Kapitel 5

Stetigkeit

5.1 Teilmengen von $\mathbb{K}$

In diesem Abschnitt betrachten wir Teilmengen X von $\mathbb{K}$, also von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Der Absolutbetrag $|x-y|$ der Differenz zweier Elemente $x, y \in X$ definiert einen Abstand. Wir hatten in den Sätzen 2.22 und 2.60 folgende Eigenschaften hergeleitet:

(i) Für alle $x, y \in X$ ist $|x-y| \geq 0$ und $|x-y| = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (Positivität).

(ii) Für alle $x, y \in X$ ist $|x-y| = |y-x|$ (Symmetrie).

(iii) Für alle $x, y, z \in X$ ist $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$ (Dreiecksungleichung).

Definition 5.1. *(offener Ball, Umgebung, offene Menge)*
Sei $X \subset \mathbb{K}$. Ein offener Ball in X mit Zentrum $x \in X$ und Radius $r > 0$ ist die Menge $B(x, r) = \{y \in X \mid |x-y| < r\}$. Eine Umgebung eines Punktes $x \in X$ ist eine Menge $O \subset X$, die für ein $\epsilon > 0$ den Ball $B(x, \epsilon)$ enthält. Eine offene Menge $O \subset X$ ist eine Teilmenge, die eine Umgebung aller ihrer Punkte ist, d.h. für alle $x \in O$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $B(x, \epsilon) \subset O$.

Beispiel 5.2. *In $\mathbb{R}$ besteht der Ball $B(x, r)$ aus dem Intervall $(x-r, x+r)$. In $\mathbb{C}$ besteht der Ball $B(x, r)$ aus allen Punkten, deren euklidischer Abstand zu x kleiner ist als r, also aus einer Kreisscheibe.*

Alle offenen Bälle $B(x, r)$ sind offenbar Umgebungen von x. Sei $y \in B(x, r)$. Dann ist $|x-y| < r$. Sei $z \in B(y, r - |x-y|)$. Dann gilt $|x-z| \leq |x-y| + |y-z| < r$, also auch $B(y, r-|x-y|) \subset B(x, r)$. Deshalb sind die offenen Bälle offene Mengen.

Offenbar ist eine beliebige Vereinigung von offenen Mengen offen. Seien O und O' zwei offene Mengen und $x \subset O \cap O'$. Dann gibt es $r > 0$ und $r' > 0$ so dass $B(x, r) \subset O$ und $B(x, r') \subset O'$. Also ist $B(x, \min\{r, r'\}) \subset B(x, r) \cap B(x, r') \subset O \cap O'$. Also ist $O \cap O'$ offen. Damit ist auch die Schnittmenge von endlich vielen offenen Mengen offen.

Definition 5.3. *(abgeschlossene Mengen, Abschluss)*
Für eine Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$ heißen die Komplemente von offenen Teilmengen von X abgeschlossen. Der Abschluss $\bar{A}$ einer Teilmenge $A \subset X$ ist die Schnittmenge aller abgeschlossenen Teilmengen von X, die A enthalten.

Wegen der Regel von de Morgan, sind beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Teilmengen von X abgeschlossen. Deshalb ist der Abschluss einer beliebigen Teilmenge von X abgeschlossen und der Abschluss einer abgeschlossenen Teilmenge gleich der Menge.

Offenbar gehört ein Punkt $x \in X$ genau dann zu dem Abschluss $\bar{A}$, wenn es keine offene Menge in X gibt, die x enthält aber mit A schnittfremd ist. Dies ist wiederum äquivalent dazu, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die offenen Bälle $B(x, \frac{1}{n})$ ein Element a_n aus A enthalten, oder auch dazu, dass es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A gibt, die gegen x konvergiert. Wir sagen, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert, wenn sie konvergiert, und der Grenzwert in X liegt. Damit haben wir gezeigt:

Lemma 5.4. *Der Abschluss $\bar{A}$ einer Teilmenge $A \subset X$ besteht aus den Grenzwerten von allen Folgen in A, die in X konvergieren. $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn die Grenzwerte von allen Folgen in A, die in X konvergieren, in A liegen.* **q.e.d.**

5.2 Vollständigkeit und Kompaktheit

Wenn eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert, dann auch in $\mathbb{K}$. Deshalb gilt

Satz 5.5. *In $X \subset \mathbb{K}$ ist jede konvergente Folge eine Cauchyfolge.* **q.e.d.**

Definition 5.6. *$X \subset \mathbb{K}$ heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.*

Wegen dem Vollständigkeitsaxiom sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ vollständig. Wegen Lemma 5.4 ist $A \subset \mathbb{K}$ genau dann vollständige, wenn A in $\mathbb{K}$ abgeschlossen ist.

Weil jede reelle Zahl der Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen ist, sind die reellen Zahlen der Abschluss der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Anstelle unserer axiomatischen Charakterisierung der reellen Zahlen können wir also die reellen Zahlen auch aus den rationalen Zahlen konstruieren als Äquivalenzklassen von rationalen Cauchyfolgen, wobei zwei Cauchyfolgen als äquivalent gelten, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist.

Definition 5.7. *(kompakt) Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$ heißt kompakt, wenn jede Folge in X eine in X konvergente Teilfolge besitzt.*

Definition 5.8. *Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$ heißt beschränkt, wenn für ein $x \in X$, die Menge der Abstände $\{|x - y| \mid y \in X\}$ beschränkt ist.*

Wegen der Dreiecksungleichung ist diese Bedingung äquivalent dazu, dass für alle $x \in \mathbb{K}$ die Menge der Abstände $\{|x - y| \mid y \in X\}$ beschränkt ist.

Satz 5.9. *(Heine-Borel) Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis: Wegen dem Auswahlprinzip von Bolzano Weierstraß besitzt jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einer beschränkten Menge $X \subset \mathbb{K}$ eine in $\mathbb{K}$ konvergente Teilfolge. Der Grenzwert einer Folge in einer kompakten Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$, die in $\mathbb{K}$ konvergiert, muss in X liegen. Wegen Lemma 5.4 ist also eine beschränkte Menge $X \subset \mathbb{K}$ genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist. Weil umgekehrt eine unbeschränkte Menge $X \subset \mathbb{K}$ nicht in endlich vielen Bällen $B(x_1, 4) \cup \ldots \cup B(x_n, 4)$ enthalten ist, gibt es für endliche viele paarweise disjunkte Bälle $B(x_1, 2), \ldots, B(x_n, 2)$ ein $x_{n+1} \in X$, so dass auch $B(x_1, 2), \ldots, B(x_{n+1}, 2)$ paarweise disjunkt sind. Für $x \in X$ folgt $B(x, 1) \subset B(x_n, 2)$ aus $x_n \in B(x, 1)$. Also hat eine solche Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X keinen Häufungspunkt. **q.e.d.**

Korollar 5.10. *Teilmengen $A \subset X$ einer kompakten Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$ sind genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen sind.*

Beweis: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einer Teilmenge $A \subset X$ einer kompaken Menge $X \subset \mathbb{K}$ konvergiert wegen Lemma 5.4 genau dann in X, wenn sie in $\mathbb{K}$ konvergiert. Wegen Lemma 5.4 ist A genau dann abgeschlossen in X, wenn sie es in $\mathbb{K}$ ist. **q.e.d.**

Korollar 5.11. *Die kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$ besitzen Minimum und Maximum.*

Beweis: Für jede beschränkte nicht leere Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\sup A - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von A und $\inf A + \frac{1}{n}$ keine untere Schranke. Deshalb gibt es ein $a_n \in (\sup A - \frac{1}{n}, \sup A] \cap A$ und ein $b_n \in [\inf A, \inf A - \frac{1}{n}) \cap A$. Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen $\sup A$ bzw. $\inf A$. Also liegen $\sup A$ und $\inf A$ im Abschluss von A. Kompakte Teilmengen besitzen Minimum und Maximum. **q.e.d.**

Beispiel 5.12. *Die Intervalle $[a, b]$ sind kompakt.*

5.3 Stetigkeit

Definition 5.13. *Seien X und Y jeweils eine Teilmenge entweder von $\mathbb{R}$ oder von $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ heißt stetig in $x \in X$, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle $y \in X$ gilt, die $|x - y| < \delta$ erfüllen. Die Abbildung f heißt stetig, wenn sie in allen Punkten von X stetig ist.*

Stetig im Punkt x heißt also, dass alle Punkte, die hinreichend nahe bei x liegen, auf Werte abgebildet werden, die beliebig nahe bei $f(x)$ liegen.

Satz 5.14. *Für eine Abbildung $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ zwischen zwei Teilmengen X und Y jeweils von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist folgendes äquivalent:* **(i)** *f ist stetig in x.*

(ii) *Das Urbild jeder Umgebung von $f(x)$ ist eine Umgebung von x.*

(iii) *Für gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$.*

Beweis: (i)⇔(ii): Die Umgebungen von x sind gerade die Mengen, die einen δ-Ball um x enthalten. Also ist (ii) äquivalent zu der Aussage, dass das Urbild jedes ϵ-Balles um $f(x)$ einen δ-Ball um x enthält. Das ist nur eine Umformulierung von (i).
(ii)⇔(iii): Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren genau dann gegen x bzw. $f(x)$, wenn jede Umgebung von x bzw. $f(x)$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthält. Wenn also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert und f (ii) erfüllt, dann konvergiert $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$. Also folgt (iii) aus (ii). Wenn es umgekehrt eine Umgebung von $f(x)$ gibt, deren Urbild keine Umgebung von x enthält, dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right)$, so dass $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ im Komplement der Umgebung von $f(x)$ liegt und damit auch im Komplement eines ϵ-Balles von $f(x)$: $f(x_n) \notin B(f(x), \epsilon)$. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x, aber $f(x_n)$ nicht gegen $f(x)$. **q.e.d.**

Korollar 5.15. *Für eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen zwei Teilmengen X und Y jeweils von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist folgendes äquivalent:* **(i)** *f ist stetig.*

(ii) *Für in X konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(\lim_{n\to\infty} x_n)$.*

(iii) *Das Urbild jeder offenen Teilmenge von Y ist offen in X.*

(iv) *Das Urbild jeder abgeschlossenen Teilmenge von Y ist abgeschlossen in X.*

Beweis: Wegen dem vorangehenden Satz sind (i) und (ii) äquivalent. Weil eine Menge genau dann offen ist, wenn sie eine Umgebung von allen ihren Punkten ist, zeigt der vorangehende Satz, dass aus (i) bzw. (ii) auch (iii) folgt. Weil jede Umgebung eines Punktes auch eine offene Umgebung des Punktes enthält, folgt wieder wegen dem vorangehenden Satz aus (iii) auch (i) bzw. (ii). Weil nun die abgeschlossenen Mengen gerade die Komplemente der offenen Mengen sind und das Urbild eines Komplementes gerade gleich dem Komplement des Urbildes ist, ist (iii) zu (iv) äquivalent. **q.e.d.**

Korollar 5.16. *Die Komposition zweier stetiger Abbildungen ist stetig. Die analoge punktweise Aussage gilt auch.*

Beweis: Benutze die Äquivalenz zwischen (i) und (ii) im vorangehenden Korollar und die Gleichung $(f \circ g)^{-1}[A] = g^{-1}[f^{-1}[A]]$. **q.e.d.**

Korollar 5.17. *Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei Teilmengen X und Y jeweils von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist kompakt.*

Beweis: Sei $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ eine stetige Abbildung zwischen zwei Teilmengen X und Y jeweils von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $A \subset X$ eine kompakte Menge. Für jede Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $f[A]$ gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit $f(x_n) = y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil A kompakt ist, besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Die entsprechende Teilfolge von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert wegen der Stetigkeit von f. Also besitzt jede Folge in $f[A]$ eine konvergente Teilfolge. **q.e.d.**

Korollar 5.18. *Sei f eine bijektive stetige Abbildung von einer kompakten Teilmenge X auf eine Teilmenge Y jeweils von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann ist die Umkehrabbildung stetig.*

Beweis: Wegen dem vorangehenden Korollar ist das Bild $f[X] = Y$ kompakt und wegen Korollar 5.10 das Bild $f[A]$ jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$ abgeschlossen. Wegen $(f^{-1})^{-1}[A] = f[A]$ folgt die Aussage aus Korollar 5.15 (iv). **q.e.d.**

Beispiel 5.19. (i) *Auf jedem metrischen Raum ist die identische Abbildung $\mathbb{1}_X$ stetig.*
(ii) *Die konstante Abbildung, die alle $x \in X$ auf einen Punkt y abbildet ist stetig.*
(iii) *Aus den Rechenregeln für Folgen folgt, dass für jede Teilmenge X von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und alle stetigen Abbildungen $f, g : X \to \mathbb{K}$ auch die Abbildungen*

$$f + g : X \to \mathbb{K}, \qquad x \mapsto f(x) + g(x) \qquad f \cdot g : X \to \mathbb{K}, \qquad x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

stetig sind. Das gilt auch für die Abbildungen

$$-f : X \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto -f(x) \text{ und } \quad \frac{1}{f} : X \setminus f^{-1}[\{0\}] \to \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \frac{1}{f(x)}.$$

Definition 5.20. *(Gleichmässige Stetigkeit, Lipschitzstetigkeit) Eine Abbildung $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ zwischen den beiden Teilmengen X und Y jeweils von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt gleichmäßig stetig auf einer Teilmenge $A \subset X$, wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle $x, y \in A$ mit $|x - y| < \delta$ gilt.*
Die Abbildung heißt lipschitzstetig auf A, wenn es eine Konstante $L > 0$(Lipschitzkonstante) gibt, so dass $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in A$ gilt.

Beispiel 5.21. *Wegen Satz 4.26 (iv) ist jede Potenzreihenfunktion $f : x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ mit Konvergenzradius R für alle $0 < r < R$ auf $\overline{B(0, r)}$ lipschitzstetig. Auf der Vereinigung $B(0, R) = \bigcup_{0<r<R} B(0, r)$ solcher offenen Bälle $B(0, r)$ ist f dann stetig.*

Offenbar ist jede lipschitzstetige Abbildung auch gleichmäßig stetig und jede gleichmäßig stetige Abbildung auch stetig. Es gilt auch folgende Umkehrung:

Satz 5.22. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ von einer kompakten Teilmenge X von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ auf eine Teilmenge $Y \subset \mathbb{K}$ ist genau dann stetig, wenn sie gleichmäßig stetig ist.*

Beweis: Sei $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ stetig und X kompakt. Wenn f nicht gleichmäßig stetig ist, dann gibt es ein $\epsilon > 0$ so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ zwei Punkte x_n und y_n in X existieren, mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. Die Folge $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Nullfolge. Weil X kompakt ist, besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mindestens eine in X konvergente Teilfoge, also mindestens einen Häufungspunkt in X. Dann konvergiert auch die entsprechende Teilfolge von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert. Wegen $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ konvergieren die beiden Folgen $(f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen den gleichen Grenzwert, und f ist an allen Häufungspunkten von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht stetig. Wenn f ungekehrt gleichmäßig stetig ist, dann ist f auch stetig. **q.e.d.**

Definition 5.23. *Eine Folge von Funktionen* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von* X *nach* $\mathbb{K}$ *heißt*

punktweise konvergent, *wenn die Folgen* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *für jedes* $x \in X$ *konvergieren. Die Grenzwerte definieren eine Funktion* $f : X \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

gleichmäßig konvergent, *wenn es eine Funktion* $f : X \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto f(x)$ *gibt, und für alle* $\epsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$*, so dass* $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ *für* $n \geq N$ *und* $x \in X$ *gilt.*

Gleichmäßig konvergente Folgen sind punktweise konvergent, aber nicht umgekehrt.

Beispiel 5.24. *Die Folge von Funktionen* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n$ *konvergiert wegen Satz 3.4 punktweise gegen die Funktion*

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1) \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1$. *Also konvergiert die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht gleichmäßig gegen* f.

Definition 5.25. *Sei* X *eine Teilmenge von* $\mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$. *Die Menge aller stetigen Funktionen von* X *nach* $\mathbb{K}$ *bezeichnen wir mit* $C(X,\mathbb{K})$. *Eine Funktion* $f : X \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto f(x)$ *heißt beschränkt, wenn das Bild* $f[X]$ *eine beschränkte Menge ist.* $B(X,\mathbb{K})$, *bezeichne die Menge aller beschränkten Funktionen auf* X. $C(X,\mathbb{K})$ *und* $B(X,\mathbb{K})$ *sind offenbar* $\mathbb{K}$*-Algebren. Auf* $B(X,\mathbb{K})$ *bezeichne* $\|\cdot\|_\infty$ *folgende Abbildung:*

$$\|\cdot\|_\infty : B(X,\mathbb{K}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Satz 5.26. *Alle stetigen reellen Funktionen auf einer kompakten Teilmenge* $X \subset \mathbb{K}$ *sind beschränkt. Das Bild einer reellen stetigen Funktion auf einer kompakten Teilmenge* $X \subset \mathbb{K}$ *besitzt ein Minimum und ein Maximum.*

Beweis: Wegen Satz 5.17 ist das Bild jeder kompakten Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$ unter einer stetigen Abbildung kompakt. Wegen Heine-Borel besitzt dann das Bild $f[X]$ einer stetigen reellen Funktion ein Maximum und ein Minimum. **q.e.d.**

Dieser Satz hat viele Anwendungen, z.B. den Fundamentalsatz der Algebra.

Satz 5.27. *Sei* X *eine Teilmenge von* $\mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$. *Dann ist der Grenzwert* f *einer gleichmäßig konvergenten Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $C(X,\mathbb{K})$ *auch stetig.*

Beweis: Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein N, so dass $|f(y) - f_n(y)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ für alle $n \geq N$ und alle $y \in X$ gilt. Dann gibt es für alle $x \in X$ ein $\delta > 0$, so dass $|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $y \in X$ mit $|x - y| < \delta$ gilt. Dann folgt für diese x und y

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| < \epsilon. \qquad \textbf{q.e.d.}$$