Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis II
1. Übung

16. Februar 2011

Die Lösungen sind am Donnerstag, den 24. Februar 2011 in der Großen Übung abzugeben.

63. Metriken.

(a) Man *beweise oder widerlege*, dass die folgenden Definitionen jeweils eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definieren. Dabei ist stets $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) $d_1(x,y) := x - y$ *(2 Punkte)*

(ii) $d_2(x,y) := (x-y)^2$ *(2 Punkte)*

(b) *Die Metrik der französischen Eisenbahn.* Für $a, b \in \mathbb{R}^2$ setzen wir

$$d_E(a,b) := \begin{cases} \|a-b\| & \text{falls } a,b \text{ auf einer Geraden durch den Ursprung liegen} \\ \|a\| + \|b\| & \text{andernfalls} \end{cases} .$$

Dabei wird mit $\|\cdot\|$ die euklidische Norm von $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

(i) *Zeige*, dass d_E eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist. *(5 Punkte)*

(ii) Man *veranschauliche* durch eine Skizze, was diese Metrik mit dem französischen Eisenbahnsystem zu tun hat. *(2 Punkte)*
[Tipp. Im Ursprung liegt Paris.]

(c) *Wie man aus Metriken weitere konstruiert.*

(i) Es sei eine Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$ auf einer Menge X, sowie eine streng monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(0) = 0$ und der Eigenschaft

$$\forall\, t, s \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ f(t+s) \leq f(t) + f(s) .$$

Zeige, dass dann

$$\widetilde{d} : X \times X \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(d(x,y))$$

eine weitere Metrik auf X ist. *(3 Punkte)*

(ii) *Zeige*, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{t}{1+t}$ die Voraussetzungen aus (i) erfüllt. *(3 Punkte)*

(iii) *Folgere* aus (i) und (ii), dass durch $d_3(x,y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) eine weitere Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird. *(2 Punkte)*

64. Normen.

(a) Sei V ein Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Dann bezeichnet man die Menge $\{\, v \in V \mid \|v\| = 1 \,\}$ aller Vektoren von V mit der Norm 1 als *Einheitskugel* in $(V, \|\cdot\|)$.

(i) *Skizziere* die Einheitskugeln von $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ und $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. *(3 Punkte)*

(ii) Kann man an den Bildern aus (i) ablesen, dass diese drei Normen äquivalent sind? *(Nur zum Nachdenken.)*

(b) Wir bezeichnen mit $\mathbb{R}[x]$ den Vektorraum der Polynome $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$ über $\mathbb{R}$. *Zeige*, dass durch

$$\|p\| := \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

eine Norm auf $\mathbb{R}[x]$ definiert wird. *(4 Punkte)*

(c) Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir bezeichnen mit $C^1([a,b],\mathbb{R})$ den Raum der stetig differenzierbaren Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$. Ferner sei für $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$

$$\|f\|_0 := \sup\{\, |f(x)| \,\big|\, x \in [a,b] \,\} \quad \text{und} \quad \|f\|_1 := \|f\|_0 + \sup\{\, |f'(x)| \,\big|\, x \in [a,b] \,\}\ .$$

(i) *Zeige*, dass durch $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$ zwei Normen auf $C^1([a,b],\mathbb{R})$ definiert werden. *(5 Punkte)*

(ii) *Beweise oder widerlege*: $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$ sind zueinander äquivalent. *(5 Punkte)*
[Tipp. Untersuche $f(x) := \sin(cx)$ mit $c \geq \frac{2\pi}{b-a}$.]

65. Die Maximumnorm als Grenzwert der p-Normen. Sei $x \in \mathbb{C}^n$. *Zeige*:

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p\ . \qquad (6\ \text{Punkte})$$

[Tipp. Ist $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ gegeben, so erweitere man den Ausdruck für $\|x\|_p$ mit $|x_k|$, wobei $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $|x_k| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ ist.]

66. Grundbegriffe der Topologie. *Belege* die folgenden Aussagen *durch jeweils ein Beispiel*:

(a) Es gibt einen metrischen Raum, in dem jede Teilmenge zugleich offen und abgeschlossen ist. *(2 Punkte)*

(b) Der Schnitt von unendlich vielen offenen Mengen ist im Allgemeinen weder offen noch abgeschlossen. *(2 Punkte)*

(c) Sind A und B Teilmengen eines metrischen Raums, so gilt im Allgemeinen $\overline{A} \cap \overline{B} \not\subset \overline{A \cap B}$. *(2 Punkte)*

(d) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ besitzt eine abzählbare Teilmenge X mit $\overline{X} = \mathbb{R}$. *(2 Punkte)*