Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis I
5. Übung

8. Oktober 2010

Die Lösungen sind bis Freitag, den 15. Oktober 2010, 10.00 Uhr s.t. einzuwerfen.

19. Von Nullfolgen und von $|a_n|$.

(a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge (also eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. *Zeige*, dass dann $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. *(4 Punkte)*

(b) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so dass $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ ist. *Zeige*, dass dann auch (a_n) selbst konvergent ist mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *(3 Punkte)*
[Tipp. (a)]

(c) *Beweise oder widerlege:* Für jedes $c > 0$ und jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} |a_n| = c$ ist auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n \in \{c, -c\}$. *(2 Punkte)*

20. Über Häufungspunkte.

(a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass die Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind. *Beweise*, dass dann $\{\lim_{n\to\infty} a_{2n}, \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}\}$ die Menge der Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. *(4 Punkte)*

(b) *Formuliere* (ohne Beweis) eine Verallgemeinerung der Aussage von (a) für jede endliche Zahl von Teilfolgen. *(2 Punkte)*
[Auch eine solche Verallgemeinerung darf in folgenden Aufgaben verwendet werden.]

21. Mehr Grenzwertberechnungen und Häufungspunkte.

(a) *Untersuche* die folgenden Folgen auf Konvergenz, und *bestimme* gegebenenfalls ihren Grenzwert. *Bestimme* außerdem alle ihre Häufungspunkte, sowie bei (i)–(iii) ihren Limes superior und ihren Limes inferior.

(i) $a_n = (-1)^n \cdot (1 - \frac{1}{n})$ [Tipp. Aufgabe 20(a).] *(3 Punkte)*

(ii) $b_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n$ [Tipp. Bernoullische Ungleichung.] *(3 Punkte)*

(iii) $c_n = (n \cdot a)^n$ mit $0 < a < 1$ *(3 Punkte)*

(iv) $d_n = \left(\frac{3+4\imath}{10}\right)^n$ [Tipp. Aufgabe 19(b).] *(3 Punkte)*

(v) $e_n = \imath^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *(3 Punkte)*

(vi) $f_n = \left(\frac{1+\imath\sqrt{3}}{2}\right)^n$ [Tipp. Berechne die ersten Folgeglieder.] *(3 Punkte)*

(b) Sei $c \in \mathbb{R}$ vorgegeben. *Finde* Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die beide gegen 0 konvergieren, und für die $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ gilt. *(2 Punkte)*

22. Über den Limes superior. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkte reelle Zahlenfolgen.

(a) *Beweise*: $\overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$. *(4 Punkte)*

(b) *Belege durch Angabe eines Gegenbeispiels*, dass nicht immer $\overline{\lim}(a_n + b_n) = \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$ gilt. *(2 Punkte)*

23. Grenzwerte ganzrationaler Folgen. Es seien zwei Polynome P, Q gegeben:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k\, x^k \quad \text{und} \quad Q(x) = \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell\, x^\ell\,.$$

Dabei soll $p, q \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_q \in \mathbb{R}$ sowie $a_p \neq 0$ und $b_q \neq 0$ sein. Wir wollen die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := \frac{P(n)}{Q(n)}$ auf Konvergenz untersuchen; damit sie wohldefiniert ist, wollen wir $Q(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraussetzen.

(a) Im Fall $p > q$ *beweise* man, dass c_n gegen $\pm\infty$ konvergiert, wobei sich das Vorzeichen des Grenzwertes durch das Vorzeichen von $\frac{a_p}{b_q}$ bestimmt. *(a)–(c): (6 Punkte)*

(b) Im Fall $p = q$ *beweise* man, dass c_n gegen $\frac{a_p}{b_p}$ konvergiert.

(c) Im Fall $p < q$ *beweise* man, dass c_n gegen 0 konvergiert.

(d) Als Anwendung von (a)–(c) *bestimme* man die Grenzwerte der folgenden reellen Zahlenfolgen:

$$x_n := \frac{1 - 3\,n^{17}}{n^{12} + 1}\,, \quad y_n := \frac{6\,n^3 + 4\,n^2 + 5}{3\,n^3 + 7\,n + 12} \quad \text{und} \quad z_n := \frac{(n^2+1)^{314}}{(n+1)^{2010}}\,.$$ *(3 Punkte)*

Informationen zur Zwischenklausur

Die **Zwischenklausur** zur Analysis I findet

am Samstag, den 30. Oktober 2010
10.15–11.45 Uhr
im Gebäude A3, Raum 001

statt. Wir empfehlen dringend, spätestens 15 Minuten vor Beginn der Klausur zu erscheinen. Sofern Sie zu den Übungen zur Analysis I angemeldet sind, ist eine separate Anmeldung zur Zwischenklausur nicht erforderlich.

Die Zwischenklausur wird aus *etwa* 5-6 Aufgaben bestehen, durch die maximal 150 Punkte erreicht werden können. Die in der Klausur gesammelte Punktzahl wird zu den Punkten der Übungsaufgaben addiert. Die Zulassung zur Abschlußklausur ist erreicht, wenn am Ende des Semesters mindestens 50% der Maximalpunktzahl (aus Übungen und Zwischenklausur) erlangt worden sind.

Bitte bringen Sie zur Klausur die folgenden *Gegenstände* mit:

- mindestens ein Schreibgerät (schwarze oder blaue Tinte, *kein* Rotstift, *kein* Bleistift),
- Ihren Studierendenausweis bzw. ecUM-Karte.

Sie brauchen *kein Schreibpapier* mitzubringen, da dieses von uns gestellt wird. Selbstverständlich dürfen Sie *Nahrungsmittel und Getränke* zur Klausur mitbringen, allerdings nur solche, von denen keine Belästigung der anderen Klausurteilnehmer (etwa durch Geräusch oder Geruch) ausgeht.

Als *Hilfsmittel* dürfen Sie ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt (210×297 mm) mitbringen und während der Klausur verwenden. Dies gilt unabhängig davon, ob es von Hand oder mit dem Computer o.ä. beschriftet ist, und auch die Schriftgröße spielt keine Rolle. Weitere Hilfsmittel (z.B. Taschenrechner, Skripten usw.) sind *nicht* zugelassen, ein etwa mitgebrachtes *Handy* ist während der Klausur abzuschalten.