Universität Mannheim
Dynamische Systeme
FSS 2011
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Übungsblatt 1

1. Zeitdiskrete dynamische Systeme

Ein *zeitdiskretes dynamisches System* ist eine stetige Abbildung

$$\Phi : \mathbb{N}_0 \times M \to M,$$

wobei M ein topologischer Raum ist (hier typischerweise der $\mathbb{R}^n$), und für deren Familie von *Zeit t-Abbildungen*

$$\Phi_t : M \to M,\ \Phi_t(m) := \Phi(t, m) \ \ (t \in \mathbb{N}_0)$$

gilt, dass

$$\Phi_0 = \mathbb{1} \text{ und } \Phi_{t_2} \circ \Phi_{t_1} = \Phi_{t_1+t_2} \ \ (t_1, t_2 \in \mathbb{N}_0).$$

(a) Sei $G : M \to M$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass die induktiv definierte Abbildung $\Phi : \mathbb{N}_0 \times M \to M$ $(n \in \mathbb{N}, m \in M)$

$$\Phi(0, m) := m,\ \Phi(1, m) := G(m) \text{ und } \Phi(n + 1, m) := G(\Phi(n, m))$$

ein zeitdiskretes dynamisches System definiert. *(5 Punkte)*

(b) Sei $f : \mathbb{R}^{l+1} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine rekursiv definierte Folge, für die gilt

$$a_0, \ldots, a_l \text{ sind vorgegeben und } a_{n+1} := f(a_n, \ldots, a_{n-l}) \text{ für } n \geq l.$$

Zeigen Sie unter Verwendung von (a), dass sich obige Rekursion als ein zeitdiskretes dynamisches System darstellen lässt.
(Tipp. Man konstruiere eine stetige Abbildung $G : \mathbb{R}^{l+1} \to \mathbb{R}^{l+1}$.) *(5 Punkte)*

(c) Gegeben sei die Fibonacci-Folge, definiert durch

$$a_0 := 0,\ a_1 := 1 \text{ und } a_{n+1} := a_n + a_{n-1},\ n \geq 1.$$

Bestimmen Sie das zugehörige zeitdiskrete dynamische System und geben Sie eine explizite Formel für den Zustand des Systems zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ an.
(Tipp. Man wende Aufgabenteil (b) an und diagonalisiere die hier auftretende lineare Abbildung $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.) *(5 Punkte)*

Bitte wenden.

2. Lösungen von Differentialgleichungen.
Es sei $t_0, \alpha, A, B, C \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Die Differentialgleichung $m\,u'' = -gm$ besitzt genau eine Lösung u mit $u(t_0) = A$ und $u'(t_0) = B$. *(2 Punkte)*

(b) $y(x) = A\,\cos(\alpha x) + B\,\sin(\alpha x)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung $y'' + \alpha^2 y = 0$. *(2 Punkte)*

(c) Finden Sie **eine** Differentialgleichung, für die die Funktion $y(t) = A\,e^{2t} + B\,e^t + C$ für beliebige $A, B, C \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist. *(7 Punkte)*

[Tipp. Man überlege zunächst, welche Ordnung die Differentialgleichung haben sollte. Dann berechne man $y', y'', \ldots$ und überlege, wie man die Parameter A, B, C los wird.]

(d) Sei $f(t, u, u') := 2t - 3 + 3u' - 2u$. Zeigen Sie, dass $u(t) = A\,e^t + B\,e^{2t} + t$ eine Lösung der Differentialgleichung $u'' = f(t, u, u')$ ist. Bestimmen Sie A und B, so dass $u(0) = u(1) = 0$ gilt. *(4 Punkte)*

Abgabe bis Dienstag, den 22. Februar 2011 in der Vorlesung