Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis I
12. Übung

26. November 2010

Die Lösungen sind am Freitag, den 3. Dezember 2010 vor Beginn der großen Übung abzugeben.

54. Über Taylorpolynome und Taylorreihen.

(a) *Bestimme* die Taylorreihe von $f(x) := x^2 + 3x + 5$ im Punkt $x_0 = 0$, sowie im Punkt $x_1 = 2$. *(3 Punkte)*

(b) Es sei $f(x) := \sqrt{x}$.

(i) *Berechne* das Taylorpolynom 3. Ordnung $T_{3,4}$ von f im Punkt $x_0 = 4$. *(3 Punkte)*

(ii) *Zeige*, dass für $x \in (3,5)$ gilt: $|f(x) - T_{3,4}(x)| \leq \frac{5}{10368} \cdot \sqrt{3} < \frac{1}{1000}$. *(4 Punkte)*
[Tipp. Taylorformel (Satz 7.37).]

(c) Es sei $f(x) := \frac{1}{x^3-2x^2+x-2}$.

(i) Man *bestimme* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$f(x) = \frac{\alpha\, x + \beta}{1 + x^2} + \frac{\gamma}{x-2}\,.$$ *(3 Punkte)*

[Tipp. Man bringe den rechten Ausdruck „auf einen Nenner“, und mache dann im Zähler einen Koeffizientenvergleich bezüglich x.]

(ii) Mit Hilfe der Darstellung von f aus (i) und der geometrischen Reihe *bestimme* man die Taylorreihe von f an der Stelle $x_0 = 0$. *(4 Punkte)*

(iii) Man *bestimme* den Konvergenzradius der Taylorreihe aus (ii). *(3 Punkte)*

(d) Es sei $f(x) := \arctan(x)$.

(i) Man benutze die bekannte Tatsache $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (siehe Beispiel 7.8(ix)), um mithilfe der geometrischen Reihe die Taylorreihe von f' im Punkt $x_0 = 0$ *anzugeben.* *(3 Punkte)*

(ii) Man *folgere* aus (i), dass die Taylorreihe von f im Punkt $x_0 = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}$$

lautet. Man *berechne* den Konvergenzradius R dieser Reihe. Konvergiert sie auf $(-R, R)$ gegen f? *(4 Punkte)*

(iii) *Begründe sorgfältig*, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ gilt. *(3 Punkte)*
[Tipp. Abelscher Grenzwertsatz (Satz 7.45).]

[Ein Verweis auf Beispiel 7.47(v) zählt nicht.]

55. Ein Konvergenzkriterium für die Taylorreihe. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Wir setzen voraus, dass es Konstanten $C, r > 0$ gibt, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x \in I \ :\ |f^{(n)}(x)| \leq C \cdot r^n$$

gilt.

Zeige, dass dann die Taylorreihe $T(x)$ von f an der Stelle x_0 für jedes $x \in I$ konvergiert, und zwar gegen $f(x)$. *(5 Punkte)*

[Tipp. Ist $T_{n,x_0}(x)$ das Taylorpolynom von f der Ordnung n an der Stelle x_0, so zeige man mit Hilfe von Satz 7.37, dass $\lim_{n\to\infty} |f(x) - T_{n,x_0}(x)|$ eine Nullfolge ist.]

56. Riemann-Integration.

Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann betrachten wir die Partition $p_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ des Intervalls $[0,1]$. Man *berechne* die Untersumme $s(p_n, f)$ sowie die Obersumme $S(p_n, f)$ von f bezüglich der Partition p_n in „geschlossener Form", d.h. als eine ganzrationale Funktion in n. Dabei soll die Summenformel $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$ ohne Beweis benutzt werden (siehe Aufgabe 12(a)). *(6 Punkte)*

(b) *Zeige* durch Anwendung des Kriteriums von Darboux (Satz 8.7), dass f riemannintegrabel ist, und *berechne* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. *(4 Punkte)*

57. Funktionen mit verschwindendem Integral.

Es sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, nicht-negative Funktion, die außerdem riemannintegrierbar ist. (Wir werden bald sehen, dass die letzte Voraussetzung unnötig ist: Auf einem kompakten Intervall ist jede stetige Funktion riemannintegrierbar.)

Zeige: Wenn $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ ist, so ist schon $f = 0$. *(5 Punkte)*

[Tipp. Man nehme an, dass es ein $t_0 \in (a,b)$ mit $f(t_0) > 0$ gibt. Dann zeige man, dass mit einer geeigneten Partition p von $[a,b]$ die Untersumme $s(p,f) > 0$ ist, und leite hieraus einen Widerspruch zur Voraussetzung $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ her.]