Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis I
Zwischenklausur

30. Oktober 2010

Nachname: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

TutorIn: ______________________________

Bevor Sie beginnen, beachten Sie bitte folgendes:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es gibt 6 Aufgaben, die Gesamtanzahl der erreichbaren Punkte beträgt 150.
- Prüfen Sie ihr Klausurexemplar auf Vollständigkeit, es müssen oben rechts die Seitenzahlen 1–13 stehen.
- Bitte schreiben Sie, bevor Sie mit der Klausur beginnen, auf das Deckblatt *deutlich lesbar* Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer, sowie den Namen Ihres Tutors/Ihrer Tutorin.
- Wir empfehlen Ihnen, alle Aufgaben durchzulesen, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.
- Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben *ausschließlich* auf dem an Sie ausgeteilten Papier. Jede Aufgabe soll (*nur*) auf dem entsprechenden Blatt und dem darauf folgenden leeren Blatt, sowie den Rückseiten dieser Blätter, bearbeitet werden.
- Benutzen Sie keinen Bleistift oder Rotstift zur Bearbeitung der Klausur, sondern nur schwarze oder blaue Tinte.
- Bitte schreiben Sie *sauber* und *deutlich*, und geben Sie die *gesamte* Klausur wieder ab. Das Konzeptpapier kann nicht mit abgegeben werden.
- Sie dürfen ein beidseitig bedrucktes oder beschriftetes DIN A4-Blatt benutzen. Weitere Hilfsmittel (Taschenrechner, Skripte usw.) sind nicht erlaubt. Ein etwa mitgebrachtes Handy schalten Sie bitte für die Dauer der Klausur aus.
- Zu den Lösungen aller Aufgaben gehört die Angabe der von Ihnen verwendeten Notation sowie die Vollständigkeit der Rechnungen und der mathematischen Argumente.

Diesen Teil des Blattes bitte nicht beschriften.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	**Summe**
mögliche Punkte	12	24	24	36	38	16	150
erreichte Punkte							
Kürzel							

1. Vollständige Induktion.

Beweise durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \,.$$

(*12 Punkte*)

2. Reelle und komplexe Zahlen.

(a) Es seien $a, b, c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $a < b$. Es gelte

$$a < \frac{c_1}{d_1} < b \quad \text{und} \quad a < \frac{c_2}{d_2} < b\,.$$

Beweise, dass dann gilt:

$$a < \frac{c_1 + c_2}{d_1 + d_2} < b\,.$$

(16 Punkte)

(b) *Stelle* die komplexe Zahl $\frac{3+\imath}{3-\imath}$ in der Form $a + b\imath$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ *dar*, und *weise nach*, dass sie auf dem Einheitskreis liegt. *(8 Punkte)*

3. Supremum von Teilmengen von $\mathbb{R}$.

(a) *Bestimme* das Supremum der Menge

$$M := \{ (-1)^n \cdot (2 - \tfrac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N} \} .$$

Untersuche außerdem, ob M ein Maximum besitzt. *(12 Punkte)*

(b) Es seien A und B zwei nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Wir definieren

$$A + B := \{ a + b \mid a \in A,\ b \in B \} .$$

Zeige:

(i) $A + B$ ist nach oben beschränkt. *(3 Punkte)*

(ii) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$. *(9 Punkte)*

4. Konvergenz von Zahlenfolgen.

(a) *Untersuche* die folgenden Zahlenfolgen auf Konvergenz in $\mathbb{R}$ und *bestimme* gegebenenfalls den Grenzwert. Dabei soll das Ergebnis der Übungsaufgabe über Grenzwerte ganzrationaler Folgen <u>nicht</u> verwendet werden, sondern die entsprechende Beweistechnik angewendet werden.

(i) $a_n := \frac{4n^2+7n+3}{2n^2+5n+8}$ *(12 Punkte)*

(ii) $b_n := \sqrt{n^2+n} - n$ *(12 Punkte)*

(Es darf ohne Beweis benutzt werden: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $\mathbb{R}$ konvergente Folge nichtnegativer, reeller Zahlen, so konvergiert auch die Folge $(\sqrt{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, und zwar gegen $\sqrt{\lim_{n\to\infty} x_n}$.)

(b) *Bestimme* alle Häufungspunkte in der erweiterten Zahlengeraden $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ von der Zahlenfolge

$$c_n := (-1)^n \cdot n^{\left((-1)^{n+1}\right)} .$$ *(12 Punkte)*

[Tipp. Um nachzuweisen, dass man tatsächlich alle Häufungspunkte gefunden hat, kann man sich auf das Ergebnis einer Übungsaufgabe berufen.]

5. Unendliche Reihen.

(a) *Untersuche* die folgenden unendlichen Reihen auf Konvergenz in $\mathbb{R}$ und auf absolute Konvergenz. (Die Grenzwerte brauchen nicht angegeben zu werden.)

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k+1}}$ *(16 Punkte)*

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ *(10 Punkte)*

(b) *Berechne* den Grenzwert der folgenden unendlichen Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \Big((-1)^k + \frac{1}{2^k} \Big) \,.$$

(12 Punkte)

6. Ein Konvergenzkriterium.

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Zahlenfolgen. Es gelte: (a_n) konvergiert in $\mathbb{K}$ gegen ein $a \in \mathbb{K}$, und die Folge $(b_n - a_n)$ ist eine Nullfolge.

(a) *Formuliere* die ε-Definition für die Konvergenz der Folge (b_n) gegen a. *(4 Punkte)*

(b) *Beweise*, dass die Folge (b_n) gegen a konvergiert, und zwar durch expliziten Nachweis, dass die in (a) formulierte Definition erfüllt ist. Dabei sollen abgesehen von dieser Definition keinerlei weiteren Ergebnisse aus der Theorie der Grenzwerte verwendet werden. *(12 Punkte)*

[Tipp. $b_n - a = (b_n - a_n) + (a_n - a)$.]