Universität Mannheim
Dynamische Systeme
FSS 2011
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Übungsblatt 2

3. Systeme von Differentialgleichungen.

(a) Schreiben Sie das folgende System von Differentialgleichungen dritter Ordnung in der Form $x'(t) = A\,x(t)$:

$$y''' + 2y' + y - 3z' + z = 0$$
$$2z''' + z'' - 4y'' + 2z + 6y = 0\ .$$

(6 Punkte)

(b) Bringen Sie die skalare inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)}(t) = f(t) \quad \text{mit} \quad a_k, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

in die Form $u'(t) = A(t)\,u(t) + b(t)$ eines Differentialgleichungssystems erster Ordnung.

(6 Punkte)

4. Lipschitz-Stetigkeit. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^m$ (gleichmäßig) *Lipschitz-stetig* auf D, wenn es ein $L \geq 0$ gibt, so dass für alle $p, q \in D$ gilt:

$$\|f(q) - f(p)\| \leq L \cdot \|q - p\|\ .$$

Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so heißt eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ *lokal Lipschitz-stetig*, wenn es zu jedem $p \in U$ ein $\delta_p > 0$ gibt, so dass für den offenen Ball $U_{\delta_p}(p) := \{\, q \in \mathbb{R}^n \mid \|q - p\| < \delta_p \,\}$ gilt: $U_{\delta_p}(p) \subset U$ und $f|U_{\delta_p}(p)$ ist Lipschitz-stetig auf $U_{\delta_p}(p)$.

Zeigen Sie:

(a) Ist $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so ist f lokal Lipschitz-stetig auf U.

(5 Punkte)

(b) $f(x) := x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auf $\mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig, jedoch nicht gleichmäßig Lipschitz-stetig.

(3 Punkte)

Bitte wenden.

5. Ein Anfangswertproblem ohne eindeutige Lösung. Wir wissen bereits aus Beispiel 1.15(i), dass die Lösung eines Anfangswertproblems nicht in allen Fällen eindeutig bestimmt ist. Wie die folgende Aufgabe zeigt, können auch explizite Anfangswertprobleme uneindeutige Lösungen haben.

(a) Zeige, dass $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} = 2\sqrt{|u|} \quad \text{mit} \quad u(0) = 0$$

ist, wenn es a, b mit $-\infty \leq a \leq 0 \leq b \leq +\infty$ gibt, so dass

$$u(t) = \begin{cases} -(t-a)^2 & \text{für } t < a \\ 0 & \text{für } a \leq t \leq b \\ (t-b)^2 & \text{für } t > b \end{cases}$$

gilt. *(5 Punkte)*

(b) Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sqrt{|x|}$$

nicht lokal Lipschitz-stetig ist.

(5 Punkte)

Abgabe bis Dienstag, den 1. März 2011 in der Vorlesung