Universität Mannheim
Dynamische Systeme
FSS 2011
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Übungsblatt 11

34. Topologische Flussäquivalenz

Betrachte die linearen dynamischen Systeme $\dot{x} = Ax$, $\dot{z} = Bz$ und $\dot{y} = -\mathbf{1}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}^2, z \in \mathbb{C}$, die durch

$$A := -\alpha\mathbf{1} \quad B := -1 + i\beta$$

für $\alpha, \beta > 0$ gegeben sind.

(a) Gib explizit einen Homöoomorphismus $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, so dass die beiden Systeme $\dot{x} = Ax$ und $\dot{y} = -\mathbf{1}y$ topologisch flussäquivalent sind, d.h.

$$h(e^{tA}x) = e^{-t}h(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2$$

Betrachte dazu ein $h(x)$ von der Form $h(x) = x|x|^\gamma$ mit einem zu bestimmenden γ in Abhängigkeit von α. *(4 Punkte)*

(b) Gib explizit einen Homöoomorphismus $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an, so dass die beiden Systeme $\dot{z} = Bz$ und $\dot{y} = -\mathbf{1}y$ topologisch flussäquivalent sind, d.h.

$$g(e^{tB}z) = e^{-t}g(z) \quad \forall t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$$

Betrachte dazu ein $g(z)$ von der Form

$$g(z) = ze^{i\phi(|z|)}$$

mit einer zu bestimmenden Funktion $\phi(|x|) = \delta \ln(|x|)$ für ein δ in Abhängigkeit von β. *(4 Punkte)*

(c) Beweise, dass die in (a) und (b) gefundenen Funktionen $h(x), g(z)$ tatsächlich Homöomorphismen sind. Prüfe dazu nach, dass beide Funktionen stetig sind (insbesondere in 0), bestimme die Umkehrabbildungen und weise für diese ebenfalls die Stetigkeit nach. *(3 Punkte)*

Bitte wenden.

35. Stabilität aufgrund negativen Realteils

Betrachte den von A erzeugten linearen Fluß e^{tA}. Die Aussage, dass 0 genau dann eine Senke ist, wenn alle Eigenwerte von A einen negativen Realteil haben, gilt nur für von t unabhängige A. Betrachte hierzu die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2(t) & 1 - \frac{3}{2}\cos(t)\sin(t) \\ -1 - \frac{3}{2}\sin(t)\cos(t) & -1 + \frac{3}{2}\sin^2(t) \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Eigenwerte von $A(t)$ und zeige, dass diese negativen Realteil haben. *(3 Punkte)*

(b) Zeige, dass eine Lösung der Differentialgleichung gegeben ist durch

$$x(t) = e^{t/2}\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

(3 Punkte)

(c) Zeige, dass diese Lösung nicht asymptotisch stabil ist. *(2 Punkte)*

36. Phillips Model mit Beschleuniger

Wir betrachten ein dynamisches System mit stetiger Zeit, in dem wir die Beziehung zwischen dem Produkt Y und der Investition I beschreiben durch

$$I'(t) = -k(I(t) - vY'(t)), \quad k, v > 0$$

Die Entwicklungsgeschwindigkeit von dem Produkt sei proportional zu der Differenz zwischen der Produktmenge und der Nachfrage:

$$Y'(t) = -\lambda(Y(t) - Z(t)), \quad \lambda > 0$$

Die Nachfrage $Z(t)$ bestehe aus den drei Komponenten: Konsum $C(t)$, autonome Investition $A(t)$ und induzierte Investition $I(t)$, es ist also $Z(t) = C(t) + A(t) + I(t)$. Zusätzlich soll der Konsum ein fester Anteil des Produktes sein, $C(t) = cY(t), 0 < c < 1$. Dieses Modell bezeichnet man als Phillips Modell mit Beschleuniger.

(a) Nimm an, dass $A(t) = A$ eine gegebene Konstante ist und leite eine Differentialgleichung für $Y''(t)$ her. (Die rechte Seite darf keine Terme mehr enthalten, die von $I(t)$ abhängen, kombiniere dazu die obigen Gleichungen.) *(5 Punkte)*

(b) Berechne den Fixpunkt dieses dynamischen Systems. *(3 Punkte)*

(c) Für welche Parameterwerte λ, c, k, v ist dieser Fixpunkt asymptotisch stabil? *(3 Punkte)*

Abgabe bis Montag, den 16. Mai 2011 in der Vorlesung