1. Vollständige Induktion.

Beweise durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \,. \qquad (\textit{12 Punkte})$$

Induktionsanfang: $n = 1$. Für $n = 1$ gilt

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{1}(2k-1)} = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2 \,,$$

also die Behauptung für $n = 1$.

Induktionsschluß: Die Behauptung gelte für ein festes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)} = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2(n+1) - 1 \underset{(\diamond)}{=} n^2 + 2n + 2 - 1 = \underbrace{(n+1)^2} \,,$$

wobei bei $(\diamond)$ die Induktionsvoraussetzung eingeht. Also gilt die Behauptung auch für $n + 1$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

2. Reelle und komplexe Zahlen.

(a) Es seien $a, b, c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $a < b$. Es gelte

$$a < \frac{c_1}{d_1} < b \quad \text{und} \quad a < \frac{c_2}{d_2} < b \, .$$

Beweise, dass dann gilt:

$$a < \frac{c_1 + c_2}{d_1 + d_2} < b \, . \qquad \textit{(16 Punkte)}$$

(b) *Stelle* die komplexe Zahl $\frac{3+\imath}{3-\imath}$ in der Form $a + b\imath$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ *dar*, und *weise nach*, dass sie auf dem Einheitskreis liegt. *(8 Punkte)*

Zu (a). Für $k \in \{1, 2\}$ gilt $a < \frac{c_k}{d_k} < b$ und daher wegen $d_k > 0$ auch $a \cdot d_k < c_k < b \cdot d_k$. Durch Addition letzterer Ungleichung für $k = 2$ zur Ungleichung für $k = 1$ ergibt sich

$$a \cdot (d_1 + d_2) < c_1 + c_2 < b \cdot (d_1 + d_2)$$

und daraus wegen $d_1 + d_2 > 0$

$$a < \frac{c_1 + c_2}{d_1 + d_2} < b \, .$$

Zu (b). Es gilt

$$z := \frac{3 + \imath}{3 - \imath} = \frac{(3 + \imath)^2}{(3 + \imath)(3 - \imath)} = \frac{9 + 2 \cdot 3 \cdot \imath + \imath^2}{3^2 - \imath^2} \overset{(*)}{=} \frac{4}{5} + \frac{3}{5}\imath$$

und daher

$$\underbrace{|z|} = \left| \frac{4}{5} + \frac{3}{5}\imath \right| = \sqrt{\left(\tfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{16}{25} + \tfrac{9}{25}} = 1 \, ,$$

weswegen z auf dem Einheitskreis $\{\, z' \in \mathbb{C} \,\big|\, |z'| = 1 \,\}$ liegt.

3. Supremum von Teilmengen von $\mathbb{R}$.

(a) *Bestimme* das Supremum der Menge

$$M := \{ (-1)^n \cdot (2 - \tfrac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N} \} .$$

Untersuche außerdem, ob M ein Maximum besitzt. *(12 Punkte)*

(b) Es seien A und B zwei nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Wir definieren

$$A + B := \{ a + b \mid a \in A,\ b \in B \} .$$

Zeige:

(i) $A + B$ ist nach oben beschränkt. *(3 Punkte)*

(ii) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$. *(9 Punkte)*

<u>Zu (a), 1. Lösungsvariante.</u> Wir behaupten, dass $\sup(M) = 2$ ist. Dazu: Zunächst gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\left|(-1)^n \cdot (2 - \tfrac{1}{n})\right| = 2 - \tfrac{1}{n} < 2 , \qquad (*)$$

deshalb ist 2 jedenfalls eine obere Schranke von M. Es verbleibt zu zeigen, dass 2 die *kleinste* obere Schranke von M ist.

Angenommen, es gäbe eine obere Schranke s von M mit $s < 2$. Dann wäre $2 - s$ eine positive, reelle Zahl, weswegen es nach dem Satz von Eudoxos ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < 2 - s$, also $x := 2 - \frac{1}{n} > s$ gibt. Indem wir erforderlichenfalls n durch $n + 1$ ersetzen (wodurch die Ungleichung erhalten bleibt, weil $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist), können wir erreichen, dass n gerade ist. Dann gilt $x = 2 - \frac{1}{n} = (-1)^n \cdot (2 - \frac{1}{n}) \in M$, aber $x > s$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass s eine obere Schranke von M ist. Also ist 2 die kleinste obere Schranke von M und somit das Supremum von M.

Wegen $(*)$ ist $2 \notin M$, also besitzt M kein Maximum.

<u>Zu (a), 2. Lösungsvariante.</u> Es gilt $M = M_1 \cup M_2$ mit

$$M_1 = \{ (-1)^n \cdot (2 - \tfrac{1}{n}) \mid n \text{ ungerade} \} \quad \text{und} \quad M_2 = \{ (-1)^n \cdot (2 - \tfrac{1}{n}) \mid n \text{ gerade} \} .$$

Die Elemente von M_1 sind von der Form $-(2 - \frac{1}{n}) \leq 2$ mit $n \in \mathbb{N}$ und daher ist 2 eine obere Schranke von M_1.

Es gilt $M_2 = \{ 2 - \frac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{N} \}$. Da die Folge $(2 - \frac{1}{2n})$ monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, gilt nach Vorlesung $\sup(M_2) = \lim_{n \to \infty}(2 - \frac{1}{2n}) = 2$.

Weil $\sup(M_2) = 2$ und 2 obere Schranke von M_1 ist, ist 2 obere Schranke von $M = M_1 \cup M_2$, und kein $s < 2$ ist obere Schranke von M. Also ist $\sup(M) = 2$.

Wegen $\frac{1}{n} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $2 \notin M$, also besitzt M kein Maximum.

Zu (b)(i). Da das Supremum einer Menge insbesondere eine obere Schranke ist, gilt für alle $a \in A:\ a \leq \sup(A)$ und für alle $b \in B:\ b \leq \sup(B)$. Somit gilt $a + b \leq \sup(A) + \sup(B)$ für alle $a \in A$ und $b \in B$. Dies zeigt, dass $A+B$ nach oben beschränkt ist, denn $\sup(A)+\sup(B)$ ist eine obere Schranke.

Zu (b)(ii). In (i) wurde schon gezeigt , dass $\sup(A) + \sup(B)$ eine obere Schranke von $A + B$ ist. Es verbleibt zu zeigen, dass es sich um die *kleinste* obere Schranke handelt. Dazu sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert ein $a \in A$ mit $a > \sup(A) - \frac{\varepsilon}{2}$ und ein $b \in B$ mit $b > \sup(B) - \frac{\varepsilon}{2}$. Damit gilt dann $a+b \in A+B$ und $a+b > \sup(A)+\sup(B)-\varepsilon$. Also gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x \in A + B$ mit $x > \sup(A) + \sup(B) - \varepsilon$. Hieraus folgt, dass $\sup(A) + \sup(B)$ das Supremum von $A + B$ ist.

4. Konvergenz von Zahlenfolgen.

(a) *Untersuche* die folgenden Zahlenfolgen auf Konvergenz in $\mathbb{R}$ und *bestimme* gegebenenfalls den Grenzwert. Dabei soll das Ergebnis der Übungsaufgabe über Grenzwerte ganzrationaler Folgen <u>nicht</u> verwendet werden, sondern die entsprechende Beweistechnik angewendet werden.

(i) $a_n := \frac{4n^2+7n+3}{2n^2+5n+8}$ *(12 Punkte)*

(ii) $b_n := \sqrt{n^2+n} \; - \; n$ *(12 Punkte)*

(Es darf ohne Beweis benutzt werden: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $\mathbb{R}$ konvergente Folge nichtnegativer, reeller Zahlen, so konvergiert auch die Folge $(\sqrt{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, und zwar gegen $\sqrt{\lim_{n\to\infty} x_n}$.)

(b) *Bestimme* alle Häufungspunkte in der erweiterten Zahlengeraden $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ von der Zahlenfolge

$$c_n := (-1)^n \cdot n^{\left((-1)^{n+1}\right)} \; . \qquad \textit{(12 Punkte)}$$

[Tipp. Um nachzuweisen, dass man tatsächlich alle Häufungspunkte gefunden hat, kann man sich auf das Ergebnis einer Übungsaufgabe berufen.]

<u>Zu (a)(i).</u> Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{4n^2+7n+3}{2n^2+5n+8} = \frac{4+\frac{7}{n}+\frac{3}{n^2}}{2+\frac{5}{n}+\frac{8}{n^2}} \, .$$

Nach Vorlesung sind $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolgen. Daher konvergiert nach der Rechenregel über die Addition konvergenter Folgen der Zähler des obigen Quotienten gegen 4 und der Nenner gegen 2. Da also der Grenzwert des Nenners $\neq 0$ ist, und außerdem der Nennerausdruck selbst $\neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, konvergiert (a_n) nach der Rechenregel für den Quotienten konvergenter Folgen gegen $\frac{4}{2} = 2$.

<u>Zu (a)(ii).</u> Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} b_n = \sqrt{n^2+n} - n &= \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)\cdot(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \, . \end{aligned}$$

Nach Vorlesung ist $(\frac{1}{n})$ eine Nullfolge, also konvergiert $(1+\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1 und daher $(\sqrt{1+\frac{1}{n}})$ gegen $\sqrt{1} = 1$. Der Nenner im obigen Quotienten konvergiert somit gegen $1+1=2$. Da also der Grenzwert des Nenners $\neq 0$ ist, und außerdem der Nennerausdruck selbst $\neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, folgt nach der Rechenregel über den Quotienten konvergenter Folgen, dass (b_n) gegen $\frac{1}{2}$ konvergiert.

<u>Zu (b).</u> Wir betrachten die Teilfolgen

$$c_{2n} = (-1)^{2n} \cdot (2n)^{\left((-1)^{2n+1}\right)} = \frac{1}{2n}$$

und

$$c_{2n+1} = (-1)^{2n+1} \cdot (2n+1)^{\left((-1)^{2n+2}\right)} = -(2n+1) \; .$$

Offenbar gilt $\lim_{n\to\infty} c_{2n} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} c_{2n+1} = -\infty$, deshalb sind 0 und $-\infty$ Häufungspunkte von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$. Da die beiden betrachteten Teilfolgen die gesamte Folge (c_n) überdecken, kann es nach einer Übungsaufgabe keine weiteren Häufungspunkte geben.

5. Unendliche Reihen.

(a) *Untersuche* die folgenden unendlichen Reihen auf Konvergenz in $\mathbb{R}$ und auf absolute Konvergenz. (Die Grenzwerte brauchen nicht angegeben zu werden.)

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k+1}}$ *(16 Punkte)*

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ *(10 Punkte)*

(b) *Berechne* den Grenzwert der folgenden unendlichen Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \left((-1)^k + \frac{1}{2^k} \right) . \qquad \textit{(12 Punkte)}$$

Zu (a)(i). Die Folge $(\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}})_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist nach Vorlesung eine Nullfolge, diese ist überdies monoton fallend, weil $\sqrt[3]{x}$ nach Vorlesung monoton wachsend ist. Also sind die Voraussetzungen des Satzes über die alternierende Reihe von Leibniz erfüllt; aus diesem Satz ergibt sich, dass die betrachtete Reihe in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Für die Frage der absoluten Konvergenz haben wir die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |\frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k+1}}|$ zu untersuchen. Es gilt $|\frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k+1}}| = \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} \geq \frac{1}{k+1}$ wegen $\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} / \frac{1}{k+1} = (k+1)^{2/3} \geq 1$. Daher ist für die betrachtete Reihe die harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ eine Minorante, die nach Vorlesung divergiert. Also muss nach dem Minorantenkriterium auch $\sum_{k=0}^{\infty} |\frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k+1}}|$ (in $\mathbb{R}$) divergieren, was bedeutet, dass die zu untersuchende Reihe nicht absolut konvergent ist.

Zu (a)(ii). Um die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k := \frac{k^2}{2^k}$ zu untersuchen, verwenden wir das Quotientenkriterium. (Das Wurzelkriterium funktioniert genauso gut.) Dazu: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\underbrace{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{(k+1)^2}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2$$

und daher, weil $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist und nach den Grenzwert-Rechenregeln $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2} < 1$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ also absolut , und damit nach einem Satz der Vorlesung insbesondere auch gewöhnlich in $\mathbb{R}$.

Zu (b). Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$b_k := \tfrac{1}{2^k} \cdot \left((-1)^k + \tfrac{1}{2^k} \right) = (-\tfrac{1}{2})^k + (\tfrac{1}{4})^k . \qquad (*)$$

Als geometrische Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ mit $|q| < 1$ sind die folgenden beiden Reihen konvergent nach Vorlesung:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-\tfrac{1}{2})^k = \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (\tfrac{1}{4})^k = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} .$$

Nach der Rechenregel über die Summe zweier Reihen ist daher auch die Summe dieser beiden Reihen konvergent, und zwar gegen $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$; dies ist aber wegen $(*)$ gerade die zu berechnende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

6. Ein Konvergenzkriterium.

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Zahlenfolgen. Es gelte: (a_n) konvergiert in $\mathbb{K}$ gegen ein $a \in \mathbb{K}$, und die Folge $(b_n - a_n)$ ist eine Nullfolge.

(a) *Formuliere* die ε-Definition für die Konvergenz der Folge (b_n) gegen a. *(4 Punkte)*

(b) *Beweise*, dass die Folge (b_n) gegen a konvergiert, und zwar durch expliziten Nachweis, dass die in (a) formulierte Definition erfüllt ist. Dabei sollen abgesehen von dieser Definition keinerlei weiteren Ergebnisse aus der Theorie der Grenzwerte verwendet werden. *(12 Punkte)*

[Tipp. $b_n - a = (b_n - a_n) + (a_n - a)$.]

Zu (a).

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ :\ |b_n - a| < \varepsilon\ .$$

Zu (b). Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da (a_n) gegen a konvergiert , existiert $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N_1$ gilt: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Da $b_n - a_n$ gegen Null konvergiert, existiert $N_2 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N_2$ gilt: $|b_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Wir setzen nun $N := \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n \geq N$:

$$|b_n - a| = |(b_n - a_n) + (a_n - a)| \leq |b_n - a_n| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$