Universität Mannheim
Dynamische Systeme
FSS 2011
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Übungsblatt 12

37. Rein imaginäre Eigenwerte

Zeige, dass die Menge $N := \{A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \,|\, \sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset\}$ offen und dicht in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ liegt in den folgenden 2 Teilaufgaben.

(a) N ist dicht in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Sei dazu $A \in \overline{N}$ und ein invertierbares Element $G \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, so dass GAG^{-1} die Jordansche Normalform von A ist. Gib anschließend eine Folge von Matrizen B_n in N an, so dass $A_n = G^{-1}B_nG$ in N liegt und gegen A konvergiert. *(5 Punkte)*

(b) N ist offen in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Beweise dazu zunächst, dass für eine Folge A_n von Matrizen, die gegen eine Matrix A konvergiert, es eine Folge von Eigenwerten λ_n von A_n gibt, die gegen einen Eigenwert λ von A konvergiert. Benutze dies, um zu zeigen, dass die Menge $\overline{N}$ abgeschlossen ist, also eine Folge in $\overline{N}$ gegen ein Element von $\overline{N}$ konvergiert. *(5 Punkte)*

38. Die FitzHugh-Nagumo-Gleichung

Das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x(x-a)(x-b) - y \\ \dot{y} &= \sigma x - \gamma y \end{aligned}$$

mit den Variablen $0 < a < b, \sigma, \gamma > 0$ und den Anfangswerten $x(0) = x_0$,$y(0) = y_0$ heißt FitzHugh-Nagumo-Gleichung.

(a) Zeige, dass dieses Anfangswertproblem eindeutig und nach rechts global lösbar ist. *(2 Punkte)*

(b) Bestimme alle kritischen Punkte x^* des dynamischen Systems. *(2 Punkte)*

(c) Linearisiere das dynamische System in den kritischen Punkten, berechne dazu die erste Ableitung und werte diese in den x^* aus. Bestimme anschließend die Eigenwerte der ersten Ableitung und charakterisiere die kritischen Punkte hinsichtlich Stabilität in Abhängigkeit der Parameter a, b, σ, γ. *(4 Punkte)*

Bitte wenden.

39. Das mathematische Pendel

Betrachte im folgenden die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin(x) = 0 \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Diese Gleichung beschreibt das sogenannte mathematische Pendel, eine Idealisierung eines echten Pendels.

(a) Schreibe diese Differentialgleichung als ein System von Differentialgleichungen 1.Ordnung und beweise, dass zu jedem Anfangswert $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine globale Lösung existiert. *(3 Punkte)*

(b) Beweise, dass diese Differentialgleichung ein dynamisches System definiert. Definiere dazu die Lösung $u(t, x_0, y_0)$ durch

$$u(t, x_0, y_0) = \begin{pmatrix} x(t, x_0, y_0) \\ y(t, x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

und weise die Eigenschaften in der Definition von dynamischen Systemen nach. *(4 Punkte)*

(c) Bestimme alle kritischen Punkte x^* des dynamischen Systems. *(2 Punkte)*

(d) Linearisiere das dynamische System in den kritischen Punkten, berechne dazu die erste Ableitung und werte diese in den x^* aus. Bestimme anschließend die Eigenwerte der ersten Ableitung und charakterisiere die kritischen Punkte hinsichtlich Stabilität. *(3 Punkte)*

Abgabe bis Montag, den 23. Mai 2011 in der Vorlesung