Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis I
4. Übung

1. Oktober 2010

Die Lösungen sind bis Freitag, den 8. Oktober 2010, 10.00 Uhr s.t. einzuwerfen.

15. Rechnen mit komplexen Zahlen.

(a) Schreibe die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + \imath y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $\left(\frac{1+\imath}{\sqrt{2}}\right)^2$ *(1 Punkt)*

(ii) $\frac{3+\imath}{4-\imath}$ *(1 Punkt)*

(iii) $\frac{(1+2\imath)^3-(1+\imath)^3}{(3+2\imath)^3-(2+\imath)^2}$ *(2 Punkte)*

(b) Bestimme die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ und skizziere sie in der komplexen Zahlenebene:

(i) $M_1 := \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1 \,\}$ *(1 Punkt)*

(ii) $M_2 := \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, |z + \imath| < 4 \,\}$ *(1 Punkt)*

(iii) $M_3 := \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, \Im(z^2) = 2 \,\}$ *(2 Punkte)*

(c) Finde alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = 1$, und markiere ihre Lage in der komplexen Zahlenebene. Zeige außerdem, dass diese ein gleichseitiges Dreieck bilden. *(3 Punkte)*
[Tipp. $z^3 - 1 = (z-1) \cdot (z^2 + z + 1)$.]

16. Rechenregeln für komplexe Zahlen.

(a) Zeige die folgenden Aussagen für beliebige komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$:

(i) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ *(2 Punkte)*

(ii) $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| \geq 1 \iff \Re(z) \geq 0$ *(3 Punkte)*

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, x, y \in \mathbb{R}$. Beweise, dass wenn $z := x + \imath y \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_1\, z + a_0 = 0$$

erfüllt, dass dann auch $\overline{z} = x - \imath y$ dieselbe Gleichung erfüllt. *(2 Punkte)*

(c) *(Der „Zwei-Quadrate-Satz“.)* Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen, sowie $P := a^2 + b^2$ und $Q := c^2 + d^2$. Zeige, dass es dann auch natürliche Zahlen $e, f \in \mathbb{N}_0$ mit

$$P \cdot Q = e^2 + f^2$$

gibt. *(3 Punkte)*
[Tipp. Man rechne in $\mathbb{C}$ und benutze, dass $|z|^2 = x^2 + y^2$ für $z = x + \imath y$ gilt.]

17. Grenzwertberechnungen.

(a) Untersuche die folgenden Folgen auf Konvergenz, und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert:

(i) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ *(2 Punkte)*

(ii) $b_n = \frac{1+n^2}{2+3n+n^2}$ *(3 Punkte)*

(iii) $c_n = \frac{2^n+3^n}{5^n}$ *(2 Punkte)*

(iv) $d_n = \sqrt{4n^2+5n+2} - 2n$ *(3 Punkte)*

(Ohne Beweis darf verwendet werden: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Zahlenfolge mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt auch $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} x_n}$.)

(b) Man gebe jeweils ein Beispiel für Folgen mit den folgenden Eigenschaften, und zeige, dass das Beispiel tatsächlich die Eigenschaften besitzt.

(i) (a_n) ist unbeschränkt, aber nicht gegen $+\infty$ oder $-\infty$ konvergent. *(1 Punkt)*

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ und $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$. *(1 Punkt)*

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ und $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$. *(1 Punkt)*

(iv) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ und $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$. *(1 Punkt)*

(v) $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. *(1 Punkt)*

18. Ein Näherungsverfahren zur Berechnung von $\sqrt{2}$. Bereits vor 4000 Jahren war den Sumerern ein Iterationsprozess bekannt, der bei Eingabe einer Zahl $a > 0$ eine Näherung für $\sqrt{a}$ liefert. Wir formulieren diesen hier speziell für $a = 2$ (also zur Näherung an $\sqrt{2}$): Dazu definieren wir eine Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv wie folgt:

$$x_0 := \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \;:\; x_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) .$$

(a) Mithilfe eines (Taschen-)Rechners berechne man x_1, x_2, x_3 und x_4. Sieht man daran schon, wie sich die x_n an $\sqrt{2}$ annähern? *(2 Punkte)*

Wir schreiben im Folgenden die x_n als „Brüche“, d.h. wir schreiben $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ mit $p_n, q_n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist $p_0 = 3$ und $q_0 = 2$.

(b) Man finde explizite Ausdrücke für p_{n+1} und q_{n+1} in Abhängigkeit von p_n und q_n. *(2 Punkte)*

(c) Man zeige $p_{n+1} > \sqrt{2}\, q_{n+1}$. *(2 Punkte)*
[Tipp. $p_{n+1} - \sqrt{2} q_{n+1} = (\ldots)^2 \geq 0$. Warum kann nicht Gleichheit gelten?]

(d) Man zeige $p_{n+1}^2 - 2q_{n+1}^2 = (p_n^2 - 2q_n^2)^2$ und folgere hieraus durch vollständige Induktion, dass $|p_n^2 - 2q_n^2| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. *(3 Punkte)*

(e) Man folgere aus (c) und (d), dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{q_n^2}$$ *(3 Punkte)*

(Dies zeigt also, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die nach Aufgabe 13 bestmögliche Approximation an $\sqrt{2}$ durch rationale Zahlen realisiert.)

(f) Man lese an (e) ab, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. *(2 Punkte)*