Universität Mannheim
Dynamische Systeme
FSS 2011
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Übungsblatt 5

14. Äquivalente dynamische Systeme

Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, welches lokal Lipschitz-stetig ist und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine lokal Lipschitz-stetige reelle Funktion mit $f \not\equiv 1$, für die eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit $0 < C < 1$ existiert, so dass

$$C \leq f(x) \leq \frac{1}{C} \; \forall x$$

gilt.

(a) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $f \cdot F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto f(x) \cdot F(x)$ lokal Lipschitz-stetig ist. *(2 Punkte)*

(b*) Zeigen Sie, dass für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus $\psi_{x_0} : \widetilde{I}_{\max} \to I_{\max}$ existiert, so dass für die maximalen Integralkurven $\gamma : I_{\max} \to \mathbb{R}^n$, $\widetilde{\gamma} : \widetilde{I}_{\max} \to \mathbb{R}^n$ zu F bzw. $f \cdot F$ mit Startpunkten $\gamma(t_0) = \widetilde{\gamma}(t_0) = x_0$

$$\gamma(\psi_{x_0}(t)) = \widetilde{\gamma}(t) \; \forall t \in \widetilde{I}_{\max}$$

gilt. (Tipp. Man betrachte die DGL $\dot{\psi}(t) = g(\psi(t))$ mit $g(t) := f(\gamma(t))$ sowie vorgegebenem $\gamma(t)$ mit $\gamma(t_0) = x_0$ und zeige, dass ψ einen Homöomorphismus definiert, um daraus zu folgern, dass $(\gamma \circ \psi)(t)$ eine maximale Integralkurve des Vektorfeldes $f \cdot F$ ist.) *(5 Zusatzpunkte)*

(c) Seien F und $f \cdot F$ vollständig. Zeigen Sie, dass die beiden zu den Vektorfeldern F und $f \cdot F$ gehörenden dynamischen Systeme Φ und $\widetilde{\Phi}$ verschieden voneinander sind, die Trajektorien für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ jedoch übereinstimmen, d.h. es gilt

$$\Phi(\mathbb{R}, x) = \widetilde{\Phi}(\mathbb{R}, x) \; \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(Tipp. Für den ersten Teil argumentiere man, weshalb die Lösungen der DGL $\dot{x} = F(x)$ bzw. $\dot{x} = f(x) \cdot F(x)$ nicht übereinstimmen. Für den zweiten Teil verwende man Aufgabenteil (b).) *(4 Punkte)*

Bitte wenden.

15. Lokale Flüsse und Vektorfelder

Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : I \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (t,z) &\mapsto \frac{1}{\frac{1}{z} - t} \end{aligned}$$

mit $I \subset \mathbb{R}$.

(a) Beweisen Sie, dass Φ einen lokalen Fluss definiert und bestimmen Sie die maximalen Existenzzeiten $\underline{t}(z)$ und $\overline{t}(z)$ in Abhängigkeit von z. *(5 Punkte)*

(b) Welches Vektorfeld ist zu dem Fluss Φ assoziiert? *(2 Punkte)*

(c) Bestimmen Sie den kritischen Punkt z^* des Flusses. *(1 Punkt)*

(d) Zeichnen Sie das Phasenporträt zu dem Fluss Φ. *(3 Punkte)*

(e) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\overline{t}(z) = \infty$, so dass

$$\lim_{t \to \infty} \Phi(t,z) = z^*$$

gilt. *(3 Punkte)*

16. Trennung der Variablen

(a) Berechnen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen

(i) $\dot{x}(t) = \frac{t}{\sin(x(t))}$ *(2 Punkte)*

(ii) $\dot{x}(t) = \frac{2x(x-1)}{t(2-x)}$ *(2 Punkte)*

(b) Transformieren Sie die Gleichung $\dot{x} = f(x/t), t > 0$ in eine Gleichung mit getrennten Variablen. *(3 Punkte)*

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe von (b) alle Lösungen von

$$\dot{x} = \frac{x}{t}\left(\frac{x}{t} + 1\right)$$

(3 Punkte)

Abgabe bis Montag, den 21. März 2011 in der Vorlesung