Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis I
6. Übung

15. Oktober 2010

Die Lösungen sind bis Freitag, den 22. Oktober 2010, 10.00 Uhr s.t. einzuwerfen.

24. Rechnen mit Reihen.

(a) *Untersuche* die folgenden Reihen auf Konvergenz in $\mathbb{R}$. (Die Grenzwerte brauchen nicht berechnet zu werden.)

(i) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ *(2 Punkte)*

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{k^3}$ *(3 Punkte)*

(iii) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(k+1)^k}{(2k+1)^k}$ *(2 Punkte)*

(iv) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{30+14k+k^4+13k^2}{2k^4+2k^3+k+12}$ *(2 Punkte)*

(v) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ *(3 Punkte)*

(b) *Beweise*, dass die folgenden Reihen in $\mathbb{R}$ konvergent sind und *berechne* ihren Grenzwert.

(i) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+3)}$ *(3 Punkte)*

[Tipp. Man schreibe $\frac{1}{(2k-1)(2k+3)}=\frac{\alpha}{2k-1}+\frac{\beta}{2k+3}$ mit zu bestimmenden Konstanten $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.]

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^3+2k^2+3k}{k!}$ *(4 Punkte)*

[Tipp. Man schreibe $k^3+2k^2+3k=\alpha\,k\,(k-1)\,(k-2)+\beta\,k\,(k-1)+\gamma\,k$ mit zu bestimmenden Konstanten $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.]

(c) Man *berechne* ohne Taschenrechner auf 10 Nachkommastellen genau: $\sum_{k=0}^{2010}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+5}$, und *begründe*, dass das Ergebnis tatsächlich auf 10 Nachkommastellen genau ist. *(2 Punkte)*

25. Reihen, deren Glieder Quadrate sind. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge.

(a) *Beweise:* Wenn $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ absolut konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ absolut. *(3 Punkte)*

(b) Man *belege durch Angabe eines Beispiels*, dass die Umkehrung von (a) falsch ist. *(2 Punkte)*

(c) Man *belege durch Angabe eines Beispiels*, dass die Aussage von (a) falsch wird, wenn man „absolute Konvergenz“ jeweils durch „Konvergenz in $\mathbb{R}$“ ersetzt. *(2 Punkte)*

26. Über das Konvergenzverhalten der Summandenfolge konvergenter Reihen.

(a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende, reelle Zahlenfolge mit $a_n>0$ für alle $n\in\mathbb{N}$, so dass $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. *Zeige*, dass dann $(n\cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. *(6 Punkte)*

[Tipp. Man verwende entweder das Cauchy-Kriterium für Reihen (Satz 4.3), oder aber Cauchy's Verdichtungssatz (Satz 4.12).]

(b) Bleibt die Aussage von (a) richtig, wenn man auf die Voraussetzung, dass (a_n) monoton fallend sein soll, verzichtet? Man *gebe einen Beweis oder ein Gegenbeispiel* an. *(5 Zusatzpunkte)*

27. Über den Sinus hyperbolicus und den Cosinus hyperbolicus. Für $x \in \mathbb{K}$ definieren wir

$$\cosh(x) := \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh(x) := \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \,.$$

(a) *Stelle* $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ „als Potenzreihe", das heißt, als Reihen von der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ mit zu bestimmenden, von x unabhängigen Zahlen $a_k \in \mathbb{K}$ dar, und *zeige* explizit, dass diese Reihen für jedes $x \in \mathbb{K}$ konvergieren. *(4 Punkte)*

(b) *Zeige* für beliebige $x, y \in \mathbb{K}$:

(i) $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$. *(2 Punkte)*

(ii) $\cosh(x+y) = \cosh(x) \cdot \cosh(y) + \sinh(x) \cdot \sinh(y)$. *(2 Punkte)*

28. Cesaro-Konvergenz von reellen Zahlenfolgen. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der arithmetischen Mittel $c_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$. Mann nennt — nach Ernesto Cesàro (1859–1906) — die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Cesaro-konvergent*, wenn die Folge (c_n) in $\mathbb{R}$ konvergiert. Ist dies der Fall, so nennen wir die Zahl $\lim_{n\to\infty} c_n$ den *Cesaro-Grenzwert* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) *Beweise:* Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch Cesaro-konvergent, und a ist auch der Cesaro-Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *(5 Punkte)*
[Tipp. $c_n - a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}(a_k - a) + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}(a_k - a)$.]

(b) *Finde* eine Cesaro-konvergente reelle Zahlenfolge, die nicht im üblichen Sinne konvergent ist, und *beweise*, dass diese Folge die genannten Eigenschaften hat. *(3 Punkte)*

(c) *Finde* eine beschränkte reelle Zahlenfolge, die nicht Cesaro-konvergent ist, und *beweise*, dass diese Folge die genannten Eigenschaften hat. *(10 Zusatzpunkte)*

Informationen

- Stoff für die *Zwischenklausur* sind die Abschnitte 1.1 bis 4.1 des Vorlesungsskripts, und der Abschnitt 4.3 bis einschließlich zum Satz 4.19, sowie die dazu gehörenden Übungen.
- Um an der *Abschlußklausur* teilnehmen zu können, müssen Sie sich zwischen dem **19. Oktober** und dem **2. November** zur Prüfung anmelden. Dies erfolgt elektronisch über das Studierendenportal (*Prüfungen → Prüfungsanmeldung*). Falls Sie die Analysis I unter den bei Ihnen vom System angezeigten Prüfungen nicht finden sollten (dies könnte insbesondere bei Nebenfachstudierenden der Fall sein), oder sonst bei der Anmeldung ein Problem auftreten sollte, wenden Sie sich bitte an das Studienbüro.

  Bitte beachten Sie, dass Ihre Anmeldung ab dem Ende der Anmeldefrist *verbindlich* ist, und ein Rücktritt von der Prüfung ab diesem Zeitpunkt nur noch aus wichtigem Grund (wie z.B. Krankheit) möglich ist. Lediglich in dem Fall, dass Sie die Zulassung zur Abschlußklausur nicht erreichen, wird die Anmeldung von uns storniert und gilt dann als nicht erfolgt.
- Zur Analysis I wird in den kommenden Semesterferien ein *Wiederholungskurs* angeboten werden, der vornehmlich denjenigen Teilnehmern, die die Abschlußklausur nicht bestehen, zur Vorbereitung auf die Nachschreibeklausur dienen soll. Dieser Wiederholungskurs findet **vom 10. bis zum 21.1.2011**, jeweils von Montag bis Freitag täglich von **14.15–15.45 Uhr** in **B6, 23-25, Raum A.001** statt, und wird von Herrn Dipl.-Math. Matthias Leimeister geleitet. Eine Anmeldung hierzu ist nicht erforderlich.