Aufgabe 58 [Die Proben durch Differentiation sind weggelassen.]

(a) $$\int_\alpha^\beta \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt \quad \text{mit } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ \phi(t) = 1-t^2$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\int f(x)\,dx\right)\circ\phi + \text{const.} \quad \text{nach Substitutionsregel}$$

$$= -\left(\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\right)\circ\phi + \text{const}$$

$$= -\sqrt{x}\circ\phi + \text{const.} = -\sqrt{1-x^2} + \text{const.}$$

(b) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Substitution: $u = \arcsin x$, d.h. $x = \sin u$, $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 u} = \cos u$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\cos(u)} \Rightarrow dx = \cos(u)\,du$$

$$= \int \frac{\sin^2 u}{\cos u}\cdot\cos u\,du = \int \sin^2 u\,du = \int \underbrace{\sin(u)}_{=f}\cdot\underbrace{\sin(u)}_{=g'}\,du, \quad g(u) = -\cos(u) \quad (\text{part. Integr.})$$

$$= \sin(u)\cdot(-\cos(u)) - \int \cos(u)\cdot(-\cos(u))\,du + \text{const.}$$

$$= -\sin(u)\cos(u) + \int \underbrace{\cos(u)^2}_{=1-\sin(u)^2}\,du + \text{const.} = -\sin(u)\cos(u) + u - \int \sin^2(u)\,du + \text{const.}$$

Aus den unterschlängelten Termen folgt:

$$2\int \sin^2(u)\,du = -\sin(u)\cos(u) + u + \text{const.}$$

$$\Rightarrow \int \sin^2(u)\,du = \frac{1}{2}\left(-\sin(u)\cos(u) + u\right) + \text{const.}$$

Durch Rücksubstitution ergibt sich

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\left(-\sin(u)\cos(u) + u\right) = \frac{1}{2}\left(-x\cdot\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right) + \text{const.}$$

(c) $$\int \underbrace{x}_{g'(x)}\cdot\underbrace{\arcsin(x)}_{f(x)}\,dx, \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 \overset{\text{partielle Integr.}}{=} \arcsin(x)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{2}x^2\,dx + \text{const.}$$

$$= \frac{1}{2}x^2\arcsin(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \text{const} \overset{(b)}{=} \frac{1}{2}x^2\arcsin(x) + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\arcsin(x) + \text{const.}$$

$$= \frac{1}{4}(2x^2-1)\arcsin(x) + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + \text{const.}$$

(d) ~~1.~~ Lösungsvariante:

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx$$

Substitution: $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow x = 2\arctan(u)$

$$\Rightarrow \sin(x) = \frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\cdot(1+u^2) \Rightarrow dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$$

$$= \int \frac{1+u^2}{2u}\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + \text{const.} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \text{const.}$$

2. Lösungsvariante

Nach den Additionstheorem gilt:

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

und deshalb

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx = \int \frac{\left(\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \quad \text{mit } f(x) := \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \ln|f(x)| + \text{const.} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \text{const.}$$

Aufgabe 59

(a)
$$\int_0^1 \underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g'(x),\, g(x)=e^x} dx \overset{\text{part. Integr.}}{=} 1^2 \cdot e^1 - 0^2 \cdot e^0 - \int_0^1 2x \cdot e^x dx = e - 2\int_0^1 \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g'(x),\, g(x)=e^x} dx$$

$$\overset{\text{part. Integr.}}{=} e - 2\left(1\cdot e^1 - 0\cdot e^0 - \int_0^1 1\cdot e^x dx\right) = -e + 2\int_0^1 e^x dx$$

$$= -e + 2(e^1 - e^0) = e - 2.$$

(b)
$$\int_1^8 \frac{\exp(\frac{1}{x})}{x^2} dx$$

Substitution: $u := \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{u}$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2} = -u^2 \Rightarrow dx = -\frac{1}{u^2} du$$

$$x=1 \Rightarrow u=1 \quad ; \quad x=8 \Rightarrow u=\frac{1}{8}$$

$$= \int_1^{1/8} \frac{\exp(u)}{(1/u)^2} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = -\int_1^{1/8} \exp(u) du = \int_{1/8}^1 \exp(u) du = \exp(1) - \exp(\tfrac{1}{8}) = e - \sqrt[8]{e}.$$

(c)
$$\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$$

Substitution: $u = \sqrt[6]{x} \Rightarrow \sqrt{x} = u^3, \ \sqrt[3]{x} = u^2$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{6}x^{-5/6} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{u^5} \Rightarrow dx = 6u^5 du$$

$$x=1 \Rightarrow u=1 \quad ; \quad x=64 \Rightarrow u = \sqrt[6]{64} = 2$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{u^3+u^2} \cdot 6u^5 du = 6\int_1^2 \frac{u^5}{u^3+u^2} du = 6\int_1^2 \frac{u^3}{u+1} du$$

Polynomdivision, um den Hauptteil von $\frac{u^3}{u+1}$ abzuspalten:

$$u^3 : (u+1) = u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1}$$
$$\underline{-u^3 - u^2}$$
$$-u^2$$
$$\underline{+u^2 + u}$$
$$u$$
$$\underline{-u - 1}$$
$$-1$$

$$= 6\int_1^2 \left(u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1}\right) du =$$ Stammfkt. von $u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1}$: $\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + u - \ln|u+1| + \text{const.}$

$$= 6\cdot\left(\left(\tfrac{1}{3}2^3 - \tfrac{1}{2}\cdot 2^2 + 2 - \ln|2+1|\right) - \left(\tfrac{1}{3}\cdot 1^3 - \tfrac{1}{2}\cdot 1^2 + 1 - \ln|1+1|\right)\right)$$

$$= 6\cdot\left(\tfrac{8}{3} - 2 + 2 - \ln(3) - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} - 1 + \ln(2)\right) = 11 - 6\cdot(\ln(3) - \ln(2)).$$

Aufgabe 60

(a) Wir führen für den Integranden $\frac{1}{x^3-1}$ zunächst die Partialbruchzerlegung durch. Dazu faktorisieren wir zunächst den Nenner x^3-1. Eine Nullstelle hiervon ist offenbar $x=1$, also machen wir Polynomdivision: $(x^3-1):(x-1) = x^2+x+1$.

$$\begin{array}{l} -x^3+x^2 \\ \hline \quad x^2 \\ -x^2+x \\ \hline \quad\; x-1 \\ \;\, -x+1 \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

Das quadr. Polynom x^2+x+1 hat keine reelle Nullstelle, also ist die Faktorisierung von x^3-1 über $\mathbb{R}$: $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. Wir setzen daher die Partialbruchzerlegung wie folgt an:

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} \quad \text{mit } a,b,c\in\mathbb{R}.$$

Durch Ausrechnen der rechten Seite erhält man

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{a\cdot(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{x^3-1}$$

und daher durch Koeffizientenvergleich im Zähler

$$a+b=0, \quad a-b+c=0, \quad a-c=1$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$, $c=-\frac{2}{3}$. Wir erhalten also die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}$$

Wir integrieren die Summanden nun einzeln wie im Skript beschrieben.

$$\int \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| + \text{const.}$$

$$\int \frac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}\,dx = -\frac{1}{6}\int\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{3}{x^2+x+1}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{1}{x^2+x+1}}\,dx + \text{const.}$$

$$= \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2+x+1}\,dx = -\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \text{const.}$$

$$= -\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \text{const.}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\int \frac{1}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \text{const.}$$

(b) Da im Integranden der Grad des Zählers größer ist als der Grad des Nenners, spalten wir zunächst den Hauptteil durch Polynomdivision ab:

$$\begin{array}{l}
(x^5+x^4+3x^3-4x^2-x+6) : (x^4+2x^2-8x+5) = x+1+\frac{x^3+2x^2+2x+1}{x^4+2x^2-8x+5} \\
\underline{-x^5 \quad -2x^3+8x^2-5x} \\
\quad x^4+x^3+4x^2-6x+6 \\
\quad \underline{-x^4 \quad -2x^2+8x-5} \\
\quad\quad x^3+2x^2+2x+1
\end{array}$$

Also gilt

$$\frac{x^5+x^4+3x^3-4x^2-x+6}{x^4+2x^2-8x+5} = x+1+\frac{x^3+2x^2+2x+1}{x^4+2x^2-8x+5}$$

Für den verbliebenen Quotienten wenden wir die Partialbruchzerlegung an, und zerlegen dazu x^4+2x^2-8x+5 in Faktoren über $\mathbb{R}$. Offenbar ist $x=1$ eine Nullstelle hiervon, durch Polynomdivision durch $(x-1)$ erhält man

$$\begin{array}{l}
(x^4+2x^2-8x+5) : (x-1) = x^3+x^2+3x-5 \\
\underline{-x^4+x^3} \\
\quad x^3 \\
\quad \underline{-x^3+x^2} \\
\quad\quad 3x^2 \\
\quad\quad \underline{-3x^2+3x} \\
\quad\quad\quad -5x \\
\quad\quad\quad \underline{+5x-5} \\
\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}$$

Das Polynom x^3+x^2+3x-5 hat wieder die Nullstelle $x=1$, also erneute Polynomdiv.:

$$\begin{array}{l}
(x^3+x^2+3x-5) : (x-1) = x^2+2x+5 \\
\underline{-x^3+x^2} \\
\quad 2x^2 \\
\quad \underline{-2x^2+2x} \\
\quad\quad 5x \\
\quad\quad \underline{-5x+5} \\
\quad\quad\quad 0
\end{array}$$

Das verbliebene quadratische Polynom x^2+2x+5 hat keine reelle Nullstelle, also ist die Zerlegung des Nennerpolynoms in über $\mathbb{R}$ irreduzible Faktoren:

$$x^4+2x^2-8x+5 = (x-1)^2 \cdot (x^2+2x+5)$$

Wir setzen daher die Partialbruchzerlegung wie folgt an (mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$):

$$\frac{x^3+2x^2+2x+1}{x^4+2x^2-8x+5} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{(x^2+2x+5)}$$

$$= \frac{a(x-1)(x^2+2x+5) + b(x^2+2x+5) + (cx+d)\overbrace{(x-1)^2}^{=x^2-2x+1}}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}$$

$$= \frac{a(x^3+2x^2+5x-x^2-2x-5) + b(x^2+2x+5) + c(x^3-2x^2+x) + d(x^2-2x+1)}{x^4+2x^2-8x+5}$$

$$= \frac{(a+c)x^3 + (2a-a+b-2c+d)x^2 + (5a-2a+2b+c-2d)x + (-5a+5b+d)}{x^4+2x^2-8x+5}$$

$$= \frac{(a+c)x^3 + (a+b-2c+d)x^2 + (3a+2b+c-2d)x + (-5a+5b+d)}{x^4+2x^2-8x+5}$$

Durch Koeffizientenvergleich im Zähler ergibt sich das lin. Gleichungssystem

$$a+c=1, \quad a+b-2c+d=2, \quad 3a+2b+c-2d=2, \quad -5a+5b+d=1$$

mit der Lösung

$$a=\frac{3}{4}, \quad b=\frac{3}{4}, \quad c=\frac{1}{4}, \quad d=1.$$

Also ist

$$\frac{x^5+x^4+3x^3-4x^2-x+6}{x^4+2x^2-8x+5} = (x+1) + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4}\,\frac{x+4}{x^2+2x+5}$$

Wir integrieren die Summanden nun separat:

$$\int (x+1)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + x + \text{const.}$$

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1| + \text{const.}$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = -\frac{1}{x-1} + \text{const.}$$

$$\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{2x+2}{x^2+2x+5} + \frac{6}{x^2+2x+5}\right)dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \text{const.} + 3\int \frac{1}{\underbrace{x^2+2x+5}_{(x+1)^2+4}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \text{const.} + \frac{3}{4}\int \frac{1}{(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{4}\cdot 2\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Damit ergibt sich insgesamt:

$$\int \frac{x^5+x^4+3x^3-4x^2-x+6}{x^4+2x^2-8x+5}\,dx = \frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{8}\ln(x^2+2x+5)$$

$$+\frac{3}{8}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + \text{const.}$$

Aufgabe 61

Zunächst gilt in jedem Falle nach partieller Integration:

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(mx)}_{=f(x)} \underbrace{\cos(nx)}_{=g'(x)}\,dx = \cos(2\pi m)\cdot\frac{1}{n}\underbrace{\sin(2\pi n)}_{=0} - \cos(0)\frac{1}{n}\underbrace{\sin(0)}_{=0} - \int_0^{2\pi} m\cdot(-\sin(mx))\cdot\frac{1}{n}\sin(nx)\,dx$$

$g(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$

$$= \frac{m}{n}\int_0^{2\pi}\sin(mx)\sin(nx)\,dx. \qquad (*).$$

Im Falle $m \neq n$ wenden wir noch ein weiteres Mal partielle Int. an:

$$\int_0^{2\pi}\cos(mx)\cos(nx)\,dx \overset{(*)}{=} \frac{m}{n}\int_0^{2\pi}\underbrace{\sin(mx)}_{=f(x)}\underbrace{\sin(nx)}_{=g'(x)}\,dx, \quad g(x) = -\frac{1}{n}\cos(nx)$$

$$= \frac{m}{n}\cdot\left(\underbrace{\sin(2\pi m)}_{=0}\left(-\frac{1}{n}\right)\cos(2\pi n) - \underbrace{\sin(0)}_{=0}\left(-\frac{1}{n}\right)\cos(0) - \int_0^{2\pi} m\cos(mx)\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\cos(nx)\,dx\right)$$

$$= \frac{m^2}{n^2}\int_0^{2\pi}\cos(mx)\cos(nx)\,dx$$

und erhalten somit

$$\underbrace{\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)}_{\neq 0 \text{ wegen } m\neq 0}\int_0^{2\pi}\cos(mx)\cos(nx)\,dx = 0, \quad \text{also} \quad \int_0^{2\pi}\cos(mx)\cos(nx)\,dx = 0.$$

Im Falle $m = n$ erhalten wir aus $(*)$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2(mx)\,dx \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi}\sin^2(mx)\,dx \underset{\sin^2+\cos^2=1}{=} \int_0^{2\pi}(1-\cos^2(mx))\,dx = \int_0^{2\pi}1\,dx - \int_0^{2\pi}\cos^2(mx)\,dx$$

$$= 2\pi - \int_0^{2\pi}\cos^2(mx)\,dx,$$

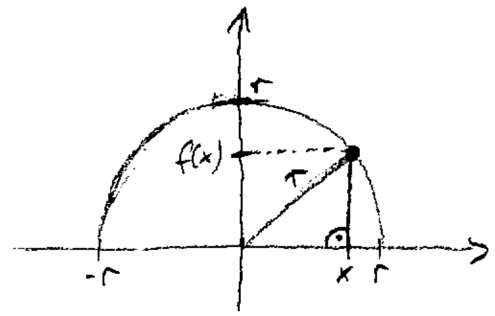
also

$$2\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2(mx)\,dx = 2\pi, \quad \text{d. h.} \quad \int_0^{2\pi}\cos^2(mx)\,dx = \pi$$

□

Aufgabe 62

(a)



Nach dem Satz v. Pythagoras ist $x^2 + (f(x))^2 = r^2$, also (wg. $f(x) \geq 0$) $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Die Funktion $f: [-r, r] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{r^2 - x^2}$ hat also die gewünschte Eigenschaft.

(b) (siehe auch Beispiel 8.26 (ii), hier ein anderer möglicher Lösungsweg:)

$A :=$ Flächeninhalt der Kreisscheibe $= 2\int_{-r}^{r} f(x)\,dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$

<u>Substitution</u>: $u = \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)$, also $x = r \cdot \sin u$, $\sqrt{r^2 - x^2} = r \cdot \cos(u)$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{r})^2}} = \frac{1}{r\cos(u)} \Rightarrow dx = r \cdot \cos(u)\,du$$

$$x = \pm r \Rightarrow u = \arcsin\left(\frac{\pm r}{r}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r \cdot \cos(u)) \cdot (r\cos(u)\,du) = 2r^2 \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u)\,du}_{= \frac{\pi}{2} \text{, s.u. } (*)} = \underline{\underline{\pi r^2}}.$$

<u>zu (*)</u>: <u>**Beh.**</u>: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u)\,du = \frac{\pi}{2}$.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u)\,du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\cos(u)}_{f(u)} \cdot \underbrace{\cos(u)}_{= g'(u),\ g(u) = \sin(u)}\,du \overset{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{=0}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \underbrace{\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)}_{=0}\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\sin(u)) \cdot \sin(u)\,du$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(u)\,du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos^2(u))\,du = \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\,du}_{= \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u)\,du$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u)\,du = \pi \quad \Rightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u)\,du = \frac{\pi}{2}.$$

$\square$