Universität Mannheim
Dynamische Systeme
FSS 2011
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Übungsblatt 6

17. Eulersche Multiplikatoren.

(a) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) \cdot h(t, u(t)) + g(t, u(t)) = 0\ , \qquad (*)$$

wobei $g, h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen in t und u sein mögen. Zeige:

(i) Hängt $\alpha := (\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial h}{\partial t})/h$ allein von t ab, so ist $M(t) := \exp(\int_{t_0}^{t} \alpha(s)ds)$ ein Eulerscher Multiplikator für $(*)$. *(3 Punkte)*

(ii) Hängt $\beta := (\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial h}{\partial t})/g$ allein von u ab, so ist $M(u) := \exp(-\int_{u_0}^{u} \beta(s)ds)$ ein Eulerscher Multiplikator für $(*)$. *(3 Punkte)*

(iii) Hängt $\gamma := (\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial h}{\partial t})/(t\,g - u\,h)$ allein von $t \cdot u$ ab, so ist $M(t \cdot u) := \exp(-\int_{t_0 u_0}^{tu} \gamma(s)ds)$ ein Eulerscher Multiplikator für $(*)$. *(3 Punkte)*

(b) Finde für die folgenden Differentialgleichungen jeweils einen Eulerschen Multiplikator, sowie eine Funktion F, die die Lösungen $u(t)$ der Differentialgleichung durch $F(t, u(t)) \equiv const.$ charakterisiert.

(i) $t\,u(t) \cdot \dot{u}(t) + t^2 + u(t)^2 + t = 0$ *(3 Punkte)*

(ii) $-\frac{t^2}{u} \cdot \dot{u} + u + t = 0$ *(3 Punkte)*

(iii) $(3t^2 - u^2) \cdot \dot{u} - 2tu = 0$ *(3 Punkte)*

18. Exakte Differentialgleichungen.

(a) Zeige, dass die Differentialgleichung $e^{3x} \cdot y' + 3e^{3x}\,y - 2x = 0$ exakt ist, und bestimme ihre allgemeine Lösung. *(3 Punkte)*

(b) Zeige, dass die Differentialgleichung $(x^2\,e^y + 1) \cdot y' + 2x\,e^y - 1 = 0$ exakt ist, und finde eine Stammfunktion. Die Lösungsfunktion $y(x)$ mit $y(1) = 0$ ist nicht explizit angebbar, bestimme jedoch ihre Umkehrfunktion $x(y)$. *(3 Punkte)*

Bitte wenden.

19. Diverse Differentialgleichungen.

Finde die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme:

(a) $y'(x) = (x + y(x))^2$ *(3 Punkte)*

(b) $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x} - \dfrac{x^2}{y(x)^2}$ mit $y(1) = 1$ *(3 Punkte)*

Abgabe bis Montag, den 28. März 2011 in der Vorlesung