Universität Mannheim
Dynamische Systeme
FSS 2011
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

# Übungsblatt 8

**23. Reelle Lösungen von reellen linearen Differentialgleichungssystemen.**
In vielen Anwendungen von homogenen, autonomen linearen Differentialgleichungssystemen $\dot{u}(t) = A\,u(t)$ hat die Matrix $A$ reelle Einträge; in diesen Fällen ist man meist auch nur an den reellen Lösungen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ interessiert. Trotzdem kann es natürlich passieren, dass die Matrix $A$ komplexe Eigenwerte besitzt (also das charakteristische Polynom von $A$ nicht über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren zerfällt). Dann ist auch die allgemeine Lösung $u(t) = \exp(t\,A)u_0$ (die man mit dem „Rezept“ aus Aufgabe 7(b) ausrechnen kann) komplexwertig. Wie gewinnt man hieraus reellwertige Lösungen in „allgemeiner“ Form?

Im Folgenden sei also $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wir bezeichnen mit $\operatorname{spec}(A) \subset \mathbb{C}$ das *Spektrum* von $A$, d.h. die Menge der (auch komplexen) Eigenwerte von $A$. Für $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$ bezeichnen wir mit $\operatorname{Eig}(A,\lambda) := \ker(A - \lambda\,\mathbb{1}) \subset \mathbb{C}^n$ den zu $\lambda$ gehörenden Eigenraum von $A$ in $\mathbb{C}^n$.

**(a)** Zeige: Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\lambda \in \operatorname{spec}(A) \iff \overline{\lambda} \in \operatorname{spec}(A)\,.$$

Ist $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$, so gilt $\operatorname{Eig}(A,\overline{\lambda}) = \{\,\overline{v} \mid v \in \operatorname{Eig}(A,\lambda)\,\}$. *(2 Punkte)*

**(b)** Wir fixieren nun $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$, und setzen voraus, dass $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ gilt. Ferner fixieren wir einen Eigenvektor $v \in \operatorname{Eig}(A,\lambda)$ mit $v \neq 0$.

**(i)** Zeige, dass $z_1(t) := e^{\lambda\,t}\,v$ und $z_2(t) := e^{\overline{\lambda}\,t}\,\overline{v}$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $\dot{u} = A\,u(t)$ sind. Außerdem sind die Vektoren $z_1(0)$ und $z_2(0)$ linear unabhängig (und somit auch die Funktionen $z_1(t)$, $z_2(t)$). *(3 Punkte)*

**(ii)** Zeige, dass

$$x_1(t) := \tfrac{1}{2}\,(z_1(t) + z_2(t)) \quad \text{und} \quad x_2(t) := \tfrac{1}{2i}\,(z_1(t) - z_2(t))$$

zwei linear unabhängige, *reelle* Lösungen der Differentialgleichung $\dot{u} = A\,u(t)$ sind.
[Tipp. Folgere die lineare Unabhängigkeit aus Teil (i).] *(3 Punkte)*

**(iii)** Ist $\lambda = \alpha + i\beta$ mit $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ und $v = a + ib$ mit $a,b \in \mathbb{R}^n$, so gilt

$$x_1(t) = e^{\alpha t}\,\cos(\beta t)\,a - e^{\alpha t}\,\sin(\beta t)\,b \quad \text{und} \quad x_2(t) = e^{\alpha t}\,\sin(\beta t)\,a + e^{\alpha t}\,\cos(\beta t)\,b\,.$$

*(3 Punkte)*

*Bitte wenden.*

**(c)** Finde die allgemeine *reelle* Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} x(t) \ . \qquad \textit{(4 Punkte)}$$

## 24. Komplexe Systeme

**(a)** Zeige, dass das reelle System $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & -b(t) \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ äquivalent zu einer skalaren komplexen Gleichung $\dot{z} = c(t)z$ mit $z = x + iy$ ist, und leite eine lineare Differentialgleichung für $v(t) = z(t)\bar{z}(t)$ ab. *(4 Punkte)*

**(b)** Betrachte speziell den Fall $a(t) = \cos(t)$ und $b(t) = \sin(t)$ und berechne eine Fundamentallösung $Y(t)$ mit $Y(0) = \mathbb{1}$. Zeige, dass jede Lösung des Systems periodisch ist und bestimme die Periodenlänge. *(4 Punkte)*

**(c)** Seien $A : \mathbb{R} \to GL(n)$ differenzierbare Abbildungen von $\mathbb{R}$ in den Raum der invertierbaren $n \times n$-Matrizen. Zeige :

$$\frac{d}{dt}(A(t)^{-1}) = -A(t)^{-1}\dot{A}(t)A(t)^{-1}$$

[Tipp. Man differenziere den Ausdruck $\mathbb{1} = A \cdot A^{-1}$.] *(4 Punkte)*

**(d)** Sei $C$ eine komplexe Matrix, dann definieren wir $C^H = \bar{C}^T$ als die dazu hermitsche Matrix. Eine komplexe Matrix $C$ heisst unitär, wenn sie die Gleichung $C^H C = \mathbb{1}$ erfüllt. Wir betrachten eine Fundamentallösung $Y$ für ein lineares System $F' = B(t)F$ mit $B^H = -B$, wobei $B(t)$ stetig in einem Intervall $I$ sei. Zeige : $F(t)$ ist für alle $t \in I$ unitär!

[Tipp. Berechne eine Differentialgleichung für $\frac{d}{dt}\left(FF^H\right)$ mit Hilfe von (c).]

*(3 Punkte)*

**Abgabe bis Montag, den 11. April 2011 in der Vorlesung**