Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis I

9. Übung

5. November 2010

Die Lösungen sind bis Freitag, den 12. November 2010, 10.00 Uhr s.t. einzuwerfen.

39. Mehr Beispiele zur Stetigkeit.

(a) *Zeige,* dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ stetig ist. *(3 Punkte)*

(b) Gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ c & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ stetig ist? *(3 Punkte)*

(c) *Zeige,* dass die Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ und } q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \\ 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

in allen $x \in \mathbb{Q}$ unstetig, und in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist. *(6 Punkte)*
[Tipp. Man überlege sich, dass es in jedem offenen Intervall von $\mathbb{R}$ eine irrationale Zahl gibt.]

40. Über den Zwischenwertsatz. Es sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

(a) *Zeige*, dass die reelle Polynomfunktion $p(x) := x^6 + x^2 + 4x - 5$ im Intervall $[-1, 1]$ mindestens eine Nullstelle besitzt. *(2 Punkte)*

(b) Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Abbildung. *Zeige*, dass f mindestens einen Fixpunkt, das heißt ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$, besitzt. *(3 Punkte)*
[Tipp. $f - \mathbb{1}_{[a,b]}$.]

(c) *Zeige*, dass es <u>keine</u> stetige Abbildung $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt, die jeden ihrer Funktionswerte an genau zwei Punkten in $[a, b]$ annimmt. *(6 Punkte)*
[Tipp. Zwischenwertsatz und Satz 5.26.]

41. Eine Iteration zur Approximation von π.

Vorweg zeige man:

(a) Sei $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Man *zeige*, dass dann gilt: $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin(x)^2}}{2}}$. *(2 Punkte)*

[Tipp. Satz 4.29: $\cos(x) = \cos(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = \dots$.]

Wir definieren nun rekursiv eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 2 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := \sqrt{2^{2n+1} - 2^{n+1}\cdot\sqrt{2^{2n} - a_n^2}} \quad \text{für } n \geq 1\ .$$

(b) *Zeige,* dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $a_n = 2^n \cdot \sin(\frac{1}{2^n}\cdot\pi)$. *(3 Punkte)*

(c) *Folgere* aus (b): $\lim_{n\to\infty} a_n = \pi$. *(3 Punkte)*
[Tipp. Satz 6.14(ii).]

42. Rechenregeln für den Abschluß von Teilmengen von $\mathbb{K}$.

Es seien A, B Teilmengen von $\mathbb{K}$ und $x \in \mathbb{K}$. Wie in der Vorlesung (siehe Definition 5.3) bezeichnen wir mit $\overline{A}$ den Abschluß von A. *Zeige:*

(a) $\overline{A}$ ist in $\mathbb{K}$ abgeschlossen, und für jede andere abgeschlossene Teilmenge $A' \subset \mathbb{K}$ mit $A \subset A'$ gilt $\overline{A} \subset A'$. (Mit anderen Worten: $\overline{A}$ *ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von* A.) *(2 Punkte)*

(b) Es gilt genau dann $\overline{A} = A$, wenn A abgeschlossen in $\mathbb{K}$ ist. *(2 Punkte)*

(c) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$. *(1 Punkt)*

(d) Es gilt genau dann $x \in \overline{A}$, wenn für jede offene Umgebung U von x in $\mathbb{K}$ gilt: $U \cap A \neq \varnothing$. *(2 Punkte)*

(e) Es gilt genau dann $x \in \overline{A}$, wenn es eine in $\mathbb{K}$ konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gibt. *(2 Punkte)*

(f) Wenn $A \subset B$ gilt, so auch $\overline{A} \subset \overline{B}$. *(1 Punkt)*

(g) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. *(2 Punkte)*

(h) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. *(1 Punkt)*

(i) Man *belege durch ein Beispiel*, dass in (h) im Allgemeinen nicht Gleichheit gilt. *(2 Punkte)*

43. Das Wurzelkriterium ist stärker als das Quotientenkriterium. (Ein Nachtrag.)

Wir betrachten die unendliche Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n := \dfrac{2+(-1)^n}{2^{n-1}}$.

(a) *Zeige* mit Hilfe des Wurzelkriteriums (Satz 4.9(i)), dass die Reihe absolut konvergiert. *(2 Punkte)*

(b) *Berechne* $\overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ und *folgere*, dass die Konvergenz der Reihe <u>nicht</u> mit Hilfe des Quotientenkriteriums nach Satz 4.11(i) nachgewiesen werden kann. *(2 Punkte)*