Universität Mannheim
Dynamische Systeme
FSS 2011
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Übungsblatt 3

6. Fixpunkte

Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f : [0,1] \times [0,1] &\rightarrow [0,1] \times [0,1] \\ (x,y) &\mapsto (1 - y^2/3, 1 - x^2/4) \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist mit einer Lipschitzkonstanten $L < 1$ (benutzen Sie die Norm $\|\cdot\|_\infty$). *(3 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung f genau dann einen Fixpunkt besitzt, wenn es ein $x \in [0,1]$ gibt, das die Gleichung $-x^4 + 8x^2 - 48x + 32 = 0$ löst. Geben Sie eine Folge an, die gegen diesen Fixpunkt konvergiert.

(3 Punkte)

7. Globale Existenz und Eindeutigkeit

Der Brüsselator ist ein einfaches Modell zur Beschreibung chemischer Oszillatoren. Der Brüsselator wurde von dem Nobelpreisträger Ilya Prigogine in Brüssel entwicklelt.

$$\begin{aligned} \dot{u} &= a - bu + u^2 v - u \\ \dot{v} &= bu - u^2 v \end{aligned}$$

Dabei sind a, b positive Konstanten. Zeigen Sie, dass dieses System für Anfangswerte $u(0) = u_0 > 0, v(0) = v_0 > 0$ eindeutig bestimmte Lösungen besitzt, die für $t \geq 0$ positiv bleiben und dort global existieren. *(5 Punkte)*

8. Explizites Aufstellen einer Differentialgleichung

Sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) e^{-x^2}\, dx \quad t \in \mathbb{R}$$

Stellen Sie eine Differentialgleichung für $u(t)$ auf.

[Tipp. Ableiten und dann partiell integrieren] *(5 Punkte)*

Bitte wenden.

9. Picard-Iteration

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y'(x) = y(x), \qquad y(0) = 1.$$

Benutzen Sie Picards Iterationsverfahren

$$\phi_{n+1}(x) = y(0) + \int\limits_0^x \phi_n(t)dt \qquad \phi_1(x) \equiv 1$$

um die ersten fünf Folgenglieder der Folge zu bestimmen, die nach dem Banachschen Fixpunktsatz gegen die Lösung der Differentialgleichung konvergiert. *(4 Punkte)*

Abgabe bis (Rosen-)Montag, den 7. März 2011 in der Vorlesung