1. Extremwerte.

Es sei
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \frac{x}{1+x^2}\ .$$

(a) *Bestimme* alle kritischen Punkte von f, und *untersuche* jeweils, ob es sich um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum handelt. *(12 Punkte)*

(b) *Untersuche*, ob f ein globales Maximum und/oder Minimum besitzt, und *bestimme* gegebenenfalls, an welchen Stellen diese angenommen werden. *(12 Punkte)*

Zu (a), 1. Teil. f ist offensichtlich differenzierbar, und nach der Quotientenregel gilt
$$f'(x) \overset{\textbf{(2P)}}{=} \frac{(x)'\cdot(1+x^2)-x\cdot(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$
*[**(2P)** fürs richtige Ausrechnen von f']* und daher
$$\underbrace{f'(x)=0}_{\textbf{(1P)}} \iff 1-x^2=0 \iff \underbrace{x\in\{\pm1\}}_{\textbf{(1P)}}\ .$$
Also sind $x=1$ und $x=-1$ die kritischen Punkte von f.

Zu (a), 2. Teil, 1. Variante. Um zu untersuchen, ob ein lokales Maximum oder Minimum vorliegt, kann man f'' an den kritischen Punkten ausrechnen: Durch nochmalige Anwendung der Quotientenregel ergibt sich
$$\begin{aligned} f''(x) &\overset{\textbf{(1P)}}{=} \frac{(1-x^2)'\cdot(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot((1+x^2)^2)'}{(1+x^2)^4} = \frac{-2x\cdot(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot(2(1+x^2)\cdot 2x)}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{-2x\cdot(1+x^2)-(1-x^2)\cdot 2\cdot 2x)}{(1+x^2)^3} = \frac{-2x-2x^3-4x+4x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}\ . \end{aligned}$$
*[**(3P)** fürs richtige Ausrechnen von f'' .]* Es gilt damit $f''(1)=\frac{2-6}{(1+1^2)^3}=-\frac{1}{2}<0$ **(1P)**, also liegt in $x=1$ ein lokales Maximum vor (Korollar 7.16(ii)), und $f''(-1)=\frac{-2+6}{(1+(-1)^2)^3}=\frac{1}{2}>0$ **(1P)**, also liegt in $x=-1$ ein lokales Minimum vor (Korollar 7.16(i)).

Zu (a), 2. Teil, 2. Variante. Um zu untersuchen, ob ein lokales Maximum oder Minimum vorliegt, kann man f' jeweils auf einer Umgebung der kritischen Punkte untersuchen. Weil $(1+x^2)^2>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt, stimmt das Vorzeichen von $f'(x)$ jeweils mit dem Vorzeichen des Ausdrucks $1-x^2$ überein. **(1P)** Daher gilt $f'|(-\infty,-1)<0$ **(1P)**, $f'|(-1,1)>0$ **(1P)** und $f'|(1,\infty)<0$ **(1P)**. Nach Korollar 7.16(iii),(iv) ergibt sich, dass f in $x=-1$ ein lokales Minimum **(1P)** und in $x=1$ ein lokales Maximum besitzt **(1P)**. *[Die letzten beiden Punkte gibt es auch schon für die bloße Behauptung.]*

Zu (b), 1. Variante. Um zu entscheiden, ob eines der lokalen Extrema auch globales Maximum bzw. Minimum ist, müssen wir das Verhalten von $f(x)$ für $x\to\pm\infty$ untersuchen. *[**(3P)** allein dafür, dass diese Grenzwerte untersucht werden.]* Es gilt
$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}=\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

und daher (wegen $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}=0$): $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$. *[**(1P)** dafür, dass die Grenzwerte richtig als* 0 *ausgerechnet werden,* ***(2P)*** *für die richtige Rechnung/Begründung. Alternativ können die Grenzwerte auch mit der 2. Regel von L'Hopital ausgerechnet werden. In diesem Fall entfallen von den 2P für die Rechnung 1P auf das Prüfen der Voraussetzung, und 1P auf die Anwendung der Regel.]*

An der Stelle $x=1$ des einzigen lokalen Maximums gilt $f(1)=\frac{1}{1+1^2}\overset{\textbf{(1P)}}{=}\frac{1}{2}\overset{\textbf{(1P)}}{>}0=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)$, daher ist dieses lokale Maximum tatsächlich globales Maximum. *[**(1P)**, auch schon für die bloße Behauptung.]* An der Stelle $x=-1$ des einzigen lokalen Minimums gilt $f(-1)=\frac{-1}{1+(-1)^2}\overset{\textbf{(1P)}}{=}-\frac{1}{2}\overset{\textbf{(1P)}}{<}0=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)$, daher ist dieses lokale Minimum tatsächlich globales Minimum. *[**(1P)**, auch schon für die bloße Behauptung.]*

Zu (b), 2. Variante. Durch Untersuchung des Vorzeichens von f' erkennt man: f ist monoton fallend auf $(-\infty,-1)$ **(1P)**, monoton wachsend auf $(-1,1)$ **(1P)** und monoton fallend auf $(1,\infty)$ **(1P)**. Daher liegt an der Stelle $x=1$ das globale Maximum von $f|\mathbb{R}^+$ **(2P)**, und an der Stelle $x=-1$ das globale Maximum von $f|\mathbb{R}^-$ **(2P)** vor; es gilt $f(1)=\frac{1}{2}>0$ und $f(-1)=-\frac{1}{2}<0$. Nun ist $f(x)>0$ für $x>0$ **(1P)**, $f(x)<0$ für $x<0$ **(1P)** und $f(0)=0$ **(1P)**. Deswegen ergibt sich, dass an der Stelle $x=1$ sogar das globale Maximum von f *[**(1P)**, auch schon für die bloße Behauptung.]* und an der Stelle $x=-1$ sogar das globale Minimum von f *[**(1P)**, auch schon für die bloße Behauptung.]* angenommen wird.

2. Grenzwerte von Funktionen.

Berechne die folgenden Grenzwerte von Funktionen:

(a) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\cos(x)}$ *(8 Punkte)*

(b) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{a^x - b^x}{x}$ mit festen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}^+$ *(6 Punkte)*

Zu (a), 1. Lösungsvariante. Der zu untersuchende Grenzwert ist $\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $f(x) := 1 - \cos(\frac{x}{2})$ und $g(x) := 1 - \cos(x)$. Es gilt

$$f'(x) \overset{\textbf{(1P)}}{=} \tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{x}{2}), \quad f''(x) \overset{\textbf{(1P)}}{=} \tfrac{1}{4}\cos(\tfrac{x}{2}), \quad g'(x) \overset{\textbf{(1P)}}{=} \sin(x) \quad \text{und} \quad g''(x) \overset{\textbf{(1P)}}{=} \cos(x),$$

und daher wegen der Stetigkeit von Sinus und Cosinus

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 1 - \cos(\tfrac{0}{2}) = 0 \ \textbf{(0,5P)}, \quad \lim_{x\to 0+} g(x) = 1 - \cos(0) = 0 \ \textbf{(0,5P)}$$

sowie

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{0}{2}) = 0 \ \textbf{(0,5P)}, \quad \lim_{x\to 0+} g'(x) = \sin(0) = 0 \ \textbf{(0,5P)}.$$

Daher sind die Voraussetzungen für die zweimalige Anwendung der 1. Regel von de L'Hopital (Satz 7.19) erfüllt; danach ergibt sich

$$\lim_{x\to 0+} \tfrac{f(x)}{g(x)} \overset{\textbf{(0,5P)}}{=} \lim_{x\to 0+} \tfrac{f'(x)}{g'(x)} \overset{\textbf{(0,5P)}}{=} \lim_{x\to 0+} \tfrac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{4}\cos(\frac{x}{2})}{\cos(x)} = \frac{\frac{1}{4}\cos(\frac{0}{2})}{\cos(0)} \overset{\textbf{(1P)}}{=} \frac{1}{4}.$$

Zu (a), 2. Lösungsvariante. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\cos(x)} &\overset{\textbf{(1P)}}{=} \frac{1-\cos(\frac{x}{2})}{1-\cos(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})} \underset{(*)}{\overset{\textbf{(2P)}}{=}} \frac{1-\cos(\frac{x}{2})}{1-\cos(\frac{x}{2})^2+\sin(\frac{x}{2})^2} \\
&\underset{(\dagger)}{\overset{\textbf{(1P)}}{=}} \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos(\frac{x}{2})}{1-\cos(\frac{x}{2})^2} \overset{\textbf{(2P)}}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos(\frac{x}{2})}{(1+\cos(\frac{x}{2}))\cdot(1-\cos(\frac{x}{2}))} \\
&\overset{\textbf{(1P)}}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\cos(\frac{x}{2})}.
\end{aligned}$$

Dabei ist bei $(*)$ das Additionstheorem für den Cosinus (Satz 4.29): $\cos(a+b) = \cos(a)\cdot\cos(b) - \sin(a)\cdot\sin(b)$ mit $a = b = \frac{x}{2}$ eingegangen, und bei $(\dagger)$ die Formel $\sin(\frac{x}{2})^2 = 1 - \cos(\frac{x}{2})^2$.

Wegen $\lim_{x\to 0+}\cos(\frac{x}{2}) = \cos(0) = 1$ ergibt sich nun

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\cos(x)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+1} \overset{\textbf{(1P)}}{=} \frac{1}{4}.$$

Zu (b). Der zu untersuchende Grenzwert ist $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{g(x)}$ mit $f(x) := a^x - b^x$ und $g(x) := x$. Es gilt offenbar $\lim_{x\to 0+} f(x) = a^0 - b^0 = 1-1 = 0$ **(0,5P)** und $\lim_{x\to 0+} g(x) = 0$ **(0,5P)**, also sind die Voraussetzungen der 1. Regel von de L'Hopital erfüllt. Wir haben $f'(x) = \ln(a)\cdot a^x - \ln(b)\cdot b^x$ **(2P)** nach Beispiel 7.8(v), sowie $g'(x) = 1$ **(1P)**. Damit ergibt sich

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\textbf{(1P)}}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(a)\cdot a^x - \ln(b)\cdot b^x}{1} = \ln(a)\cdot a^0 - \ln(b)\cdot b^0 = \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) .$$

*[**(1P)** fürs richtige Ausrechnen, dabei werden sowohl $\ln(a)-\ln(b)$ als auch $\ln(\frac{a}{b})$ als vollständig ausgerechnete Ergebnisse akzeptiert.]*

3. Integration.

Bestimme die folgenden Stammfunktionen:

(a) $\displaystyle\int \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ *(11 Punkte)*

(b) $\displaystyle\int \frac{2}{x^3 - x^2 + x - 1}\,\mathrm{d}x$ *(14 Punkte)*

Zu (a). Wir behandeln das Integral zunächst mit der Substitution $u = \sqrt{x}$ **(1P)**. Dann gilt $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \overset{\textbf{(1P)}}{=} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2u}$ und somit $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$. *[**(1P)** dafür, dass* $\mathrm{d}x$ *allein durch* u *und* $\mathrm{d}u$ *ausgedrückt ist.]* Daher ergibt sich mit der Substitutionsmethode

$$\int \sin(\sqrt{x}) = \int \sin(u) \cdot 2u\,\mathrm{d}u = 2\int u \cdot \sin(u)\,\mathrm{d}u \ \ \textbf{(1P)}\ .$$

Das rechtsstehende Integral bearbeiten wir nun weiter mittels partieller Integration: $f(u) = u$ **(1P)**, $g'(u) = \sin(u)$ **(1P)**, also $f'(u) = 1$ **(1P)**, $g(u) = -\cos(u)$ **(1P)**. Mit Satz 8.25 ergibt sich:

$$\begin{aligned} \ldots &\overset{\textbf{(1P)}}{=} 2 \cdot \left(u \cdot (-\cos(u)) - \int 1 \cdot (-\cos(u))\,\mathrm{d}u \right) = -2\,u\,\cos(u) + 2\int \cos(u)\,\mathrm{d}u \\ &\overset{\textbf{(1P)}}{=} -2\,u\,\cos(u) + 2\,\sin(u) + \text{const.} \overset{\textbf{(1P)}}{=} -2\sqrt{x}\,\cos(\sqrt{x}) + 2\,\sin(\sqrt{x}) + \underbrace{\text{const.}}_{\textbf{(0P)}}\ . \end{aligned}$$

Zu (b). Wir führen zunächst für den Integranden eine Partialbruchzerlegung durch. Das Nennerpolynom $x^3 - x^2 + x - 1$ hat offenbar an der Stelle $x = 1$ eine Nullstelle **(1P)**; durch Polynomdivision durch $(x-1)$ ergibt sich $x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)\cdot(x^2+1)$ **(2P)**. Dabei ist das quadratische Polynom $x^2 + 1$ über $\mathbb{R}$ nullstellenfrei und daher nicht weiter zerlegbar. **(0P)** Daher haben wir für die Partialbruchzerlegung den Ansatz

$$\frac{2}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

mit zu bestimmenden Konstanten $A, B, C \in \mathbb{R}$. *[**(3P)**: Einen Punkt dafür, dass kein Polynom als Summand auftritt (keine explizite Begründung nötig), einen Punkt dafür, dass der lineare Term im Zähler des zweiten Summanden vorhanden ist, und einen Punkt dafür, dass alles andere richtig ist.]* Aus dem Ansatz ergibt sich durch Multiplikation mit $x^3 - x^2 + x - 1$

$$2 = A(x^2+1) + (Bx + C)(x-1) = (A+B)x^2 + (-B+C)x + (A-C) \qquad (\textbf{(2P)})$$

und hieraus durch Koeffizientenvergleich das lineare Gleichungssystem

$$A + B = 0\ , \quad -B + C = 0\ , \quad A - C = 2\ ,$$

das die eindeutig bestimmte Lösung

$$A = 1,\ B = -1,\ C = -1$$

besitzt. *[**(3P)**: einen Punkt für jeden richtigen Koeffizienten.]* Damit erhalten wir die Partialbruchzerlegung

$$\frac{2}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1} \; .$$

Die Integration ergibt nun:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{x^3 - x^2 + x - 1} \, \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x-1} \, \mathrm{d}x - \int \frac{x+1}{x^2+1} \, \mathrm{d}x \\
&= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} \, \mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+1} \, \mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\ln|x-1|}_{\textbf{(1P)}} - \underbrace{\frac{1}{2} \ln(x^2+1)}_{\textbf{(1P)}} - \underbrace{\arctan(x)}_{\textbf{(1P)}} + \underbrace{\text{const.}}_{\textbf{(0P)}} \; .
\end{aligned}$$

4. Potenzreihen.

Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{(n^2)} \,. \qquad\qquad (\textit{10 Punkte})$$

---

1. Lösungsvariante. Die zu untersuchende Potenzreihe ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, x^k$ mit

$$a_k := \begin{cases} 1 & \text{falls } k = n^2 \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und somit

$$b_k := \sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = n^2 \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \,.$$

*[Hier gibt es **(1P)** für das Hinschreiben des Ausdrucks $\sqrt[k]{|a_k|}$. Für jede Angabe von b_k, aus der ersichtlich ist, dass nur die Werte 0 und 1 vorkommen gibt es **(2P)**, und dafür, dass ersichtlich ist, dass die 1 unendlich oft vorkommt, gibt es **(1P)**.]*

Die Folge (b_k) besitzt offenbar die Häufungspunkte 0 und 1, und nach Aufgabe 20(b) keine weiteren. Daher ist $\overline{\lim}\, b_k = 1$, denn der limes superior einer Folge ist nach Definition 3.20 ihr größter Häufungspunkt. *[**(4P)** für jede Begründung, die beinhaltet, dass 1 der größte Häufungspunkt bzw. der limes superior von (b_k) ist.]* Mit Satz 4.24 folgt, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $R = 1$ ist. **(2P)**. *[Diese 2P gibt es schon für die bloße Behauptung. 1P Abzug, falls $R = \overline{\lim}\, b_k$ behauptet wird.]*

2. Lösungsvariante. Wir wenden den Quotiententest für Reihen (Satz 4.11) an: Die zu untersuchende Reihe ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n := x^{(n^2)}$. Es gilt

$$\underbrace{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}_{\textbf{(1P)}} = \underbrace{\frac{x^{((n+1)^2)}}{x^{(n^2)}}}_{\textbf{(1P)}} = x^{((n+1)^2-n^2)} = \underbrace{x^{2n+1}}_{\textbf{(2P)}} \,.$$

Für $|x| < 1$ ist $\lim_{n\to\infty} x^{2n+1} = 0$ **(1P)**, daher konvergiert die Reihe in diesem Fall in $\mathbb{R}$ **(1P)**. Für $|x| > 1$ ist $\lim_{n\to\infty} x^{2n+1} = \infty$ **(1P)**, daher divergiert die Reihe in diesem Fall **(1P)**. Aus diesen Feststellungen ergibt sich, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $R = 1$ ist. **(2P)** *[Diese 2P gibt es schon für die bloße Behauptung.]*

3. Lösungsvariante. Für $|x| < 1$ ist die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ eine absolut konvergente Majorante der zu untersuchenden Reihe, die deshalb nach dem Majorantenkriterium (Satz 4.7(i)) absolut konvergiert. Für $x = 1$ divergiert die zu untersuchende Reihe, denn die Summandenfolge ist konstant gleich 1 und damit keine Nullfolge. Aus diesen Feststellungen ergibt sich wieder, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $R = 1$ ist.

[Punkteschlüssel für diese Lösungsvariante:

- *Hinschreiben der Majorante für* $|x| < 1$ *:* ***(3P)***
- *Konvergenz der Majorante:* ***(1P)***
- *Schlußfolgerung, dass die zu untersuchende Reihe konvergiert:* ***(1P)***
- *Betrachtung von* $x = 1$ *, oder aber aller* $|x| > 1$ *:* ***(1P)***
- *Nachweis der Divergenz in diesem Fall:* ***(2P)***
- $R = 1$ *:* ***(2P)***

]

5. Differenzierbarkeit.

(a) Es sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{für } x \le 1 \\ \frac{2}{3}\,x^3 + \frac{1}{3} & \text{für } x > 1 \end{cases}.$$

Untersuche, ob f im Punkt $x_0 = 1$ differenzierbar ist, und *bestimme* gegebenenfalls $f'(1)$. *(12 Punkte)*

(b) *Benenne* den Satz der Vorlesung (entweder durch Angabe seines Namens oder durch die Widergabe seiner Aussage), aus dem die folgende Behauptung folgt:

„Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(a) = f(b) = 0$. Dann besitzt f im Intervall (a, b) einen kritischen Punkt.“ *(1 Punkt)*

(c) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $p, q \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Gleichung

$$x^n + px + q = 0\ . \qquad (*)$$

Zeige mit Hilfe der Behauptung aus (b):

(i) Ist n gerade, so besitzt $(*)$ höchstens zwei Lösungen $x \in \mathbb{R}$. *(6 Punkte)*

(ii) Ist n ungerade, so besitzt $(*)$ höchstens drei Lösungen $x \in \mathbb{R}$. *(8 Punkte)*

Zu (a). Wir untersuchen gemäß der Definition 7.1, ob es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} & \text{für } x \neq 1 \\ c & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

in $x = 1$ stetig ist. *[**(1P)** für das Hinschreiben des Differenzenquotienten. Wird die Lösung mit Hilfe von links- und rechtsseitigen Funktionengrenzwerten ausgedrückt, ist das genauso gut.]*
Dazu: Für $x < 1$ gilt

$$g(x) \overset{\textbf{(1P)}}{=} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \overset{\textbf{(2P)}}{=} x + 1.$$

Setzen wir $c := 1 + 1 = 2$, so gilt daher $g(x) = x + 1$ für alle $x \le 1$, und daher ist g mit dieser Wahl in $x = 1$ linksseitig stetig. *[**(1P)** für* $c_{\text{links}} = 2$ *.]* Nun gilt für $x > 1$

$$g(x) \overset{\textbf{(1P)}}{=} \frac{\frac{2}{3}\,x^3 + \frac{1}{3} - 1}{x - 1} = \frac{2}{3}\,\frac{x^3 - 1}{x - 1} \overset{\textbf{(3P)}}{=} \frac{2}{3}\,(x^2 + x + 1)\ .$$

Wegen $\frac{2}{3}\,(1^2 + 1 + 1) = 2 = c = g(1)$ gilt die Gleichung $g(x) = \frac{2}{3}\,(x^2 + x + 1)$ mit unserer Wahl $c = 1$ tatsächlich für alle $x \ge 1$, und daher ist g in $x = 1$ auch rechtsseitig stetig. *[**(1P)** für* $c_{\text{rechts}} = 2$ *.]* Damit ist g in $x = 1$ stetig (Aufgabe 37(b)), und somit ist f in $x = 1$ differenzierbar **(1P)** mit $f'(1) = c = 2$ **(1P)**. *[Die letzten beiden Punkte gibt es auch für die bloße Behauptung.]*

[Natürlich kann man die Stetigkeit von g auch mit einer (ε, δ)-Betrachtung untersuchen.]

[Es kann passieren, dass als Nachweis für die Differenzierbarkeit von f gezeigt wird, dass f in 1 stetig ist, und f' in 1 stetig fortsetzbar ist. In diesem Fall geben wir maximal 8 Punkte, weil es zwar eine allgemeine Aussage gibt, die in dieser Situation die Differenzierbarkeit von f folgern läßt, diese jedoch nicht Gegenstand der Vorlesung/Übung war. Diese Punkte werden dann nach dem folgenden Schlüssel verteilt:

- *Stetigkeit von f in $x = 1$: **(2P)***
- *f' hingeschrieben für $x > 1$: **(1P)***
- *f' hingeschrieben für $x < 1$: **(1P)***
- *f' in $x = 1$ stetig fortsetzbar: **(2P)***
- *Schlußfolgerung: f diffbar in $x = 1$ mit $f'(1) = 2$: **(2P)** wie oben*

]

<u>Zu (b).</u> Satz von Rolle (Satz 7.11) oder Mittelwertsatz (Satz 7.13). **(1P)**

<u>Zu (c)(i).</u> Es gilt $f'(x) = n\,x^{n-1}+p$, also $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^{n-1} = -\frac{p}{n}$. *[**(1P)** für das Hinschreiben von $f'(x) = 0$, **(1P)** für die Umformung zu $x^{n-1} = -\frac{p}{n}$ oder $n \cdot x^{n-1} = -p$.]* Weil $n-1$ ungerade ist, ist x^{n-1} streng monoton wachsend **(2P)**, also hat die Gleichung $x^{n-1} = -\frac{p}{n}$ höchstens eine Lösung **(1P)**. Daher kann wegen der Behauptung von (b) die Gleichung $f(x) = 0$ höchstens zwei Lösungen besitzen. **(1P)**

<u>Zu (c)(ii).</u> Es gilt $f'(x) = n\,x^{n-1}+p$, also $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^{n-1} = -\frac{p}{n}$. *[**(1P)** für das Hinschreiben von $f'(x) = 0$, **(1P)** für die Umformung zu $x^{n-1} = -\frac{p}{n}$ oder $n \cdot x^{n-1} = -p$.]* Weil $n-1$ gerade ist, ist x^{n-1} auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend **(2P)** und auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend **(2P)**, also hat die Gleichung $x^{n-1} = -\frac{p}{n}$ höchstens zwei Lösungen **(1P)**. Daher kann wegen der Behauptung von (b) die Gleichung $f(x) = 0$ höchstens drei Lösungen besitzen. **(1P)**

[Wenn der Teil „Es gilt $f'(x) = n\,x^{n-1} + p$, also $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^{n-1} = -\frac{p}{n}$“ bei einer der beiden Teilaufgaben dasteht, werden die dazu gehörenden Punkte in der anderen Teilaufgabe automatisch mit vergeben, und zwar selbst dann, wenn die andere Teilaufgabe überhaupt nicht bearbeitet ist.]

[Wenn nur der Fall $n = 2$ mit der (p, q)-Formel behandelt ist, gibt es 0 Punkte.]