Universität Mannheim
Dynamische Systeme
FSS 2011
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Übungsblatt 9

25. Spur und Determinante

(a) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ eine beliebige Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Berechne das Polynom $p(t) = \det(\mathbb{1} + tA)$, wie es im Beweis von Satz 1.62 verwendet wurde. *(3 Punkte)*

(b) Gib für allgemeine Matrizen $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ den höchsten und den niedrigsten Koeffizient des Polynoms $p(t)$ an. *(1 Punkt).*

(c) In welcher Beziehung steht das Polynom $p(t)$ zu dem charakteristischen Polynom der Matrix A ? *(2 Punkte)*

26. Flüsse und Eigenwerte Berechne für die folgenden globalen Flüsse auf $\mathbb{R}^2$ die zugehörigen Vektorfelder. Diagonalisiere die Matrizen der Vektorfelder.

(a) $(t, x, y) \mapsto (\cosh(t)x + \sinh(t)y, \sinh(t)x + \cosh(t)y)$ *(3 Punkte)*

(b) $(t, x, y) \mapsto ((-e^t + 2e^{2t})x + (-e^t + e^{2t})y, (2e^t - 2e^{2t})x + (2e^t - e^{2t})y)$ *(3 Punkte)*

27. Stabilität einer Differentialgleichung

Betrachte die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t)^3 \qquad \alpha \neq 0$$

(a) Bestimme alle Fixpunkte x^* dieser Differentialgleichung. *(2 Punkte)*

(b) Löse diese Differentialgleichung für einen beliebigen Anfangswert $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$. *(4 Punkte)*

(c) Für welche Werte $\alpha, x_0 \in \mathbb{R}$ ist der Fixpunkt x^* asymptotisch stabil, das heisst $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*$, für welche instabil? *(2 Punkte)*

Bitte wenden.

28. Floquettheorie

Wir betrachten in dieser Aufgabe die Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) \qquad A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & 1 \\ 0 & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Die Matrix $A(t)$ ist periodisch mit Periode 2π. Das Ziel ist eine invertierbare Transformation $G(t)$ zu finden, die periodisch mit gleicher Periodenlänge ist, so dass die resultierende Differentialgleichung $\dot{u}(t) = \tilde{A}u(t)$ autonom ist.

(a) Zeige, dass die Matrix

$$F(t) = \begin{pmatrix} \exp(\sin(t)) & t\exp(\sin(t)) \\ 0 & \exp(\sin(t)) \end{pmatrix}$$

die Fundamentallösung von $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$ mit $u(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist. *(2 Punkte)*

Im Skript wird gezeigt, dass ein invertierbares Element $M \in \mathcal{L}(V)$ existiert, dass die Relation $F(t+\omega) = F(t)M$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Es gilt nun offenbar $M = F(\omega)$.

(b) Bestimme die Monodromie $M := F(2\pi)$ von $F(t)$ und eine Matrix B mit $\exp(B) = M$. [Tipp. Erinnere dich an die Exponentialfunktion bei Jordanblöcken.] *(2 Punkte)*

(c) Die Matrix $\tilde{A}$ wird definiert durch $B/2\pi$, bestimme die dazugehörige Fundamentallösung $\tilde{F}(t)$ und die Monodromie $\tilde{M}$.

(2 Punkte)

(d) Berechne $G(t) = \tilde{F}(t)F^{-1}(t)$. *(3 Punkte)*

(e) Zeige, dass $G(t)$ periodisch ist mit Periode 2π. *(1 Punkte)*

Abgabe bis Montag, den 2. Mai 2011 in der Vorlesung