Analysis I
2. Übung

Die Lösungen sind bis Freitag, den 24. September 2010, 10.00 Uhr s.t. einzuwerfen.

6. Vom „Größenverhältnis“ zwischen einer Menge und ihrer Potenzmenge. Sei M eine beliebige Menge.

(a) Finde eine injektive Abbildung $f : M \to \mathcal{P}(M)$. *(2 Punkte)*

(b) Sei $g : M \to \mathcal{P}(M)$ eine beliebige Abbildung. Ist dann

$$N_g := \{\, p \in M \,|\, p \notin g(p) \,\} \in \mathcal{P}(M) ,$$

so gilt

$$\text{für jedes } p \in M : \quad g(p) \neq N_g .$$

Insbesondere gibt es keine surjektive Abbildung $g : M \to \mathcal{P}(M)$. *(5 Punkte)*

[Tipp: Angenommen, es gäbe ein $p_0 \in M$ mit $g(p_0) = N_g$. Dann führe man die beiden Möglichkeiten $p_0 \in N_g$ und $p_0 \notin N_g$ jeweils auf einen Widerspruch.]

Bemerkung 1. Den Sachverhalt, dass es keine surjektive Abbildung $g : M \to \mathcal{P}(M)$ gibt, drückt man auch mit der Aussage aus, dass $\mathcal{P}(M)$ *mächtiger* sei als M. Im Falle einer endlichen Menge M bedeutet dies gerade, dass $\mathcal{P}(M)$ eine größere Zahl von Elementen enthält als M. (Wir werden demnächst sehen, dass die Potenzmenge einer n-elementigen Menge 2^n Elemente enthält.)

Bemerkung 2. Die im Tipp skizzierte Beweisstrategie wurde von Bertrand Russell in dem sogenannten „Paradoxon vom Barbier“ veranschaulicht: Der Barbier eines Dorfes behauptet, dass er genau diejenigen Einwohner des Dorfs rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Das kann doch wohl nicht sein. Warum nicht? Rasiert der Barbier denn sich selbst?

7. Rechenregeln für reelle Zahlen.

(a) Man bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $x^3 = x$ für $x \in \mathbb{R}$, indem man Satz 2.10(ii) verwendet. *(2 Punkte)*

(b) Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Beweise die folgenden Regeln:

(i) $\big(a < b \text{ und } c < d\big) \implies a + c < b + d$.

(ii) $\big(0 < a < b \text{ und } 0 < c < d\big) \implies ac < bd$.

(iii) $ab > 0 \iff \big(a > 0, b > 0 \text{ oder } a < 0, b < 0\big)$.

(iv) $ab < 0 \iff \big(a > 0, b < 0 \text{ oder } a < 0, b > 0\big)$. *(5 Punkte)*

8. Über die Betragsfunktion.

(a) Für jede der folgenden Ungleichungen bestimme man die Lösungsmenge (bezüglich $x \in \mathbb{R}$) als ein Intervall oder eine Vereinigung von Intervallen, und skizziere die Lösungsmenge auf der Zahlengeraden.

(i) $|x| < 3$ *(1 Punkt)*

(ii) $3 < |x - 5|$ *(2 Punkte)*

(iii) $2 \leq |x + 4| \leq 5$ *(3 Punkte)*

Bitte wenden.

(b) Sei $a, b \in \mathbb{R}$. Zeige: $|a+b| + |a-b| \geq |a| + |b|$. *(3 Punkte)*
[Tipp. Zeige $|a+b| + |a-b| \geq 2|a|$. Ja, das hilft!]

(c) Ist $a, b \neq 0$, so gilt

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| \geq 2 .$$

(4 Punkte)

[Tipp. Man überlege sich, dass es ausreicht, $x + \frac{1}{x} \geq 2$ für $x > 0$ zu beweisen. Hierfür zeige man $(x-1) \cdot (\frac{1}{x} - 1) \leq 0$ und multipliziere aus.]

(d) Es gilt

$$\max(a,b) = \tfrac{1}{2}(\, a + b + |a-b|\,) \quad \text{und} \quad \min(a,b) = \tfrac{1}{2}(\, a + b - |a-b|\,) .$$

Dabei sind $\max(a,b)$ und $\min(a,b)$ definiert durch

$$\max(a,b) := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq b \\ b & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad \min(a,b) := \begin{cases} b & \text{falls } a \geq b \\ a & \text{sonst} \end{cases} .$$

(3 Punkte)

9. Infimum und Supremum. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen beschränkt sind, und bestimmen Sie ihr Infimum und ihr Supremum. Untersuchen Sie auch, ob Infimum und Supremum jeweils Elemente der Menge (und damit ihr Minimum bzw. Maximum) sind.

(a) $M_1 := \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ *(2 Punkte)*

(b) $M_2 := (0,1) \setminus \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ *(2 Punkte)*

(c) $M_3 := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ *(3 Punkte)*

(d) $M_4 := \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 1| < 3\}$ *(3 Punkte)*

10. Dedekindsche Schnitte. Ein *Dedekindscher Schnitt* ist ein Paar (M, N) von nicht-leeren Teilmengen $M, N \subset \mathbb{Q}$ mit $M \cup N = \mathbb{Q}$, so dass $x < y$ für alle $x \in M$ und $y \in N$ gilt.

(a) Sei (M, N) ein Dedekindscher Schnitt. Zeige, dass dann $\sup(M) = \inf(N) \in \mathbb{R}$ gilt. Diese Zahl wollen wir die *Schnittzahl* des Schnittes (M, N) nennen und mit $\xi(M, N)$ bezeichnen. *(3 Punkte)*

(b) Für $a \in \mathbb{R}$ definieren wir $M_a := (-\infty, a] \cap \mathbb{Q}$, $N_a := (a, \infty) \cap \mathbb{Q}$, $M^a := (-\infty, a) \cap \mathbb{Q}$ und $N^a := [a, \infty) \cap \mathbb{Q}$ (in diesen Ausdrücken bezeichnen $(-\infty, a]$ usw. die entsprechenden reellen Intervalle). Zeige, dass dann (M_a, N_a) und (M^a, N^a) Dedekindsche Schnitte mit Schnittzahl a sind. *(2 Punkte)*

(c) Es gilt genau dann $(M_a, N_a) = (M^a, N^a)$, wenn $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist. *(1 Punkt)*

(d) Zeige, dass jeder Dedekindsche Schnitt von der in (b) beschriebenen Art ist, genauer gesagt: Ist (M, N) ein beliebiger Dedekindscher Schnitt, so gilt $(M, N) = (M_a, N_a)$ oder $(M, N) = (M^a, N^a)$ mit $a := \xi(M, N)$. *(3 Punkte)*

(e) Man folgere aus dem Vorangegangenen: Ist $a \in \mathbb{R}$ eine *rationale* Zahl, so gibt es genau zwei Dedekindsche Schnitte mit Schnittzahl a; ist a hingegen *irrational*, so gibt es genau einen Dedekindschen Schnitt mit Schnittzahl a. *(1 Punkt)*

Bemerkung. Die letzte Aussage zeigt, auf welche Weise Richard Dedekind (1831-1916) diese Schnitte verwendet hat, um aus den rationalen Zahlen die reellen Zahlen zu konstruieren: Er erhält $\mathbb{R}$, indem er zu $\mathbb{Q}$ die Menge derjenigen Schnitte hinzufügt, die keine rationale Schnittzahl besitzen.