Aufgabe 13

(a) Aus dem Beweis von Lemma 2.43 ($\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$) ergibt sich, dass für $p,q\in\mathbb{N}$ stets $p^2\neq 2q^2$, also $p^2-2q^2\neq 0$ ist. Da aber $p^2-2q^2\in\mathbb{Z}$ ist, folgt $|p^2-2q^2|\geq 1$.

Beispiel für $|p^2-2q^2|=1$: $p=q=1$ (oder $p=7,\ q=5$).

(b) Nach (a) gilt $1\leq |p^2-2q^2| = |(p+\sqrt{2}q)(p-\sqrt{2}q)| = |p+\sqrt{2}q|\cdot|p-\sqrt{2}q|$,

$\Rightarrow |p-\sqrt{2}q|\geq \frac{1}{|p+\sqrt{2}q|} \Rightarrow \left|\frac{p}{q}-\sqrt{2}\right| \geq \frac{1}{q^2}\cdot\frac{1}{\left|\frac{p}{q}+\sqrt{2}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}+\frac{p}{q}}\cdot\frac{1}{q^2}$.

(c) Es gelte also $\left|\frac{p}{q}-\sqrt{2}\right| < \frac{c}{q^k}$ (*). Dann bemerken wir zunächst

$$\sqrt{2}+\frac{p}{q} = \left|2\sqrt{2}+\left(\frac{p}{q}-\sqrt{2}\right)\right| \leq 2\sqrt{2}+\left|\frac{p}{q}-\sqrt{2}\right| \overset{(*)}{<} 2\sqrt{2}+\frac{c}{q^k} = \frac{2\sqrt{2}q^k+c}{q^k}. \quad (+)$$

Nun ergibt sich

$$\frac{c}{q^k} \overset{(*)}{>} \left|\frac{p}{q}-\sqrt{2}\right| \overset{(b)}{\geq} \frac{1}{\sqrt{2}+\frac{p}{q}}\cdot\frac{1}{q^2} \overset{(+)}{>} \frac{q^k}{2\sqrt{2}q^k+c}\cdot\frac{1}{q^2} = \frac{q^{k-2}}{2\sqrt{2}q^k+c}$$

$\Rightarrow c(2\sqrt{2}q^k+c) > q^{k-2}\cdot q^k$

$\Rightarrow c^2+2\sqrt{2}q^k c - q^{2k-2} > 0 \Rightarrow \frac{c^2}{q^k}+2\sqrt{2}c-q^{k-2} > 0$ $\square$

(d) Da (*) für festes $q_0\in\mathbb{N}$ offenbar nur endlich viele Lösungen $(p,q_0)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ haben kann, folgt aus der Vor., dass (*) unendl. viele Lsg'en (p,q) hat, dass es Lösungen (p,q) mit beliebig großem q geben muss.

Ann.: $k\geq 3$. Nach dem Gesagten gibt es eine Lösung (p,q) von (*) mit $q\geq \sqrt[k-2]{c^2+2\sqrt{2}c}$. Dann ist $\frac{c^2}{q^k}+2\sqrt{2}c-q^{k-2} \underset{q\in\mathbb{N}}{\leq} c^2+2\sqrt{2}c-q^{k-2} \overset{\text{Df. von } q}{\leq} 0$, im Widerspruch zu (c).

Also muss $k\leq 2$ sein. Sei nun $k=2$. Dann gilt nach (c) für jede Lösung (p,q) von (*): $\frac{c^2}{q^2}+2\sqrt{2}c-1>0$ ($\Diamond$).

Ann.: $c<\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Dann ist also $1-2\sqrt{2}c>0$ und deshalb ist $\varrho := \frac{c}{\sqrt{1-2\sqrt{2}c}}\in\mathbb{R}_+$ wohldefiniert. Nach dem Vorangegangenen ex. eine Lösung (p,q) von (*) mit $q>\varrho$, und dann ist

$$\frac{c^2}{q^2}+2\sqrt{2}c-1 < \frac{c^2}{\varrho^2}+2\sqrt{2}c-1 = 1-2\sqrt{2}c+2\sqrt{2}c-1 = 0$$

im Widerspruch zu ($\Diamond$). $\square$