Universität Mannheim
Dynamische Systeme
FSS 2011
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Übungsblatt 4

11. Globale Flüsse

(a) Zeigen Sie, dass durch die folgenden Vorschriften globale Flüsse auf M definiert werden und skizzieren Sie die zugehörigen Phasenporträts.

(i) $M = \mathbb{R}^2$ $(t, x, y) \mapsto (e^t x, e^t y)$ *(3 Punkte)*

(ii) $M = \mathbb{R}^2$ $(t, x, y) \mapsto (e^t x, e^{-t} y)$ *(3 Punkte)*

(iii) $M = \mathbb{C}$ $(t, z) \mapsto e^{it} z$ *(3 Punkte)*

(iv) $M = \mathbb{C}$ $(t, z) \mapsto e^{(i-1)t} z$ *(3 Punkte)*

(b) Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld mit der Eigenschaft, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, für das gilt : Das Anfangswertproblem $\dot{x}(t) = F(x(t))$, $x(0) = x_0$ ist für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ und alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar.
Zeigen Sie, dass F einen **globalen** Fluss definiert. *(5 Punkte)*

12. Produktfluss

Es seien ϕ und ψ globale Flüsse auf den metrischen Räumen M und N.

(a) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi \times \psi : \mathbb{R} \times M \times N &\to M \times N \\ (t, x, y) &\mapsto (\phi(t, x), \psi(t, y)) \end{aligned}$$

definiert einen globalen Fluss. *(5 Punkte)*

(b) Beschreiben Sie Orbits des Produktflusses auf dem Zylinder $\mathbb{R} \times S^1$ mit den beiden Flüssen $\phi(t, x) = e^t x$ auf $M = \mathbb{R}$ und $\psi(t, x) = e^{i\alpha t} z$ auf $N = S^1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. *(3 Punkte)*

Bitte wenden.

13. Beschränkte Vektorfelder Sei $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein beschränktes lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld, d.h. es existieren Konstanten $L, M < 1$, so dass $\|v(x)\| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ eine globale Lösung der DGL

$$\dot{x}(t) = v(x(t)) \quad x(0) = x_0$$

existiert. Das heißt es gibt eine eindeutige, stetig differenzierbare Kurve $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, die die Gleichung löst. *(5 Punkte)*

Abgabe bis Montag, den 14. März 2011 in der Vorlesung