1. Potenzreihen.

Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}\, x^n$, *(7 Punkte)*

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} a^{(n^2)}\, x^n$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ fest. *(11 Punkte)*

[Tipp. Fallunterscheidung?]

<u>Zu (a), 1. Lösungsvariante.</u> Die zu untersuchende Potenzreihe ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ mit $a_n := \frac{n^4}{4^n}$. Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{n^4}}{4} = \frac{1}{4}\, \sqrt[n]{n}^4$$

[hier gibt es ***(1P)*** *für das Hinschreiben von* $\sqrt[n]{|a_n|}$ *, und* ***(2P)*** *dafür, dass dieser Ausdruck so umgeformt wird, dass* $\sqrt[n]{n}$ *oder* $\exp(\frac{\log(n)}{n})$ *dasteht]* und deshalb (wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, siehe Beispiel 3.4(iv) **(0P)**) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{4}$ **(2P)**. Nach Satz 4.24 gilt daher für den Konvergenzradius der Potenzreihe: $R = 4$. **(2P)**

<u>Zu (a), 2. Lösungsvariante.</u> Mit a_n wie in der 1. Lösungsvariante gilt

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n^4}{4^n} \cdot \frac{4^{n+1}}{(n+1)^4} = 4 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^4 .$$

[Hier gibt es ***(1P)*** *für das Hinschreiben von* $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$*, und* ***(2P)*** *dafür, dass dieser Ausdruck so umgeformt wird, dass* $\frac{n}{n+1}$ *dasteht.]* Es gilt $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = 1$ **(0P)** und deshalb $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 4$. **(2P)** Nach Aufgabe 34(a) folgt, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $R = 4$ ist. **(2P)**

<u>Zu (b), 1. Lösungsvariante.</u> Die zu untersuchende Potenzreihe ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ mit $a_n := a^{(n^2)}$. Daher gilt $\sqrt[n]{|a_n|} = a^n$ *[****(1P)*** *für das Hinschreiben des Ausdrucks* $\sqrt[n]{|a_n|}$ *und* ***(3P)*** *für das Ausrechnen]* und deshalb nach Satz 3.4

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0 & \text{für } a < 1 \\ 1 & \text{für } a = 1 \\ \infty & \text{für } a > 1 \end{cases} .$$

*[****(4P)****: einen Punkt allein dafür, dass man überhaupt eine Fallunterscheidung macht, und einen Punkt für jeden richtig angegebenen Fall.]*

Nach Satz 4.24 ergibt sich also für den Konvergenzradius R der Potenzreihe:

$$R = \begin{cases} \infty & \text{für } a < 1 \\ 1 & \text{für } a = 1 \\ 0 & \text{für } a > 1 \end{cases} .$$

*[**(3P)**: einen Punkt für jeden richtig angegebenen Fall.]*

Zu (b), 2. Lösungsvariante. Mit dem a_n aus der ersten Lösungsvariante gilt $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{a^{(n^2)}}{a^{((n+1)^2)}} = a^{n^2-(n+1)^2} = a^{-2n-1} = \frac{1}{a} \cdot (\frac{1}{a^2})^n$. *[**(1P)** für das Hinschreiben des Ausdrucks* $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ *und **(3P)** für das Ausrechnen]* und deshalb nach Aufgabe 34(a) und Satz 3.4:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \overset{(*)}{=} \left\{\begin{matrix} 0 & \text{für } \frac{1}{a^2} < 1 \\ 1 & \text{für } \frac{1}{a^2} = 1 \\ \infty & \text{für } \frac{1}{a^2} > 1 \end{matrix}\right\} \overset{(\dagger)}{=} \left\{\begin{matrix} 0 & \text{für } a > 1 \\ 1 & \text{für } a = 1 \\ \infty & \text{für } a < 1 \end{matrix}\right\} .$$

*[**(7P)**: Einen Punkt allein dafür, dass man überhaupt eine Fallunterscheidung macht, und bei* $(*)$ *und* $(\dagger)$ *gibt es jeweils je einen Punkt für jeden richtig angegebenen Fall.]*

2. Stetigkeit.

(a) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ x+1 & \text{für } 0 < x < 1 \\ 2x & \text{für } x \geq 1 \end{cases} .$$

Untersuche f auf Stetigkeit an der Stelle $x = 0$ sowie an der Stelle $x = 1$. *(12 Punkte)*

(b) Es sei $g(x) := x^3 + x + 1$.

(i) *Zeige*, dass g mindestens eine Nullstelle $a \in [-1, 0]$ besitzt. *(5 Punkte)*

(ii) Besitzt g abgesehen von a noch weitere Nullstellen in $\mathbb{R}$? *Begründe* die Antwort. *(6 Punkte)*

Zu (a), Stelle $x = 0$, 1. Lösungsvariante. Sei $a_n := \frac{1}{n}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, aber

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{1}{n} + 1\right) = 1 \neq 0 = f(0) .$$

Also kann f nach Satz 5.14 in $x = 0$ nicht stetig sein.

Zu (a), Stelle $x = 0$, 2. Lösungsvariante. Es gilt $f|(0,1) = (x+1)|(0,1)$ und deshalb $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}(1+x) = 1 \neq 0 = f(0)$, deshalb kann f in $x = 0$ nicht stetig sein.

*[Bei (a), Stelle $x = 0$, gibt es: **(1P)** für die Behauptung „f ist nicht stetig“, **(3P)** für die Berechnung eines rechtsseitigen Grenzwertes und **(1P)** für den Vergleich mit $f(0)$.]*

Zu (a), Stelle $x = 1$, 1. Lösungsvariante. Behauptung: f ist in $x = 1$ stetig. **(1P)** Es gilt $f|[1,\infty) = (2x)|[1,\infty)$. **(1P)** Da die Funktion $x \mapsto 2x$ als Polynom in $x = 1$ (rechtsseitig) stetig ist, ist daher auch f in $x = 1$ rechtsseitig stetig. **(1P)** Weiterhin gilt offenbar $f|(0,1) = (x+1)|(0,1)$ **(1P)**; da aber $f(1) = 2 = 1+1$ ist, gilt sogar $f|(0,1] = (x+1)|(0,1]$. **(2P)** Da die Funktion $x \mapsto x+1$ ebenfalls (linksseitig) stetig ist in $x = 1$, ist daher auch f in $x = 1$ linksseitig stetig. **(1P)** Nach Aufgabe 37(b) folgt hieraus, dass f in $x = 1$ insgesamt stetig ist. **(0P)**

Zu (a), Stelle $x = 1$, 2. Lösungsvariante. Behauptung: f ist in $x = 1$ stetig. **(1P)** Dafür haben wir nach Definition zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : \left(|x-1| < \delta \implies |f(x) - f(1)| < \varepsilon \right) . \qquad (\mathbf{(1P)})$$

Dazu sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben **(1P)**; ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varepsilon < 2$. Damit setzen wir $\delta := \frac{1}{2}\varepsilon > 0$. Sei nun $x \in \mathbb{R}$ vorgegeben mit $|x-1| < \delta$. Dann ist in der Tat $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$: Im Fall $x < 1$ ist (wegen $\varepsilon < 2$, also $\delta < 1$) $0 < x < 1$ und deshalb $|f(x) - f(1)| = |x+1-2| = |x-1| < \delta = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$. Im Fall $x \geq 1$ ist $|f(x) - f(1)| = |2x-2| =$

$2 \cdot |x-1| < 2\delta = \varepsilon$. *[Hier gibt es insgesamt* ***(4P)****: je einen Punkt für die Behauptung eines geeigneten* $\delta_{\text{links}}, \delta_{\text{rechts}}$ *, und je einen Punkt für den jeweiligen Nachweis der Geeignetheit.]*

Zu (b)(i). Die Funktion g ist als Polynom stetig **(1P)**, und es gilt $g(-1) = -1 < 0$ **(1P)** sowie $g(0) = 1 > 0$ **(1P)**. Nach dem Zwischenwertsatz (Satz 6.1) existiert daher ein $a \in (-1, 0)$ mit $g(a) = 0$. **(2P)**

Zu (b)(ii). *[****(1P)*** *schon für die bloße Behauptung, dass es keine weiteren Nullstellen gibt.]* g ist differenzierbar **(0P)**, und es gilt $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. *[****(1P)*** *für die Berechnung von* $g'(x)$ *und* ***(2P)*** *für* $g'(x) > 0$ *.]* g ist also streng monoton wachsend nach Satz 7.15(iv) **(1P)**, und deshalb insbesondere injektiv. **(1P)** Daher kann g abgesehen von a keine weitere Nullstelle besitzen.

3. Differentiation und Taylorpolynome.

Es sei $f(x) := \exp(x^2)$.

(a) *Berechne* $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$. *(7 Punkte)*

(b) *Bestimme* das Taylorpolynom $T_{3,0}(x)$ von f an der Stelle $x_0 = 0$ der Ordnung 3. *(5 Punkte)*

Zu (a). Es gilt

$$f'(x) = 2x \cdot \exp(x^2) \qquad ((\mathbf{2P}))$$

$$f''(x) = 2 \cdot \exp(x^2) + 2x \cdot 2x \cdot \exp(x^2) = (4x^2 + 2) \cdot \exp(x^2) \qquad ((\mathbf{2P}))$$

$$f'''(x) = 8x \cdot \exp(x^2) + (4x^2 + 2) \cdot 2x \cdot \exp(x^2) = (8x^3 + 12x) \cdot \exp(x^2)\,. \qquad ((\mathbf{3P}))$$

[Folgefehler werden selbstverständlich — wie überall sonst auch — anerkannt!]

Zu (b), 1. Lösungsvariante. Es gilt $f(0) = \exp(0) = 1$ **(1P)**, $f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot \exp(x^2) = 0$ **(1P)**, $f''(0) = (4 \cdot 0 + 2) \cdot \exp(0) = 2$ **(1P)** und $f'''(0) = (8 \cdot 0^3 + 12 \cdot 0) \cdot \exp(0) = 0$ **(1P)**. Damit ergibt sich

$$T_{3,0}(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) + \tfrac{1}{2}\, f''(0) \cdot (x - 0)^2 + \tfrac{1}{6}\, f'''(0) \cdot (x - 0)^3 = 1 + x^2\,.$$

*[**(1P)** allein für die Angabe des richtigen Ergebnisses.]*

Zu (b), 2. Lösungsvariante. Es gilt $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ und deshalb $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{2k}$. **(2P)** Diese Potenzreihenentwicklung ist nach Korollar 7.44 die Taylorreihe von f an der Stelle $x = 0$. **(1P)** Das Taylorpolynom der Ordnung 3 erhält man, indem man von der Taylorreihe nur die Terme der Ordnung ≤ 3 betrachtet. Deshalb gilt

$$T_{3,0}(x) = \tfrac{1}{0!} x^0 + \tfrac{1}{1!} x^2 = 1 + x^2\,.$$

*[Hier gibt es **(1P)** für die prinzipiell richtige Rechnung, und **(1P)** für das „Abschneiden“ der Taylorreihe an der richtigen Stelle.]*

4. Extremwerte. Es sei $f : [1,\infty) \to \mathrm{I\!R},\ x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.

(a) *Finde* alle kritischen Punkte von f, und *untersuche*, ob es sich jeweils um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum von f handelt. *(8 Punkte)*

(b) *Berechne* $f(1)$ und den Grenzwert von Funktionswerten $\lim_{x\to\infty-} f(x)$. *(6 Punkte)*

(c) Man verwende die Ergebnisse aus (a) und (b), um zu *untersuchen*, ob f auf seinem Definitionsbereich $[1,\infty)$ ein globales Maximum und/oder ein globales Minimum annimmt, und *bestimme* gegebenenfalls, an welchen Stellen diese angenommen werden. *(8 Punkte)*

Zu (a). f ist auf $(1,\infty)$ differenzierbar **(0P)**, und nach Quotientenregel (Beispiel 7.8(vi)) gilt

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}\,. \qquad ((\mathbf{2P}))$$

Es gilt daher genau dann $f'(x) = 0$, wenn $1 - \ln(x) = 0$ ist, d.h. wenn $x = e$ ist. Also ist $x = e$ der einzige kritische Punkt von f. *[**(1P)** dafür, dass f' Null gesetzt wird, **(1P)** für das richtige Ergebnis $x = e$.]*

(1. Lösungsvariante.) Um zu untersuchen, ob es sich um ein lokales Maximum oder Minimum handelt, können wir $f''(e)$ untersuchen. Nach der Quotientenregel gilt

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\ln(x))\cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln(x)-3}{x^3} \qquad ((\mathbf{2P}))$$

und somit $f''(e) = -\frac{1}{e^3} < 0$. **(1P)** Somit liegt in $x = e$ ein lokales Maximum vor. **(1P)**

(2. Lösungsvariante.) Um zu untersuchen, ob es sich um ein lokales Maximum oder Minimum handelt, können wir f' auf einer Umgebung von $x = e$ untersuchen. Es gilt offenbar $f'|(1,e) > 0$ **(1,5P)** und $f'|(e,\infty) < 0$ **(1,5P)**. Deshalb hat f in $x = e$ ein lokales Maximum. **(1P)**

Zu (b). Es gilt $f(1) = \frac{\ln(1)}{1} = 0$. **(1P)** Weiter haben wir

$$\lim_{x\to\infty-} \ln(x) = \infty\ \mathbf{(1P)} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty-} x = \infty\ \mathbf{(1P)}\,. \qquad (*)$$

Deshalb ist für $x \to \infty-$ auf f die 2. Regel von l'Hopital (Satz 7.21) anwendbar. Nach dieser ergibt sich

$$\lim_{x\to\infty-} f(x) = \lim_{x\to\infty-} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty-} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty-} \frac{1}{x} = 0\,.$$

*[**(1P)**+**(1P)** für die beiden Ableitungen und **(1P)** für das richtige Ergebnis.]*

[Falls statt der Anwendung von l'Hopital als Begründung angegeben wird, dass „$\ln(x)$ schwächer wächst als x" (oder „... als jede Polynomfunktion"), so reicht das nicht, weil eben diese Behauptung zu beweisen ist. Wir interpretieren diese Aussage jedoch so, dass sie $(*)$ enthält. Daher geben wir in diesem Fall die beiden Punkte für $(*)$ und den einen Punkt für das richtige Ergebnis.]

Zu (c). Im einzigen lokalen Maximum $x = e$ von f gilt $f(e) = \frac{1}{e}$. Wegen $f(1) = 0 < \frac{1}{e}$ und $\lim_{x\to\infty-} f(x) = 0 < \frac{1}{e}$ ist dies tatsächlich ein globales Maximum. f nimmt also in $x = e$ ein globales Maximum an.

Für jedes $x \in [1, \infty)$ gilt $\ln(x) \geq 0$ und $x > 0$, deshalb $f(x) \geq 0$. Da der demnach kleinstmögliche Funktionswert 0 in $x = 1$ angenommen wird, nimmt f in $x = 1$ sein globales Minimum an.

(*Oder:* $f(x)$ muss sich für $x \to \infty-$ *von oben* gegen 0 annähern, weil f sonst ein lokales Minimum haben würde, was nach dem Ergebnis von (a) nicht der Fall ist. Wegen $f(1) = 0 = \lim_{x\to\infty-} f(x)$ folgt, dass f in $x = 1$ sein globales Minimum annimmt.)

[Bewertungsschlüssel:

- ***(1P)***: *Behauptung „das globale Maximum existiert"*
- ***(1P)***: *richtige Stelle des globalen Maximums:* $x = e$
- ***(1P)***: *Anordnung:* $f(e) > f(1), \lim_{x\to\infty-} f(x)$
- ***(1P)***: *Behauptung „das globale Minimum existiert"*
- ***(1P)***: *richtige Stelle des globalen Minimums:* $x = 1$
- ***(1P)***: *Anordnung:* $f(1) = \lim_{x\to\infty-} f(x)$
- ***(2P)***: *Begründung, warum* $f(x)$ *für* $x \to \infty-$ *nicht von unten her gegen* 0 *konvergieren kann (z.B.: „*$f \geq 0$*" oder "Es gibt keine weiteren kritischen Punkte.")*

]

5. Integration und Partialbruchzerlegung.

(a) *Berechne* das folgende Integral:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \cos(x^2)\,\mathrm{d}x\,. \qquad \textit{(11 Punkte)}$$

[Tipp. Als erstes Substitution.]

(b) *Bestimme* die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{32}{x^4-16}\,.$$

Eine Stammfunktion dieses Ausdrucks braucht **nicht** angegeben werden. *(14 Punkte)*

Zu (a). Wir führen zunächst die Substitution $u = x^2$ **(1P)** durch. Dann gilt $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x$ **(1P)**, und somit $\mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$. **(1P)** Die Grenzen des Integrals transformieren sich als $u(x=0) = 0$ und $u(x=\sqrt{\pi}) = \pi$. **(1P)** Also ergibt sich

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} x \cdot u \cos(u)\,\tfrac{1}{2x}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} u \cos(u)\,\mathrm{d}u\,. \qquad (\textbf{(1P)})$$

Wir setzen nun mit partieller Integration fort: $f(u) = u$, $g'(u) = \cos(u)$ *[**(1P)** für f und g']*, also $f'(u) = 1$ und $g(u) = \sin(u)$ *[**(1P)** für f' und g]*. Damit ergibt sich

$$\ldots \overset{\textbf{(1P)}}{=} \tfrac{1}{2}\left(\pi \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} - 0 \cdot \underbrace{\sin(0)}_{=0} - \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(u)\,\mathrm{d}u\right) \overset{\textbf{(1P)}}{=} -\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(u)\,\mathrm{d}u$$

$$\overset{\textbf{(1P)}}{=} -\tfrac{1}{2}\left((-\cos(\pi)) - (-\cos(0))\right) \overset{\textbf{(1P)}}{=} -1\,.$$

Zu (b). Der Grad 0 des Zählerpolynoms ist kleiner als der Grad 4 des Nennerpolynoms, also ist keine Polynomdivision zur Abspaltung des Hauptteils erforderlich. Wir zerlegen nun das Nennerpolynom in irreduzible Faktoren:

$$x^4 - 16 = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)\,.$$

*[**(3P)**: Einen Punkt für jeden richtigen Faktor.]* Dabei hat das Polynom x^2+4 offenbar keine Nullstellen in $\mathbb{R}$ und ist deshalb über $\mathbb{R}$ irreduzibel. **(0P)** Aufgrund dieser Faktorzerlegung setzen wir für die Partialbruchzerlegung an:

$$\frac{32}{x^4-16} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} \qquad (\diamond)$$

mit zu bestimmenden Konstanten $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. *[**(3P)**: Einen Punkt dafür, dass kein Polynom als Summand auftritt (keine explizite Begründung nötig), einen Punkt dafür, dass der lineare Term im Zähler des dritten Summanden vorhanden ist, und einen Punkt dafür, dass* *alles andere richtig ist.]* Indem wir die rechte Seite „auf einen Nenner bringen“ und dann die Zähler auf beiden Seiten vergleichen, ergibt sich

$$32 = A\,(x+2)\,(x^2+4) + B\,(x-2)\,(x^2+4) + (Cx+D)\,(x+2)\,(x-2)\,. \qquad ((\mathbf{3P}))\ (*)$$

Setzen wir in $(*)$ $x = 2$ ein, so ergibt sich $32 = A \cdot 4 \cdot (2^2+4)$, also $A = 1$. Setzen wir $x = -2$ ein, so ergibt sich entsprechend $32 = B \cdot (-4) \cdot ((-2)^2+4)$, also $B = -1$. Durch Vergleich der Koeffizienten mit höchster Ordnung bezüglich x (d.h. der Koeffizienten zu x^3) in $(*)$ ergibt sich $0 = A + B + C = 1 + (-1) + C$, also $C = 0$. Schließlich ergibt sich durch Vergleich der absoluten Glieder (d.h. der Koeffizienten zu $x^0 = 1$) $32 = 8A - 8B - 4D = 16 - 4D$, also $D = -4$. (Natürlich gibt es für die Bestimmung von $A, \ldots, D$ viele andere Möglichkeiten, u.a. s.u.) *[(**4P**): Einen Punkt für jede korrekt bestimmte Konstante $A, \ldots, D$.]*

Durch Einsetzen der Werte von $A, \ldots, D$ in $(\diamond)$ erhalten wir die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{32}{x^4-16} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} - \frac{4}{x^2+4}\,. \qquad ((\mathbf{1P}))$$

<u>Zu (b), alternative Lösung zur Bestimmung von $A, \ldots, D$.</u> Indem wir in $(*)$ die rechte Seite ausmultiplizieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} 32 &= A\,(x^3 + 4x + 2x^2 + 8) + B(x^3 + 4x - 2x^2 - 8) + C(x^3 - 4x) + D(x^2 - 4) \\ &= (A+B+C)x^3 + (2A - 2B + D)x^2 + (4A + 4B - 4C)x + (8A - 8B - 4D) \end{aligned}$$

und hieraus durch Koeffizientenvergleich das lineare Gleichungssystem

$$A + B + C = 0 \qquad (1)$$

$$2A - 2B + D = 0 \qquad (2)$$

$$4A + 4B - 4C = 0 \qquad (3)$$

$$8A - 8B - 4D = 32 \qquad (4)$$

Durch Subtraktion $4 \cdot (1) - (3)$ ergibt sich $C = 0$ und $B = -A$. Entsprechend ergibt sich aus der Subtraktion $4 \cdot (2) - (4)$: $D = -4$ und daher durch Einsetzen in (2): $2A - 2B = 4$. Aus der letzten Gleichung und $B = -A$ ergibt sich $A = 1, B = -1$.