Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis I
11. Übung

19. November 2010

Die Lösungen sind am Freitag, den 26. November 2010 vor Beginn der großen Übung abzugeben.

49. Extremwertprobleme.

(a) Man *bestimme* alle lokalen Extrema der drei Funktionen aus Aufgabe 46(c), und *untersuche*, ob es sich um lokale Maxima oder lokale Minima handelt. Man *bestimme* außerdem mit Hilfe des Zwischenwertsatzes die Bildmengen dieser Funktionen. *(2+3+3 Punkte)*
[Tipp. Aufgabe 50(a)(ii) darf verwendet werden.]

(b) Ein Unternehmer will ins Eintopfgeschäft einsteigen. Seine „Erbsensuppe-Spezial" soll in zylindrischen Blechdosen (von vorgegebener Blechstärke) mit dem Dosenvolumen $V > 0$ verkauft werden. Welche Maße müssen die Dosen haben, damit der Materialaufwand minimal wird? (Hinweis: Ein Kreiszylinder mit Radius r und Höhe h hat das Volumen $\pi r^2 h$ und die Oberfläche $2\pi r \cdot (r+h)$.) *(3 Punkte)*

(c) Hans Raser will sein neues Motorrad seiner Freundin Helga vorführen. Ihr Haus liegt im Abstand $h > 0$ von der geradlinig verlaufenden Landstraße mitten auf einer großen Wiese. Auf der Landstraße fährt Hans 100 km/h, und auf der Wiese 40 km/h. Wo muss Hans abbiegen, um möglichst schnell zu Helga zu gelangen? *(4 Punkte)*

50. Grenzwertberechnung von Funktionswerten.

(a) *Berechne* die folgenden Grenzwerte:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{\tan(7x)}$ *(3 Punkte)*

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x \cdot \ln(x)$ *(3 Punkte)*

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$ *(3 Punkte)*

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to \infty-} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ *(3 Punkte)*

[Tipp. Man verbringe bei (iv) nicht zu viel Zeit mit dem Versuch, die Regel von l'Hopital anzuwenden. Stattdessen dividiere man lieber durch e^x.]

(b) *Zeige* für $\alpha, \beta > 0$:

$$\lim_{x\to\infty-} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = \infty \ .$$

Interpretation. Jede noch so kleine (positive) Potenz von e^x geht für $x \to \infty$ wesentlich schneller gegen ∞ als jede noch so große Potenz von x. *(3 Punkte)*
[Tipp. $\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = (\frac{e^{(\alpha/\beta)x}}{x})^\beta$.]

51. Die Produktregel für n-te Ableitungen. Es seien $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei n-fach differenzierbare Funktionen und $h := f \cdot g : I \to \mathbb{R}$. *Beweise* durch vollständige Induktion, dass dann auch h n-fach differenzierbar ist, und dass für $x \in I$ gilt

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x) \ .$$

Dabei bezeichnet $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ bzw. $\binom{n}{0} = 1$ den Binomialkoeffizienten zu (n,k), siehe auch die Binomische Formel 3.24. *(5 Punkte)*

52. Zum Mittelwertsatz. Es sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $x^* \in (a, b)$, und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

(a) Es sei f auf (a, b) differenzierbar und f' in x^* noch stetig. Wir setzen weiter voraus, dass es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in (a, b) \setminus \{x^*\}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ gibt, so dass $f(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Man *zeige*, dass f in x^* eine *Nullstelle höherer Ordnung* besitzt, das bedeutet per Definition: $f(x^*) = f'(x^*) = 0$. *(5 Punkte)*

(b) Es sei f differenzierbar auf $(a, b) \setminus \{x^*\}$ und es existiere ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to x^*-} f'(x) = c = \lim_{x\to x^*+} f'(x)$. *Zeige*, dass f dann auch in x^* differenzierbar ist, und zwar mit $f'(x^*) = c$. *(5 Punkte)*

[Tipp. Zu beweisen ist, dass die Funktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \frac{f(x)-f(x^*)}{x-x^*}$ für $x \neq x^*$ und $h(x^*) = c$ stetig ist. Dazu zeige man, dass h linksseitig stetig und rechtsseitig stetig ist, siehe Aufgabe 37(b).]

53. Konvexe und konkave Funktionen. *Zeige*, dass die Umkehrfunktion einer konvexen, bijektiven, monoton wachsenden Funktion konkav ist. *(5 Punkte)*

Information

Die **Abschlußklausur** zur Analysis I findet

am **Dienstag, den 21. Dezember 2010**, um **14.30–16.00 Uhr**
in den Räumen **B6, A0.01** sowie **A5, B144**

statt. Sie können eine Woche vor der Klausur im Studierendenportal abfragen, in welchem Raum (und auf welchem Platz) Sie die Klausur schreiben. Wir empfehlen dringend, spätestens 15 Minuten vor Beginn der Klausur zu erscheinen.

Inhalt der Abschlußklausur ist der gesamte Stoff der Analysis I.

Zur Teilnahme an der Abschlußklausur ist eine *Anmeldung* im Studienbüro erforderlich. Obwohl die reguläre Anmeldefrist abgelaufen ist, können Sie die Anmeldung auch jetzt noch (gegen Zahlung einer Nachgebühr) nachholen. Falls Sie an der Klausur teilnehmen wollen, aber bisher nicht angemeldet sind, ist es jedoch unbedingt notwendig, dass Sie die Anmeldung so rasch wie möglich nachholen. *Ohne Anmeldung hat niemand die Möglichkeit, an der Abschlußklausur teilzunehmen.*

Bitte bringen Sie zur Klausur die folgenden *Gegenstände* mit:

- mindestens ein Schreibgerät (schwarze oder blaue Tinte, *kein* Rotstift, *kein* Bleistift),
- Ihren Studierendenausweis bzw. ecUM-Karte.

Sie brauchen *kein Schreibpapier* mitzubringen, da dieses von uns gestellt wird. Selbstverständlich dürfen Sie *Nahrungsmittel und Getränke* zur Klausur mitbringen, allerdings nur solche, von denen keine Belästigung der anderen Klausurteilnehmer (etwa durch Geräusch oder Geruch) ausgeht.

Als *Hilfsmittel* dürfen Sie wieder ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt (210×297 mm) mitbringen und während der Klausur verwenden. Dies gilt unabhängig davon, ob es von Hand oder mit dem Computer o.ä. beschriftet ist, und auch die Schriftgröße spielt keine Rolle. Weitere Hilfsmittel (z.B. Taschenrechner, Skripten usw.) sind *nicht* zugelassen, ein etwa mitgebrachtes *Handy* ist während der Klausur abzuschalten.