Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis I
10. Übung

12. November 2010

Die Lösungen sind bis Freitag, den 19. November 2010, 10.00 Uhr s.t. einzuwerfen.

44. Hinreichende Kriterien für Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Es gelte $|f(x)| \leq |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. *Zeige*, dass f in $x_0 = 0$ stetig ist mit $f(0) = 0$. *(4 Punkte)*

(b) Es gelte $|f(x)| \leq |x|^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. *Zeige*, dass f in $x_0 = 0$ differenzierbar ist mit $f(0) = f'(0) = 0$. *(4 Punkte)*

45. Nachweis der Differenzierbarkeit. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^3 & \text{für } x < 0 \\ x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{für } x > 1 \end{cases} .$$

Untersuche f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit an den folgenden Stellen $x_0 \in \mathbb{R}$:

(a) $x_0 = 0$, *(4 Punkte)*

(b) $x_0 = 1$. *(4 Punkte)*

[Tipp. Für die Untersuchung der Stetigkeit von stückweise definierten Funktionen ist Aufgabe 37(b) nützlich.]

46. Rechnen mit Ableitungen.

(a) Mittels der Ergebnisse aus Abschnitt 7.2 *begründe* man, warum die folgenden Funktionen auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar sind und *berechne* jeweils die Ableitung. Dabei vereinfache man den Ausdruck für f' so weit wie möglich.

(i) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^4+1}{x^2-1}$ *(4 Punkte)*

(ii) $(1, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \cdot \ln(\ln(x))$ *(4 Punkte)*

(iii) $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{1/x^2}$ *(4 Punkte)*

[Schwierigkeiten? Es könnte hilfreich sein, sich Beispiel 7.8(xii) nochmal anzusehen.]

(b) *Zeige*, dass für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot q^k = \frac{1}{(1-q)^2} .$$ *(4 Punkte)*

[Tipp. Beispiel 7.4(v).]

(c) Ist $f : X \to \mathbb{R}$ eine auf $X \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion, die in $x_0 \in X$ differenzierbar ist, so heißt x_0 ein *kritischer Punkt* von f, wenn $f'(x_0) = 0$ gilt. Man finde alle kritischen Punkte der folgenden Funktionen:

(i) $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$ *(4 Punkte)*

(ii) $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x) + \sin(x)$ *(4 Punkte)*

(iii) $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^x$ *(4 Punkte)*

47. Die Ableitung als „bestmögliche lineare Approximation“.

Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine auf $X \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion und $x_0 \in X$. Für $a \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $g_a(x) := f(x_0) + a \cdot (x - x_0)$ die Gerade durch den Punkt $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Steigung a. *Zeige*, dass die folgenden beiden Aussagen zueinander äquivalent sind:

(1) f ist in x_0 differenzierbar, und es gilt $f'(x_0) = a$.

(2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ :\ (\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - g_a(x)| < \varepsilon \cdot |x - x_0|\ )$.

(6 Punkte)

48. Nochmal komplexe Zahlen.

(a) Die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln. Sei $n \in \mathbb{N}$. *Zeige*: Die Menge der n-ten Einheitswurzeln (d.h. der Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^n = 1$) ist bezüglich der Multiplikation von $\mathbb{C}$ eine endliche, abelsche Gruppe. *(3 Zusatzpunkte)*

(b) Der komplexe Logarithmus. Sei $z \in \mathbb{C}^*$. *Zeige*, dass es genau ein $y \in \mathbb{C}$ mit $-\pi < \Im(y) \leq \pi$ gibt, so dass $\exp(y) = z$ gilt. y wird auch mit $\operatorname{Log}(z)$ bezeichnet, und heißt der *(Hauptzweig des) komplexen Logarithmus* von z. *(3 Zusatzpunkte)*
[Tipp. Polardarstellung für z.]

(c) Eine Beschreibung des Arcustangens. Sei $t \in \mathbb{R}$. *Zeige*, dass dann gilt:

$$\arctan(t) = \frac{\imath}{2} \cdot (\operatorname{Log}(1 - \imath t) - \operatorname{Log}(1 + \imath t))\ . \qquad \textit{(4 Zusatzpunkte)}$$

[Tipp. Setze an: $\varphi := \arctan(t)$ und $z := e^{\imath\varphi}$, beachte $|z| = 1$. Dann gilt $t = \tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{\Im(z)}{\Re(z)} = \frac{(z-z^{-1})/\imath}{z+z^{-1}} = \ldots$ und deshalb $z = \ldots$]