Universität Mannheim
Dynamische Systeme
FSS 2011
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Übungsblatt 7

20. Die Exponentialabbildung für Matrizen.

Gegenstand dieser Aufgabe ist die *Exponentialabbildung* (für Matrizen), das heißt, die Potenzreihe

$$e^A := \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}\, A^k \quad \text{für Matrizen } A \in \mathbb{K}^{n\times n}\,.$$

(a) Funktionalgleichung der exp**-Funktion**
Für zwei allgemeine Matrizen $A,B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt im Allgemeinen nicht $\exp(A+B) = \exp(A)\cdot\exp(B)$. Dies gilt nur, wenn die beiden Matrizen kommutieren ($[A,B] = AB - BA = 0$).

(i) Falls $[A,B] = 0$ gilt, so gilt die binomische Formel

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

(3 Punkte)

(ii) Begründe kurz, an welcher Stelle bei der binomischen Formel ein Problem entsteht, wenn die Matrizen nicht kommutieren. *(1 Punkt)*

Es folgt aus Teil (i) für kommutierende Matrizen dann mit Hilfe der absoluten Konvergenz von Reihen die Formel $\exp(A+B) = \exp(A)\cdot\exp(B)$.

(b) Wie man $\exp(A)$ ausrechnet.
Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeige:

(i) *Basiswechsel.* Ist $C \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, so gilt $\exp(CXC^{-1}) = C\cdot\exp(X)\cdot C^{-1}$.
(3 Punkte)

(ii) *Blockmatrizen.* Ist $V \subset \mathbb{K}^n$ ein Untervektorraum mit $A(V) \subset V$, so gilt $\exp(A)V = V$ und $\exp(A|V) = \exp(A)|V$. *(2 Punkte)*
Interpretation. Von Blockmatrizen kann man die Exponentialabbildung blockweise berechnen.

Bitte wenden.

(iii) *Diagonalmatrizen.* Ist $A = \operatorname{diag}(c_1, \dots, c_n)$ mit $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ eine Diagonalmatrix, so gilt $\exp(A) = \operatorname{diag}(e^{c_1}, \dots, e^{c_n})$. *(2 Punkte)*

(iv) *Nilpotente Matrizen.* Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine nilpotente Matrix in Normalform. Man berechne $\exp(tA)$ für $t \in \mathbb{R}$. *(3 Punkte)*

[Tipp. Man kann diese Aufgabe angehen, indem man $A^2, A^3, \dots, A^n$ ausrechnet.]

(v) *Jordan-Blöcke.* Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ und

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ein Jordan-Block zum Eigenwert λ. Berechne $\exp(tA)$.
[Tipp. (a) in Verbindung mit (b)(iii),(iv).] *(3 Punkte)*

(vi) Man erläutere, wie man mit Hilfe von (i)–(v) $\exp(tA)$ für eine beliebige Matrix A ausrechnen kann. *(1 Punkt)*

21. Lineare Differentialgleichungssysteme.
Löse die folgenden linearen Anfangswertprobleme:

(a) $\dot{u}(t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot u(t)$ mit $u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *(5 Punkte)*

(b) $\dot{u}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot u(t)$ mit $u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *(3 Punkte)*

22. Lineare Differentialgleichungen.

Finde die Lösung der folgenden inhomogenen linearen Anfangswertprobleme

(a) $\dot{u}(t) = u(t) + t, \quad u(0) = 1$ *(2 Punkte)*

(b) $\dot{u}(t) = 3t^2 u + 2t^2, \quad u(0) = 1$ *(2 Punkte)*

Abgabe bis Montag, den 4. April 2011 in der Vorlesung