Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis I
7. Übung

22. Oktober 2010

Die Lösungen sind bis Freitag, den 29. Oktober 2010, 10.00 Uhr s.t. einzuwerfen.

Die Aufgaben dieses Blatts dienen der Festigung der bisher erworbenen Kenntnisse und der Vorbereitung auf die Zwischenklausur.

29. Vollständige Induktion. Man *beweise* die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$ *(3 Zusatzpunkte)*

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ *(4 Zusatzpunkte)*

30. Eine spezielle Funktion. Wir betrachten die Funktion

$$f : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{t}{1+t}\ .$$

(a) *Zeige*, dass f streng monoton wachsend ist. *(2 Zusatzpunkte)*

(b) *Bestimme* Supremum und Infimum der Bildmenge $f[\,(0,\infty)\,] = \{\, f(t)\,|\, t \in (0,\infty)\,\}$ und *untersuche*, ob diese Menge ein Maximum und/oder ein Minimum besitzt. *(3 Zusatzpunkte)*

(c) *Skizziere* den Graphen von f. *(2 Zusatzpunkte)*

31. Konvergenz von Folgen und Reihen.

(a) Man *bestimme* für die folgenden Folgen alle ihre Häufungspunkte, und untersuche, ob sie in $\mathbb{K}$ konvergieren.

(i) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ *(3 Zusatzpunkte)*

(ii) $b_n := \frac{\sqrt{3n^2+a}}{2n+1}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$. [Man beachte Aufgabe 32(a).] *(3 Zusatzpunkte)*

(iii) $c_n := (1 - \frac{1}{n})^n$ *(3 Zusatzpunkte)*

(iv) $d_n := (1 + i^n) \cdot \frac{6n+7}{3n+2}$ *(3 Zusatzpunkte)*

(b) Man *untersuche* die folgenden Reihen auf Konvergenz in $\mathbb{R}$ und auf absolute Konvergenz. Die Grenzwerte müssen nicht angegeben werden.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2010\,n+1}$ *(2 Zusatzpunkte)*

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ *(2 Zusatzpunkte)*

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ *(2 Zusatzpunkte)*

32. Über Konvergenz.

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $\mathbb{R}$ konvergente Folge positiver reeller Zahlen mit $a := \lim_{n\to\infty} a_n > 0$. *Zeige*, dass dann auch die Folge $(\sqrt{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, und zwar gegen $\sqrt{a}$.

(3 Zusatzpunkte)

(b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Zahlenfolgen, die sich nur in endlich vielen Gliedern voneinander unterscheiden, d.h. für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n = b_n$. *Zeige*, dass dann (a_n) genau dann in $\mathbb{K}$ konvergiert, wenn (b_n) in $\mathbb{K}$ konvergiert, und dass im Falle der Konvergenz die Grenzwerte dieser beiden Folgen übereinstimmen.

(3 Zusatzpunkte)

(c) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge und $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann heißt die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := a_{\tau(n)}$ eine *Umordnung* von (a_n). *Beweise*, dass die Folge (b_n) genau dann konvergiert, wenn die Folge (a_n) konvergiert, und dass im Falle der Konvergenz ihre Grenzwerte übereinstimmen. *(3 Zusatzpunkte)*

(d) *Beweise:* Jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen.

(3 Zusatzpunkte)

33. Eine weitere Charakterisierung des Limes superior. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte, reelle Zahlenfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch

$$b_n := \sup\{\, a_k \mid k \geq n \,\}$$

definierte Folge. *Zeige:*

(a) Die Folge (b_n) ist eine reelle Zahlenfolge, sie ist monoton fallend und nach unten beschränkt.

(2 Zusatzpunkte)

(b) Die Folge (b_n) ist in $\mathbb{R}$ konvergent, und zwar gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = \overline{\lim}\, a_n$. *(4 Zusatzpunkte)*

Das griechische Alpha-Bet

Alpha	A	α	Iota	I	ι	Rho	P	ϱ
Beta	B	β	Kappa	K	$\varkappa$	Sigma	Σ	σ ς
Gamma	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	Mu	M	μ	Upsilon	Υ	υ
Epsilon	E	ε	Nu	N	ν	Phi	Φ	φ
Zeta	Z	ζ	Xi	Ξ	ξ	Chi	X	χ
Eta	H	η	Omikron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Theta	Θ	ϑ	Pi	Π	π	Omega	Ω	ω