Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis I
3. Übung

24. September 2010

Die Lösungen sind bis Freitag, den 1. Oktober 2010, 10.00 Uhr s.t. einzuwerfen.

11. Eine bijektive Funktion. Zeige, dass die folgende Funktion bijektiv ist:

$$f : (-2,3) \to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} \frac{t}{t+2} & \text{für } t \leq 0 \\ \frac{t}{3-t} & \text{für } t > 0 \end{cases} . \qquad (6\ Punkte)$$

[Tipp. Man zeige, dass f das Intervall $(-2,0)$ bijektiv auf das Intervall $(-\infty,0)$, sowie das Intervall $(0,3)$ bijektiv auf das Intervall $(0,\infty)$ abbildet. Warum folgt daraus die Bijektivität von f ?]

12. Vollständige Induktion. Beweise die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$. *(3 Punkte)*

(b) Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$. *(3 Punkte)*

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $10^n + 18n - 28$ durch 27 teilbar. *(4 Punkte)*
[Tipp. Man überlege sich, dass man, um im Induktionsschritt die Aussage für $n+1$ auf die Aussage für n zurückzuführen, zu zeigen hat, dass ein gewisser Ausdruck durch 3 teilbar ist. Dies kann man entweder durch einen weiteren Induktionsbeweis nachweisen, oder indem man auf raffinierte Weise (b) anwendet.]

(d) Die Potenzmenge einer n-elementigen Menge ($n \in \mathbb{N}$) besitzt 2^n Elemente. *(4 Punkte)*

(e) Jede endliche, nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Maximum und ein Minimum. *(4 Punkte)*

13. Über die Approximation von $\sqrt{2}$ durch rationale Zahlen.

Ist eine irrationale Zahl $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gegeben, so läßt sich ξ beliebig gut durch rationale Zahlen $\frac{p}{q}$ annähern: Zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ existiert nach Satz 2.41 ein $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $\left|\frac{p}{q} - \xi\right| < \varepsilon$. Hieraus ergibt sich eine interessante Frage: Durch wie „einfache" Brüche ist diese Approximation möglich, das heißt: Wie groß muss in der gekürzten Darstellung $\frac{p}{q}$ der Nenner q mindestens sein, damit man eine Approximation an ξ mit $\left|\frac{p}{q} - \xi\right| < \varepsilon$ erhalten kann? Von dieser Frage ist die folgende Definition inspiriert:

Sei $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und außerdem $k \in \mathbb{N}$. Wir sagen, eine irrationale Zahl $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *ist durch rationale Zahlen approximierbar von Ordnung* k, wenn es ein (nur von ξ abhängendes) $c > 0$ gibt, so dass die Ungleichung

$$\left|\frac{p}{q} - \xi\right| < \frac{c}{q^k}$$

von unendlich vielen rationalen Zahlen $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ erfüllt wird.

In der Aufgabe wollen wir diese Frage speziell für die irrationale Zahl $\xi = \sqrt{2}$ untersuchen. Konkret wollen wir zeigen, dass $\sqrt{2}$ von keiner höheren Ordnung als $k = 2$ approximiert werden kann, und dass für $k = 2$ der kleinstmögliche Wert der Konstanten c ist: $c = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Dazu zeige man für zunächst beliebige $p, q \in \mathbb{N}$:

(a) Es gilt $|p^2 - 2q^2| \geq 1$. Man finde ein Beispiel von Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit $|p^2 - 2q^2| = 1$. *(2 Punkte)*
[Tipp. Es kann hilfreich sein, sich den Beweis von Lemma 2.43 nochmal zu vergegenwärtigen.]

(b) Es gilt
$$\left|\frac{p}{q}-\sqrt{2}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}+\frac{p}{q}} \cdot \frac{1}{q^2}\,. \qquad \textit{(2 Punkte)}$$
[Tipp. $|\frac{p}{q}+\sqrt{2}| \cdot |\frac{p}{q}-\sqrt{2}| = |\frac{p^2}{q^2}-2| = \frac{1}{q^2} \cdot |p^2-2q^2|$.]

(c) Man zeige unter Verwendung von (b): *Wenn* mit gewissen $k \in \mathbb{N}$ und $c > 0$ die Ungleichung
$$\left|\frac{p}{q}-\sqrt{2}\right| < \frac{c}{q^k} \qquad (*)$$
gilt, *dann* gilt auch die Ungleichung $\frac{c^2}{q^k} + 2\sqrt{2}\,c - q^{k-2} > 0$. *(3 Punkte)*

(d) Folgere aus (c): Besitzt $(*)$ für feste Werte $k \in \mathbb{N}$ und $c > 0$ unendlich viele Lösungen $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, so muss $k \leq 2$ sein. Im Falle $k = 2$ muss $c \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ sein. *(3 Punkte)*
[Tipp. Man mache sich klar: Wenn $(*)$ unendlich viele Lösungen $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ besitzt, dann gibt es zu jedem vorgegebenen $q_0 \in \mathbb{N}$ eine Lösung $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $q \geq q_0$.]

Bemerkung. Später werden wir sehen, dass die demnach beste vorstellbare Approximationsordnung $k = 2$ mit $c = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ für $\xi = \sqrt{2}$ tatsächlich erreicht wird. — Mehr über die Approximierbarkeit irrationaler Zahlen durch rationale Zahlen kann man nachlesen im Kapitel 11 des Buchs G. Hardy, M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fifth Edition, Oxford 1979.

14. Einzigartigkeit von $\mathbb{Q}$. In dieser Aufgabe sei neben $\mathbb{R}$ ein weiterer angeordneter Körper $\mathbb{R}'$ gegeben; $\mathbb{R}'$ ist also eine Struktur, die die Körperaxiome A1–A3 und die Anordnungsaxiome A4 erfüllt. Da es viele verschiedene angeordnete Körper gibt, braucht $\mathbb{R}'$ nicht zu $\mathbb{R}$ isomorph („strukturell gleichwertig") zu sein. Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass jedoch die in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}'$ jeweils enthaltenen „Körper der rationalen Zahlen" zueinander isomorph sind.

Um dieses Ziel genauer zu formulieren, bezeichnen wir das neutrale Element bezüglich der Addition bzw. der Multiplikation in $\mathbb{R}'$ mit $0'$ bzw. mit $1'$. (Die Rechenoperationen und die Anordnung von $\mathbb{R}'$ bezeichnen wir genauso wie in $\mathbb{R}$ mit $+$, $\cdot$, und $<$, so dass im Folgenden jeweils aus dem Zusammenhang klar werden muss, ob die Operation in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{R}'$ stattfindet.) Auf die in Abschnitt 2.3 der Vorlesung beschriebene Art konstruieren wir auch in $\mathbb{R}'$ die Mengen der natürlichen, ganzen, und rationalen Zahlen; wir bezeichnen diese Mengen mit $\mathbb{N}'$, $\mathbb{Z}'$ und $\mathbb{Q}'$. Man beachte, dass alle in der Vorlesung allein aufgrund von A1–A4 bewiesenen Aussagen sinngemäß auch in $\mathbb{R}'$ anstelle von $\mathbb{R}$ gelten. Wir werden in dieser Aufgabe den folgenden Satz beweisen:

Satz. Es existiert genau ein Körperisomorphismus $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}'$, das ist eine Bijektion mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $f(1) = 1'$

(2) $f(a+b) = f(a) + f(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{Q}$

(3) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{Q}$

Ausserdem besitzt f die folgenden Eigenschaften:

(4) $f[\mathbb{N}] = \mathbb{N}'$

(5) $f(0) = 0'$ und $f(-a) = -f(a)$ für alle $a \in \mathbb{Q}$

(6) $f(a) \neq 0'$ und $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ für alle $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

(7) Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$ gilt auch $f(a) < f(b)$. (*Ordnungstreue*)

Um diesen Satz zu beweisen, definieren wir f schrittweise auf $\mathbb{N}$, auf $\mathbb{Z}$ und auf $\mathbb{Q}$. Im Einzelnen zeige man:

(a) Man definiere $f|\mathbb{N}$ rekursiv durch die Forderung (1) und durch

$$f(n+1) := f(n) + 1' \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann zeige man durch vollständige Induktion die Aussagen (2) und (3) für alle $a, b \in \mathbb{N}$, dass man $f|\mathbb{N}$ so definieren muss, wenn die Aussagen (1) und (2) gelten sollen, sowie dass die Aussage (4) gilt. *(4 Punkte)*

(b) Man erweitere die Definition von f nun auf $\mathbb{Z}$ durch die Setzung

$$f(0) := 0' \quad \text{und} \quad f(-n) := -f(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann beweise man die Aussagen (2) und (3) für alle $a, b \in \mathbb{Z}$, dass aus der Gültigkeit von (2) die Aussage (5) für $a \in \mathbb{Z}$ folgt, sowie dass man $f|\mathbb{Z}$ so definieren muss, wenn die Aussagen (1) und (2) gelten sollen. *(4 Punkte)*

(c) Sind $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ und $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und gilt $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$, so zeige man mittels (3), dass auch $\frac{f(m_1)}{f(n_1)} = \frac{f(m_2)}{f(n_2)}$ gilt. Daher kann man eindeutig eine Funktion $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}'$ definieren durch

$$\varphi(\tfrac{m}{n}) := \frac{f(m)}{f(n)} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Man beweise $\varphi(a) = f(a)$ für $a \in \mathbb{Z}$. Daher bezeichnen wir die Funktion φ jetzt mit f. Man zeige, dass für sie die Aussagen (1)–(3) gilt, dass aus der Gültigkeit von (3) die Aussage (6) folgt, und dass man daher f so definieren muss, wenn die Aussagen (1)–(3) gelten sollen. *(4 Punkte)*

(d) Man zeige nun $f(a) > 0'$ für alle $a \in \mathbb{Q}$ mit $a > 0$ und folgere hieraus die Aussage (7), und aus dieser die Injektivität von f. Die Surjektivität von f ergibt sich schließlich aus (4) und der Konstruktion von f. *(4 Punkte)*