Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis I
8. Übung

29. Oktober 2010

Die Lösungen sind bis Freitag, den 5. November 2010, 10.00 Uhr s.t. einzuwerfen.

34. Über den Konvergenzradius von Potenzreihen.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine reelle oder komplexe Zahlenfolge. Wir untersuchen die hierdurch bestimmte Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$

(a) *Beweise:* Falls $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt und die Folge $\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ einen Grenzwert besitzt, so ist dieser Grenzwert der Konvergenzradius obiger Potenzreihe. *(3 Punkte)*

(b) *Beweise:* Wenn es $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ mit $|x_1| = |x_2|$ gibt, so dass die Potenzreihe für $x = x_1$ konvergiert, aber für $x = x_2$ divergiert, so ist $|x_1| = |x_2|$ der Konvergenzradius der Potenzreihe. *(1 Punkt)*

(c) *Beweise:* Gilt für den Konvergenzradius R der Potenzreihe $0 < R < \infty$, und gibt es ein $x_0 \in \mathbb{C}$ mit $|x_0| = R$, so dass die Potenzreihe für dieses x_0 noch absolut konvergiert, so konvergiert die Reihe absolut für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| = R$. *(1 Punkt)*

35. Berechnung von Konvergenzradien. *Bestimme* den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen für $x \in \mathbb{K}$:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2\, x^n$ *(2 Punkte)*

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^3}{3^n}\, x^n$ *(2 Punkte)*

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ *(2 Punkte)*

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{(n^3+n^2+1)}$ *(3 Punkte)*

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$ [Tipp. Benutze Aufgabe 34(a).] *(3 Punkte)*

36. Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit, und Lipschitz-Stetigkeit.

(a) Man *zeige* durch unmittelbare Anwendung der (ε,δ)-Definition der Stetigkeit (Definition 5.13), dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + 3$$

an der Stelle $x = 2$ stetig ist. *(2 Punkte)*

(b) Man *zeige*, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

an keiner Stelle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist. *(3 Punkte)*

(c) Man *zeige*, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$$

stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist. *(3 Punkte)*

(d) Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}\ .$$

(i) Man *zeige*, dass f stetig ist. *(3 Punkte)*
[Tipp. Man betrachte die Stetigkeit an der Stelle $x = 0$ separat von der Stetigkeit an den Stellen $x > 0$. Für letzteren Fall benutze man für $x, y \in \mathbb{R}^+$ die Beziehung $x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})$.]

(ii) Man *zeige*, dass $f|[1, \infty)$ Lipschitz-stetig (also insbesondere gleichmäßig stetig) ist. *(2 Punkte)*

(iii) Man *zeige*, dass f gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist. *(3 Punkte)*

37. Es seien X, Y Teilmengen von $\mathbb{K}$, $x \in X$ und $f, g : X \to Y$ Funktionen.

(a) **Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft.** Es gebe eine Umgebung U von x mit $U \subset X$ und $f|U = g|U$. *Beweise:* Dann ist f genau dann in x stetig, wenn g in x stetig ist. *(2 Punkte)*

(b) **Links- und rechtsseitige Stetigkeit.** In dieser Teilaufgabe sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Wir sagen, dass f in x *linksseitig stetig* (bzw. *rechtsseitig stetig*) ist, wenn für jede in X gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \leq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (bzw. mit $x_n \geq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$) gilt: $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $f(x)$.
Beweise: f ist genau dann in x stetig, wenn f in x sowohl linksseitig stetig als auch rechtsseitig stetig ist. *(4 Punkte)*
[Tipp. Man beachte Aufgabe 20(b).]

(c) **Eine Charakterisierung der gleichmäßigen Konvergenz.** Für Funktionen $f : X \to Y$ definieren wir die sogenannte *Supremumsnorm*

$$\|f\|_\infty := \sup\{\, |f(x)| \,\big|\, x \in X \,\} \ \in\ [0, \infty]\ .$$

Sei nun $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : X \to Y$. *Beweise*, dass die Funktionenfolge (f_n) genau dann gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn $(\|f_n - f\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. *(3 Punkte)*

38. **Punktweise und gleichmäßige Konvergenz.**
Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 2nx & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2 - 2nx & \text{falls } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\ .$$

(a) *Zeige*, dass f_n stetig ist. *(3 Punkte)*
[Tipp. Aufgabe 37(a),(b).]

(b) *Untersuche*, ob die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise konvergent ist, und *bestimme* gegebenenfalls die Grenzfunktion. *(3 Punkte)*

(c) *Untersuche*, ob die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent ist. *(2 Punkte)*
[Tipp. Aufgabe 37(c).]