Universität Mannheim
Dynamische Systeme
FSS 2011
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Übungsblatt 10

29. Flüsse mit Determinante 0

Wir betrachten das zwei-dimensionale reelle System

$$\dot{x} = Ax \text{ für } x \in \mathbb{R}^2 \text{ und } A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2).$$

Klassifiziere die Jordanschen Normalformen im Falle $\det A = 0$, bestimme die Phasenflüsse und zeichne die zugehörigen Phasenporträts. *(4 Punkte)*

30. Stabilität inhomogener linearer Differentialgleichungen

Betrachte die Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax + b$$

für $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$ und nimm an, dass die Gleichung $Ax_0 + b = 0$ für ein konstantes x_0 lösbar ist. Zeige, dass dann die Gleichungen $\dot{x} = Ax + b$ und $\dot{y} = Ay$ mit $y = (x - x_0)$ äquivalent sind. *(3 Punkte)*

31. Diverse Flüsse

Bestimmen Sie die Fixpunkte der folgenden linearen Systeme, charakterisieren Sie sie mit Hinblick auf Stabilität und zeichnen Sie die Phasenporträts:

(a)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(4 Punkte)

(b)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ -22 \end{pmatrix}$$

(4 Punkte)

(c)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4 Punkte)

32. Determinante und Spur

Beweise, dass für $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$

$$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{spur}(A))$$

gilt.

[Tipp. Schreibe A in Jordanscher Normalform] *(5 Punkte)*

33. Flüsse einer Differentialgleichungen 2.Ordnung

Löse die folgende Differentialgleichung 2.Ordnung in Abhängigkeit von α. Charakterisiere sie mit Hinblick auf Stabilität und zeichne die zugehörigen Phasenporträts für $\alpha \in \{0, -1, -2\}$.

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - \alpha x = 0$$

(6 Punkte)

Abgabe bis Montag, den 9. Mai 2011 in der Vorlesung