0 \}$ ist offen in X. *(3 Punkte)*

(c) Man *belege durch ein Beispiel*, dass die Aussage aus (b)(ii) falsch wird, wenn man unendlich viele stetige Funktionen $f_1, f_2, f_3, \ldots : X \to \mathbb{K}$ betrachtet. Wie steht es mit der Aussage aus (b)(i)? *(3 Punkte)*

71. Stetigkeit im $\mathbb{K}^n$. Sei $n, m \in \mathbb{N}$. Wir betrachten in dieser Aufgabe den $\mathbb{K}^n$ und den $\mathbb{K}^m$ jeweils mit der von einer Norm induzierten Metrik; die Wahl der Norm ist dabei für die folgenden Stetigkeitsuntersuchungen beliebig, weil auf diesen Räumen nach Satz 9.37 je zwei Normen zueinander äquivalent sind.

(a) *Untersuche*, ob die folgenden Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jeweils an der Stelle $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ stetig sind:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *(3 Punkte)*

(ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x \cdot \sin(y)}{y \cdot e^{x+y}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *(3 Punkte)*

[Tipp zu (i) und (ii). Man benutze von Satz 9.30 die Äquivalenz (i)$\Leftrightarrow$(iii). Bei der Anwendung ist Aufgabe 67(a) nützlich.]

(b) Sei $k \in \{1, \ldots, n\}$. *Zeige,* dass die „k-te Projektion“, d.h. die Abbildung

$$\mathrm{pr}_k : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k$$

Lipschitz-stetig ist. *(3 Punkte)*

(c) Sei $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ eine Abbildung. Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ sei $f_k := \mathrm{pr}_k \circ f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$ die „k-te Komponente“ von f. *Zeige*: f ist genau dann stetig, wenn f_k für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ stetig ist. *(3 Punkte)*
[Tipp. Eine Richtung des Beweises geht mit (b) ganz schnell.]

(d) Sei $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ eine Abbildung. Dann ist der *Graph* von f die Menge

$$G(f) := \{ (x, f(x)) \mid x \in \mathbb{K}^m \} \subset \mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^n \cong \mathbb{K}^{m+n} .$$

Zeige: Wenn f stetig ist, so ist $G(f)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{K}^{m+n}$.
[Tipp. Aufgabe 70(b)(i).] *(3 Punkte)*

72. Der Funktionenraum $B([0,1],\mathbb{R})$. Mit $B([0,1],\mathbb{R})$ bezeichnen wir den Banachraum der beschränkten Funktionen $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Für $f\in B([0,1],\mathbb{R})$ definieren wir eine Funktion $F(f):[0,1]\to\mathbb{R}$ durch

$$F(f)(x) := f(\tfrac{x}{2}) \quad \text{für } x\in[0,1]\,. \tag{$\diamond$}$$

(a) *Zeige* $F(f)\in B([0,1],\mathbb{R})$. *(3 Punkte)*

Wegen (a) wird durch ($\diamond$) eine Abbildung

$$F: B([0,1],\mathbb{R})\to B([0,1],\mathbb{R}),\ f\mapsto F(f)$$

definiert.

(b) *Zeige:* F ist Lipschitz-stetig; als Lipschitz-Konstante kann $L=1$ gewählt werden. *(3 Punkte)*

73. Ableiten und Integrieren als lineare Operatoren auf Funktionenräumen. Sei $a<b$. Wir betrachten den Vektorraum $C([a,b],\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ als normierten Raum mit der Norm $\|f\|_\infty := \sup\{\,|f(x)|\,\big|\,x\in[a,b]\,\}$. Weiter sei $C^1([a,b],\mathbb{R})$ der Unterraum von $C([a,b],\mathbb{R})$, der aus denjenigen $f\in C([a,b],\mathbb{R})$ besteht, die auf dem offenen Intervall (a,b) differenzierbar sind, und deren Ableitung $f':(a,b)\to\mathbb{R}$ sich stetig auf $[a,b]$ fortsetzen läßt. Für $f\in C^1([a,b],\mathbb{R})$ bezeichnen wir mit $f':[a,b]\to\mathbb{R}$ auch diese stetige Fortsetzung der Ableitung von f.

Wir untersuchen den „Differentialoperator“ von $C^1([a,b],\mathbb{R})$, d.h. die Abbildung

$$D: C^1([a,b],\mathbb{R})\to C([a,b],\mathbb{R}),\ f\mapsto f'\,.$$

(a) *Zeige*, dass die Abbildung D linear ist, und *bestimme* ihren Kern und ihr Bild. *(3 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass D an *keiner* Stelle $f\in C^1([a,b],\mathbb{R})$ stetig ist. *(3 Punkte)*
[Tipp. Zu zeigen ist, dass ein $\varepsilon>0$ existiert, so dass für jedes $\delta>0$ eine Funktion $g\in C^1([a,b],\mathbb{R})$ existiert mit $\|f-g\|_\infty<\delta$ und $\|D(f)-D(g)\|_\infty\geq\varepsilon$. Dabei kann hier $\varepsilon:=1$ gewählt werden. Um eine Idee zu bekommen, wie eine geeignete Funktion g aussehen könnte, kann man noch einmal den Tipp zu Aufgabe 64(c)(ii) anschauen.]

Wir betrachten nun auch den „Integraloperator“ $I: C([a,b],\mathbb{R})\to C^1([a,b],\mathbb{R}),\ f\mapsto I(f)$, der durch

$$I(f)(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für } x\in[a,b]$$

gegeben ist.

(c) *Zeige*, dass die Abbildung I linear ist, und *bestimme* ihren Kern und ihr Bild. *(3 Punkte)*

(d) *Zeige*, dass I Lipschitz-stetig ist. *(3 Punkte)*

(e) *Zeige*, dass I ein „Rechts-Inverses“ von D ist, d.h. dass gilt: $D\circ I = \mathbb{1}_{C([a,b],\mathbb{R})}$. Ist I auch ein „Links-Inverses“ von D ($I\circ D = \mathbb{1}_{C^1([a,b],\mathbb{R})}$)? *(2 Punkte)*