Analysis I

HS 2010

Martin U. Schmidt

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Mengen und Abbildungen

1.1 Mengen

Georg Cantor(1845-1918) hat den Begriff der Menge definiert als „eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen“. Diese Objekte werden Elemente der Menge genannt. Um ein Objekt a als Element der Menge A zu kennzeichnen, schreiben wir $a \in A$. Ist a dagegen kein Element der Menge A, so schreiben wir $a \notin A$.

Wir können Mengen dadurch beschreiben, dass wir alle ihre Elemente angeben, also z.B. ist

$$A = \{a\}$$

die Menge, die nur das Element a enthält und B

$$B = \{a, b, c\}$$

die Menge, die drei Elemente a, b und c enthält. Dabei kann auch ein Element einer Menge wieder eine Menge sein:

$$C = \{a, \{a\}\}.$$

$$M = \{x \in X \mid x \text{ hat die Eigenschaft } p\} \quad \text{oder nur} \quad M = \{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } p\}$$

bezeichnet die Menge aller Elemente x (von der Menge X), die die Eigenschaft p haben.[1]

A ist eine Teilmenge von B, wenn alle Elemente von A auch Elemente von B sind. In Symbolen $A \subset B$.

[1] Bei dieser Beschreibung muss man allerdings Vorsicht walten lassen, um die Russellsche Antinomie zu vermeiden. Läßt man nämlich die Menge aller Mengen zu, die sich nicht selbst als Element enthalten, so wird nicht entscheidbar, ob diese Menge sich selbst als Element enthält oder nicht. Als Ausweg wird in der axiomatischen Mengenlehre die Frage, ob eine Menge Element einer Menge ist, nicht in allen Fällen als sinnvoll zugelassen.

1.2 Operationen von Mengen

Die Vereinigung zweier Mengen A und B ist die Menge $A \cup B$ aller Elemente, die in mindestens einer der beiden Mengen A und B enthalten sind. Der Durchschnitt zweier Mengen A und B ist die Menge $A \cap B$ aller Elemente, die sowohl Element von A als auch Element von B sind. Die Differenzmenge $A \setminus B$ ist die Menge aller Elemente von A, die nicht Element von B sind. Das kartesische Produkt der Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) von Elementen von A und B.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M. Dabei ist die leere Menge $\emptyset$ stets ein Element der Potenzmenge.
z.B. $\mathcal{P}(\{a, \{a\}\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}\}$.

Wenn wir nur Teilmengen einer vorgegebenen Menge M betrachten, dann wird für eine solche Menge $A \in \mathcal{P}(M)$ die Menge $M \setminus A$ auch als das Komplement A^c bezeichnet. Diese Operationen erfüllen die folgenden Regeln:

$$\begin{array}{rcc}
\text{(Idempotenz)} & A \cup A = A & A \cap A = A \\
\text{(Kommutativität)} & A \cup B = B \cup A & A \cap B = B \cap A \\
\text{(Assoziativität)} & A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C & A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\
\text{(Distributivität)} & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
\text{(de Morgan)} & (A \cap B)^c = A^c \cup B^c & (A \cup B)^c = A^c \cap B^c
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
A \subset A \cup B & & A \cap B \subset A \\
A \cup \emptyset = A & & A \cap \emptyset = \emptyset \\
A \setminus A = \emptyset & & A \setminus \emptyset = A \\
(A^c)^c = A & & A \subset B \Longleftrightarrow B^c \subset A^c \\
(A \subset B \text{ und } B \subset A) & \Longleftrightarrow & A = B \\
A \cup B = B & \Longleftrightarrow & A \subset B \\
A \cap B = A & \Longleftrightarrow & A \subset B \\
(A \subset C \text{ und } B \subset C) & \Longleftrightarrow & (A \cup B) \subset C \\
(C \subset A \text{ und } C \subset B) & \Longleftrightarrow & C \subset (A \cap B)
\end{array}$$

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$$

$$(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C \qquad (A \times C) \cap (B \times C) = (A \cap B) \times C.$$

1.3 Relationen

Als Relationen auf einer Menge bezeichnet man Aussagen über mehrere Elemente der Menge, die entweder wahr oder falsch sind. Wir wollen hier nur Aussagen über zwei Elemente einer Menge A betrachten. Jede solche Relation beschreiben wir durch eine Teilmenge R aller geordneten Paare in $A \times A$, in der wir alle die Paare zusammenfassen, für die die Aussage der Relation wahr ist. Wir sagen dann, dass $(a, b) \in A \times A$ diese Relation erfüllt, wenn (a, b) zu der Teilmenge R gehört. Andernfalls erfüllt (a, b) die Relation nicht. Wir führen jetzt folgende Eigenschaften einer Relation ein:

Reflexivität:	für alle $a \in A$ erfüllt (a, a) die Relation.
Symmetrie:	falls (a, b) die Relation erfüllt, dann auch (b, a).
Transitivität:	falls (a, b) und (b, c) die Relation erfüllen, dann auch (a, c).

Definition 1.1. *Eine Äquivalenzrelation ist eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.*

Eine Äquivalenzrelation definiert dann sogenannte Äquivalenzklassen. Für jedes $a \in A$ ist die Äquivalenzklasse $[a]$ von a die Teilmengen aller Elemente $b \in A$, so dass (a,b) die Relation erfüllt. Die Transitivität impliziert, dass für jedes Element $b \in [a]$ die entsprechende Äquivalenzklasse $[b]$ eine Teilmenge von $[a]$ ist. Wenn zwei Äquivalenzklassen $[a]$ und $[b]$ beide ein Element $c \in A$ enthalten, dann sind wegen der Symmetrie sowohl a als auch b in $[c]$ enthalten. Also ist $[a] \subset [c] \subset [a]$ und $[b] \subset [c] \subset [b]$. Damit gilt $[a] = [c] = [b]$. Also sind zwei Äquivalenzklassen entweder disjunkt oder gleich. Wegen der Reflexivität ist jedes Element in einer Äquivalenzklasse enthalten. Also zerfällt A in eine disjunkte Vereinigung von Äquivalenzklassen, d.h. jedes Element von A gehört zu genau einer Äquivalenzklasse.

1.4 Abbildungen

Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element x von X genau ein Element $f(x)$ aus Y zuordnet:

$$f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$$

Die Menge X der Argumente wird Definitionsbereich genannt und die Menge Y, in denen die Abbilde liegen, Wertebereich. Das Bild ist die Teilmenge aller Elemente y des Wertebereichs Y, die Abbild eines Arguments in X sind:

$$\text{Bild } f[X] = \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ mit } f(x) = y\}. \quad \exists \text{ steht für “es gibt (mindestens) ein”}$$

Definition 1.2. *Eine Abbildung* $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ *heißt*

(i) *injektiv, wenn je zwei verschiedene Elemente* $x, x' \in X$ *auch auf verschiedene Elemente von* Y *abgebildet werden:*

$$\forall x, x' \in X \text{ folgt aus } x \neq x' \text{ auch } f(x) \neq f(x'). \quad \forall \text{ steht für "für alle"}$$

(ii) *surjektiv, wenn das Bild von* f *der ganze Wertebereich* Y *ist.*

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \text{ mit } f(x) = y.$$

(iii) *bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.*

Für jede Teilmenge $B \subset Y$ ist das Urbild von B unter f die Menge aller Elemente von X, die nach B abgebildet werden:

$$f^{-1}[B] = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Für eine bijektive Abbildung $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ besteht für jedes $y \in Y$ das Urbild $f^{-1}[\{y\}]$ nur aus genau einem Element. Also existiert auch die Umkehrabbildung

$$f^{-1} : Y \to X, \quad y \mapsto f^{-1}(y) \text{ mit } f^{-1}[\{y\}] = \{f^{-1}(y)\}.$$

Offenbar gilt dann $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in X$ und $f(f^{-1}(y)) = y$ für alle $y \in Y$.

1.5 Komposition von Abbildungen

Seien $f : X \to Y,\ x \mapsto f(x)$ und $g : Y \to Z,\ y \mapsto g(y)$ Abbildungen, dann definiert $g \circ f : X \to Z,\ x \mapsto g(f(x))$ die sogenannte Komposition (Verkettung) von f und g.

Satz 1.3. *Die Komposition von Abbildungen ist assoziativ, d.h. für Abbildungen* $f : X \to Y,\ x \mapsto f(x), \quad g : Y \to Z,\ y \mapsto g(y)$ *und* $h : Z \to V,\ z \mapsto h(z)$ *gilt*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Sei $f : X \to Y,\ x \mapsto f(x)$ *eine Abbildung und seien* $\mathbb{1}_X : X \to X,\ x \mapsto x$ *und* $\mathbb{1}_Y : Y \to Y,\ y \mapsto y$ *die identischen Abbildungen von den Mengen* X *und* Y. *Dann gilt*

$$f \circ \mathbb{1}_X = f = \mathbb{1}_Y \circ f = f$$

Ist die Abbildung f *bijektiv, dann gilt auch* $\qquad f \circ f^{-1} = \mathbb{1}_Y$ *und* $f^{-1} \circ f = \mathbb{1}_X$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
(h \circ (g \circ f))(x) &= h(g(f(x))) = (h \circ g) \circ f)(x) && \forall x \in X \\
f \circ \mathbb{1}_X(x) &= f(x) = (\mathbb{1}_Y \circ f)(x) && \forall x \in X \\
f \circ f^{-1}(y) &= f(f^{-1}(y)) = y = \mathbb{1}_Y(y) && \forall y \in Y \\
f^{-1} \circ f(x) &= f^{-1}(f(x)) = x = \mathbb{1}_X(x) && \forall x \in X.
\end{aligned}$$

q.e.d.

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.1 Axiome der reellen Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ wird durch folgende Axiome charakterisiert:

A1. Axiome der Addition
A2. Axiome der Multiplikation
A3. Distributivgesetz
A4. Ordnungsaxiome
A5. Vollständigkeit

A1. Axiome der Addition 2.1. *Es gibt eine Operation*
$+ : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y$ *mit*

(i) *Kommutativgesetz:* $x + y = y + x$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) *Assoziativgesetz:* $x + (y + z) = (x + y) + z$ *für alle* $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(iii) *Existenz der Null: es gibt eine Zahl* $0 \in \mathbb{R}$ *mit* $x + 0 = x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$

(iv) *Existenz des Negativen: zu jedem* $x \in \mathbb{R}$ *gibt es ein* $-x \in \mathbb{R}$ *mit* $x + (-x) = 0$.

A2. Axiome der Multiplikation 2.2. *Es gibt eine Operation*
$\cdot : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y$ *mit*

(i) *Kommutativgesetz:* $x \cdot y = y \cdot x$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) *Assoziativgesetz:* $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *für alle* $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(iii) *Existenz der Eins: es gibt eine Zahl* $1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0$ *mit* $x \cdot 1 = x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$

(iv) *Existenz des Inversen: zu jedem* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *gibt es ein* $x^{-1} \in \mathbb{R}$ *mit* $x \cdot x^{-1} = 1$.

A3. Distributivgesetz 2.3.

$$x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ für alle } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Definition 2.4. *Allgemein heißt eine Menge $\mathbb{K}$, die die Axiome* **A1-A3** *erfüllt Körper. Für Körper gelten daher auch alle Folgerungen aus* **A1-A3**. *Es gibt viele Körper.*

Beispiel 2.5. *Der kleinste Körper besteht aus zwei Elementen $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Die Operationen $+$ und $\cdot$ sind dann definiert durch:*

$$\begin{array}{llll} 0+0=0 & 0+1=1 & 0\cdot 0=0 & 0\cdot 1=0 \\ 1+0=1 & 1+1=0 & 1\cdot 0=0 & 1\cdot 1=1 \end{array}$$

Zeige dass diese Definitionen von $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Z}_2$ die Axiome **A1-A3** erfüllen und umgekehrt durch **A1-A3** eindeutig bestimmt sind. In $\mathbb{R}$ soll aber $1 + 1 = 2 \neq 0$ gelten, so dass wir noch weitere Axiome benötigen um den Körper der reellen Zahlen zu charakterisieren.

Wir benützen folgende Abkürzungen:

$$\begin{array}{llll} x-y = x+(-y) & xy = x\cdot y & -xy = -(x\cdot y) & \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \dfrac{1}{x} = x^{-1} & \dfrac{y}{x} = y \cdot x^{-1} & & \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, y \in \mathbb{R} \\ x+y+z = x+(y+z) & xyz = x\cdot(y\cdot z) & xy+z = (x\cdot y)+z & \forall x, y, z \in \mathbb{R} \end{array}$$

Satz 2.6. *(Folgerungen aus* **A1***)*

(i) *Falls $x + y = x + z$, dann $y = z$*

(ii) *Falls $x + y = x$, dann $y = 0$*

(iii) *Falls $x + y = 0$, dann $y = -x$*

(iv) $-(-x) = x$

Bemerkung 2.7. *(i) heißt Kürzungsregel.*
(ii) zeigt, dass die Null eindeutig durch die Eigenschaft $x + 0 = x$ bestimmt ist.
(iii) zeigt, dass das Negative $(-x)$ eindeutig durch $x + (-x) = 0$ bestimmt ist.

Beweis: **(i)** Sei $x + y = x + z$, dann folgern wir

$$\begin{array}{llll} y = y+0 & = 0+y & = (x-x)+y & \\ \quad = (-x+x)+y) & = -x+(x+y) & = -x+(x+z) & = (-x+x)+z \\ \quad = (x-x)+z & = 0+z & = z+0 & = z. \end{array}$$

(ii) Sei $x + y = x$, dann gilt $x + y = x + 0$. Also folgt aus (i) $y = 0$.
(iii) Sei $x + y = 0$, dann gilt $x + y = x + (-x)$. Also folgt aus (i) $y = -x$.
(iv) $-x + x = x + (-x) = 0$. Also folgt aus (iii) $x = -(-x)$. **q.e.d.**

Satz 2.8. *(Folgerungen aus* **A2***)*

(i) *Falls* $x \neq 0$ *und* $xy = xz$*, dann* $y = z$

(ii) *Falls* $x \neq 0$ *und* $xy = x$*, dann* $y = 1$

(iii) *Falls* $x \neq 0$ *und* $x \cdot y = 1$*, dann* $y = x^{-1}$

(iv) *Falls* $x \neq 0$ *und* $x^{-1} \neq 0$*, dann* $(x^{-1})^{-1} = x$

Bemerkung 2.9. *Die Folgerungen sind analog zu denen aus* **A1**. *Wieder heißt (i) Kürzungsregel, (ii) impliziert wieder die Eindeutigkeit der Eins und (iii) die Eindeutigkeit des Inversen.*

Beweis: (i) Sei $x \neq 0$ und $xy = xz$, dann folgern wir

$$y = 1y = \left(x\frac{1}{x}\right)y = \left(\frac{1}{x}x\right)y = \frac{1}{x}(xy) = \frac{1}{x}(xz) = \left(\frac{1}{x}x\right)z = \left(x\frac{1}{x}\right)z = 1z = z.$$

(ii) Sei $x \neq 0$ und $xy = x$, dann gilt $xy = x \cdot 1$ Also folgt aus (i) $y = 1$.
(iii) Sei $x \neq 0$ und $xy = 1$, dann gilt $xy = x \cdot x^{-1}$. Also folgt aus (i) $y = x^{-1}$.
(iv) Sei $x \neq 0$. Dann ist $x^{-1}x = xx^{-1} = 1$. Also folgt (iv) aus (iii). **q.e.d.**

Satz 2.10. *(Folgerungen aus* **A1**-**A3***)*

(i) $x \cdot 0 = 0$ *für alle* x*. Insbesondere gilt* $x^{-1} \neq 0$ *für alle* $x \neq 0$*.*

(ii) $x \cdot y = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ *oder* $y = 0$

(iii) $(-x)y = -xy = x(-y)$.

(iv) $(-1) \cdot x = -x$

(v) $(-x)(-y) = xy$

(vi) $x \neq 0, y \neq 0$ *dann* $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Bemerkung 2.11. *Die Null hat kein multiplikatives Inverses, sonst wäre wegen (i)* $0 = 0 \cdot 0^{-1} = 1$*. Daraus und aus (i) würde* $x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$ *für alle* x *folgen.*

Beweis: (i) $x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0$. Aus (ii) von Satz 2.6 folgt dann $x \cdot 0 = 0$
(ii) Sei $x \cdot y = 0$ und $x \neq 0$. Dann gilt wegen (i)

$$y = y \cdot 1 = 1 \cdot y = \left(\frac{1}{x} \cdot x\right) \cdot y = \frac{1}{x} \cdot (x \cdot y) = \frac{1}{x} \cdot 0 = 0.$$

Wegen der Kommutativität folgt aus (i) auch die Umkehrung $0 \cdot y = x \cdot 0 = 0$.

(iii) $0 = 0 \cdot y = (x + (-x))y = xy + (-x)y$. Aus (iii) im Satz 2.6 folgt dann

$$(-x)y = -xy = -yx = (-y)x = x(-y).$$

(iv) Setze in (iii) $y = 1$.
(v) Wegen (iii) gilt $(-x)(-y) = -(x \cdot (-y)) = -(-xy) = xy$.
(vi) $1 = xy(xy)^{-1} = (xy)^{-1}xy = ((xy)^{-1}x)y = y((xy)^{-1}x)$.
$\Longrightarrow y^{-1} = (xy)^{-1}x. \Longrightarrow y^{-1}x^{-1} = ((xy)^{-1}x)x^{-1} = (xy)^{-1}(xx^{-1}) = (xy)^{-1}$. **q.e.d.**

A4. Ordnungsaxiome 2.12. *Es gibt eine Relation $<$ in $\mathbb{R}$ mit drei Eigenschaften:*

(i) *Totalität der Ordnung: Für je zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei folgenden Relationen $x < y$ oder $x = y$ oder $y < x$.*

(ii) *Transitivität: $x < y$ und $y < z \Longrightarrow x < z$*

(iii) *Monotonie:* $x < y \Longrightarrow \begin{cases} x + c < y + c & \text{für alle } c \in \mathbb{R} \\ x \cdot c < y \cdot c & \text{für alle } 0 < c \in \mathbb{R} \end{cases}$

Bemerkung 2.13. *Ein Körper, der das Axiom* **A4** *erfüllt, heißt angeordneter Körper. Die rationalen Zahlen sind ein angeordneter Körper, und jeder angeordnete Körper enthält die rationalen Zahlen als Unterkörper.*

Wir benutzten folgende Abkürzungen:

$$x > y \Longleftrightarrow y < x \qquad\qquad x \leq y \Longleftrightarrow (x < y \text{ oder } x = y) \Longleftrightarrow y \geq x.$$

Satz 2.14. *(Folgerungen aus* **A4***)*

(i) $0 < x \Longrightarrow -x < 0$ *und* $x < 0 \Longrightarrow -x > 0$

(ii) $x < y \Longleftrightarrow 0 < y - x$

(iii) $x < y$ *und* $a < 0 \Longrightarrow ay < ax$

(iv) $x \neq 0 \Longrightarrow x \cdot x = x^2 > 0$

(v) $x > 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} > 0$

(vi) $0 < x < y \Longrightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

Bemerkung 2.15. *Da $1 \cdot 1 = 1$ folgt aus (iv) $1 > 0$. Dann folgt aus (i) $-1 < 0$. Also gilt $-1 < x^2$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Also gibt es keine reelle Zahl x mit $x^2 = -1$.*

Beweis: **(i)** Sei $0 < x$. Dann folgt mit Monotonie $0 + (-x) < x + (-x)$, also $-x < 0$. Sei $x < 0$. Dann folgt mit Monotonie $x + (-x) < -x$ also auch $0 < -x$.
(ii) Sei $x < y$. Dann folgt mit Monotonie $x - x < y - x$, also auch $0 < y - x$.
Sei umgekehrt $0 < y - x$. Dann folgt mit Monotonie $x < y$.
(iii) Sei $x < y$ und $a < 0$. Dann folgt aus (i) $-a > 0$. Also gilt wegen Monotonie $-ax < -ay \iff 0 < ax - ay \iff ay < ax$.
(iv) Sei $x > 0$. Dann folgt wegen Monotonie $x^2 > 0 \cdot x = 0$.
Sei $x < 0$. Dann folgt aus (i) $-x > 0$ und mit Monotonie $x^2 = (-x)\cdot(-x) > 0\cdot(-x) = 0$.
(v) Sei $x > 0$. Dann ist $x \neq 0$ und $\frac{1}{x} \neq 0$. Aus (iv) folgt $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} > 0$. Mit Monotonie folgt dann $\frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} > 0$.
(vi) Sei $0 < x < y$. Dann ist $x > 0$ und $y > 0$ also wegen (v) auch $\frac{1}{x} > 0$ und $\frac{1}{y} > 0$. Dann folgt mit Monotonie $\frac{1}{y} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} \cdot x < \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} \cdot y = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot y = \frac{1}{x}$. **q.e.d.**

Satz 2.16. *(Arithmetisches Mittel) Seien $x, y \in \mathbb{R}$, dann gilt*

$$x < y \Longrightarrow x < \frac{x+y}{2} < y$$

Also liegt zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen immer eine weitere.

Beweis: Aus $x < y$ folgt mit Monotonie $x + x < x + y < y + y$. Weil aber $x + x = x(1 + 1) = 2x$ und $2 = 1 + 1 > 0$ folgt dann $2x < x + y < 2y$ und $x < \frac{x+y}{2} < y$ **q.e.d.**

Übungsaufgabe 2.17. *Es gelten auch folgende Regeln:*

(i) $a < b$ *und* $c < d \Longrightarrow a + c < b + d$

(ii) $0 < a < b$ *und* $0 < c < d \Longrightarrow ac < bd$

(iii) $ab > 0 \iff$ *entweder* $a > 0, b > 0$ *oder* $a < 0, b < 0$

(iv) $ab < 0 \iff$ *entweder* $a > 0, b < 0$ *oder* $a < 0, b > 0$

Definition 2.18. *(Betrag)*
Der Betrag einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist die nicht negative Zahl

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \iff x \geq -x \\ -x & \text{falls } x < 0 \iff x < -x \end{cases} = \max\{x, -x\}.$$

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{falls } y \leq x \\ y & \text{falls } y > x \end{cases} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Aus der Definition folgt

$$\begin{array}{ccc} |x| \geq 0 & \text{und} & |x| = 0 \iff x = 0. \\ -|x| \leq x \leq |x| & \iff & x \leq |x| \text{ und } -x \leq |x| \\ |-x| = |x| & \text{denn} & |-x| = \max\{-x, x\}. \end{array}$$

Satz 2.19. *(Eigenschaften des Betrags) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) $|x| \geq 0$ *und* $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Beweis: **(i)** haben wir schon gesehen.
(ii) Wegen Satz 2.10 (iii) und (v) ändern sich beide Seiten nicht wenn wir x durch $-x$ bzw. y duch $-y$ ersetzen. Für $x \geq 0$ und $y \geq 0$ ist die Aussage klar.
(iii) Zwei Fälle: $x + y > 0 \Longrightarrow |x + y| = x + y \leq |x| + y \leq |x| + |y|$ wegen Monotonie. $x + y < 0 \Longrightarrow |x + y| = -x - y \leq |x| - y \leq |x| + |y|$ wegen Monotonie. **q.e.d.**

Korollar 2.20. $$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Beweis: $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Longrightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$.
Vertausche x und $y \Longrightarrow |y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$. Also gilt $||x| - |y|| \leq |x - y|$.**q.e.d.**

Definition 2.21. *(Abstand)*
Der Abstand $d(x, y)$ zweier Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ ist die nicht negative Zahl $d(x, y) = |x - y|$.

Satz 2.22. *(Eigenschaften des Abstands)*
Der Abstand $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto d(x, y)$ hat folgende Eigenschaften:

(i) $d(x, y) \geq 0$ *und* $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.*

Beweis: folgt aus den Folgerungen der Definition und Satz 2.19.
(iii) $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$. **q.e.d.**

Definition 2.23. *Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nicht leere Teilmenge von Zahlen.*

(i) *M heißt nach oben beschränkt, falls es eine Zahl $\beta \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x \leq \beta$ für alle $x \in M$ gilt. β heißt dann obere Schranke von M.*

(ii) *M heißt nach unten beschränkt, falls es eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\alpha \leq x$ für alle $x \in M$ gilt. α heißt dann untere Schranke von M. .*

(iii) *M heißt beschränkt, wenn M nach oben und unten beschränkt ist.*

Definition 2.24. *(Maximum und Minimum) Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nicht leere nach oben beschränkte Menge. Ein Element $m \in M$ von M, das eine obere Schranke von M ist heißt Maximum. Wir schreiben dann $m = \max M$. Analog heißt ein Element m einer nicht leeren nach unten beschränkten Menge M, das eine untere Schranke von M ist Minimum. Wir schreiben dann $m = \min M$.*

Definition 2.25. *(Supremum und Infimum einer Menge) Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nicht leere nach oben beschränkte Menge. Ein Minimum $s \in \mathbb{R}$ der Menge aller oberen Schranken von M heißt Supremum. Analog heißt ein Maximum t der Menge aller unteren Schranken einer nach unten beschränkten Memge M Infimum. Wir schreiben $t = \inf M$.*

Bemerkung 2.26. *Wenn eine Menge ein Maximum bzw. Minimum besitzt, ist dieses eindeutig, weil es weder größer noch kleiner als ein anderes Maximum bzw. Minimum sein kann. Also sind auch Supremum und Infimum eindeutig, wenn sie existieren.*

Folgende Charakterisierung erleichtert manche Beweise:

$$s = \sup M \iff s \text{ ist obere Schranke von } M \text{ und } \quad \forall \epsilon > 0 \;\; \exists x \in M \text{ mit } s - \epsilon < x.$$
$$t = \inf M \iff t \text{ ist untere Schranke von } M \text{ und } \quad \forall \epsilon > 0 \;\; \exists x \in M \text{ mit } x < t + \epsilon.$$

Warnung 2.27. *Das Supremum $\sup M$ bzw. das Infimum $\inf M$ muss im Unterschied zum Maximum bzw. Minimum kein Element von M sein.*

Wir führen jetzt die Intervalle ein, das sind folgende Teilmengen der reellen Zahlen:

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\} && \text{für alle } a \le b \in \mathbb{R}\\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\} && \text{für alle } a < b \in \mathbb{R}\\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\} && \text{für alle } a < b \in \mathbb{R}\\
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \text{für alle } a < b \in \mathbb{R}\\
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\} && \text{für alle } b \in \mathbb{R}\\
(-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} && \text{für alle } b \in \mathbb{R}\\
[a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\} && \text{für alle } a \in \mathbb{R}\\
(a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} && \text{für alle } a \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ positive Zahlen $\qquad \mathbb{R}^- = (-\infty,0)$ negative Zahlen

$\mathbb{R}^+_0 = [0,\infty)$ nichtnegative Zahlen $\qquad \mathbb{R}^-_0 = (-\infty,0]$ nichtpositive Zahlen

Offenbar ist b eine obere Schranke von (a,b). Andererseits gibt es wegen Satz 2.16 für jedes $x < b$ ein $y = \max\{\frac{x+b}{2}, \frac{a+b}{2}\}$ mit $x < y$ und $y \in (a,b)$. Also gibt es keine obere Schranke von (a,b), die kleiner ist als b. Damit ist $b = \sup(a,b)$. Analog gilt:

$$\begin{aligned}
a &= \inf[a,b] = \inf[a,b) = \inf(a,b] = \inf(a,b) = \inf[a,\infty) = \inf(a,\infty)\\
b &= \sup[a,b] = \sup[a,b) = \sup(a,b] = \sup(a,b) = \sup(-\infty,b] = \sup(-\infty,b)
\end{aligned}$$

$$(-\infty,b] \text{ und } (-\infty,b) \text{ sind nicht nach unten beschränkt}$$
$$[a,\infty) \text{ und } (a,\infty) \text{ sind nicht nach oben beschränkt}$$

$$\begin{array}{rr} \text{Also existiert} & \max[a,b] = \max(a,b] = \max(-\infty,b] = b \\ & \min[a,b] = \min[a,b) = \min[a,\infty) = a, \\ \text{während} & [a,b) \text{ und } (a,b) \text{ und } (-\infty,b) \text{ kein Maximum besitzen} \\ \text{und} & (a,b] \text{ und } (a,b) \text{ und } (a,\infty) \text{ kein Minimum.} \end{array}$$

A5. Vollständigkeitsaxiom 2.28. *Für jede nicht leere nach oben beschränkte Menge M exisitiert das Supremum $s = \sup M \in \mathbb{R}$.*

Wir werden sehen, dass die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ **A1-A4** erfüllen aber nicht **A5**.

Satz 2.29. *(Folgerungen aus* **A5***)*

(i) *Jede nicht leere nach unten beschränkte Menge M besitzt ein Infimum* $\inf M \in \mathbb{R}$.

(ii) *Eine nicht leere nach oben beschränkte Menge M besitzt genau dann ein Maximum, wenn* $\sup M \in M$*. In diesem Fall ist* $\max M = \sup M$*.*

(iii) *Eine nicht leere nach unten beschränkte Menge M besitzt genau dann ein Minimum, wenn* $\inf M \in M$*. In diesem Fall ist* $\min M = \inf M$*.*

Beweis: (i) Weil die Ordnungsrelation nicht symmetrisch ist, erhalten wir dadurch, dass wir in einer Aussage alle auftauchenden Ordnungsrelationen umkehren, eine andere Aussage. Zum Beispiel erhalten wir die Definition der unteren Schranke, indem wir in der Definition der oberen Schranke alle Ordnungsrelationen umdrehen. Dann erhalten wir aber auch die Definition des Infimums, indem wir in der Definition des Supremums alle Ordnungsrelationen umkehren. Weil $x < y \iff -y < -x$, sind also Aussagen über Ordnungsrelationen zwischen reellen Zahlen äquivalent zu den analogen Aussagen, in denen wir alle Ordnungsrelationen umdrehen und alle reellen Zahlen durch ihre Negativen ersetzen[1]. Insbesondere besitzt die Menge M genau dann ein Infimum, wenn die Menge $-M = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in M\}$ ein Supremum besitzt und es gilt $\inf M = -\sup -M$. Also folgt (i) aus dem Vollständigkeitsaxiom **A5**.
(ii) Wenn $\sup M \in M$, dann ist $\sup M$ eine obere Schranke von M, die Element von M ist. Wenn $\sup M \notin M$, dann gilt für alle $x \in M$ sogar $x < \sup M$. Dann gilt

$$x < \sup M \leq s \text{ für alle } x \in M \text{ und alle oberen Schranken } s \text{ von } M.$$

Also gibt es in M keine obere Schranke von M.
(iii) analog zu (ii). **q.e.d.**

Wenn wir die reellen Zahlen durch $-\infty$ und ∞ erweitern, können wir auch für unbeschränkte Mengen obere und untere Schranken und Suprema und Infima definieren.

[1] Wenn diese Aussagen aber algebraische Operationen benutzen, die nicht verträglich sind mit der Abbildung jeder rellen Zahl auf ihre Negative, wie z. B. das Produkt zweier reeller Zahlen, dann müssen bei dieser Ersetzung auch die algebraischen Operationen entsprechend geändert werden, also z. B. das Produkt in das negative des Produktes.

2.2 Die erweiterte Zahlengerade $\bar{\mathbb{R}}$

Definition 2.30. *Die erweiterte Zahlengerade besteht aus* $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Mit ∞ bezeichnen wir auch $+\infty$. Die Ordnungsrelation läßt sich auf $\bar{\mathbb{R}}$ durch $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$ fortsetzen und erfüllt offensichtlich auch (i) und (ii) des Ordnungsaxioms. Die Operationen $+$ und $\cdot$ lassen sich nicht auf $\bar{\mathbb{R}}$ fortsetzen, so dass **A1**-**A4** gilt: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ würde aus $y-x < \infty$ wegen der Monotonie $y < \infty+x$ folgen. Deshalb müsste $\infty + x = \infty$ gelten. Aus Satz 2.6 (ii) würde $x = 0$ folgen. $\bar{\mathbb{R}}$ ist also kein angeordneter Körper.

Die Definitionen von oberen und unteren Schranken, von Supremum und Infimum, und von Maximum und Infimum übertragen sich auf die erweiterte Zahlengerade. Offenbar ist ∞ das Maximum und $-\infty$ das Minimum von $\bar{\mathbb{R}}$. Insbesondere ist ∞ eine obere Schranke und $-\infty$ eine untere Schranke von jeder Teilmenge von $\bar{\mathbb{R}}$. Weil ∞ die einzige obere Schranke einer nicht leeren Teilmenge M von $\mathbb{R} \subset \bar{\mathbb{R}}$ ist, die in $\mathbb{R}$ keine obere Schranke hat, ist ∞ dann das Supremum von M als Teilmenge von $\bar{\mathbb{R}}$. Analog ist $-\infty$ das Infimum einer nicht leeren Teilmenge von $\mathbb{R} \subset \bar{\mathbb{R}}$, die keine untere Schranke in $\mathbb{R}$ hat. In $\bar{\mathbb{R}}$ gilt $\sup \emptyset = -\infty$ und $\inf \emptyset = \infty$. Daraus folgt, dass jede Teilmenge von $\bar{\mathbb{R}}$ ein Supremum und ein Infimum hat. Außerdem gilt wieder, dass eine Teilmenge $M \subset \bar{\mathbb{R}}$ genau dann ein Maximum bzw. Infimum hat, wenn $\sup M \in M$ bzw. $\inf M \in M$ gilt. In diesen Fällen ist wieder $\max M = \sup M$ bzw. $\min M = \inf M$. Wir benutzen die Symbole sup, inf, max und min sowohl für Teilmengen von $\mathbb{R}$ als auch für Teilmengen von $\bar{\mathbb{R}}$, so dass aus dem Zusammenhang klar werden muss, was genau gemeint ist.

2.3 Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

Wir wollen die natürlichen Zahlen als Teilmenge der reellen Zahlen charakterisieren. Aufgrund von **A2** gibt es das Element $1 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, das wegen (ii) in Satz 2.8 eindeutig ist. Aus (iv) im Satz 2.14 folgt $1 > 0$ aus $1 = 1 \cdot 1$. Wegen der Monotonie ist dann die Nachfolgerabbildung monoton:

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad n \mapsto n+1 > n$$
$$1 \mapsto 1+1 = 2 > 1, \qquad 2 \mapsto 2+1 = 3 > 2, \qquad \ldots \qquad n \mapsto n+1 > n, \qquad \ldots$$

Definition 2.31. *Eine Menge* $M \subset \mathbb{R}$ *heißt induktiv, falls*

(i) $1 \in M$ *(Einselement).*

(ii) $a \in M \Longrightarrow a+1 \in M$ *(invariant unter der Nachfolgerabbildung).*

$\mathbb{R}$ selber ist offenbar induktiv oder auch $[1, \infty)$. Offenbar ist der Durchschnitt von induktiven Mengen wieder induktiv.

Definition 2.32. *(Natürliche Zahlen)* $\mathbb{N}$ *ist die kleinste induktive Teilmenge von* $\mathbb{R}$*, also der Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von* $\mathbb{R}$.

Satz 2.33. *Es gilt* $\mathbb{N} = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{R} \mid n-1 \in \mathbb{N}\} = \{1\} \cup$ *Bild der Nachfolgerabbildung.*

Beweis: Wegen $(1+1)-1 = 1$, $(n+1)-1 = (n-1)+1$ und weil $\mathbb{N}$ eine induktive Menge ist, ist auch $S = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{R} \mid n-1 \in \mathbb{N}\}$ eine induktive Menge. Also folgt $S \supset \mathbb{N}$. Weil $\mathbb{N}$ eine induktive Menge ist, folgt $S \subset \mathbb{N}$ aus $n = (n-1)+1$. **q.e.d.**

Satz 2.34. *(Prinzip der vollständigen Induktion) Eine Teilmenge* $S \subset \mathbb{N}$ *erfülle*
(i) $1 \in S$ **(ii)** $a \in S \Longrightarrow a+1 \in S$. *Dann ist* $S = \mathbb{N}$.

Beweis: S ist offenbar eine induktive Menge. Also gilt $\mathbb{N} \subset S$. Andererseits ist S eine Teilmenge von $\mathbb{N}$. Also folgt $\mathbb{N} = S$. **q.e.d.**
Beweis durch vollständige Induktion: Um eine Aussage $A(n)$ über alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen genügt es also zu zeigen:

(i) die Aussage $A(1)$ ist richtig.

(ii) Falls die Aussage $A(n)$ richtig ist, dann auch $A(n+1)$.

Ein solcher Beweis heißt Beweis durch vollständige Induktion.

Satz 2.35. *(Bernoulli Ungleichung) Es gilt*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \textit{für alle } x \in (-1, \infty) \textit{ und alle } n \in \mathbb{N}.$$

Gleichheit gilt nur für $x = 0$ *oder* $n = 1$.

Beweis durch vollständige Induktion: Für $x = 0$ oder $n = 1$ gilt offenbar die Gleichheit. Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die Aussage

$$\text{Für alle } x \in (-1,0) \cup (0,\infty) \quad \text{gilt} \quad (1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x.$$

(i) Wenn $x \neq 0$ dann folgt $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$. Also gilt $A(1)$.
(ii) Es gelte $A(n)$. Dann folgern wir für $x \in (-1,0) \cup (0,\infty)$ aufgrund der Monotonie:

$$\text{Wegen } x > -1 \text{ gilt } 1 + x > 0, \quad \text{und wegen } x \neq 0 \text{ folgt daraus}$$

$$(1+x)(1+x)^{n+1} > (1+x)(1+(n+1)x) = 1 + (n+2)x + (n+1)x^2 > 1 + (n+2)x.$$

Also gilt $A(n+1)$. **q.e.d.**

Satz 2.36. *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gibt es keine Zahl in* $\mathbb{N}$ *zwischen* $n-1$ *und* n.

Beweis durch vollständige Induktion:
(i) $[1, \infty)$ ist eine induktive Menge. Also ist $\mathbb{N} \cap (0,1) = \mathbb{N} \cap [1,\infty) \cap (0,1) = \emptyset$.
(ii) Wir nehmen an, dass es für ein $n \in \mathbb{N}$ keine natürliche Zahl in $(n-1, n)$ gibt. Wenn es eine Zahl $m \in \mathbb{N} \cap (n, n+1)$ gibt, dann liegt m wegen Satz 2.33 auch in $\{1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \in \mathbb{N}\}$. Wegen $1 \leq n < m$ ist m nicht gleich 1. Also liegt m dann in $\{n \in \mathbb{R} \mid n - 1 \in \mathbb{N}\}$. Wegen der Monotonie liegt $m-1$ dann in $\mathbb{N} \cap (n-1, n)$, was der Annahme wiederspricht. Also gibt es keine natürliche Zahl in $\mathbb{N} \cap (n, n+1)$.**q.e.d.**

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist also $\{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n+1\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\} \cup \{m+1\}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir deshalb $\{1, \ldots, n\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$.

Satz 2.37. *(Wohlordnungsprinzip). Für jede nichtleere Menge $M \subset \mathbb{N}$ existiert* $\min M$.

Beweis: Wenn $n \in M \subset \mathbb{N}$, dann ist offenbar jedes Minimum von $M \cap \{1, \ldots, n\}$ auch ein Minimum von M und umgekehrt. Deshalb zeigen wir mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ jede nichtleere Teilmenge $M \subset \{1, \ldots, n\}$ ein Minimum besitzt.
(i) Jede nichtleere Teilmenge von $\{1\}$ ist gleich $\{1\}$ mit Minumum $\min\{1\} = 1$.
(ii) Für jede nichtleere Teilmenge $M \subset \{1, \ldots, n+1\}$ ist entweder $M \cap \{1, \ldots, n\}$ nichtleer oder $M = \{n+1\}$. Wenn also jede nichtleere Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$ eine Minimum hat, dann auch jede nichtleere Teilmenge von $\{1, \ldots, n+1\}$. **q.e.d.**

Satz 2.38. *(Archimedes-Eudoxos)*

(i) *Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine natürliche Zahl $n > x$ (Archimedes).*

(ii) *Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \epsilon$ (Eudoxos).*

Beweis: (i) Es reicht zu zeigen, dass $\mathbb{N}$ keine obere Schranke hat. Wenn $\mathbb{N}$ eine obere Schranke hat, dann existiert $\sup \mathbb{N}$, und $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $n > \sup \mathbb{N} - 1$, weil $\sup \mathbb{N} - 1$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist. Dann gilt $\mathbb{N} \ni n + 1 > \sup \mathbb{N}$, was ein Widerspruch ist.
(ii) Nach (i) gibt es ein $n > \frac{1}{\epsilon}$. Aus Satz 2.14 (v)-(vi) folgt $\frac{1}{n} < \epsilon$. **q.e.d.**

Bemerkung 2.39. *In einem angeordneten Körper sind die beiden Eigenschaften (i) und (ii) aus Satz 2.38 wegen Satz 2.14 (v)-(vi) äquivalent. Ein angeordneter Körper heißt archimedisch, wenn (i) gilt. Es gibt auch nicht archimedische angeordnete Körper.*

Definition 2.40. *(ganze Zahlen $\mathbb{Z}$, rationale Zahlen $\mathbb{Q}$)*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in \mathbb{N}\} \\ \mathbb{N}_0 &= \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \mathbb{Q} &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists m \in \mathbb{Z} \text{ und } \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } x = \frac{m}{n} \right\}. \end{aligned}$$

Wegen dem Satz von Archimedes-Eudoxos gibt es viele rationale Zahlen.

Satz 2.41. *Sei $a < b$. Dann existiert $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$.*

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a < \frac{m}{n} < b$ äquivalent zu $na < m < nb$. Wegen $b - a > 0$ gibt es nach Satz 2.38 (i) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{b-a}$. Dann gilt $na < nb$ und $nb - na > 1$.

Wir nehmen zunächst $a \geq 0$ an. Sei m die kleinste natürliche Zahl, die größer ist als na. Wegen Satz 2.33 sind die natürlichen Zahlen enthalten in $\{1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \in \mathbb{N}\}$. Also ist $m - 1$ entweder eine natürliche Zahl oder gleich Null. Dann folgt

$$m - 1 \leq na < m \quad \Longleftrightarrow \quad na < m \leq na + 1 < nb.$$

Als nächstes nehmen wir $b \leq 0$ an. Sei $-m$ die kleinste natürliche Zahl, die größer ist als $-nb$. Wieder ist $-m - 1$ entweder eine natürliche Zahl oder Null. Also folgt

$$-m - 1 \leq -nb < -m \quad \Longleftrightarrow \quad na < nb - 1 \leq m < nb.$$

Wenn $a < 0$ und $b > 0$ ist, wählen wir $m = 0$. **q.e.d.**

Wir haben sogar gezeigt, dass $\forall a < b$ mit $b - a > 1$ das Intervall (a, b) eine ganze Zahl enthält. Also enthält jedes Intervall mindestens eine und damit sogar unendlich viele rationale Zahlen. Insbesondere gibt es für jede reelle Zahl und jedes $\epsilon > 0$ eine rationale Zahl $r \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$, die dann $d(x, r) < \epsilon$ erfüllt. Wir sagen, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt. Die rationalen Zahlen erfüllen als Unterkörper der reellen Zahlen die Axiome **A1**-**A4**. Wir werden gleich sehen, dass sie nicht das Vollständigkeitsaxiom **A5** erfüllen.

2.4 Die Peano Axiome

Es gibt andere Möglichkeiten die reellen Zahlen einzuführen. Man kann zuerst die natürlichen Zahlen einführen und danach der Reihe nach die ganzen Zahlen, die rationalen Zahlen und die rellen Zahlen. Dabei kann man die natürlichen Zahlen im Rahmen der Mengenlehre einführen oder sie durch die Peano Axiome charakterisieren:

1. Peano Axiom: $1 \in \mathbb{N}$ (Einselement).

2. Peano Axiom: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists$ genau einen Nachfolger $n' \in \mathbb{N}$ (Nachfolgerabbildung).

3. Peano Axiom: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n' \neq 1$ (Eins $\notin$ Bild der Nachfolgerabbildung).

4. Peano Axiom: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ folgt $n = m$ aus $n' = m'$ (Injektivität der Nachfolgerabbildung).

5. Peano Axiom: Jede induktive Teilmenge $S \subset \mathbb{N}$, d.h. jede Teilmenge mit folgenden Eigenschaften umfaßt die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} \subset S$:

(i) $1 \in S$. **(ii)** Falls $n \in S$, dann ist auch $n' \in S$.

Man kann die natürlichen Zahlen durch diese Axiome charakterisieren und damit die reellen Zahlen einfüren. Dafür muss viel Schlussfolgerungsarbeit geleistet werden, bevor die rellen Zahlen eingeführt sind (vgl. E. Landau: Grundlagen der Analysis). Wir wollen in diesem Abschnitt skizzieren, wodurch sich diese zweite Einführung der reellen Zahlen, von der von uns gewählten unterscheidet, und sie in ihren Grundzügen vorstellen.
Die Addition von natürlichen Zahlen $n+m$ wird $\forall n, m \in \mathbb{N}$ so eingeführt, dass **(i)** $n+1 = n'$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und **(ii)** $n+m' = (n+m)'$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt.
Für $n = 1$ gilt $1+1 = 1'$ und für alle $m \in \mathbb{N}$ folgt aus $1+m = m'$ auch $1+m' = (m')' = (1+m)'$. Wegen dem 5. Peano Axiom ist also $1+m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ durch m' definiert. Wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ durch diese Bedingungen $n+m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ definiert ist, dann folgt aus (i) $n'+1 = (n')' = (n+1)'$. Wenn $n'+m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ definiert ist, dann folgt aus (ii) $n'+m' = (n'+m)'$ also ist dann wegen dem 5. Peano Axiom $n'+m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ definiert. Also ist wegen dem 5. Peano Axiom die Menge aller $n \in \mathbb{N}$, für die $n+m$ durch diese Bedingungen für alle $m \in \mathbb{N}$ definiert ist gleich $\mathbb{N}$. Deshalb ist dadurch die Addition zwischen allen natürlichen Zahlen definiert. Mit Hilfe der Peano Axiome kann man dann folgern, dass die Addition kommutativ und assoziativ ist.
Die Multiplikation von natürlichen Zahlen nm wird $\forall n, m \in \mathbb{N}$ so eingeführt, dass **(i)** $n1 = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und **(ii)** $nm' = n \cdot m + n$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt.
Wieder kann man aus den Peano Axiomen folgern, dass diese Bedingungen eine Multiplikation $n \cdot m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ definiert. Danach zeigt man, dass auch die Multiplikation kommutativ, assoziativ und zusammen mit der Addition distributiv ist.
Die Ordnungsrelation wird auf den natürlichen Zahlen durch $n < n+m$ und $m < n+m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$ eingeführt. Sie erfüllt **A4** wobei alle $n \in \mathbb{N}$ als positiv gelten.
Ganze Zahlen: Die ganzen Zahlen werden als formale Differenzen $n-m$ eingeführt. Wegen $n-m = \tilde{n}-\tilde{m} \Leftrightarrow n+\tilde{m} = \tilde{n}+m$ sind das Äquivalenzklassen in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$(n,m) \sim (\tilde{n},\tilde{m}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad n+\tilde{m} = \tilde{n}+m \qquad \forall (n,m),(\tilde{n},\tilde{m}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

Die Addition, Multiplikation und Ordnungsrelation von $\mathbb{N}$ wird auf $\mathbb{Z}$ fortgesetzt.
Rationale Zahlen: Die rationalen Zahlen werden als formale Brüche $\frac{m}{n}$ mit $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ eingeführt. Wegen $\frac{m}{n} = \frac{\tilde{m}}{\tilde{n}} \Leftrightarrow m\tilde{n} = \tilde{m}n$ sind das Äquivalenzklassen in $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

$$(m,n) \sim (\tilde{m},\tilde{n}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad m\tilde{n} = \tilde{m}n \qquad \forall (m,n),(\tilde{m},\tilde{n}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$$

Addition, Multiplikation, Ordnungsrelation wird auf $\mathbb{Q}$ definiert, so dass **A1**-**A4** gilt.
Reelle Zahlen werden als Dedekindsche Schnitte eingeführt, also Mengen $A \subset \mathbb{Q}$ mit

(i) $A \neq \emptyset, \mathbb{Q}$ **(ii)** $p \in A$ und $q < p \Rightarrow q \in A$. **(iii)** A hat kein Maximum.
Addition, Multiplikation, Ordnungsrelation wird auf $\mathbb{R}$ definiert, so dass **A1**-**A5** gilt.

2.5 Wurzeln und Intervallschachtelung

Satz 2.42. *(Quadratwurzeln) Für alle* $a > 0$ *gibt es genau ein* $b > 0$ *mit* $b^2 = a$.

Wir schreiben $b = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.
Beweis der Eindeutigkeit: Aus $0 < x < y$ folgt aufgrund der Monotonie $x^2 < xy < y^2$. Also gibt es höchstens ein $b > 0$ mit $b^2 = a$.
Beweis der Existenz: Die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}_0^+ \mid x^2 < a\}$ enthält 0. Aus $x > a+1$ folgt

$$x^2 > x(a+1) > (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 > 2a > a.$$

Also ist $a+1$ eine obere Schranke von M. Sei $b = \sup M$. Aus $0 \in M$ folgt $0 \leq b$.
Wenn $b^2 < a$, folgt $0 < a - b^2$. Für $h = \min\{1, \frac{a-b^2}{2b+2}\}$ gilt $0 < h \leq 1$ und $h(2b+1) < h(2b+2) \leq a - b^2$. Hieraus folgt

$$(b+h)^2 = b^2 + 2bh + h^2 \leq b^2 + 2bh + h = b^2 + h(2b+1) < b^2 + a - b^2 = a.$$

Also ist $b < b + h \in M$ im Widerspruch zu $b = \sup M$.
Wenn $a < b^2$, folgt $0 < b$, $-b^2 < a - b^2 < 0$ und $-\frac{1}{2} < \frac{a-b^2}{2b^2} < 0$. Also folgt aus der Bernoulli Ungleichung

$$\left(b\left(1 + \frac{a-b^2}{2b^2}\right)\right)^2 = b^2\left(1 + \frac{a-b^2}{2b^2}\right)^2 \geq b^2\left(1 + 2\frac{a-b^2}{2b^2}\right) = a.$$

Dann folgt aus $x > b(1 + \frac{a-b^2}{2b^2})$ wieder $x^2 > b^2(1 + \frac{a-b^2}{2b^2})^2 \geq a$ und damit auch $x \notin M$. Also ist $b(1 + \frac{a-b^2}{2b^2}) < b$ eine obere Schranke von M im Widerspruch zu $b = \sup M$.

Weil also weder $b^2 < a$ noch $a < b^2$ gilt, folgt $b^2 = a$. **q.e.d.**

Wir werden in Beispiel 3.9 für jedes $n \in \mathbb{N}$ zeigen, dass es für jedes $a > 0$ genau ein $b > 0$ gibt mit $b^n = a$. Wir schreiben dann $b = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. Insbesondere gibt es also genau ein $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, aber wie wir gleich sehen werden gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Also erfüllt $\mathbb{Q}$ tatsächlich nicht das Vollständigkeitsaxiom **A5**.

Lemma 2.43. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Beweis: Wir zeigen, dass es nicht zwei natürliche Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ geben kann mit $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Wenn es zwei solche Zahlen gibt, dann enthält die Teilmenge

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ mit } m^2 = 2n^2\}$$

der natürlichen Zahlen ein kleinstes Element n_0. Sei also $m_0^2 = 2n_0^2$. Wenn m_0 ungerade ist, also $m_0 = 2m_1 - 1$ mit $m_1 \in \mathbb{N}$, dann ist auch $m_0^2 = (2m_1-1)^2 = 2(2m_1^2 - 2m_1 + 1) - 1$ ungerade, im Widerspruch zu $m_0^2 = 2n_0^2$. Also ist m_0 gerade mit $m_0 = 2m_2$ und $m_2 \in \mathbb{N}$. Dann folgt $m_0^2 = 4m_2^2 = 2n_0^2$ oder auch $2m_2^2 = n_0^2$. Dann gehört m_2 zu M und es gilt $n_0 \leq m_2$. Das ergibt folgenden Widerspruch $m_2^2 < 2m_2^2 = n_0^2 \leq n_0 m_2 \leq m_2^2$. **q.e.d.**

Satz 2.44. *(Intervallschachtelungsprinzip) Seien $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$, abgeschlossene Intervalle $a_n < b_n$ für $n = 1, 2, \cdots$ mit folgenden Eigenschaften.*

(i) *$I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$*

(ii) *Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $b_n - a_n < \epsilon$.*

Dann enthält $\bigcap_{n\geq 1} I_n = \{x\}$ der Durchschnitt genau ein $x \in \mathbb{R}$.

Dieser Satz ist falsch für offene Intervalle. So ist z.B. $\bigcap_{n\geq 1}\left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$ nach dem Satz von Archimedes-Eudoxos.
Beweis: Wegen (i) gilt

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

Also besteht die Menge $A = \{a_1, a_2, \cdots\}$ aus unteren Schranken der Menge $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$ und umgekehrt die Menge B aus oberen Schranken der Menge A. Sei also $x = \sup A$ und $y = \inf B$. Dann sind x und y obere Schranken von A und untere Schranken von B. Also gilt $x \leq y$ und $x, y \in \bigcap_{n>1} I_n$. Es gilt sogar $\bigcap_{n>1} I_n = [x, y]$. Andererseits gibt es wegen (ii) für alle $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y - x \leq b_n - a_n < \epsilon$. Dann muss aber $0 \leq y - x \leq \inf\{\epsilon|\epsilon > 0\} = 0$ und deshalb $y = x$ gelten. **q.e.d.**

Satz 2.45. *In jedem angeordneten archimedischen Körper folgt aus dem Intervallschachtelungsprinzip im Satz 2.44 das Vollständigkeitsaxiom* **A5***.*

Beweis*: Sei M eine nicht leere nach oben beschränkte Menge, a_1 ein Element von M und $b_1 > a_1$ eine obere Schranke von M. Wir definieren induktiv eine Folgen $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ von Elementen von M und eine Folge $b_1 \geq b_2 \geq \ldots$ von oberen Schranken von M. Wenn $\frac{a_n+b_n}{2}$ keine obere Schranke von M ist, dann gibt es ein Element $a_{n+1} \in [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n] \cap M$ und wir setzen $b_{n+1} = b_n$. Wenn $\frac{a_n+b_n}{2}$ eine obere Schranke von M ist setzten wir $a_{n+1} = a_n$ und $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$. Offenbar gilt

$$0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq 2^{-1}(b_n - a_n) \leq 2^{-2}(b_{n-1} - a_{n-1}) \leq \ldots \leq 2^{-n}(b_1 - a_1).$$

Aus der Bernoulli Ungleichung folgt $2^n > n$ und wegen Satz 2.38 (ii) gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $2^{-n}(b_1 - a_1) < \frac{b_1 - a_1}{n} < \epsilon$. Wegen dem Intervallschachtelungsprinzip besteht die Schnittmenge der Intervalle $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ aus einer Zahl $s \in \mathbb{R}$.

Für jede Zahl $x > s$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{x-s}{b_1-a_1} > \frac{1}{n} > 2^{-n}$. Daraus folgt $b_{n+1} \leq a_{n+1} + 2^{-n}(b_1 - a_1) < s + (x - s) = x$. Weil b_{n+1} eine obere Schranke von M ist folgt $x \notin M$. Also ist s eine obere Schranke von M. Für jede Zahl $x < s$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{s-x}{b_1-a_1} > \frac{1}{n} > 2^{-n}$. Daraus folgt $a_{n+1} \geq b_{n+1} - 2^{-n}(b_1 - a_1) > s - (s - x) = x$. Wegen $a_{n+1} \in M$ ist x keine obere Schranke von M. Also ist $s = \sup M$. **q.e.d.**

Deshalb können die reellen Zahlen auch als angeordneter archimedischer Körper charakterisert werden, in dem das Intervallschachtelungsprinzip gilt.

2.6 Mächtigkeit von Mengen

Definition 2.46. *Zwei Mengen heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen ihnen gibt.*

Offensichtlich ist die Relation von Mengen gleichmächtig zu sein eine Äquivalenzrelation, d.h. sie ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Deshalb stellt sich die Frage, die Äquivalenzklassen dieser Relation zu bestimmen. Eine Menge ist genau dann endlich, wenn sie für ein $n \in \mathbb{N}$ gleichmächtig ist zu $\{1, \ldots, n\}$. Für $n \neq m$ sind die Mengen $\{1, \ldots, n\}$ und $\{1, \ldots, m\}$ nicht gleichmächtig. Deshalb entsprechen die Äquivalenzklassen der endlichen Mengen genau den natürlichen Zahlen. Indem wir die Eins mit der Menge $\{\emptyset\}$ indentifizieren und die Nachfolgerabbildung für Mengen durch $A \mapsto A \cup \{A\}$ definieren, erhalten wir die natürtlichen Zahlen als folgende Mengen:

$$\begin{array}{lcl}
1 & \leftrightarrow & \{\emptyset\} \\
2 & \leftrightarrow & \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
3 & \leftrightarrow & \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
4 & \leftrightarrow & \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} \\
\vdots & & \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots\}
\end{array}$$

Alle Äquivalenzklassen kann man als eine Erweiterung von $\mathbb{N}$ betrachten.

Definition 2.47. *Eine nicht leere Menge A heißt*

endlich, *falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass A gleichmächtig ist zu $\{1, 2, \cdots, n\}$.*

unendlich, *falls sie nicht endlich ist.*

abzählbar, *falls sie gleichmächtig ist zu $\mathbb{N}$.*

höchstens abzählbar, *wenn sie endlich oder abzählbar ist.*

Satz 2.48. (i) *Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist höchstens abzählbar.*

(ii) *Eine Menge A ist genau dann höchstens abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf A gibt.*

Beweis: (i) Jede Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ können wir aufgrund des Wohlordnungsprinzip der Größe nach mit dem kleinsten Element anfangend durchnumerieren. Wenn M nach oben unbeschränkt ist, erhalten wir so eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach M und M ist abzählbar. Andernfalls ist $M \subset \{1, \ldots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und damit endlich.
(ii) Sei A eine höchstens abzählbare Menge. Wenn A endlich ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass A gleichmächtig ist zu $\{1, 2, \cdots, n\}$. Die Abbildung $\mathbb{N} \to \{1, 2, \cdots, n\}, \quad m \mapsto$

$\min\{m,n\}$ ist eine surjektive Abbildung, so dass dann auch eine surjektive Abbildung auf A existiert. Wenn A abzählbar ist, gibt es eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf A.

Sei umgekehrt A eine Menge und f eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf A. Dann existiert eine Abbildung $g: A \to \mathbb{N}, \quad a \mapsto \min f^{-1}[\{a\}]$, die offenbar eine bijektive Abbildung von A auf eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ definiert. Also ist A gleichmächtig zu einer Teilmenge von $\mathbb{N}$ und damit wegen (i) höchstens abzählbar. **q.e.d.**

Übungsaufgabe 2.49. *Zeige, dass jede endliche Teilmenge der reellen Zahlen ein Maximum und ein Minimum besitzt.*

Satz 2.50. (i) *Die Menge* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *ist abzählbar.*

(ii) *Eine höchstens abzählbare Vereinigung von höchstens abzählbaren Mengen ist wieder höchstens abzählbar.*

Beweis: (i) Wir definieren eine injektive Abbildung f von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ durch die sogenannte Diagonalnummerierung:

$$f(x,y) = y + \frac{(x+y-2)(x+y-1)}{2} = y + \sum_{n=0}^{x+y-2} n.$$

Diese Abbildung ist injektiv. Gilt nämlich $x + y < x' + y'$ so folgt aus

$$f(x,y) - y \leq f(x',y') - y' - (x'+y'-2) \quad \text{und } y - y' < y \leq x + y - 1 \leq x' + y' - 2$$

$$f(x,y) \leq f(x',y') + y - y' - (x'+y'-2) < f(x',y').$$

Gilt aber $x + y = x' + y'$ so gilt auch $f(x,y) - f(x',y') = y - y'$.
Also definiert diese Abbildung eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf eine Teilmenge von $\mathbb{N}$. Dann folgt (i) aus (i) vom vorangehenden Satz.
(ii) Wegen (ii) im vorangehenden Satz genügt es eine surjektive Abbildung $n \mapsto A_n$ von $\mathbb{N}$ in die höchstens abzählbaren Mengen zu betrachten. Wegen (ii) im vorangehenden Satz gibt es dann für alle $n \in \mathbb{N}$ eine surjektive Abbildung $f_n : \mathbb{N} \to A_n$. Dann ist

$$F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad (n,m) \mapsto f_n(m)$$

eine surjektive Abbildung. Also folgt (ii) aus (i) und dem vorangehenden Satz. **q.e.d.**

Korollar 2.51. $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

Beweis: $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \quad (m,n) \mapsto \frac{m}{n}$ ist eine surjektive Abbildung. $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, also ist $\mathbb{Q}$ höchstens abzählbar. $\mathbb{Q}$ ist aber nicht endlich und damit abzählbar. **q.e.d.**

Satz 2.52. *Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar.*

Beweis: Wir nehmen an $\mathbb{R}$ ist abzählbar. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Durchnumerierung von $\mathbb{R}$. Wähle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $I_1 = [a, b]$. Wir definieren induktiv eine Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Intervallen. Für alle $n \in \mathbb{N}$ wählen wir in $I_n = [a_n, b_n]$ als I_{n+1} eins der beiden schnittfremden Teilintervalle $[a_n, a_n + \frac{b_n - a_n}{3}]$ und $[b_n - \frac{b_n - a_n}{3}, b_n]$, das x_n nicht enthält. Für alle $n \in \mathbb{N}$ liegt dann x_n nicht in I_{n+1}. Wegen dem Intervallschachtelungsprinzip ist aber $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ nicht leer. Also gibt es eine reelle Zahl, die nicht zu der Menge $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gehört. Das widerspricht der Annahme, dass $\mathbb{R}$ abzählbar ist. **q.e.d.**

Auch die Potenzmenge der natürlichen Zahlen ist nicht abzählbar. Wir können sie mit den Folgen identifizieren, die Werte in $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ annehmen, also der Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}_2$. Diese Folgen werden wir mithilfe der dyadischen Entwicklung mit der Teilmenge $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ identifizieren. Diese ist gleichmächtig zu $\mathbb{R}$.

2.7 Der Körper der komplexen Zahlen

Motivation: Wir hatten aus der Ordnungsrelation gefolgert, dass $x^2 > 0$ gilt, falls $x \neq 0$. Deshalb existieren in den reellen Zahlen keine Quadratwurzeln von negativen Zahlen. Erweitert man die reellen Zahlen durch eine Quadratwurzel $\imath$ von -1, so erhält man die komplexen Zahlen, in denen sich dann alle algebraischen Gleichungen lösen lassen.

Definition 2.53. *(Komplexe Zahlen) Die Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aller geordneten Paare (x, y) von reellen Zahlen zusammen mit den Operationen*

$$\begin{aligned} + : \quad & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad & ((x, y), (u, v)) \mapsto (x, y) + (u, v) = (x + u, y + v) \\ \cdot : \quad & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad & ((x, y), (u, v)) \mapsto (xu - yv, xv + yu) \end{aligned}$$

Mit dieser Definition erfüllt $\mathbb{C}$ die Körperaxiome **A1-A3**. Dabei ist

$$\text{Null :} \quad 0_{\mathbb{C}} = (0, 0) \qquad \text{Eins :} \quad 1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$$

$$\begin{aligned} \text{negatives Element :} \quad & -(x, y) = (-x, -y) \\ \text{inverses Element :} \quad & (x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \qquad \text{für}(x, y) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

Wir bezeichnen komplexe Zahlen meistens durch einen Buchstaben, üblicherweise z. Die Null und die Eins bezeichnen wir auch durch 0 und 1, so dass aus dem Zusammenhang klar werden muss, ob es sich um die Null bzw. Eins der reellen oder komplexen Zahlen handelt. Außerdem benutzen wir dieselben Abkürzungen wie bei den reellen Zahlen:

$$z + (-z) = z - z = 0 \qquad z^{-1} = \frac{1}{z} \qquad z \cdot \frac{1}{z} = 1 \qquad \text{usw.}$$

Da die komplexen Zahlen eine Erweiterung der reellen Zahlen sind, können wir die reellen Zahlen als Teilmenge der komplexen Zahlen auffassen. Dafür definieren wir eine injektive Abbildung

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto (x, 0)$$

Offenbar ist diese Abbildung verträglich mit den Operationen $+$ und $\cdot$ von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
(x,0) + (y,0) &= (x+y,0) & \qquad (x,0)\cdot(y,0) &= (xy,0)\\
(0,0) &= 0 & (1,0) &= 1\\
-(x,0) &= (-x,0) & (x,0)^{-1} &= (x^{-1},0)
\end{aligned}$$

Definition 2.54. *(imaginäre Einheit)* $\imath = (0, 1) \in \mathbb{C}$.

Dann gilt $\imath^2 = (-1, 0) = -1$. Wir können also auch schreiben $(x, y) = x + \imath y$. Dann ergeben sich die Operationen $+$ und $\cdot$

$$\begin{aligned}
x + \imath y + u + \imath v &= x + u + \imath(y, v)\\
(x + \imath y)(u + \imath v) &= xu + \imath(yu + xv) + \imath^2 yv = xu - yv + \imath(yu + xv)
\end{aligned}$$

Für die komplexe Zahl $z = x + \imath y$ heißt

$x = \Re(z)$ Realteil von z		$y = \Im(z)$ Imaginärteil von z
z heißt reell, falls	$\Im(z) = 0$	
z heißt imaginär, falls	$\Re(z) = 0$	

Definition 2.55. *(komplexe Konjugation) Die Abbildung* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z = x + \imath y \mapsto \bar{z} = x - \imath y$ *heißt komplexe Konjugation oder einfach nur Konjugation*

Die komplexen Zahlen erhalten wir aus den reellen Zahlen, indem wir reelle Vielfache einer Wurzel aus -1 hinzufügen. Weil aber $(-1) \cdot (-1) = 1$ ist das Negative einer Wurzel aus -1 wieder eine Wurzel aus -1. Welche dieser beiden Wurzeln aus -1 wir zur imaginären Einheit machen ist aber eine Konvention. Deshalb ist die Konjugation ein Endomorphismus der komplexen Zahlen, d.h. eine bijektive Abbildung, die mit den Operationen $+$ und $\cdot$ verträglich ist, die die reellen Zahlen invariant läßt.

Satz 2.56. (i) $(\bar{\bar{z}}) = z$

(ii) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

(iii) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(iv) $z + \bar{z} = 2\Re z$ *und* $z - \bar{z} = 2\imath\Im(z)$

(v) $z \cdot \bar{z}$ *ist reell und nicht negativ.*

Beweis: (i)-(iv) nachrechnen. **(v)** $(x + \imath y)(x - \imath y) = x^2 + y^2 \geq 0$. **q.e.d.**

Definition 2.57. *(Betrag) Der Betrag einer komplexen Zahl $z = x + \imath y$ ist definiert als die reelle nicht negative Wurzel aus $z \cdot \bar{z}$: $|\cdot|\mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.*

Satz 2.58. *(Eigenschaften des Betrags)*

(i) $|z| \geq 0$ *und* $|z| = 0 \iff z = 0$

(ii) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(iii) $|z + w| \leq |z| + |w|$ *(Dreiecksungleichung)*

(iv) $||z| - |w|| \leq |z - w|$

(v) $|\bar{z}| = |z|$

(vi) $|\Re(z)| \leq |z|$ *und* $|\Im(z)| \leq |z|$

Beweis: (i) Für $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ gilt $|x + \imath y| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ und andernfalls $|0| = 0$.
(ii) $|z \cdot w|^2 = zw\overline{(zw)} = z\bar{z}w\bar{w} = (|z||w|)^2$ Wegen der Eindeutigkeit der Wurzel folgt dann $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
(vi) Für $z = 0$ ist die Aussage offensichtlich. Sei also $z = x + \imath y \neq 0$. Dann gilt $x^2 \leq x^2 + y^2$. Aus $0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} < x$ folgt aber mit Monotonie $x^2 + y^2 \leq x\sqrt{x^2 + y^2} < x^2$. Also gilt $x \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ und damit auch $|\Re(z)| \leq |z|$. Durch vertauschen von x und y erhalten wir $|\Im(z)| \leq |z|$.

$$\textbf{(iii)} \quad \begin{aligned} |z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \quad &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} &&= z\bar{z} + 2\mathbb{R}(z\bar{w}) + w\bar{w} \\ \leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \quad &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 &&= (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Aus $|z| + |w| < |z + w|$ folgt mit Monotonie $(|z| + |w|)^2 < (|z| + |w|)|z + w| < |z + w|^2$. Also gilt $|z + w| \leq |z| + |w|$.
(iv) folgt aus (i)-(iii) genau wie im reellen Fall.
(v) $|\bar{z}|^2 = \bar{z}z = |z|^2$. Dann folgt wegen der Eindeutigkeit der Wurzel $|\bar{z}| = |z|$. **q.e.d.**

Definition 2.59. *(Abstand) Der Abstand zweier komplexer Zahlen ist die nicht negative Zahl $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad (z, w) \mapsto d(z, w) = |z - w|$*

Aus den Eigenschaften des Betrages folgt genau wie im Reellen.

Satz 2.60. *(Eigenschaften des Abstandes)*

(i) $d(z, w) \geq 0$ *und* $d(z, w) = 0 \iff z = w$

(ii) $d(z, w) = d(w, z)$

(iii) $d(z, w) \leq d(z, u) + d(u, w)$. *(Dreiecksungleichung).*

Wir veranschaulichen die komplexen Zahlen in der zweidimensionalen Ebene. Der Abstand ist der euklidische Abstand zwischen den entsprechenden Punkten der Ebene.

Kapitel 3

Zahlenfolgen

3.1 Konvergenz

Im Folgenden werden wir des öfteren Aussagen vorstellen, die sowohl für die reellen Zahlen als auch für die komplexen Zahlen gelten. Wir benutzen dann das Symbol $\mathbb{K}$ um entweder die reellen oder die komplexen Zahlen zusammen mit den entsprechenden Abbildungen und Operationen zu bezeichnen. Die Elemente von $\mathbb{K}$ wollen wir dann einfach Zahlen nennen. Eine Folge ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$, $n \mapsto a_n$. Wir bezeichnen sie mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir interessieren uns vorwiegend für die Grenzwerte solcher Zahlenfolgen.

Definition 3.1. *Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{K}$ gibt und für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq N$ gilt. Die Zahl a heißt dann Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

Wir schreiben dann $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $\lim a_n = a$ oder auch $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

Beispiel 3.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ *(Folgen, die gegen 0 konvergieren heißen Nullfolgen).*

Beweis: Nach dem Satz von Archimedes-Eudoxos gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \epsilon$. Dann gilt wegen Satz 2.14 (vi) für alle $n \geq N$ auch $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$. **q.e.d.**

Satz 3.3. (i) *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.*

(ii) *Eine komplexe Folge konvergiert genau dann, wenn die entsprechenden Folgen der Realteile und Imaginärteile konvergieren.*

(iii) *Für jede konvergente Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ beschränkt.*

Beweis: (i) Seien a und b zwei Grenzwerte einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$ und $|a_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq M$ gilt. Dann folgt

$$0 \leq |a - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \text{ für alle } n \geq \max\{N, M\}.$$

Dann gilt auch $0 \leq |a-b| \leq \inf(0,\infty) = 0$. Also ist $|a-b| = 0$ und damit auch $a = b$.
(ii) Die Realteile und Imaginärteile einer komplexen Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilden zwei reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n = x_n + iy_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $z = x + iy$ die Zerlegung einer komplexen Zahl in Realteil und Imaginärteil. Wegen Satz 2.58 (vi)

$$\max\{|x_n - x|, |y_n - y|\} \leq |z_n - z|$$

konvergieren die Real- bzw. Imaginärteile einer konvergenten komplexen Folge gegen den Realteil bzw. Imaginärteil des Grenzwertes. Konvergieren umgekehrt die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x bzw. y, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ zwei natürliche Zahlen $N, M \in \mathbb{N}$ so dass $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$ gilt, und $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq M$. Dann gilt für alle $n \geq \max\{N, M\}$

$$|x_n + iy_n - x + iy| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \epsilon.$$

Also konvergiert eine komplexe Folge mit ihren Realteilen und Imaginärteilen.
(iii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$ gilt und damit auch $|a_n| \leq |a_n - a + a| < 1 + |a|$. Daraus folgt $|a_n| \leq \max\{|a| + 1, |a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. **q.e.d.**

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt divergent, wenn sie nicht konvergiert, wenn es also kein $a \in \mathbb{K}$ gibt, so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Wenn es für eine reelle Folge für jedes $b \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq N$ gilt $a_n > b$ bzw. $a_n < b$ dann schreiben wir $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ Weil in beiden Fällen die Folgen nicht beschränkt sind, können sie wegen dem vorangehenden Satz nicht konvergieren. Es gilt offenbar $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} -n = -\infty$.

Satz 3.4. **(i)** *Sei* $|x| < 1$ *dann gilt* $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

(ii) *Sei* $|x| > 1$ *dann ist* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergent.*

(iii) *Sei* $x = 1$ *dann gilt* $\lim_{n\to\infty} x^n = 1$

(iv) *Sei* $x \in (1, \infty)$ *dann gilt* $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$.

(v) *Sei* $|x| = 1$ *und* $x \neq 1$ *dann ist* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergent.*

Beweis: **(i)** Für $x = 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$. Sei also $0 < |x| < 1$. Dann ist $1 < \frac{1}{|x|} = 1 + y$ mit $y = \frac{1-|x|}{|x|}$. Aus der Bernoulli Ungleichung folgt $\frac{1}{|x|^n} = (1+y)^n \geq 1 + ny > ny = n\frac{1-|x|}{|x|}$ und $|x|^n < \frac{1}{n}\frac{|x|}{1-|x|}$. Aus dem Satz von Archimedes-Eudoxos folgt dann, dass es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\frac{1}{N} < \epsilon \cdot \frac{1-|x|}{|x|}$. Daraus folgt für alle $n \geq N$

$$|x^n - 0| = |x|^n < \frac{1}{n}\frac{|x|}{1-|x|} \leq \frac{1}{N}\frac{|x|}{1-|x|} < \epsilon.$$

(iii) Wegen $1^n = 1$ ist $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$.
(iv) Sei $x > 1$. Dann ist $y = x-1 > 0$. Für jedes $b \in \mathbb{R}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{b}{x-1}$. Dann folgt für alle $n \geq N$ aufgrund der Bernoulli Ungleichung

$$x^n = (1+y)^n \geq 1 + ny > ny = n(x-1) \geq N(x-1) > b.$$

Also gilt $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$.
(ii) Für $|x| > 1$ gilt wegen (iv) $\lim_{n\to\infty} |x^n| = \infty$. Also ist $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt.
(v) Für alle $y \in \mathbb{K}$ und alle natürlichen Zahlen n gilt

$$|y - x^n| + |y - x^{n+1}| \geq |x^n - x^{n+1}| \geq |x-1| \cdot |x|^n.$$

Für $|x| = 1$ mit $x \neq 1$ gilt also $\max\{|y - x^n|, |y - x^{n+1}|\} \geq \dfrac{|x-1|}{2}$.
Also kann es für $x \neq 1$ keinen Grenzwert geben. **q.e.d.**

Satz 3.5. *(Rechenregeln) Für konvergente Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{K}$.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n)(\lim\limits_{n\to\infty} y_n)$

(iv) *Wenn $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$, dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$.*

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} x_n|$.

(vi) *Wenn zwei reelle konvergente Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $x_n \leq y_n$ erfüllen, dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.*

(vii) *Wenn zwei reelle konvergente Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $x_n \leq y_n$ erfüllen und den gleichen Grenzwert haben, dann gilt für jede reelle Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die $x_n \leq z_n \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.*

Beweis: Seien $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. **(i)** Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es natürliche Zahlen $N, M \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$ und $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq M$ gilt. Dann gilt $|x_n + y_n - (x+y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ für alle $n \geq \max\{N, M\}$. Also konvergiert $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x + y$.
(ii) Für $\lambda = 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Sei also $\lambda \neq 0$ und damit $0 < |\lambda|$. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{|\lambda|}$ für alle $n \geq N$ gilt. Daraus folgt:

$$|\lambda x_n - \lambda x| \leq |\lambda| \cdot |x_n - x| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

(iii) Weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, gibt es ein $\lambda > 0$ mit $|x_n| < \lambda$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gibt es für alle $\epsilon > 0$ zwei natürliche Zahlen $N, M \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2|y|+1}$ für $n \geq N$ gilt und $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2\lambda}$ für alle $n \geq M$. Dann gilt für alle $n \geq \max\{N, M\}$

$$|x_ny_n - xy| = |x_ny_n - x_ny + x_ny - xy| \leq |x_n| \cdot |y_n - y| + |x_n - x| \cdot |y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon|y|}{2|y|+1} \leq \epsilon.$$

(iv) Aufgrund der Voraussetzungen gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| < \frac{|x|}{2}$ für alle $n \geq N$ gilt. Aus $|x| = |x - x_n + x_n| \leq |x - x_n| + |x_n|$ folgt dann

$$|x_n| \geq |x| - |x - x_n| > \frac{|x|}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{|x_n|} < \frac{2}{|x|} \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $M \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| < \frac{\epsilon \cdot |x|^2}{2}$ für alle $n \geq M$ gilt. Dann gilt für alle $n \geq \max\{N, M\}$ auch

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{x - x_n}{x_nx}\right| = \frac{|x - x_n|}{|x_n| \cdot |x|} < \frac{\epsilon \cdot |x|^2}{2}\frac{2}{|x|}\frac{1}{|x|} = \epsilon$$

(v) folgt aus der Ungleichung $||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|$.
(vi) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es zwei natürliche Zahlen N und M, so dass $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$ gilt und $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq M$. Dann gilt für alle $n \geq \max\{N, M\}$

$$x - y \leq (x - x_n) + (y_n - y) + (x_n - y_n) < \epsilon$$

Also ist $x - y \leq \inf(0, \infty) = 0$. Daraus folgt $x \leq y$.
(vii) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es zwei natürliche Zahlen $N, M \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| < \epsilon$ für alle $n \geq N$ gilt und $|y_n - x| < \epsilon$ für alle $n \geq M$. Für alle $n \geq \max\{N, M\}$ gilt dann

$$-\epsilon < x_n - x \leq z_n - x \leq y_n - x < \epsilon$$

Daraus folgt $|z_n - x| < \epsilon$. **q.e.d.**

Offenbar gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)(1 - x) = (1 + x + \ldots + x^n) - (x + x^2 + \ldots + x^{n+1}) = 1 - x^{n+1}$$

Also gilt $$1 + x + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{für } x \neq 1 \text{ und } n \in \mathbb{N}_0.$$

Aus Satz 3.4 folgt, dass die Folge $y_n = 1 + x + \ldots + x^n$ für $|x| < 1$ gegen $\frac{1}{1-x}$ konvergiert.

Satz 3.6. $$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} x^m = \frac{1}{1 - x} \quad \textit{für } |x| < 1.$$ **q.e.d.**

3.2 Konvergenzprinzipien

Wir stellen 3 Methoden vor, um zu entscheiden, ob eine Folge konvergiert oder nicht.

Definition 3.7. *(Monotonie) Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt:*

monoton wachsend, *wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

streng monoton wachsend, *wenn $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

monoton fallend, *wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

streng monoton fallend, *wenn $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Satz 3.8. *(Monotonieprinzip)*

(i) *Eine monoton wachsende (fallende) beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \textit{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) *Für eine monoton wachsende (fallende) unbeschränkte reelle Folge gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \textit{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Beweis: **(i)** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende (fallende) beschränkte reelle Folge. Dann existiert $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ bzw. $\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Für alle $\epsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} - \epsilon < a_N \leq a_m \leq \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} &\qquad \text{für alle } m \geq N \quad \text{bzw.} \\ \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \leq a_m \leq a_N < \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} + \epsilon &\qquad \text{für alle } m \geq N. \end{aligned}$$

Daraus folgt $|a_m - \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}| < \epsilon$ bzw. $|a_m - \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}| < \epsilon$.
(ii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende (fallende) unbeschränkte reelle Folge. Für jedes $b \in \mathbb{R}$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $a_m \geq a_N > b$ bzw. $a_m \leq a_N < b$. für alle $m \geq N$.**q.e.d.**

Beispiel 3.9. *Existenz und Konstruktion der k–ten Wurzel. Für alle $a > 0$ und alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ definieren wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch*

$$a_0 = 1 + \frac{a-1}{k} \qquad a_{n+1} = a_n \left(1 + \frac{a - a_n^k}{k \cdot a_n^k}\right) \textit{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Für $a = 1$ ist dann $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $a \neq 1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 < a_n < a_0, \qquad a_n < a_{n-1} \textit{ und } \qquad a < a_n^k.$$

Beweis durch vollständige Induktion:
(i) Für $a > 0$ und $a \neq 1$ ist $-1 < -\frac{1}{k} < \frac{a-1}{k} \neq 0$. Wegen der Bernoulli Ungleichung gilt $a_0^k = \left(1 + \frac{a-1}{k}\right)^k > 1 + a - 1 = a$. Es folgt $-1 < -\frac{1}{k} < \frac{a-a_0^k}{ka_0^k} < 0$. Also gilt $0 < a_1 < a_0$ und mit der Bernoulli Ungleichung $a_1^k > a_0^k \left(1 + \dfrac{a - a_0^k}{ka_0^k}\right)^k > a_0^k \left(1 + k\dfrac{a - a_0^k}{ka_0^k}\right) = a$.
(ii) Wir nehmen an es gilt $0 < a_n < a_0$, $a_n < a_{n-1}$ und $a < a_n^k$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt $-1 < -\frac{1}{k} < \frac{a-a_n^k}{k \cdot a_n^k} < 0$. Daraus folgt $0 < a_{n+1} < a_n < a_0$ und wegen der Bernoulli Ungleichung: $a_{n+1}^k > a_n^k \left(1 + \dfrac{a - a_n^k}{ka_n^k}\right)^k > a_n^k \left(1 + k\dfrac{a - a_n^k}{ka_n^k}\right) = a$. **q.e.d.**

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und beschränkt. Wegen dem Monotonieprinzip konvergiert sie gegen $b > 0$. Wir formulieren die Rekursionsgleichung um zu

$$a_{n+1} \cdot ka_n^{k-1} = (k-1)a_n^k + a.$$

Bilden wir links und rechts den Grenzwert $n \to \infty$ so erhalten wir

$$kb^k = (k-1)b^k + a \text{ oder auch } b^k = a.$$

Also existiert eine positive Zahl b mit $b^k = a$. Diese Folge konvergiert sehr schnell. Außerdem sind für rationale a alle Folgenglieder rational.

Satz 3.10. **(i)** *Für jede positive Zahl $a > 0$ und jede rationale Zahl r gibt es genau eine positive Zahl a^r. Für r=0 setzen wir $a^0 = 1$.*

(ii) *Für jede positive rationale Zahl $r > 0$ und $0 < a < b$ gilt auch $0 < a^r < b^r$.*

(iii) *Für jede negative rationale Zahl $r < 0$ und $0 < a < b$ gilt auch $0 < b^r < a^r$.*

Beweis: **(i)** Für $r = \frac{p}{q}$ definieren wir $a^r = \sqrt[q]{a^p}$. Offenbar ist a^r eine positive Lösung der Gleichungen $(a^r)^{qn} = (a^p)^n = a^{pn}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass für $a, b \in \mathbb{R}^+$ und für $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a < b$ äquivalent ist zu $a^n < b^n$. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \ldots + ba^{n-2} + a^{n-1}).$$

Also folgt aus $0 < a < b$ auch $a^n < b^n$ und aus $0 < b \leq a$ auch $a^n \leq b^n$. Also ist für $a > 0$ und $b > 0$ die Ungleichung $a < b$ äquivalent zu der Ungleichung $a^n < b^n$. Also gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $r = \frac{p}{q} > 0$ genau eine positive Lösung a^r der Gleichung $(a^r)^{qn} = a^{pn}$. Für $r < 0$ ist $a^r = \frac{1}{a^{-r}}$ die entsprechende positive Zahl.
(ii) Sei $r = \frac{p}{q} > 0$. Dann ist für $a, b \in \mathbb{R}^+$ die Ungleichung $a < b$ äquivalent zu $a^p < b^p$ und das wiederum äquivalent zu $a^{\frac{p}{q}} < b^{\frac{p}{q}}$.
(iii) Sei $r = \frac{-p}{q} < 0$. Dann folgt (iii) aus (ii) wegen Satz 2.14 (vi). **q.e.d.**

Definition 3.11. *(Teilfolge) Eine Teilfolge einer Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist eine Folge* $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *von der Form* $b_m = a_{n_m}$*, wobei* $0 < n_1 < n_2 < \ldots$ *eine streng monoton wachsende Folge von natürlichen Zahlen ist.*

Z.B. hat die divergente Folge $a_n = (-1)^n$ zwei konvergente Teilfolgen $b_m = a_{2m} = 1$ und $c_m = a_{2m+1} = -1$.

Satz 3.12. *(monotone Teilfolgen) Jede reelle Folge enthält eine monotone Teilfolge.*

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und A die Menge $A = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \geq a_m \forall m > n\}$. Wenn A eine unendliche Menge ist, dann sei $n_1 < n_2 < \ldots$ eine Abzählung der Elemente von A. Die Teilfolge $(b_m)_{m\in\mathbb{N}} = (a_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ ist dann monoton fallend.

Wenn A eine endliche Menge ist besitzt sie ein Maximum N. Dann gibt es also zu jedem $n > N$ ein $m > n$, so dass $a_m > a_n$ ist. Also definieren wir induktiv eine Teilfolge $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$, so dass $b_1 = a_{N+1}$ und für alle $m \in \mathbb{N}$ $b_{m+1} > b_m$ gilt. Diese Folge ist streng monoton steigend. Also besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entweder eine monoton fallende oder eine streng monoton steigende Teilfolge. Umgekehrt gilt auch, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entweder eine monoton steigende oder eine streng monoton fallende Teilfolge besitzt. **q.e.d.**

Satz 3.13. *(Auswahlprinzip von Bolzano–Weierstraß) Jede beschränkte reelle Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis: Wegen dem vorangehenden Satz besitzt jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Teilfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wenn die ursprüngliche Folge beschränkt ist, ist auch die Teilfolge beschränkt. Diese konvergiert dann wegen dem Monotonieprinzip. **q.e.d.**

Korollar 3.14. *Jede beschränkte komplexe Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis: Wegen $\max\{|x|, |y|\} \leq |x + \imath y|$ sind die reellen Folgen der Realteile und Imaginärteile einer komplexen beschränkten Folge beschränkt. Wegen dem Auswahlprinzip von Bolzano–Weierstraß besitzt die Folge der Realteile eine konvergente Teilfolge, und dann auch die entsprechende Teilfolge der Imaginärteile. Wegen Satz 3.3 (ii) konvergiert die der zweiten Teilfolge entsprechende komplexe Teilfolge. **q.e.d.**

Definition 3.15. *(Cauchyfolge) Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt Cauchyfolge, wenn es für jedes* $\epsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass* $|a_n - a_m| < \epsilon$ *für alle* $n, m \geq N$ *gilt.*

Satz 3.16. *(Kriterium von Cauchy) Eine Zahlenfolge konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.*

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass alle $m \geq N$ die Ungleichung $|a_m - \lim_{n\to\infty} a_n| < \frac{\epsilon}{2}$ erfüllen. Also gilt auch

$$|a_m - a_l| \leq |a_m - \lim_{n\to\infty} a_n| + |\lim_{n\to\infty} a_n - a_l| < \epsilon \quad \text{für alle } m, l \geq N.$$

Sei umgekehrt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq N$ gilt $|a_m - a_N| < 1$, und damit auch $|a_m| \leq |a_N| + |a_m - a_N| < |a_N| + 1$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann aber $|a_n| \leq \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$ Deshalb ist die Folge a_n beschränkt und besitzt wegen dem Auswahlprinzip von Bolzano–Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $a = \lim_{n\to\infty} b_n$. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ zwei natürliche Zahlen $N, M \in \mathbb{N}$, so dass alle $n, m \geq N$ die Ungleichung $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$ erfüllen und alle $n \geq M$ die Ungleichung $|b_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$. Weil $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, folgt $|a_n - a| \leq |a_n - b_n| + |b_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq \max\{N, M\}$. **q.e.d.**

Satz 3.17. *Für einen angeordneten archimedischen Körper ist Folgendes äquivalent:*

Vollständigkeitsaxiom A5.

(i) aus dem Monotonieprinzip.

Auswahlprinzip von Bolzano–Weierstraß.

Jede Cauchyfolge konvergiert.

Intervallschachtelungsprinzip.

Beweis: Wegen der Beweise des Monotonieprinzips, des Auswahlprinzips von Bolzano–Weierstraß und des Kriteriums von Cauchy und wegen Satz 2.45 genügt es zu zeigen, dass aus dem Kriterium von Cauchy das Vollständigkeitsaxiom **A5** folgt.

Sei M eine nicht leere nach oben beschränkte Menge. Sei $a_1 \in M$ und $b_1 > a_1$ eine obere Schranke von M. Wir konstruieren wie im Beweis von Satz 2.45 eine Folge $a_1 \leq a_2 \ldots$ in M und eine Folge $b_1 \geq b_2 \geq \ldots$ von oberen Schranken von M mit

$$0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq 2^{-n}(b_1 - a_1).$$

Dann sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen und konvergieren gegen den gleichen Grenzwert s. Für alle $x \in M$ gilt $x \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus dem Beweis von Satz 3.5 (vi) folgt $x \leq \lim_{n\to\infty} b_n = s$. Also ist s eine obere Schranke von M. Für alle $x < s$ gibt es ein $a_n > x$. Deshalb ist s das Minimum der oberen Schranken von M. **q.e.d.**

Insbesondere sind die reelllen Zahlen auch als der angeordnete archimedische Körper charakterisiert, in dem jede Cauchyfolge konvergiert. Wir können die reellen Zahlen auch als Äquivalenzklasse von Cauchyfolgen von rationalen Zahlen auffassen, wobei zwei Cauchyfolgen äquivalent heißen, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist.

3.3 Häufungspunkte

Definition 3.18. *(Häufungspunkt) Die Grenzwerte von konvergenten Teilfolgen heißen Häufungspunkte. Bei reellen Folgen sind in $\bar{\mathbb{R}}$ zusätzlich $+\infty$ bzw. $-\infty$ Häufungspunkte, wenn es Teilfolgen mit diesen Grenzwerten gibt.*

Satz 3.19. *(Limes superior und Limes inferior) Ist die Menge der reellen Häufungspunkte einer reellen Folge nicht leer und nach oben (unten) in $\mathbb{R}$ beschränkt, so besitzt sie ein Maximum (Minimum) in $\mathbb{R}$.*

Beweis: Wir nehmen an, dass die Menge der Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist. Sei $a \in \mathbb{R}$ das Supremum der Häufungspunkte, und b_m für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein Häufungspunkt $b_m \in (a - \frac{1}{2m}, a]$. Dann gibt es eine Teilfolge $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|c_m - b_m| < \frac{1}{2m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $|c_m - a| \leq |c_m - b_m| + |b_m - a| < \frac{1}{m}$. Also ist a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit das Maximum der Häufungspunkte. Der Beweis für das Minimum ist analog. **q.e.d.**

Definition 3.20. *Für eine nach oben (unten) beschränkte reelle Folge heißt das Supremum (bzw. Infimum) der Häufungspunkte Limes superior bzw. inferior. Wir bezeichnen es mit* $\overline{\lim} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ *bzw.* $\underline{\lim} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

Satz 3.21. **(i)** *$\overline{a}$ ist genau dann der Limes superior einer nach oben beschränkten reellen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für alle $\epsilon > 0$ unendlich viele Elemente der Folge $a_n > \overline{a} - \epsilon$ erfüllen, aber höchstens endlich viele $a_n > \overline{a} + \epsilon$.*

(ii) *$\underline{a}$ ist genau dann der Limes inferior einer nach unten beschränkten reellen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für alle $\epsilon > 0$ unendlich viele Elemente $a_n < \underline{a} + \epsilon$ erfüllen, aber höchstens endliche viele $a_n < \underline{a} - \epsilon$.*

Beweis: Wir beweisen wieder nur (i), weil (ii) analog zu beweisen ist. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nach oben beschränkte Folge. Wegen dem Auswahlprinzip von Bolzano–Weierstraß ist jede untere Schranke einer Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine untere Schranke von mindestens einem Häufungspunkt. Also ist die Charakterisierung der Zahl $\overline{a}$ in (i) äquivalent dazu, dass alle Zahlen, die kleiner sind als $\overline{a}$ keine oberen Schranken der Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind, aber alle Zahlen, die größer sind als $\overline{a}$ obere Schranken der Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind. Dann ist $\overline{a}$ der maximale Häufungspunkt. **q.e.d.**

Korollar 3.22. *Eine reelle Folge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist und wenn $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n$ gilt, sie also nur einen Häufungspunkt hat.*

Weil $\overline{\lim} a_n$ und $\underline{\lim} a_n$ das Maximum und das Minimum der Häufungspunkte sind, ist $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n$ äquivalent zu der Bedingung, dass es nur einen Häufungspunkt gibt.
Beweis: Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = a$ gilt, dann folgt aus dem vorangehenden Satz, dass es für jedes $\epsilon > 0$ ein N gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt $\underline{\lim} a_n - \epsilon \leq a_n \leq \overline{\lim} a_n + \epsilon$. Also gilt $|a_n - a| \leq \epsilon$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a.
Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert jede Teilfolge gegen $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Also besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nur einen Häufungspunkt und es gilt $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = a$. **q.e.d.**

Korollar 3.23. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten (bzw. oben) beschränkte reelle Folgen, die für alle $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq b_n$ erfüllen. Dann gilt $\underline{\lim} a_n \leq \underline{\lim} b_n$ bzw. $\overline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} b_n$.*

Beweis: Sei $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen $\underline{\lim} b_n$ (bzw. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die gegen $\overline{\lim} a_n$) konvergiert. Dann gibt es eine Teilfolge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (bzw. $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$), die für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $c_n \leq d_n$ erfüllt. Diese Teilfolge ist beschränkt und besitzt eine konvergente Teilfolge. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (bzw. $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$) konvergiert. Dann ist aber $\lim_{n\to\infty} c_n$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} d_n$ ein Häfungspunkt von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Also gilt $\underline{\lim} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} c_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} d_n = \underline{\lim} b_n$

(bzw. $\overline{\lim} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} d_n \leq \overline{\lim} b_n$). **q.e.d.**

3.4 Beispiele

(i) Für alle $x \in \mathbb{C}$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

Beweis: Wegen dem Satz von Archimedes–Endoxes gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x| < N$. Dann gilt für alle $n \geq N$

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!} \cdot \frac{|x|^{n+1-N}}{N \cdots n} \leq \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!} \left(\frac{|x|}{N}\right)^{n-N} \cdot \frac{|x|}{n} < \frac{|x|^N}{(N-1)!} \cdot \frac{1}{n}$$

Weil aber $\frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist, konvergiert dann $\left|\frac{x^n}{n!}\right|$ auch gegen Null. **q.e.d.**

(ii) Für alle positiven rationalen Zahlen $r > 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0$.

Beweis: Nach dem Satz von Archimedes–Eudoxos, gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{r}}}$. Für alle $n \geq N$ folgt $\frac{1}{n^r} \leq \frac{1}{N^r} < \epsilon$. Also konvergiert $\frac{1}{n^r}$ nach Null. **q.e.d.**

(iii) Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$.

Beweis: Sei zunächst $x \geq 1$. Sei also $y_n = \sqrt[n]{x} - 1 \geq 0$. Wegen der Bernoulli Ungleichung gilt dann $x = (1 + y_n)^n \geq 1 + ny_n$. Daraus folgt $0 \leq y_n \leq \frac{x-1}{n}$. Dann konvergiert y_n aber gegen Null. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1 + \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

Sei jetzt $0 < x < 1$. Dann ist $\frac{1}{x} > 1$. Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{x}}} = 1$. **q.e.d.**

Binomische Formel 3.24. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Zahlen $x, y \in \mathbb{K}$ gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \textit{ wobei } \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \textit{ und } \binom{n}{0} = 1.$$

Beweis: durch vollständige Induktion:
(i) Offenbar ist $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$, und die binomische Formel ist für $n = 1$ richtig.
(ii) Wenn die binomische Formel für $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann folgt

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\left(k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{k!} + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\right)x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\left(\frac{(n+1)n\cdots(n-k+2)}{k!}\right)x^k y^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Also gilt sie auch für $n + 1$. **q.e.d.**

(iv) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Beweis: Sei $y_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Wegen der binomischen Formel gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = (1 + y_n)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y_n^k$$

Für alle $n \geq 2$ folgt $\quad n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}y_n^2 \iff y_n^2 \leq \frac{2}{n} \iff y_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$.
Wegen (ii) ist dann y_n eine Nullfolge. **q.e.d.**

(v) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Beweis: Wegen (i) gibt es für alle $x \in \mathbb{R}^+$ ein N, so dass für alle $n \geq N$ gilt $\frac{x^n}{n!} < 1$.
Dann gilt auch $\frac{x}{\sqrt[n]{n!}} < 1 \iff x < \sqrt[n]{n!}$. Also folgt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$. **q.e.d.**

Satz 3.25. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle positive Folge, dann gilt*

$$\underline{\lim}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \qquad \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Wenn die Folge $\sqrt[n]{a_n}$ also einen reellen Häufungspunkt hat, dann hat auch die Folge $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ einen reellen Häufungspunkt. Und wenn gilt $\overline{\lim}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < \infty$ dann auch $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} < \infty$.

Beweis: Wenn $\underline{\lim}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 0$ ist, ist die erste Aussage trivial. Wir nehmen also an, dass es ein $a > 0$ gibt und für alle $0 < \epsilon < a$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass alle $n \geq N$ auch $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq a - \epsilon$ erfüllen. Dann gilt für alle $n > N$

$$\frac{a_n}{a_N} = \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq (a-\epsilon)^{n-N} \Longrightarrow a_n \geq a_N \frac{(a-\epsilon)^n}{(a-\epsilon)^N} \Longrightarrow \sqrt[n]{a_n} \geq \sqrt[n]{\frac{a_N}{(a-\epsilon)^N}} \cdot (a-\epsilon).$$

Wegen (iii) gilt dann $\underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \geq (a-\epsilon)$. Weil dies für alle $\epsilon > 0$ gilt, folgt auch $\underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \geq a$. Also ist $\underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \geq a$ nicht kleiner als der kleinste Häufungspunkt von $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Und wenn diese Folge $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ keinen reellen Häufungspunkt hat, dann hat auch die Folge $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ keinen reellen Häufungspunkt.

Für die Folge $(a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ gilt entsprechend $\underline{\lim}\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n^{-1}} = \underline{\lim}\left(\sqrt[n]{a_n}\right)^{-1}$. Wegen Satz 2.14 (vi) und Satz 3.5 (iv) ist für eine positive Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\underline{\lim} b_n^{-1} = \left(\overline{\lim} b_n\right)^{-1}$ (mit $\frac{1}{\infty} = 0$ und $\frac{1}{0} = \infty$). Also folgt die zweite Ungleichung aus Satz 2.14 (vi). **q.e.d.**

(vi) $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend und beschränkt. Für $n > 3$ gilt

$$\frac{5}{2} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = 2 + 1 - \frac{1}{n}.$$

Also konvergiert diese Folge. Der Grenzwert heißt Eulersche Zahl $e \in (\frac{5}{2}, 3)$.

(vii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$

Beweis: Wegen der binomischen Formel gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq e.$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{1}{k!}.$$

Also gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ $$\underline{\lim}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{m}\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}.$$

Wegen $\sup\{\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} \mid m \in \mathbb{N}\} = e$ folgt $e \leq \underline{\lim}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \overline{\lim}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$. **q.e.d.**

(viii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die positive Folge $\frac{n^n}{n!}$. Dann gilt $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Wegen (vii) folgt $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = e$ Dann folgt aus Satz 3.25

$$e = \underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \leq \overline{\lim}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \leq \overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} = e.$$

Daraus folgt $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$ **q.e.d.**

Kapitel 4

Reihen

4.1 Konvergenzkriterien

Definition 4.1. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Dann heißt die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$ die zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörende Reihe. Diese Folge bezeichnen wir mit $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Wenn die Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann bezeichnen wir den Grenzwert mit $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Analog definieren wir $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=m}^{n} a_j$.

Beispiel 4.2. (i) *Geometrische Reihe $(\sum q^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Für $q \neq 1$ hatten wir berechnet: $\sum\limits_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Dann folgt aus dem letzten Abschnitt*

$$\begin{aligned}
&\text{Für } |q| < 1 \text{ ist } \left(\sum q^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ konvergent:} && \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.\\
&\text{Für } |q| \geq 1 \text{ ist } \left(\sum q^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ divergent.} && \\
&\text{Für reelles } q \geq 1 \text{ ist } \left(\sum q^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ divergent:} && \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty.
\end{aligned}$$

(ii) *Die ζ-Funktion ist definiert als $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ der Grenzwert (wenn er existiert) der Reihe $\left(\sum \frac{1}{n^s}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Zunächst ist diese Reihe nur für alle rationalen Zahlen $s \in \mathbb{Q}$ definiert. Für $s = 1$ ist $\left(\sum \frac{1}{n^s}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.*

Beweis: Diese Reihe ist monoton wachsend. Also ist nur die Frage, ob sie beschränkt ist oder nicht. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt aber $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{n+n} \geq \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$. Also sind für alle $n \in \mathbb{N}_0$ jeweils die Summen $\displaystyle\sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{j} = 1 + \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{j} \geq 1 + \frac{n}{2}$. **q.e.d.**

(iii) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist die Reihe $\left(\sum \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)} = \frac{1}{k\cdot k!}$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)} &= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{k} \frac{n+k-n}{n(n+1)\cdots(n+k)} \\
&= \frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n\cdots(n+k-1)} - \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n\cdots(n+k-1)}\right) \\
&= \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(m+1)\cdots(m+k)}\right)
\end{aligned}$$

Die Folge $\dfrac{1}{(m+1)\cdots(m+k)} \leq \dfrac{1}{m^k}$ konvergiert aber gegen Null. **q.e.d.**

Wir wenden das Cauchykriterium und das Monotonieprinzip auf Reihen an.

Satz 4.3. *(Cauchykriterium für Reihen) Die Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein N gibt, so dass $\left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| < \epsilon$ für alle $m \geq n > N$ gilt. Insbesondere ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, wenn die Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.* **q.e.d.**

Satz 4.4. *(Monotonieprinzip für Reihen) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nicht negativen Zahlen. Dann konvergiert die Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn sie beschränkt ist. Für den Grenzwert gilt dann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{\sum_{n=1}^{m} a_n \mid m \in \mathbb{N}\}$.* **q.e.d.**

Definition 4.5. *(absolut konvergent) Die Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $(\sum |a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.*

Satz 4.6. *Jede absolut konvergente Reihe konvergiert. Und es gilt* $\displaystyle\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Beweis: Aus der Dreiecksungleichung folgt $\left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| \leq \sum_{j=n}^{m} |a_j|$ für alle $m \geq n$. Also ist die Reihe einer absolut konvergenten Reihe eine Cauchyfolge und konvergiert. Insbesondere gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $|\sum_{n=1}^{m} a_n| \leq \sum_{n=1}^{m} |a_n|$. Dann erfüllen auch die Grenzwerte $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. **q.e.d.**

Aus dem Monotonie-Prinzip und Satz 3.5 folgt das

Satz 4.7. *(Majoranten Kriterium) Die Folgen von nicht negativen Zahlen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *erfüllen* $b_n \leq a_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(i) *Wenn außerdem* $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert, dann konvergiert auch* $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(ii) *Wenn außerdem* $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergiert, dann gilt* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **q.e.d.**

Beispiel 4.8. *Für alle* $n, k \in \mathbb{N}$ *ist* $\frac{1}{(n+k)^{k+1}} \leq \frac{1}{n\cdots(n+k)}$. *Also folgt aus der Konvergenz von* $(\sum \frac{1}{n\cdots(n+k)})$ *auch die Konvergenz von* $(\sum \frac{1}{n^{k+1}})_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz 4.9. *(Wurzeltest) Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge und sei* $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$.

(i) *Falls* $\alpha < 1$, *dann konvergiert* $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *absolut.*

(ii) *Falls* $\alpha > 1$, *dann divergieren* $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(\sum |a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

Im Fall $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ kann die Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowohl konvergent als auch divergent sein. So ist z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}$. Aber die Reihe $\left(\sum \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, während die Reihe $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.
Beweis: **(i)** Sei $\alpha < 1$. Dann gibt es für jedes $\alpha < \beta < 1$ aufgrund von Satz 3.21 (i) ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta \iff |a_n| \leq \beta^n$. Weil aber $(\sum \beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, ist auch $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut konvergent.
(ii) Sei $\alpha > 1$. Dann gibt es wieder aufgrund von Satz 3.21 (i) unendlich viele $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$. Also kann die Folge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen Null konvergieren. Dann sind Reihen $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\sum |a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolgen, also divergent. **q.e.d.**

Satz 4.10. *(Exponentialfunktion:) Für alle* $x \in \mathbb{K}$ *definieren wir*

$$\exp(x) : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Aufgrund des Beispiels (v) im letzten Kapitel ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$. *Also gilt auch*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x^n|}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

Deshalb konvergiert die Reihe $\left(\sum \frac{x^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *absolut.*

Satz 4.11. *(Quotiententest) Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ *und sei* $\alpha = \overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

(i) *Falls* $\alpha < 1$, *dann konvergiert* $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *absolut.*

(ii) *Falls es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass alle $n \geq N$ auch $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ erfüllen, dann divergieren $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\sum |a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Beweis: **(i)** Wegen $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim} \left|\dfrac{a_n+1}{a_n}\right|$ (Satz 3.25) folgt (i) aus dem Wurzeltest.

(ii) Aus $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ folgt $|a_{n+1}| = \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot \left|\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right| \cdots \left|\dfrac{a_{N+1}}{a_N}\right| \cdot |a_N| \geq |a_N| > 0$. Also ist $|a_n|$ keine Nullfolge und die Reihen $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\sum |a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent. **q.e.d.**

Satz 4.12. *(Cauchy's Verdichtungssatz) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nicht negative monoton fallende Folge. Dann konvergiert $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn $(\sum 2^n a_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.*

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$ und $t_n = \sum\limits_{j=0}^{n} 2^j a_{2^j}$. Wegen der Monotonie von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt für alle $j \in \mathbb{N}$:

$$a_{2^j} + a_{2^j+1} + \ldots + a_{2^{j+1}-1} \leq 2^j a_{2^j} \leq 2(a_{2^{j-1}+1} + a_{2^{j-1}+2} + \ldots + a_{2^j})$$

und für $j = 0$ gilt: $a_1 \leq a_1 \leq 2a_1$. Deshalb gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq s_{2^{n+1}-1} \leq t_n \leq 2s_{2^n}.$$

Also ist die Beschränktheit von der Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ äquivalent zu der von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**q.e.d.**

Die Reihe $\left(\sum \frac{1}{n^s}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist für $s \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ genau dann konvergent, wenn die Reihe

$$\left(\sum \frac{2^n}{(2^n)^s}\right)_{n\in\mathbb{N}_0} = \left(\sum 2^{(1-s)\cdot n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

konvergent ist, also für $s > 1$. $\Longrightarrow$ Für alle $s \in \mathbb{Q}$ mit $s > 1$ ist $\zeta(s)$ wohl definiert.

Satz 4.13. *(Alternierende Reihe von Leibniz) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert $(\sum(-1)^n a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$*

Beweis: Wegen dem Monotonieprinzip sind die Glieder einer monoton fallenden Nullfolge nicht negativ. Sei $s_n = \sum\limits_{m=0}^{n} (-1)^m a_m$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Aus der Monotonie folgt:

$$s_1 \leq s_3 \leq \ldots \leq s_{2n+1} \leq \ldots \leq s_{2n} \leq \ldots \leq s_2 \leq s_0.$$

Also ist die Folge $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend und beschränkt und $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend und beschränkt. Dann konvergieren aber beide Folgen und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = -\lim_{n\to\infty} (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$$

Also konvergiert die Reihe $(\sum(-1)^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **q.e.d.**

Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, weil $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

4.2 Dezimalbruchdarstellung von reellen Zahlen

Als Ziffern wählen wir $Z = \{0, 1, \ldots, 9\}$ (bzw. $\{0, 1, \ldots, p-1\}$). Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Werten in Z. Definiere die entsprechende Zahlenfolge $(\sum x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{z_n}{p^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(\sum x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen dem Majorantenkriterium und wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = \frac{p-1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} p^{-n} = \frac{p-1}{p} \frac{1}{1-p^{-1}} = 1$$

absolut konvergent. Also definiert $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ eine reelle Zahl in $[0, 1]$. Sei jetzt M die Menge aller Folgen $M = \{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} | (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $p-1\}$. Dann ist die Abbildung $M \to [0, 1), (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{p^n}$ surjektiv und injektiv.

Bemerkung 4.14. *Wir können auch fordern, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen Null konvergiert. Reellen Zahlen, deren Ziffernfolge gegen 0 konvergiert haben auch eine Dezimalbruchdarstellung, deren Ziffernfolge gegen 9 konvergiert, z.B. $\frac{1}{2} = 0,500\ldots = 0,499\ldots$.*

Surjektiv: Sei $x \in [0, 1)$. Wir definieren $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induktiv, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$0 \le \frac{z_n}{p^n} \le x - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{z_m}{p^m} < \frac{z_n+1}{p^n} \le \frac{1}{p^{n-1}} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{z_n}{p^n} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{z_m}{p^m}, \frac{z_n+1}{p^n} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{z_m}{p^m}\right)$$

gilt. Es folgt $0 \le x - \sum_{m=1}^{n} \frac{z_m}{p^m} < \frac{p-1+1}{p^{n+1}}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{p^n} = x$. Weil für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^m} = \frac{p-1}{p^{n+1}\left(1-\frac{1}{p}\right)} = \frac{1}{p^n}$$ gilt, konvergiert $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen $p-1$.

Injektiv: Seien $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Ziffernfolgen, mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{p^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{p^n}$. Sei also $n \in \mathbb{N}$ der kleinste Index mit $z_n \neq w_n$. Aus

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{|z_m - w_m|}{p^m} \le \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^m} = \frac{p-1}{p^{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p^m} = \frac{p-1}{p^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p^n},$$

folgt $|z_n - w_n| \le 1$. Sei also $z_n = w_n + 1$. Für alle $m > n$ gilt dann $w_m - z_m = p-1 \Longrightarrow z_m = 0$ und $w_m = p-1 \Longrightarrow \lim_{m\to\infty} w_m = p-1$ und $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin M$.**q.e.d.**

4.3 Addition, Multiplikation, Umordnung

Aus dem Satz 3.5 folgt

Satz 4.15. *(Rechenregeln für Reihen) Die Reihen* $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *seien konvergent, dann konvergieren auch die Reihen*

$$\Big(\sum (a_n + b_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{und} \qquad \Big(\sum \lambda a_n\Big)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ für alle } \lambda \in \mathbb{K}. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Definition 4.16. *Für gegebene Reihen* $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *und* $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *heißt die Reihe* $(\sum c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *mit* $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *für* $n \in \mathbb{N}_0$ *das (Cauchy-)Produkt der beiden Reihen.*

Diese Definition kommt von den Potenzreihen, die wir später kennenlernen werden. Das Produkt der beiden Potenzreihen $(\sum a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\sum b_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist dann die Potenzreihe $(\sum c_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, d.h. wir haben alle Summanden des Produktes mit gleichen Potenzen zusammengefasst.

Satz 4.17. *(Konvergenz des Produktes) Wenn die Reihe* $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *absolut konvergiert und die Reihe* $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *konvergiert, dann konvergiert das Produkt* $(\sum c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *der beiden Reihen. Wenn auch* $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *absolut konvergiert, dann auch* $(\sum c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Beweis: Mit $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$ und $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \ldots + (a_0 b_n + \ldots + a_n b_0) \\ &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \ldots + a_n B_0 \\ &= a_0(B - \beta_n) + a_1(B - \beta_{n-1}) + \ldots + a_n(B - \beta_0) \end{aligned}$$

Hierbei ist $B = \lim\limits_{n\to\infty} B_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ und $\beta_n = B - B_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} b_k$. Daraus ergibt sich

$$C_n = A_n \cdot B - (a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0).$$

Also gilt $\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} A_n B$, wenn $a_0\beta_n + \ldots + a_n\beta_0$ im Grenzwert $n \to \infty$ gegen Null konvergiert. Aufgrund der Voraussetzungen gibt es $\alpha, \beta > 0$, so dass

$$|\beta_n| \le \beta \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n} |a_k| \le \alpha$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Für alle $\epsilon > 0$ gibt es natürliche Zahlen N, M, so dass $|\beta_n| < \frac{\epsilon}{2\alpha}$ für alle $n \ge N$ gilt und $|a_n| < \frac{\epsilon}{2N\beta}$ für alle $n \ge M$. Dann gilt für alle $n \ge N + M - 1$:

$$\begin{aligned} |a_0\beta_n + \ldots + a_n\beta_0| &\le |a_0\beta_n + \ldots + a_{n-N}\beta_N| + |a_{n-N+1}\beta_{N-1} + \ldots + a_n\beta_0| \\ &< \frac{\epsilon}{2\alpha}\sum_{k=0}^{n-N} |a_k| + N\beta \cdot \frac{\epsilon}{2N\beta} \le \epsilon. \end{aligned}$$

Also konvergiert $(\sum c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen das Produkt der Gernzwerte von $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wenn beide konvergieren und eine absolut konvergiert. Wenn beide Reihen absolut konvergieren, dann gilt für alle $N \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \le \left(\sum_{n=0}^{N} |a_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{N} |b_n|\right) \le \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|\right).$$

Also ist dann das Produkt absolut konvergent. **q.e.d.**

Beispiel 4.18. *Das Quadrat der Reihe* $\left(\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ist nicht konvergent, obwohl die Reihe als Beispiel einer alternierenden Reihe nach Leibniz konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Die Koeffizienten des Quadrates sind gegeben durch:*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(-1)^{n-k}}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}$$

Es gilt aber $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \ge \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} = 1$. *Also ist das Quadrat der Reihe keine Cauchyfolge.* **q.e.d.**

Satz 4.19. *(Eigenschaften der Exponentialfunktion)*

(i) *für alle* $x, y \in \mathbb{K}$ *gilt* $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.

(ii) *Für alle* $x \in \mathbb{K}$ *ist* $\exp(x) \neq 0$ *und für alle* $x \in \mathbb{R}$ *sogar* $\exp(x) > 0$.

(iii) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *und alle* $r \in \mathbb{Q}$ *ist* $\exp(rx) = (\exp(x)^r)$.

(iv) *Für alle* $x \in \mathbb{C}$ *ist* $\exp(\bar{x}) = \overline{\exp(x)}$.

(v) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $|\exp(\imath x)| = 1$.

Die Zahl $\exp(1)$ *wird Eulersche Zahl genannt und mit e bezeichnet. Wegen (iii) gilt dann für alle* $r \in \mathbb{Q}$: $\exp(r) = \exp(r \cdot 1) = e^r$. *Deshalb schreiben wir auch* e^x *für* $\exp(x)$.

Beweis: (i) Wir hatten schon gesehen, dass die Reihe $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für alle $x \in \mathbb{K}$ absolut konvergiert. Dann ist das Produkt von $\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!}$. Wegen der binomischen Formel gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Dann folgt $\exp(x)\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$.

(ii) Wegen (i) gilt $\exp(x)\exp(-x) = 1$. Also besitzt $\exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{K}$ ein Inverses und ist ungleich Null. Wegen (i) gilt $\exp(x) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Offenbar ist für alle $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$ $(\exp(\frac{x \cdot m}{n}))^n = \exp(x \cdot m) = (\exp(x))^m$. Also gilt auch wegen (ii) $\exp\left(\frac{xm}{n}\right) = (\exp(x))^{\frac{m}{n}}$.

(iv) $\exp(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{x}^n}{n!} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} = \overline{\exp(x)}$ wegen Satz 2.55 und Satz 4.15.

(v) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(\imath x)\overline{\exp(\imath x)} = \exp(\imath x)\exp(-\imath x) = 1$. **q.e.d.**

Wir können jetzt für jede Zahl $y > 0$, für die es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $y = \exp(x)$ gilt, und für jedes $z \in \mathbb{R}$ die Zahl $y^z = \exp(zx)$ definieren. Wir werden später sehen, dass wir so für alle $y > 0$ und alle $z \in \mathbb{R}$ y^z definieren können.

Definition 4.20. *(Umordnen von Reihen) Sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung von den natürlichen Zahlen auf sich selber. Dann heißt die Reihe $\left(\sum a_{\tau(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Umordnung der Reihe $\left(\sum a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Analog könnten wir auch die Umordnung von Folgen bilden. Letztere sind aber weniger interessant, weil jede Umordnung einer konvergenten Folge wieder gegen den gleichen Grenzwert konvergiert (Übungsaufgabe). Dagegen gilt dies bei Reihen nicht.

Satz 4.21. *Konvergiert eine Reihe $\left(\sum a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut, so konvergiert auch jede Umordnung $\left(\sum a_{\tau(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut. In diesem Fall gilt* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$.

Beweis: Sei also τ eine gegebene bijektive Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Wenn $\left(\sum a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut konvergent, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{k=n}^{m} |a_k| < \epsilon$ für alle $m \geq n > N$ gilt. Dann gibt es auch ein $M = \max \tau^{-1}[\{1, \ldots, N\}] \in \mathbb{N}$, so dass $\tau(n) > N$ für alle $n > M$ gilt. Dann folgt für alle $m \geq n > M$

$$\sum_{k=n}^{m} \left|a_{\tau(k)}\right| \leq \sum_{k=N+1}^{\max\{\tau(n),\tau(n+1),\ldots,\tau(m)\}} |a_k| < \epsilon.$$

Also ist $\left(\sum |a_{\tau(n)}|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und die Umordnung konvergiert sogar absolut.

Mit denselben N und M in Abhängigkeit von $\epsilon > 0$ gilt für alle $n > N$ and $m > M$

$$\left|\sum_{k=1}^{m} a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=N+1}^{\max\{\tau(1),\tau(2),\ldots,\tau(m),n\}} |a_k| < \epsilon.$$

Also konvergiert $\left(\sum a_{\tau(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert wie $\left(\sum a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. **q.e.d.**

Satz 4.22. *(Riemann) Sei $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Reihe, die nicht absolut konvergiert, und $\alpha \leq \beta$ zwei reelle Zahlen. Dann gibt es eine Umordnung $\left(\sum a_{\tau(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, die als Reihe beschränkt ist und für die α der Limes inferior der Reihe ist und β der Limes superior. Wenn $\alpha \neq \beta$ konvergiert die Reihe also nicht.*

Beweis: Weil $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Wir betrachten im Folgenden die beiden Teilfolgen aller nichtnegativen Elemente $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und aller negativen Elemente $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Weil $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht absolut konvergiert, und $(\sum 2b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn $(\sum a_n + |a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, bzw. $(\sum 2c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ganu dann konvergiert, wenn $(\sum a_n - |a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, konvergieren die beiden monotonen Reihen $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\sum c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht und sind auch nicht beschränkt.

Wir setzen die umgeordnete Folge $(a_{\tau(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ abwechselnd jeweils der Reihe nach aus den Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zusammen. Wenn die Summe aller bisherigen Folgenglieder größer ist als β, dann fahren wir solange mit Folgengliedern aus c_n fort, bis die Summe kleiner als α ist. Wenn die Summe aller bisherigen Folgenglieder kleiner als α ist, dann fahren wir solange mit Folgengliedern aus b_n fort, bis die Summe größer als β ist. Wenn $0 \in [\alpha, \beta]$ starten wir mit Folgengliedern aus b_n, bis die Summe größer als β ist. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es nur endlich viele Glieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Absolutbetrag nicht kleiner als ϵ ist. Deshalb gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass die Summen $\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)}$ für alle $n \geq N$ in $(\alpha - \epsilon, \beta + \epsilon)$ liegen. Es gibt unendich viele Glieder von $\left(\sum a_{\tau(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ die kleiner als α sind und unendlich viele, die größer als β sind. Die umgeordnete Reihe $\left(\sum a_{\tau(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ hat also als Limes inferior α und als Limes superior β. **q.e.d.**

Weil für jedes $\epsilon > 0$ und $x \in [\alpha, \beta]$ unendlich viele Glieder von $\left(\sum a_{\tau(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ liegen, ist die Menge der Häufungspunkte dieser Reihe gleich $[\alpha, \beta]$.

Definition 4.23. *Sei $(a_n)_{\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge, dann heißt $(\sum a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die entsprechende Potenzreihe mit Koeffizienten $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.*

Aus dem Wurzeltest folgt sofort

Satz 4.24. *(Konvergenzradius von Potenzreihen) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Koeffizienten der Potenzreihe $(\sum a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und sei $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ und $R = \frac{1}{\alpha}$ ($R = 0$ für $\alpha = \infty$ und $R = \infty$ für $\alpha = 0$).*

(i) *Für $|x| < R$ konvergiert $(\sum a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ absolut.*

(ii) *Für $|x| > R$ divergiert $(\sum a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.*

Wenn $\alpha < \infty$ definiert folgende Reihe also eine Potenzreihenfunktion

$$f: \quad \{x \in \mathbb{K} \mid |x| < R\} \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$ **q.e.d.**

Beispiel 4.25. **(i)** $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}} = 0 \Longrightarrow R = \infty$.

(ii) $\left(\sum x^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *also* $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{1} = 1 \Longrightarrow R = 1$. *Für* $|x| < 1$ *gilt* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

(iii) $\left(\sum \frac{x^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *also* $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1 \Longrightarrow R = 1$.

Für $|x| < 1$ *ist die Potenzreihe also konvergent, aber für* $x = 1$ *divergent und für* $x = -1$ *konvergent (alternierende Reihe von Leibniz).*

(iv) $\left(\sum \frac{x^n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *also* $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1 \Longrightarrow R = 1$.

Für $|x| \leq 1$ *also konvergent und für* $|x| > 1$ *divergent.*

Satz 4.26. *(Eigenschaften von Potenzreihenfunktionen)*

(i) *Seien* $\left(\sum a_n x^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *und* $\left(\sum b_n x^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *Potenzreihen mit Konvergenzradius* R_1 *bzw.* R_2. *Dann konvergieren für* $|x| < \min\{R_1, R_2\}$ *die Summe* $\left(\sum (a_n + b_n) x^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *und das Cauchy-Produkt* $\left(\sum c_n x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *der beiden Potenzreihen und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right).$$

(ii) *Für* $r < R_1$ *gibt es ein* $M(r) \in \mathbb{R}^+$, *so dass* $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| \leq M(r)$ *für alle* $|x| \leq r$ *gilt.*

(iii) *Für* $r < R_1$ *und für alle* $\epsilon > 0$ *gibt es ein* $N \in \mathbb{N}$, *so dass für alle* $|x| \leq r$ *gilt*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right| < \epsilon.$$

(iv) *Für* $r < R_1$ *gibt es ein* $L(r) \in \mathbb{R}^+$, *so dass für alle* x, y *mit* $|x| \leq r$ *und* $|y| \leq r$ *gilt*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n\right| \leq L(r)|x - y|.$$

Beweis: **(i)** Folgt aus den Rechenregeln für Reihen und der Konvergenz des Cauchy Produktes.

(ii) Für $|x| \leq r$ gilt $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = M(r) < \infty$.

(iii) Weil die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$ absolut konvergiert gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|r^n < \epsilon$ gilt. Dann folgt für $|x| \leq r$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|r^n < \epsilon.$$

(iv) $(x^n - y^n) = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$. Für $|x| \leq r$ und $|y| \leq r$ folgt also $|x^n - y^n| \leq |x-y|nr^{n-1}$. Weil aber gilt

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim}\left(\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{|a_n|}\right) = \left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|},$$

haben die Reihen $\left(\sum a_n x^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $\left(\sum n\cdot a_n x^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ den gleichen Konvergenzradius. Also gilt für $|x| \leq r$ und $|y| \leq r$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot|x^n - y^n| \leq |x-y|\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\cdot nr^{n-1}.$$

Wähle also $L(r) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} < \infty$. **q.e.d.**

Satz 4.27. *(Identitässatz für Potenzreihenfunktionen)*

(i) *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, die nicht identisch verschwindet, dann gibt es ein $0 < r < R$, so dass die Potenzreihenfunktion in $\{x \in \mathbb{K} \mid 0 < |x| < r\}$ keine Nullstelle hat.*

(ii) *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihenfunktion mit Konvergenzradius $R > 0$. Für alle x_0 mit $|x_0| < R$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ konvergiert $b_n = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}a_{n+k}x_0^k$. Außerdem ist der Konvergenzradius der Potenzreihenfunktion $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ nicht kleiner als $R - |x_0|$ und für alle $|x| < R - |x|_0$ gilt auch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+x_0)^n$.*

(iii) *Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ zwei Potenzreihenfunktionen, deren Konvergenzradien größer sind als $r > 0$. Falls $\{x \in \mathbb{K} \mid |x| \leq r\}$ unendliche viele verschiedene Elemente enthält, an denen die beiden Potenzreihenfunktionen übereinstimmen, dann gilt $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, d.h. sie stimmen als Potenzreihen überein.*

Beweis: (i) Sei $N \in \mathbb{N}_0$ der kleinste Index, so dass $a_N \neq 0$. Wenn alle anderen Koeffizienten $(a_n)_{n>N}$ verschwinden, hat die Potenzreihe nur Nullstellen bei $x = 0$. Andernfalls gilt für ein $0 < r < R$ und alle $|x| \leq r$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_N x^N\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|\cdot|x|^n \leq |x|^{N+1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_{n+N+1}|r^n\right).$$

Also gilt für alle Nullstellen x_m der Potenzreihenfunktionen

$$|a_N| \cdot |x_m|^N \leq |x_m|^{N+1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}| r^n \right).$$

Wenn $|x_m| \neq 0$ ist folgt daraus $0 < |a_N| \leq |x_m| (\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}| r^n)$. Also hat die Potenzreihenfunktion keine Nullstelle in

$$\left\{ x \in \mathbb{K} \;\middle|\; 0 < |x| < \min \left\{ r, |a_N| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}| r^n \right)^{-1} \right\} \right\}.$$

(ii) Für $x_0 = 0$ trivial. Sei $0 < |x_0| = r < R$. Dann ist für alle $0 < s < R - r$ die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+s)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n \binom{n}{k} r^k s^{n-k} < \infty$$

absolut summierbar. Dann gilt für alle $m = n - k \in \mathbb{N}_0$ und $K \in \mathbb{N}_0$:

$$s^m \sum_{k=0}^{K} |a_{m+k}| \binom{m+k}{k} r^k \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_n| \binom{n}{k} r^k s^{n-k} < \infty.$$

Für alle $m = n - k \in \mathbb{N}_0$ konvergiert also $b_m = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{m+k} \binom{m+k}{k} x_0^m$ absolut. Und es gilt

$$\sum_{m=0}^{M} s^m \sum_{k=0}^{\infty} |a_{m+k}| \binom{m+k}{k} r^k \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_n| \binom{n}{k} r^{n-k} s^k < \infty$$

für alle $M \in \mathbb{N}_0$. Also ist auch $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} |b_m| s^m \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (r+s)^n < \infty.$

Also ist $\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$ für alle $|x| < R - r$ konvergent, und der Konvergenzradius nicht kleiner als $R - r = R - |x_0|$. Für $|x| < R - |x_0|$ und alle $M, K \in \mathbb{N}_0$ gilt dann

$$\left| \sum_{m=0}^{M} x^m \sum_{k=0}^{K} a_{m+k} \binom{m+k}{k} x_0^k - \sum_{n=0}^{M+K} a_n (x+x_0)^n \right| \leq \sum_{n=\min\{M+1,K+1\}}^{M+K} |a_n| (|x| + |x_0|)^n.$$

Also folgt im Grenzwert $K \to \infty$

$$\left| \sum_{m=0}^{M} b_m x^m - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+x_0)^n \right| \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} |a_n| (|x| + |x_0|)^n < \infty.$$

und im Grenzwert $M \to \infty$ auch $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+x_0)^n = 0.$

(iii) Sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise verschiedenen Nullstellen der Potenzreihenfunktion $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)x^n$ in $\{x \in \mathbb{K} \mid |x| \leq r\}$. Dann hat die Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt x_0 mit $|x_0| \leq r$ und für alle $\epsilon > 0$ unendlich viele Glieder in $\{x \in \mathbb{K} \mid |x - x_0| < \epsilon\}$. Sei R das Minimum der Konvergenzradien von $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Dann hat aufgrund der Voraussetzung und wegen (ii) die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)(y + x_0)^n$, als Potenzreihe in y mindestens den Konvergenzradius $R - r > 0$, und für alle $0 < \epsilon \leq R - r$ unendlich viele Nullstellen auf $\{y \in \mathbb{C} \mid |y| < \epsilon\}$. Also verschwindet wegen (i) diese Potenzreihe in y identisch. Dann stimmen wegen (ii) die beiden Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ auf dem Gebiet $\{x \in \mathbb{K} \mid |x - x_0| < R - r\}$ überein. Also gibt es eine Folge $(\tilde{x}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von paarweise verschiedenen Nullstellen von $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)x^n$, die gegen ein $\tilde{x}_0$ mit $|\tilde{x}_0| = \max\{r - (R - r), 0\} < r$ konvergiert. Dabei ist $R - |\tilde{x}_0| > R - r$. Sei $\frac{R}{R-r} < N \in \mathbb{N}$. Indem wir die beiden Potenzreihe immer wieder an einer Stelle mit minimalem Radius in dem Bereich entwickeln, in dem wir schon die Gleichheit beider Potenzreihen gezeigt haben, erhalten wir nach höchstens N Schritten, dass beide Potenzreihen auf einer Nullfoge übereinstimmen. Wegen (i) sind dann die beiden Potenzreihen $(\sum a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\sum b_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ identisch. **q.e.d.**

4.4 Sinus und Cosinus

Definition 4.28. *Für alle $x \in \mathbb{K}$ sei*

$$\cos(x) = \frac{\exp(\imath x) + \exp(-\imath x)}{2} \qquad \sin(x) = \frac{\exp(\imath x) - \exp(-\imath x)}{2i}$$

Also gilt für reelle x $\quad \cos(x) = \Re(\exp(\imath x)) \quad \sin(x) = \Im(\exp(\imath x))$
und für alle $x \in \mathbb{K}$ die **Eulersche Formel**: $\quad \exp(\imath x) = \cos(x) + \imath\sin(x)$.
Außerdem gilt für alle $x \in \mathbb{K}$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = \frac{\exp(2\imath x) + 2 + \exp(-2\imath x)}{4} - \frac{\exp(2\imath x) - 2 + \exp(-2\imath x)}{4} = 1,$$
$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(-x) = -\sin(x).$$

Satz 4.29. *(Additionstheorem) Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt:*

$$\begin{aligned} \cos(x + y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x + y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \end{aligned}$$

Beweis: $\exp(\imath(x + y)) = \exp(\imath x)\exp(\imath y)$.

$$\begin{aligned} \cos(x + y) + \imath\sin(x + y) &= (\cos(x) + \imath\sin(x))(\cos(y) + \imath\sin(y)) \\ &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + \imath(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)). \end{aligned}$$

Ersetzen wir x und y durch $-x$ und $-y$ und benutzen $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$, dann erhalten wir

$$\cos(x+y) - \imath\sin(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) - \imath(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)).$$

Die Summe und die Differenz dieser beiden Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y). \end{aligned}$$

q.e.d.

Durch Einsetzen von (x,y) und $(x,-y)$ erhalten wir für alle $x,y \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + \cos(x-y) &= 2\cos(x)\cos(y) \\ \cos(x-y) - \cos(x+y) &= 2\sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) + \sin(x-y) &= 2\sin(x)\cos(y) \end{aligned}$$

Satz 4.30. *(Potenzreihen von Sinus und Cosinus)*

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Beweis: Weil $\imath^2 = -1$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$ $\imath^{2k} = (-1)^k$ und $\imath^{2k+1} = \imath(-1)^k$. Also gilt auch für alle $x \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{\exp(\imath x) + \exp(-\imath x)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{(\imath x)^n}{n!} + \frac{(-\imath x)^n}{n!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ \sin(x) &= \frac{\exp(\imath x) - \exp(-\imath x)}{2\imath} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\imath}\left(\frac{(\imath x)^n}{n!} - \frac{(-\imath x)^n}{n!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

q.e.d.

Kapitel 5

Stetigkeit

5.1 Teilmengen von $\mathbb{K}$

In diesem Abschnitt betrachten wir Teilmengen X von $\mathbb{K}$, also von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Der Absolutbetrag $|x-y|$ der Differenz zweier Elemente $x, y \in X$ definiert einen Abstand. Wir hatten in den Sätzen 2.22 und 2.60 folgende Eigenschaften hergeleitet:

(i) Für alle $x, y \in X$ ist $|x-y| \geq 0$ und $|x-y| = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (Positivität).

(ii) Für alle $x, y \in X$ ist $|x-y| = |y-x|$ (Symmetrie).

(iii) Für alle $x, y, z \in X$ ist $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$ (Dreiecksungleichung).

Definition 5.1. *(offener Ball, Umgebung, offene Menge)*
Sei $X \subset \mathbb{K}$. Ein offener Ball in X mit Zentrum $x \in X$ und Radius $r > 0$ ist die Menge $B(x, r) = \{y \in X \mid |x-y| < r\}$. Eine Umgebung eines Punktes $x \in X$ ist eine Menge $U \subset X$, die für ein $\epsilon > 0$ den Ball $B(x, \epsilon)$ enthält. Eine offene Menge $O \subset X$ ist eine Teilmenge, die eine Umgebung aller ihrer Punkte ist, d.h. für alle $x \in O$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $B(x, \epsilon) \subset O$.

Beispiel 5.2. *In $\mathbb{R}$ bestehen die Bälle $B(x, r)$ aus den Intervallen $(x-r, x+r)$. In $\mathbb{C}$ bestehen die Bälle $B(x, r)$ aus Kreisscheiben um x mit Radius r ohne den Rand.*

Alle offenen Bälle $B(x, r)$ sind offenbar Umgebungen von x. Sei $y \in B(x, r)$. Dann ist $|x-y| < r$. Sei $z \in B(y, r-|x-y|)$. Dann gilt $|x-z| \leq |x-y| + |y-z| < r$, also auch $B(y, r-|x-y|) \subset B(x, r)$. Deshalb sind die offenen Bälle offene Mengen.

Offenbar ist eine beliebige Vereinigung von offenen Mengen offen. Seien O und O' zwei offene Mengen und $x \subset O \cap O'$. Dann gibt es $r > 0$ und $r' > 0$ so dass $B(x, r) \subset O$ und $B(x, r') \subset O'$. Also ist $B(x, \min\{r, r'\}) \subset B(x, r) \cap B(x, r') \subset O \cap O'$. Also ist $O \cap O'$ offen. Damit ist auch die Schnittmenge von endlich vielen offenen Mengen offen.

Definition 5.3. *(abgeschlossene Mengen, Abschluss)*
Für eine Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$ heißen die Komplemente von offenen Teilmengen von X abgeschlossen. Der Abschluss $\bar{A}$ einer Teilmenge $A \subset X$ ist die Schnittmenge aller abgeschlossenen Teilmengen von X, die A enthalten.

Wegen der Regel von de Morgan, sind beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Teilmengen von X abgeschlossen. Deshalb ist der Abschluss einer beliebigen Teilmenge von X abgeschlossen und der Abschluss einer abgeschlossenen Teilmenge gleich der Menge.

Ein Punkt $x \in X$ gehört genau dann zu dem Abschluss $\bar{A}$, wenn es keine offene Menge in X gibt, die x enthält aber mit A schnittfremd ist. Dies ist äquivalent dazu, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die offenen Bälle $B(x, \frac{1}{n})$ ein Element a_n aus A enthalten, oder auch dazu, dass es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A gibt, die gegen x konvergiert. Wir sagen, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert, wenn sie konvergiert, und der Grenzwert in X liegt. Damit haben wir gezeigt:

Lemma 5.4. *Der Abschluss $\bar{A}$ einer Teilmenge $A \subset X$ besteht aus den Grenzwerten von allen Folgen in A, die in X konvergieren. $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn die Grenzwerte von allen Folgen in A, die in X konvergieren, in A liegen.* **q.e.d.**

Wegen Satz 3.5 ist in $\mathbb{K}$ der Abschluss der offenen Bälle $\overline{B(x,r)} = \{y \mid |y-x| \leq r\}$.

5.2 Vollständigkeit und Kompaktheit

Wenn eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert, dann auch in $\mathbb{K}$. Deshalb gilt

Satz 5.5. *In $X \subset \mathbb{K}$ ist jede konvergente Folge eine Cauchyfolge.* **q.e.d.**

Definition 5.6. *$X \subset \mathbb{K}$ heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.*

Wegen dem Vollständigkeitsaxiom sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ vollständig. Wegen Lemma 5.4 ist $A \subset \mathbb{K}$ genau dann vollständige, wenn A in $\mathbb{K}$ abgeschlossen ist.

Weil jede reelle Zahl der Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen ist, sind die reellen Zahlen der Abschluss der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Anstelle unserer axiomatischen Charakterisierung der reellen Zahlen können wir also die reellen Zahlen auch aus den rationalen Zahlen konstruieren als Äquivalenzklassen von rationalen Cauchyfolgen, wobei zwei Cauchyfolgen als äquivalent gelten, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist.

Definition 5.7. *(kompakt) Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$ heißt kompakt, wenn jede Folge in X eine in X konvergente Teilfolge besitzt.*

Definition 5.8. *Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$ heißt beschränkt, wenn für ein $x \in X$, die Menge der Abstände $\{|x-y| \mid y \in X\}$ beschränkt ist.*

Wegen der Dreiecksungleichung ist diese Bedingung äquivalent dazu, dass für alle $x \in \mathbb{K}$ die Menge der Abstände $\{|x-y| \mid y \in X\}$ beschränkt ist.

Satz 5.9. *(Heine-Borel) Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis: Wegen dem Auswahlprinzip von Bolzano Weierstraß besitzt jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einer beschränkten Menge $X \subset \mathbb{K}$ eine in $\mathbb{K}$ konvergente Teilfolge. Der Grenzwert einer Folge in einer kompakten Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$, die in $\mathbb{K}$ konvergiert, muss in X liegen. Wegen Lemma 5.4 ist also eine beschränkte Menge $X \subset \mathbb{K}$ genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist. Weil umgekehrt eine unbeschränkte Menge $X \subset \mathbb{K}$ nicht in endlich vielen Bällen $B(x_1,4) \cup \ldots \cup B(x_n,4)$ enthalten ist, gibt es für endliche viele paarweise disjunkte Bälle $B(x_1,2),\ldots,B(x_n,2)$ ein $x_{n+1} \in X$, so dass auch $B(x_1,2),\ldots,B(x_{n+1},2)$ paarweise disjunkt sind. Für $x \in X$ folgt $B(x,1) \subset B(x_n,2)$ aus $x_n \in B(x,1)$. Also hat eine solche Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X keinen Häufungspunkt.**q.e.d.**

Korollar 5.10. *Teilmengen $A \subset X$ einer kompakten Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$ sind genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen sind.*

Beweis: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einer Teilmenge $A \subset X$ einer kompaken Menge $X \subset \mathbb{K}$ konvergiert wegen Lemma 5.4 genau dann in X, wenn sie in $\mathbb{K}$ konvergiert. Wegen Lemma 5.4 ist A genau dann abgeschlossen in X, wenn sie es in $\mathbb{K}$ ist. **q.e.d.**

Korollar 5.11. *Die kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$ besitzen Minimum und Maximum.*

Beweis: Für jede beschränkte nicht leere Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\sup A - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von A und $\inf A + \frac{1}{n}$ keine untere Schranke. Deshalb gibt es ein $a_n \in (\sup A - \frac{1}{n}, \sup A] \cap A$ und ein $b_n \in [\inf A, \inf A - \frac{1}{n}) \cap A$. Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen $\sup A$ bzw. $\inf A$. Also liegen $\sup A$ und $\inf A$ im Abschluss von A. Kompakte Teilmengen besitzen Minimum und Maximum. **q.e.d.**

Beispiel 5.12. *In $\mathbb{K}$ sind die abgeschlossenen Bälle $\overline{B(x,r)}$ für $r \geq 0$ kompakt.*

5.3 Stetigkeit

Definition 5.13. *Seien X und Y jeweils eine Teilmenge entweder von $\mathbb{R}$ oder von $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ heißt stetig in $x \in X$, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle $y \in X$ gilt, die $|x - y| < \delta$ erfüllen. Die Abbildung f heißt stetig, wenn sie in allen Punkten von X stetig ist.*

Stetig im Punkt x heißt also, dass alle Punkte, die hinreichend nahe bei x liegen, auf Werte abgebildet werden, die beliebig nahe bei $f(x)$ liegen.

Satz 5.14. *Für eine Abbildung $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ zwischen zwei Teilmengen X und Y jeweils von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist Folgendes äquivalent:* **(i)***f ist stetig in x.*

(ii) *Das Urbild jeder Umgebung von $f(x)$ ist eine Umgebung von x.*

(iii) *Für gegen x konvergente Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$.*

Beweis: (i)⇔(ii): Die Umgebungen von x sind gerade die Mengen, die einen δ-Ball um x enthalten. Also ist (ii) äquivalent zu der Aussage, dass das Urbild jedes ϵ-Balles um $f(x)$ einen δ-Ball um x enthält. Das ist nur eine Umformulierung von (i).
(ii)⇔(iii): Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren genau dann gegen x bzw. $f(x)$, wenn jede Umgebung von x bzw. $f(x)$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthält. Wenn also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert und f (ii) erfüllt, dann konvergiert $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$. Also folgt (iii) aus (ii). Wenn es umgekehrt eine Umgebung von $f(x)$ gibt, deren Urbild keine Umgebung von x enthält, dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right)$, so dass $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ im Komplement der Umgebung von $f(x)$ liegt und damit auch im Komplement eines ϵ-Balles von $f(x)$: $f(x_n) \notin B(f(x), \epsilon)$. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x, aber $f(x_n)$ nicht gegen $f(x)$. **q.e.d.**

Korollar 5.15. *Für eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen zwei Teilmengen X und Y jeweils von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist Folgendes äquivalent:* **(i)** *f ist stetig.*

(ii) *Für in X konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(\lim_{n\to\infty} x_n)$.*

(iii) *Das Urbild jeder offenen Teilmenge von Y ist offen in X.*

(iv) *Das Urbild jeder abgeschlossenen Teilmenge von Y ist abgeschlossen in X.*

Beweis: Wegen dem vorangehenden Satz sind (i) und (ii) äquivalent. Weil eine Menge genau dann offen ist, wenn sie eine Umgebung von allen ihren Punkten ist, zeigt der vorangehende Satz, dass aus (i) bzw. (ii) auch (iii) folgt. Weil jede Umgebung eines Punktes auch eine offene Umgebung des Punktes enthält, folgt wieder wegen dem vorangehenden Satz aus (iii) auch (i) bzw. (ii). Weil nun die abgeschlossenen Mengen gerade die Komplemente der offenen Mengen sind und das Urbild eines Komplementes gerade gleich dem Komplement des Urbildes ist, ist (iii) zu (iv) äquivalent. **q.e.d.**

Korollar 5.16. *Die Komposition zweier stetiger Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ ist stetig. Die analoge punktweise Aussage gilt auch.*

Beweis: $g(f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)) = g(\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n))$ für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. **q.e.d.**

Korollar 5.17. *Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei Teilmengen X und Y jeweils von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist kompakt.*

Beweis: Sei $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ eine stetige Abbildung zwischen zwei Teilmengen X und Y jeweils von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $A \subset X$ eine kompakte Menge. Für jede Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $f[A]$ gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit $f(x_n) = y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil A kompakt ist, besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Die entsprechende Teilfolge von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert wegen der Stetigkeit von f. Also besitzt jede Folge in $f[A]$ eine konvergente Teilfolge. **q.e.d.**

Korollar 5.18. *Sei f eine bijektive stetige Abbildung von einer kompakten Teilmenge X auf eine Teilmenge Y jeweils von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann ist die Umkehrabbildung stetig.*

Beweis: Wegen dem vorangehenden Korollar ist das Bild $f[X] = Y$ kompakt und wegen Korollar 5.10 das Bild $f[A]$ jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$ abgeschlossen. Wegen $(f^{-1})^{-1}[A] = f[A]$ folgt die Aussage aus Korollar 5.15 (iv). **q.e.d.**

Beispiel 5.19. **(i)** *Auf jedem metrischen Raum ist die identische Abbildung $\mathbb{1}_X$ stetig.*
(ii) *Die konstante Abbildung, die alle $x \in X$ auf einen Punkt y abbildet ist stetig.*
(iii) *Aus den Rechenregeln für Folgen folgt, dass für jede Teilmenge X von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und alle stetigen Abbildungen $f, g : X \to \mathbb{K}$ auch die Abbildungen*

$$f + g : X \to \mathbb{K}, \qquad x \mapsto f(x) + g(x) \qquad f \cdot g : X \to \mathbb{K}, \qquad x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

stetig sind. Das gilt auch für die Abbildungen

$$-f : X \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto -f(x) \text{ und } \quad \frac{1}{f} : X \setminus f^{-1}[\{0\}] \to \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \frac{1}{f(x)}.$$

Definition 5.20. *(Gleichmässige Stetigkeit, Lipschitzstetigkeit) Eine Abbildung $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ zwischen den beiden Teilmengen X und Y jeweils von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt gleichmäßig stetig auf einer Teilmenge $A \subset X$, wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle $x, y \in A$ mit $|x - y| < \delta$ gilt.*
Die Abbildung heißt lipschitzstetig auf A, wenn es eine Konstante $L > 0$(Lipschitzkonstante) gibt, so dass $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in A$ gilt.

Beispiel 5.21. **(i)** *Eine Potenzreihenfunktion $f : x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n x^n$ mit Konvergenzradius R ist nach Satz 4.26 (iv) für alle $0 < r < R$ auf $\overline{B(0, r)}$ lipschitzstetig. Auf der Vereinigung $B(0, R) = \bigcup_{0<r<R} B(0, r)$ der offenen Bälle $B(0, r)$ ist f dann stetig.*
(ii) *Wegen Korollar 2.20 und Satz 2.58 (iv) ist $x \mapsto |x|$ lipschitzstetig mit $L = 1$.*

Offenbar ist jede lipschitzstetige Abbildung auch gleichmäßig stetig und jede gleichmäßig stetige Abbildung auch stetig. Es gilt auch folgende Umkehrung:

Satz 5.22. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ von einer kompakten Teilmenge X von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ auf eine Teilmenge $Y \subset \mathbb{K}$ ist genau dann stetig, wenn sie gleichmäßig stetig ist.*

Beweis: Sei $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ stetig und X kompakt. Wenn f nicht gleichmäßig stetig ist, dann gibt es ein $\epsilon > 0$ so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ zwei Punkte x_n und y_n in X existieren, mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. Die Folge $(x_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist also eine Nullfolge. Weil X kompakt ist, besitzt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mindestens eine in X konvergente Teilfoge, also mindestens einen Häufungspunkt in X. Dann konvergiert auch die entsprechende Teilfolge von $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert. Wegen $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ konvergieren die beiden Folgen $(f(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(f(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen den gleichen Grenzwert, und f ist an allen Häufungspunkten von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht stetig. Wenn f ungekehrt gleichmäßig stetig ist, dann ist f auch stetig. **q.e.d.**

Definition 5.23. *Eine Folge von Funktionen* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von* X *nach* $\mathbb{K}$ *heißt*

punktweise konvergent, *wenn die Folgen* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *für jedes* $x \in X$ *konvergieren. Die Grenzwerte definieren eine Funktion* $f : X \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

gleichmäßig konvergent, *wenn es eine Funktion* $f : X \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto f(x)$ *gibt, und für alle* $\epsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$, *so dass* $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ *für* $n \geq N$ *und* $x \in X$ *gilt.*

Gleichmäßig konvergente Folgen sind punktweise konvergent, aber nicht umgekehrt.

Beispiel 5.24. *Die Folge von Funktionen* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n$ *konvergiert wegen Satz 3.4 punktweise gegen die Funktion*

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1) \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\lim_{m\to\infty}(1-1/m)^n = 1$ *und damit* $\sup\{|f_n(x)-f(x)| \mid x \in [0,1]\} = \sup\{x^n \mid x \in [0,1)\} = 1$. *Also konvergiert die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht gleichmäßig gegen* f.

Definition 5.25. *Sei* X *eine Teilmenge von* $\mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$. *Die Menge aller stetigen Funktionen von* X *nach* $\mathbb{K}$ *bezeichnen wir mit* $C(X,\mathbb{K})$. *Eine Funktion* $f : X \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto f(x)$ *heißt beschränkt, wenn das Bild* $f[X]$ *eine beschränkte Menge ist.* $B(X,\mathbb{K})$, *bezeichne die Menge aller beschränkten Funktionen auf* X. $C(X,\mathbb{K})$ *und* $B(X,\mathbb{K})$ *sind offenbar* $\mathbb{K}$*-Algebren. Auf* $B(X,\mathbb{K})$ *bezeichne* $\|\cdot\|_\infty$ *folgende Abbildung:*

$$\|\cdot\|_\infty : B(X,\mathbb{K}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}.$$

Satz 5.26. *Alle stetigen reellen Funktionen auf einer kompakten Teilmenge* $X \subset \mathbb{K}$ *sind beschränkt. Das Bild einer reellen stetigen Funktion auf einer kompakten Teilmenge* $X \subset \mathbb{K}$ *besitzt ein Minimum und ein Maximum.*

Beweis: Wegen Satz 5.17 ist das Bild jeder kompakten Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$ unter einer stetigen Abbildung kompakt und wegen Heine-Borel beschränkt. Für reelle Funktionen besitzt es wegen Korollar 5.10 ein Maximum und ein Minimum. **q.e.d.**

Dieser Satz hat viele Anwendungen, z.B. den Fundamentalsatz der Algebra.

Satz 5.27. *Sei* X *eine Teilmenge von* $\mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$. *Dann ist der Grenzwert* f *einer gleichmäßig konvergenten Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $C(X,\mathbb{K})$ *auch stetig.*

Beweis: Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein N, so dass $|f(y) - f_n(y)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ für alle $n \geq N$ und alle $y \in X$ gilt. Dann gibt es für alle $x \in X$ ein $\delta > 0$, so dass $|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $y \in X$ mit $|x - y| < \delta$ gilt. Dann folgt für diese x und y

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| < \epsilon.$$ **q.e.d.**

Kapitel 6

Stetige Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

6.1 Umkehrfunktionen

Satz 6.1. *(Zwischenwertsatz) Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ *stetig. Dann enthält das Bild* $f[[a,b]]$ *das abgeschlossene Intervall* $[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$.

Beweis: Für $f(a) = f(b)$ ist die Aussage trivial. Sei y eine reelle Zahl im offenen Intervall zwischen $f(a)$ und $f(b)$ und $A = f^{-1}[(-\infty, y]]$ für $f(a) < f(b)$ bzw. $A = f^{-1}[[y, \infty)]$ für $f(a) < f(b)$. Diese Menge enthält a, ist beschränkt und wegen der Stetigkeit von f abgeschlossen. Also ist A kompakt und besitzt ein Maximum $x = \max A$ mit $f(x) \leq y$ für $f(a) < f(b)$ bzw. $f(x) \geq y$ für $f(a) > f(b)$. Weil y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt, ist $x < b$ und für alle $z \in (x, b]$ liegt $f(z)$ auf der selben Seite von y wie $f(b)$. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in $(x, b]$, die gegen x konvergiert. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ und $f(x) \geq y$ für $f(a) < f(b)$ bzw. $f(x) \leq y$ für $f(a) > f(b)$. Also ist $f(x) = y$ und das Bild von f enthält neben $f(a)$ und $f(b)$ alle reellen Zahlen zwischen $f(a)$ und $f(b)$. **q.e.d.**

Mit diesem Satz läßt sich von vielen stetigen reellen Funktionen die Surjektivität zeigen oder ihr Bild bestimmen. Die Injektivität von solchen stetigen reellen Funktionen ist dagegen äquivalent zur Monotonie.

Definition 6.2. *(Monotonie) Eine stetige Funktion* $f : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ *auf einer Teilmenge* X *von* $\mathbb{R}$ *heißt*

monoton wachsend, *wenn* $f(x) \leq f(x')$ *für alle* $x, x' \in X$ *mit* $x \leq x'$ *gilt*

streng monoton wachsend, *wenn* $f(x) < f(x')$ *für alle* $x, x' \in X$ *mit* $x < x'$ *gilt.*

monoton fallend, *wenn* $f(x) \geq f(x')$ *für alle* $x, x' \in X$ *mit* $x \leq x'$ *gilt.*

streng monoton fallend, *wenn* $f(x) > f(x')$ *für alle* $x, x' \in X$ *mit* $x < x'$ *gilt.*

Satz 6.3. *Eine stetige reelle Funktion* f *auf einem Intervall ist genau dann injektiv, wenn* f *entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.*

Beweis: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I stetig und injektiv. Offenbar ist f genau dann streng monoton (wachsend oder fallend), wenn für je drei verschiedenen Punkte $a < x < b$ in I entweder $f(a) < f(x) < f(b)$ oder $f(a) > f(x) > f(b)$ gilt, wenn also die offenen Intervalle zwischen $f(a)$ und $f(x)$ und zwischen $f(x)$ und $f(b)$ disjunkt sind. Wenn es andernfalls ein $x_0 \in (a, b)$ gibt, dessen Funktionswert $f(x_0)$ nicht zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt, dann folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass jeder Wert, der sowohl zwischen $f(x_0)$ und $f(a)$ als auch zwischen $f(x_0)$ und $f(b)$ liegt, einmal auf (a, x_0) und einmal auf (x_0, b) angenommen wird, was der Injektivität widerspricht.

Umgekehrt ist jede streng monotone Funktion injektiv. **q.e.d.**

Korollar 6.4. *Die Umkehrfunktion einer bijektiven stetigen Funktion von einem Intervall auf ein Intervall ist stetig.*

Beweis: Offenbar besitzt jeder Punkt x eines Intervalls, das mehr als einen Punkt enthält, eine Umgebung in diesem Intervall, die ein abgeschlossenes beschränktes Intervall ist. Das Bild solcher kompakter Intervalle ist wegen dem Zwischenwertsatz und dem vorangehenden Satz eine Umgebung von $f(x)$ im Bild von f. Dann ist f^{-1} wegen Korollar 5.18 bei $y = f(x)$ stetig. Weil f surjetiv ist, ist damit f^{-1} stetig. **q.e.d.**

Beispiel 6.5. *Für $k \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \to x^k$ streng monoton wachsend. Dann ist die Umkehrabbildung $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \to x^{\frac{1}{k}}$ stetig und streng monoton wachsend. Dasselbe gilt für die Abbildung $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \to x^{\frac{p}{q}}$ mit Umkehrabbildung $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \to x^{\frac{q}{p}}, p, q \in \mathbb{N}$. Für negative $\frac{p}{q}$ sind diese Abbildungen von $\mathbb{R}^+$ nach $\mathbb{R}^+$ streng monoton fallend.*

Satz 6.6.* *Sei f eine monoton wachsende (fallende) Funktion von einem Interval I nach $\mathbb{R}$. Dann ist die Menge aller Unstetigkeitstellen von f höchstens abzählbar.*

Beweis*: Wir betrachten monoton wachsende Funktionen. Für monoton fallende Funktionen verläuft der Beweis analog. Für jeden inneren Punkt ξ von I sei $f(\xi_-) = \sup\{f(x) \mid x \in I \text{ und } x < \xi\}$ und $f(\xi_+)\} = \inf\{f(x) \mid x \in I \text{ und } \xi < x\}$. Wenn $f(\xi_-) = f(\xi_+)$, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ Punkte $x_-, x_+ \in I$ mit $x_- < \xi < x_+$ und

$$f(x_+) - \epsilon < f(\xi_+) = f(\xi_-) < f(x_-) + \epsilon.$$

Wegen der Monotonie gilt $f(\xi_-) \leq f(\xi) \leq f(\xi_+)$. Dann gilt für alle $x \in [x_-, x_+]$ auch

$$-\epsilon < f(x_-) - f(\xi_-) \leq f(x) - f(\xi) \leq f(x_+) - f(\xi_+) < \epsilon.$$

Also ist f bei solchen ξ stetig. Die Unstetigkeitsstellen im Inneren von I bestehen sogar aus den ξ mit $f(\xi_-) < f(\xi_+)$. Wegen der Monotonie sind diese offenen Intervall $(f(\xi_-), f(\xi_+))$ parrweise disjunkt. Wir wählen in jedem eine rationale Zahl und erhalten eine injektive Abbildung von den Unstetigkeitsstellen im Inneren von I auf die rationalen Zahlen. Damit sind die Unstetigkeitsstellen gleichmächtig zu einer Teilmenge der rationalen Zahlen also höchstens abzählbar. **q.e.d.**

6.2 Die reellen Funktionen $e^x, \ln x, a^x, \log_a x$.

Satz 6.7. *(Eigenschaften von* exp*)*

(i) $e^0 = \exp(0) = 1$.

(ii) $e^x > \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *und* $x > 0$.

(iii) *Für* $x, y \in \mathbb{R}$ *folgt* $e^x < e^y$ *aus* $x < y$.

(iv) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto e^x$ *ist bijektiv.*

Beweis:(i) und **(ii)** folgen aus der Definition.
(iii) Aus $x < y$ folgt $y - x > 0$. Dann gilt wegen (ii) $e^{y-x} > 1$. Wegen Satz 4.19 (i) und (ii) gilt dann $e^y - e^x = (e^{y-x} - 1)e^x > 0$. Also folgt $e^x < e^y$.
(iv) Offenbar ist die Funktion wegen (iii) injektiv. Wegen $e > 1$ und Satz 3.4 gibt es für jedes $y \in \mathbb{R}^+$ zwei $n, m \in \mathbb{N}$ mit $e^{-n} < y < e^m$. Wegen dem Zwischenwertsatz gehört dann y zum Bild von $[-n, m] \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto e^x$. **q.e.d.**

Definition 6.8. *(des natürlichen Logarithmus). Die Umkehrfunktion von* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto e^x$ *heißt natürlicher Logarithmus:* $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln x$.

Wegen Korollar 6.4 ist der Logarithmus stetig.

Satz 6.9. *(Eigenschaften von* ln*)*

(i) $\ln(1) = 0$.

(ii) $\ln(e) = 1$.

(iii) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}^+$.

(iv) $a^r = e^{\ln(a)\cdot r}$ *für alle* $r \in \mathbb{Q}$ *und* $a \in \mathbb{R}^+$.

(v) $\ln\left(e^{ln(a)x}\right) = x\ln(a)$ *für alle* $a \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}$.

(vi) *Für* $x, y \in \mathbb{R}^+$ *folgt* $\ln(x) < \ln(y)$ *aus* $x < y$.

(vii) $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x)$ *ist bijektiv.*

Beweis: (i) $\Leftrightarrow e^0 = 1$ und **(ii)** $\Leftrightarrow e^1 = e$ und **(iii)** $\Longleftrightarrow e^{\ln(x)+\ln(y)} = (e^{\ln(x)})(e^{\ln(y)})$.
(iv) Für $r = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ gilt $(e^{\ln(a)\frac{p}{q}})^q = e^{\ln(a)p} = a^p$ und $e^{\ln(a)\frac{p}{q}} > 0$. Wegen der Eindeutigkeit der k-ten Wurzel folgt $e^{\ln(a)\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}$.
(v) ist offensichtlich.
(vi) folgt aus (iii) des vorhergehenden Satzes.
(vii) folgt aus (iv) des vorhergehenden Satzes. **q.e.d.**

Definition 6.10. *Für alle $a > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ sei $a^x = e^{x \ln(a)}$*

Satz 6.11. *(Eigenschaften von a^x)*

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$ *für alle* $a \in \mathbb{R}^+, x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) $(a^x)^y = a^{xy}$ *für alle* $a \in \mathbb{R}^+, x, y \in \mathbb{R}$.

(iii) *Für $a > 1$ und $x, y \in \mathbb{R}$ folgt $a^x < a^y$ aus $x < y$.*

(iv) *Für $0 < a < 1$ und $x, y \in \mathbb{R}$ folgt $a^x > a^y$ aus $x < y$.*

(v) *Für $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ ist $a^\cdot : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto a^x$ bijektiv und stetig.*

Beweis:(i) $a^{x+y} = e^{x \ln(a) + y \ln(a)} = e^{x \ln(a)} e^{y \cdot \ln(a)} = a^x a^y$.
(ii) $(a^x)^y = e^{y \ln(e^{x \ln(a)})} = e^{y \cdot x \ln(a)} = a^{xy}$.
(iii) Für $a > 1$ ist $\ln(a) > 0$. Also folgt $x \ln(a) < y \ln(a)$ und $a^x < a^y$ aus $x < y$.
(iv) Für $a < 1$ ist $\ln(a) < 0$. Also folgt $x \ln(a) > y \ln(a)$ und $a^x > a^y$ aus $x < y$.
(v) Für $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ ist $\ln(a) \neq 0$. Also ist $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(a)x$ bijektiv und stetig, und damit auch auch $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \exp(\ln(a)x)$. **q.e.d.**

Definition 6.12. *(des Logarithmus zur Basis a) Für alle $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ sei $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ die Umkehrfunktion von $a^\cdot$.*

Satz 6.13. *(Eigenschaften des Logarithmus zur Basis a)*

(i) $\log_a(1) = 0$

(ii) $\log_a(a) = 1$

(iii) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

(iv) *Für $a > 1$ und $x, y \in \mathbb{R}^+$ folgt $\log_a(x) < \log_a(y)$ aus $x < y$.*

(v) *Für $0 < a < 1$ und $x, y \in \mathbb{R}^+$ folgt $\log_a(x) > \log_a(y)$ aus $x < y$.*

(vi) $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x)$ *ist bijektiv und stetig.*

Beweis analog zum Beweis der Eigenschaften von ln. **q.e.d.**

6.3 Die reellen Funktionen $\sin, \cos, \arcsin, \arccos$

Satz 6.14. **(i)** *Für alle* $x \in [-5,5] \setminus \{0\}$ *gilt* $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

(ii) *Für alle* $x \in [-4,4] \setminus \{0\}$ *gilt* $1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} < 1$.

(iii) $\cos : [0, \sqrt{6}] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(x)$ *ist streng monoton fallend.*

(iv) $\cos$ *hat auf* $[0,2]$ *genau eine Nullstelle, die wir mit* $\frac{\pi}{2}$ *bezeichnen.*

(v) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \exp\left(\imath\frac{\pi}{2}\right) = \imath$.

(vi) $\cos(n\pi) = (-1)^n \quad \sin(n\pi) = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(vii) $\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0 \quad \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(viii) $\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos(x) \quad \sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin(x)$

(ix) $\cos\left(x + \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n \sin(x) \quad \sin\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n \cos(x)$.

(x) $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1], \quad x \mapsto \sin(x)$ *ist streng monoton steigend und bijektiv.*

(xi) $\cos : [0,\pi] \to [-1,1], \quad x \mapsto \cos(x)$ *ist streng monton fallend und bijektiv.*

Beweis:(i) Für alle $x \in [-5,5]$ und $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt $0 < \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} < 1$. Also ist für $x \in [-5,5] \setminus \{0\}$ die Folge $(\frac{x^{2k}}{2k!})_{k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0,1\}}$ streng monoton fallend und positiv. Für diese $x \in [-5,5] \setminus \{0\}$ folgt dann $1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ wie im Beweis zu Satz 4.13.
(ii) Für $x \in [-4,4]$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $0 < \frac{x^2}{(2k+2)(2k+3)} < 1$. Also ist für $x \in [-4,4] \setminus \{0\}$ die Folge $(\frac{x^{2k}}{(2k+1)!})_{k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}}$ streng monoton fallend und positiv. Für diese $x \in [-4,4] \setminus \{0\}$ folgt wieder $1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} < 1$ wie im Beweis von Satz 4.13.
(iii) Wegen dem Additionstheorem gilt: $\cos(x) - \cos(y) = \cos(\frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2}) - \cos(\frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{y-x}{2}) > 0$ wegen (ii) für $x, y \in [0, \sqrt{6}]$ und $x < y$.
(iv) $\sin$ und $\cos$ sind wegen Beispiel 5.21 stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Wegen (i) ist $\cos(2) \leq 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$. Dann folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass es eine Nullstelle in $[0,2]$ gibt. Wegen (iii) kann es höchstens eine Nullstelle geben.
(v) Wegen $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ folgt aus (iv) $\sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1$ und aus (ii) $\sin(\frac{\pi}{2}) > 0$. Also gilt $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Dann folgt aus der Eulerschen Formel $\exp(\imath\frac{\pi}{2}) = \imath$.
(vi) Wegen (v) folgt aus der Eulerschen Formel $\exp(n\imath\pi) = (\imath)^{2n} = (-1)^n$, also $\cos(n\pi) = (-1)^n$ und $\sin(n\pi) = 0$.
(vii) Wegen (v) folgt aus der Eulerschen Formel: $\exp((n+\frac{1}{2})\imath\pi) = (-1)^n\imath$ also $\cos((n+\frac{1}{2})\pi) = 0$ und $\sin((n+\frac{1}{2})\pi) = (-1)^n$.
(viii) Aus dem Additionstheorem und (vi) folgt (viii).
(ix) Aus dem Additionstheorem und (vii) folgt (ix).

(x) Aus (ix) folgt $\sin(x) = \begin{cases} -\cos(x + \frac{\pi}{2}) & \text{für } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \\ -\sin(-x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) & \text{für } x \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$

Dann folgt (x) aus (iii).

(xi) Aus (viii) folgt $\cos(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{für } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \cos(-x) = -\cos(\pi - x) & \text{für } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$

Dann folgt (xi) aus (iii). **q.e.d.**

Die Umkehrfunktionen von (ix) und (x) heißen

$$\begin{array}{lll} \text{Arcuscosinus} & \arccos : [-1, 1] \to [0, \pi], & x \mapsto \arccos(x) \\ \text{Arcussinus} & \arcsin : [-1, 1] \to \big[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\big], & x \mapsto \arcsin(x). \end{array}$$

Arcuscosinus ist wegen (xi) streng monoton fallend und Arcussinus wegen (x) streng monoton wachsend. Beide sind wegen Korollar 6.4 stetig. Wegen (ix) gilt $\sin(-x) = -\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} + x)$ und $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} + \arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

Satz 6.15. *(Polardasrstellung von $z \in \mathbb{C}$) Jede komplexe Zahl hat die Darstellung:*

$$z = r \cdot e^{\imath\varphi} \text{ mit } r = |z| \text{ und } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Für $z \neq 0$ ist φ bis auf Addition von $2\pi n$ eindeutig und heißt Argument von z.

Beweis: Der Fall $z = 0$ ist trivial. Sei $z = x + \imath y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Für $y \geq 0$ sei $\varphi = \arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}) \in [0, \pi]$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dann gilt $x = r \cdot \cos(\varphi)$ und $r \sin(\varphi) \geq 0$. Aus $\frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{x^2+y^2} = 1$ folgt $y = r\sin(\varphi)$. Wegen der Eulerschen Formel gilt dann

$$z = r \cdot e^{\imath\varphi} = r\cos(\varphi) + \imath r \sin(\varphi) = x + \imath y.$$

Für $y < 0$ sei $\varphi = \arccos(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}) + \pi$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Aus Satz 6.14 (viii) folgt wieder

$$z = re^{\imath\varphi} = r\cos(\varphi) + \imath r \sin(\varphi) = x + \imath y.$$

Für $(r, \varphi), (s, \vartheta) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ folgt $r = |re^{\imath\varphi}| = |se^{\imath\vartheta}| = s$ aus $re^{\imath\varphi} = se^{\imath\vartheta}$ und für $r = s \neq 0$ auch $e^{\imath\varphi}e^{-\imath\vartheta} = e^{\imath(\varphi-\vartheta)} = 1$, was äquivalent ist zu $\varphi - \vartheta = 2\pi n$. **q.e.d.**

Die Multiplikation mit $e^{\imath\varphi}$ wirkt auf $z = x+\imath y$ wie $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$. Diese lineare Abbildung der komplexen Zahlenebene interpretieren wir als Drehung, weil sie das Skalarprodukt $\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' + yy' = \frac{1}{2}(z\bar{z}' + \bar{z}z') = \frac{1}{2}(ze^{\imath\varphi}e^{-\imath\varphi}\bar{z}' + \bar{z}e^{-\imath\varphi}e^{\imath\varphi}z')$ von $z = x+\imath y$ und $z' = x'+\imath y'$ erhält und keine Spiegelung ist. Weil 1 auf $e^{\imath\varphi}$ abgebildet wird, entspricht φ dem Winkel zwischen 1 und $e^{\imath\varphi}$. Dann ist im rechtwinkligen Dreieck mit einem φ entsprechenden Winkel und auf 1 normierter Hypothenuse $\cos(\varphi)$ die gerichtete Länge der Ankathete und $\sin(\varphi)$ die gerichtete Länge der Gegenkathete.

Für kleine $\varphi > 0$ gilt $\varphi - \frac{\varphi^3}{6} < \sin(\varphi) < L(\varphi) < \sin(\varphi) + 1 - \cos(\varphi) < \varphi + \frac{\varphi^2}{2}$ für die Länge $L(\varphi)$ des Kreisegmentes zwischen 1 und $e^{\imath\varphi}$. Wir unterteilen dieses Kreisegment in n Kreissegemente mit Winkel $\frac{\varphi}{n}$ und erhalten $L(\varphi) = \lim_{n\to\infty} nL(\frac{\varphi}{n}) = \varphi$. Also entspricht φ einem Winkel, dessen Kreisegment im Einheitskreis die Länge φ hat.

Korollar 6.16. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *ist surjektiv und* $\exp(z) = \exp(z') \Leftrightarrow z - z' \in 2\pi\imath\mathbb{Z}$.

Beweis: Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann gilt $e^z = e^x e^{iy}$. Also folgt das Korollar aus dem Satz 6.15 und weil $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ bijektiv ist. **q.e.d.**

Korollar 6.17. *Für* $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *gibt es genau* n $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ *mit* $w^n = z$.

Beweis: Seien (r, φ) die Polarkoordinaten von z. Dann müssen die Polarkoordinaten $(s, \vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ der Lösungen von $w^n = z$ die Gleichungen $n\vartheta = \varphi + 2\pi m$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $s^n = r$ erfüllen. Also sind die Lösungen gegeben durch $s = \sqrt[n]{r}$ und $\vartheta_m = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi m}{n}$, wobei zwei Lösungen (s, ϑ_m) und $(s, \vartheta_{m'})$ genau dann übereinstimmen, wenn $\frac{m-m'}{n} \in \mathbb{Z}$. Also ergeben $m = 0, \ldots, n-1$ alle Lösungen. **q.e.d.**

Satz 6.18. *(Fundamentalsatz der Algebra) Jedes komplexe Polynom* $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ *mit* $a_n \neq 0$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *hat mindestens eine Nullstelle auf* $z \in \mathbb{C}$.

Beweis: Für $|z| \geq R = 1 + 2\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \ldots + 2\left|\frac{a_0}{a_n}\right| \geq 1$ gilt

$$\left|\frac{p(z)}{z^n}\right| = \left|\frac{p(z)}{z^n}\right| + \left|-\frac{a_{n-1}}{z} - \ldots - \frac{a_0}{z^n}\right| - \left|-a_n\left(\frac{a_{n-1}}{a_n z} + \ldots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right)\right|$$

$$\geq |a_n| - |a_n|\left|\frac{a_{n-1}}{a_n z} + \ldots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right| \geq |a_n|\left(1 - \frac{\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \ldots + \left|\frac{a_0}{a_n}\right|}{|z|}\right) > |a_n|\frac{1}{2}.$$

Also ist $|p(z)| > \frac{|a_n|}{2}|z|^n \geq \frac{|a_n|}{2}|z| > \frac{|a_n|}{2}2\frac{|a_0|}{|a_n|} = |a_0| = |p(0)|$ für alle $z \notin B(0, R)$. Auf der kompakten Menge $\overline{B(0, R)}$ nimmt $z \mapsto |p(z)|$ wegen Satz 5.26 das Minimum bei einem z_0 an. Dieses liegt in $B(0, R)$ und ist dann das Minimum auf ganz $z \in \mathbb{C}$.

Wir zeigen jetzt $p(z_0) = 0$. Andernfalls sei $p(y + z_0) = b_n y^n + \ldots + b_0$ das entsprechende Polynom in $y = z - z_0$ mit $b_n = a_n \neq 0$ und $b_0 = p(z_0) \neq 0$. Sei m das kleinste $m > 0$ mit $b_m \neq 0$. Für $0 < |y| \leq r = \frac{1}{1 + 2\left|\frac{b_{m+1}}{b_m}\right| + \ldots + 2\left|\frac{b_n}{b_m}\right|} \leq 1$ gilt dann

$$\left|b_{m+1}y^{m+1} + \ldots + b_n y^n\right| \leq |b_m||y|^m\left(\left|\frac{b_{m+1}}{b_m}\right||y| + \ldots + \left|\frac{b_n}{b_m}\right||y|\right) < \frac{|b_m||y|^m}{2}.$$

Also gilt
$$|p(z_0 + y)| < |b_0 + b_m y^m| + \frac{|b_m||y|^m}{2}.$$

Sei w eine Lösung der Gleichung $w^m b_m = -b_0$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{C}$ mit $0 < |tw| \leq r$

$$|p(z_0 + tw)| < |b_0||1 - t^m| + \frac{|b_0|}{2}|t|^m.$$

Insbesondere gilt $\quad |p(z_0 + tw)| < |b_0| \left(1 - \dfrac{t^m}{2}\right) < |b_0| \quad$ für alle $0 < t \leq \min\left\{1, \frac{r}{|w|}\right\}$.
Also sind alle $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_0) \neq 0$ keine Minima von $z \mapsto |p(z)|$. **q.e.d.**

Korollar 6.19. *Jedes komplexe Polynom vom Grade $n \in \mathbb{N}$ zerfällt in ein Produkt von Polynomen ersten Grades.*

Beweis durch vollständige Induktion:

(i) für $n = 1$ ist die Aussage trivial.

(ii) Die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}$. Sei p ein beliebiges Polynom $(n+1)$-ten Grades. Wegen dem Fundamentalsatz der Algebra hat p eine Nullstelle bei $z_0 \in \mathbb{C}$. Wenn wir p als Polynom in $z - z_0$ schreiben, erhalten wir p als Produkt von $(z - z_0)$ mit einem Polynom n-ten Grades. Wegen der Induktionsvoraussetzung zerfällt dieses in ein Produkt von Polynomen ersten Grades, also auch p. **q.e.d.**

Definition 6.20. *(von Tangens und Cotangens)*

$$\tan : \mathbb{C} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right) \to \mathbb{C}, \quad x \to \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot : \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}\pi) \to \mathbb{C}, \quad x \to \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Beachte $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$ und $\cot(x+\pi) = \cot(x)$.

Satz 6.21. **(i)** $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton steigend, stetig und bijektiv.*

(ii) $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cot(x)$ *ist streng monoton fallend, stetig und bijektiv.*

Beweis: Auf $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ist sin streng monoton steigend und cos streng monoton fallend und beide positiv. Also ist tan streng monoton steigend und positiv. Aus $\tan(-x) = -\tan(x)$ folgt, dass tan auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton steigend ist.

Für $x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ gilt $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$ und für $x \notin \pi\mathbb{Z}$ wegen Satz 6.14 (ix) $\tan(x - \frac{\pi}{2}) = -\cot(x)$. Also ist cot auf $(0, \pi)$ streng monoton fallend.

Beide Funktionen tan und cot sind wegen Beispiel 5.19 (iii) stetig. Dann sind die Folgen $(\tan(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$, $(-\tan(\pi - \frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$, $(\cot(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(-\cot(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ identische streng monoton fallende positive Nullfolgen. Dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \tan(-\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \cot(\pi - \tfrac{1}{n}) = -\infty \qquad \lim_{n\to\infty} \cot(\tfrac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \tan(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{n}) = \infty$$

Also sind $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ und $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ wegen Satz 6.1 surjektiv. **q.e.d.**

Die Umkehrfunktion von $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ und $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ heißen

$$\begin{aligned} \text{Arcustangens} : \mathbb{R} \to (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}), \qquad & x \mapsto \arctan(x) \\ \text{Arcuscotangens} : \mathbb{R} \to (0, \pi), \qquad & x \mapsto \operatorname{arccot}(x). \end{aligned}$$

Beide Funktionen sind wegen Satz 6.21 streng monoton und wegen Korollar 6.4 stetig.

Kapitel 7

Differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

7.1 Definition der Ableitung

Definition 7.1. *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion auf einer Teilmenge X von $\mathbb{R}$, die eine Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}$ enthält. Dann heißt f im Punkt x_0 differenzierbar, wenn es ein $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die folgende reelle Funktion stetig in $x = x_0$ ist:*

$$X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{für } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{für } x = x_0 \end{cases} .$$

Wenn X offen ist und f in jedem Punkt differenzierbar ist, heißt f differenzierbar und die Funktion $f' : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$ heißt Ableitung von f.

Satz 7.2. *Sei f im Punkt x_0 differenzierbar, dann ist f im Punkt x_0 auch stetig.*

Beweis:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Also folgt die Aussage aus den Rechenregeln für Folgen und daraus, dass $x \mapsto (x - x_0)$ stetig ist. Hierbei benutzen wir das Kriterium (iii) aus Satz 5.14 **q.e.d.**

Definition 7.3. *Das Differential von f im Punkt x_0 ist die lineare Abbildung $df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h \mapsto f'(x_0)h$. Die Gerade $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)\}$ heißt Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Der Graph ist dabei*

$$\mathit{Graph}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}.$$

Die Sekante durch zwei Punkte $(x_0, f(x_0)) \neq (x_1, f(x_1))$ des Graphen ist gegeben durch

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x_0) + \tfrac{x-x_0}{x_1-x_0}(f(x_1) - f(x_0))\}.$$

Im Grenzwert $x_1 \to x_0$ 'konvergiert' die Sekante durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ gegen die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0.f(x_0))$.

Beispiel 7.4. **(i)** *$f(x) = |x|$. Für $x_0 = 0$ ist* $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$ *Also ist f im Punkt $x_0 = 0$ stetig aber nicht differenzierbar.*

(ii) *$f(x) = c \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$ für alle $x \neq x_0$. Also ist f differenzierbar mit $f'(x) = 0$.*

(iii) *$f(x) = x \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 1$ für alle $x \neq x_0$. Also ist f differenzierbar mit $f'(x) = 1$.*

(iv) *$f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$. $\Longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \ldots + x_0^{n-1}$ für alle $x \neq x_0$. Also ist f differenzierbar mit $f'(x) = nx^{n-1}$.*

(v) *Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihenfunktion mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n$ auch ein Potenzreihe mit Konvergenzradius R und wegen Satz 4.26 (iv) stetig. Deshalb ist f in $x = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = a_1$. Aus Satz 4.27 (ii) folgt, dass f für alle $x \in (-R, R)$ in x differenzierbar und die Ableitung $f'(x)$ gegeben ist durch die Potenzreihe $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ mit Konvergenzradius R.*

(vi) *$f(x) = \exp(x)$*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left(\frac{\exp(x-x_0)-1}{x-x_0}\right)\exp(x_0).$$

Aufgrund der Definition der Exponentialfunktion gilt: $\frac{\exp(x-x_0)-1}{x-x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{(n+1)!}$. Diese Potenzreihenfunktion ist stetig und bei $x - x_0 = 0$ gleich 1. Also folgt

$$f'(x) = \exp(x)$$

(vii) *$f(x) = \sin(x)$*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2} + \frac{x+x_0}{2}\right) + \sin\left(\frac{x-x_0}{2} - \frac{x+x_0}{2}\right)}{x-x_0} = \frac{2}{x-x_0}\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$$

Und wegen der Potenzreihe von $\sin$ gilt $\frac{2}{x-x_0}\sin(\frac{x-x_0}{2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(\frac{x-x_0}{2})^{2k}$. Diese Potenzreihenfunktion ist stetig und bei $\frac{x-x_0}{2} = 0$ gleich 1. Also folgt

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x+x}{2}\right) = \cos(x).$$

(viii) $f(x) = \cos(x)$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\cos(x)-\cos(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{x_0+x}{2} - \frac{x_0-x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x_0+x}{2} + \frac{x_0-x}{2}\right)}{x-x_0} = \frac{2}{x-x_0}\sin\left(\frac{x_0+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x_0-x}{2}\right).$$

Wegen $\frac{2}{x-x_0}\sin\left(\frac{x_0-x}{2}\right) = -\frac{2}{x-x_0}\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)$ *folgt* $f'(x) = -\sin(\frac{x+x}{2}) = -\sin(x)$.

7.2 Rechenregeln der Ableitung

Satz 7.5. *(Leibnizregel) Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Dann sind auch die Funktionen $\lambda f, f+g$ und $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0) \qquad (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Wenn $f(x_0) \neq 0$ dann ist $X' = f^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]$ wegen Satz 7.2 eine Umgebung von x_0 und $\frac{1}{f} : X' \to \mathbb{R}, \quad x \to \frac{1}{f(x)}$ in x_0 differenzierbar mit $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$.

Beweis: Es gilt

$$\frac{\lambda f(x) - \lambda f(x_0)}{x-x_0} = \lambda\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \text{und}$$

$$\frac{f(x)+g(x)-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x_0-x_0} \qquad \text{und}$$

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x) + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x_0) \qquad \text{und}$$

$$\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right)\frac{1}{x-x_0} = -\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x)f(x_0)(x-x_0)}.$$

Also folgt die Aussage aus Beispiel 5.19 und Satz 7.2. **q.e.d.**

Satz 7.6. *(Kettenregel) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen und $X \subset \mathbb{R}$ eine Umgebung von x_0 und $Y \subset \mathbb{R}$ eine Umgebung von $f(x_0)$. Wenn f in x_0 differenzierbar ist und g in $f(x_0)$, dann ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar mit*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Beweis: $\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, wobei wir den linken Faktor für $f(x) = f(x_0) = y_0$ durch $g'(y_0)$ ersetzen. Dieser linke Faktor ist die Komposition von $x \mapsto f(x)$ mit $y \mapsto \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$ für $y \neq y_0$ und $y_0 \to g'(y_0)$, also wegen Satz 5.16 und Satz 7.2 in x_0 stetig. Also folgt die Behauptung aus Beispiel 5.19. **q.e.d.**

Satz 7.7. *(Ableitung der Umkehrfunktion) Sei $f : X \to Y$ eine bijektive Funktion von einer Umgebung $X \subset \mathbb{R}$ von x_0 auf eine Umgebung $Y \subset \mathbb{R}$ von $y_0 = f(x_0)$. Wenn f in x_0 differenzierbar ist mit $f'(x_0) \neq 0$ und f^{-1} in y_0 stetig ist, dann ist f^{-1} in y_0 differenzierbar mit $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

Beweis: $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$ für $y = f(x)$ und $y_0 = f(x_0)$. Die Funktion $y \mapsto \begin{cases} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} & \text{für } y \neq y_0 \\ \frac{1}{f'(x_0)} & \text{für } y = y_0 \end{cases}$ ist die Komposition der Funktion $y \to f^{-1}(y)$ mit $x \mapsto \begin{cases} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} & \text{für } x \neq x_0 \Leftrightarrow f(x) \neq f(x_0) \\ \frac{1}{f'(x_0)} & \text{für } x = x_0 \end{cases}$. Der Satz folgt aus Korollar 5.16. **q.e.d.**

Beispiel 7.8. **(i)** $\ln \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x)$

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(y)} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{x} \text{ mit } \exp(y) = x.$$

(ii) $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad x \mapsto \arcsin(x)$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ mit } \sin(y) = x \text{ und } x^2 \neq 1.$$

(iii) $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi], \quad x \mapsto \arccos(x)$

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(y)} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ mit } \cos(y) = x \text{ und } x^2 \neq 1.$$

(iv) $\cdot^\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

$$(\cdot^\alpha)'(x) = \exp(\alpha \ln(x))' = \exp(\alpha \ln(x)) \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

(v) $a^\cdot : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a^x, a \in \mathbb{R}^+$.

$$(a^\cdot)'(x) = \exp(x \cdot \ln(a))' = \exp(x \ln(a)) \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x.$$

(vi) **Quotientenregel.** *Seien f und g in x_0 differenzierbar und $g(x_0) \neq 0$. Dann ist $\dfrac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)}{g^2(x_0))} g'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

(vii) $x \mapsto \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

(viii) $x \mapsto \cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

$$\cot'(x) = \frac{-\sin(x)\sin(x) - \cos(x)cos(x)}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}.$$

(ix) $\operatorname{arctan} : \mathbb{R} \to \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x \mapsto \arctan(x)$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(y)} = \frac{1}{1 + x^2} \textit{ mit } \tan(y) = x.$$

(x) $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi), \quad x \mapsto \operatorname{arccot}(x)$

$$\operatorname{arccot}'(x) = \frac{-1}{1 + \cot^2(g)} = \frac{-1}{1 + x^2} \textit{ mit } \cot(y) = x.$$

(xi) $\log_a \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x) \quad \log_a'(x) = \left(\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \dfrac{1}{x\ln(a)}.$

(xii) $x^x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto x^x$

$$(x^x)' = \exp(x \cdot \ln(x))' = \exp(x \cdot \ln(x)) \left(\ln(x) + x\frac{1}{x}\right) = (\ln(x) + 1) \cdot x^x.$$

(xiii) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \textit{für } x \neq 0 \\ 0 & \textit{für } x = 0. \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0\pm} \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0\pm} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 & \textit{für } x = 0 \\ 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \textit{für } x \neq 0. \end{cases}.$$

Diese Funktion ist zwar differenzierbar, aber f' ist im Punkt $x = 0$ nicht stetig.

7.3 Mittelwertsatz und Monotonie

Definition 7.9. *(lokale Maxima und Minima) Eine relle Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ hat bei $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Maximum bzw. Minimum, falls es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ bzw. $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ gilt.*

Wenn für eine bei x_0 differenzierbaren Funktion $f'(x_0)$ nicht verschwindet, dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)| < |f'(x_0)|$ für alle $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ gilt. Dort hat $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ das gleiche Vorzeichen wie $f'(x_0)$. Dann gilt entweder $f(x) < f(x_0)$ für $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ und $f(x) > f(x_0)$ für $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$ oder $f(x) > f(x_0)$ für $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ und $f(x) < f(x_0)$ für $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$. Eine differenzierbare Funktion kann also nur an den Nullstellen der Ableitung lokale Extremwerte besitzen.

Definition 7.10. *(kritischer Punkt und kritischer Wert) Eine Nullstelle der Ableitung einer differenzierbaren Funktion heißt kritischer Punkt. Der entsprechende Funktionswert heißt kritischer Wert.*

Kanditaten für die Minima und Maxima einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind

(i) Kritische Punkte in (a, b)

(ii) Randpunkte, also entweder a oder b

(iii) Punkte in (a, b) an denen f nicht differenzierbar ist.

Satz 7.11. *(Satz von Rolle) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Falls $f(a) = f(b)$, dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.*

Beweis: Wegen Korollar 5.17 gibt es $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ für alle $x \in [a, b]$. Wenn x_1 und x_2 beide am Rand liegen $x_1, x_2 \in \{a, b\}$ dann muss f konstant gleich $f(a) = f(b)$ sein. Also gilt dann $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Andernfalls muss es einen lokalen Extremwert in (a, b) geben, an dem die Ableitung verschwindet. **q.e.d.**

Satz 7.12. *(Verallgemeinerter Mittelwertsatz) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit*

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0) \quad \text{d.h. für } g(b) \neq g(a) \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Die Tangente an $\{(f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b]\}$ in $(f(x_0), g(x_0))$ verläuft also parallel zu der Verbindungsgeraden der Endpunkte $(f(a), g(a))$ und $(f(b), g(b))$.
Beweis: $x \mapsto (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$ erfüllt die Vorraussetzungen von Satz 7.11. Die Ableitung ist Null für $f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0)$. **q.e.d.**

Satz 7.13. *(Mittelwertsatz) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Beweis: Wende den verallgemeinerten Mittelwertsatz auf f und $\mathbb{1}_{[a,b]}$ an. **q.e.d.**

Satz 7.14. *(Schrankensatz) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar mit $|f'(x)| \leq L$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist f lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L.*

Beweis: Seien $x < y \in [a,b]$. Dann erfüllt $f : [x,y] \to \mathbb{R}$ die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Also gibt es $x_0 \in (x,y)$ mit $f(y) - f(x) = f'(x_0)(y-x)$. Dann folgt $|f(y) - f(x)| = |f'(x_0)||y-x| \leq L|y-x|$. **q.e.d.**

Satz 7.15. *(Ableitung und Monotonie) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann gilt*

(i) *$f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b) \iff f$ ist konstant.*

(ii) *$f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b) \iff f$ ist monoton steigend.*

(iii) *$f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b) \iff f$ ist monoton fallend.*

(iv) *$f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$ und der Abschluss der Menge $\{x \in (a,b) \mid f'(x) > 0\}$ ist $[a,b] \iff f$ ist streng monoton steigend.*

(v) *$f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$ und der Abschluss der Menge $\{x \in (a,b) \mid f'(x) < 0\}$ ist $[a,b] \iff f$ ist streng monoton fallend.*

Beweis: Weil eine Funktion genau dann konstant ist, wenn sie monoton steigend und monoton fallend ist, folgt (i) aus (ii) und (iii). Wir beweisen nur (ii) und (iv). Für $a \leq x < y \leq b$ erfüllt $f : [x,y] \to \mathbb{R}$ die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Aus $f'(x_0) \geq 0$ für alle $x_0 \in (a,b)$ folgt $f(y) - f(x) \geq 0$, und f ist monoton wachsend. Umgekehrt folgt $f(x_0) > f(x)$ für ein $x > x_0$ aus $f'(x_0) < 0$ und f ist nicht monoton steigend. Es folgt (ii). Wenn f monoton wachsend, aber nicht streng monoton ist, dann gibt es $a \leq x < y \leq b$ mit $f(x) = f(y)$. Auf $[x,y]$ ist dann f konstant und $f'(z) = 0$ für $z \in (x,y)$. Weil jede offene Menge ein solches Intervall enthält folgt (iv). **q.e.d.**

Korollar 7.16. *(isolierte kritische Punkte) Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in (a,b)$ ein kritischer Punkt.*

(i) *Sei f' bei x_0 differenzierbar und $f''(x_0) > 0$. Dann ist x_0 ein lokales Minimum.*

(ii) *Sei f' bei x_0 differenzierbar und $f''(x_0) < 0$. Dann ist x_0 ein lokales Maximum.*

(iii) *Wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $f'(x) \leq 0$ für $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ und $f'(x) \geq 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$ gilt, dann ist x_0 ein lokales Minimum.*

(iv) *Wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $f'(x) \geq 0$ für $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ und $f'(x) \leq 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$ gilt, dann ist x_0 ein lokales Maximum.* **q.e.d.**

Beispiel 7.17. *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x+1)e^{-x}$ hat die Ableitung $f'(x) = (1 - (x+1))e^{-x} = -xe^{-x}$. Also ist sie auf $(-\infty, 0]$ streng monoton wachsend und auf $[0, \infty)$ streng monoton fallend. Insbesondere ist $f(0) = 1$ ein globales Maximum. Also gilt $x + 1 \leq e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \leq e^{y-1}$ für alle $y = x + 1 \in \mathbb{R}$.*

7.4 Regel von de L'Hopital

Definition 7.18. *(Grenzwerte von Funktionswerten) Für eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{K}$ existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ genau dann, wenn für ein $f(a) \in \mathbb{K}$ die Funktion $x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ für } x \in (a, b) \\ f(a) \text{ für } x = a \end{cases}$ stetig bei $x = a$ ist. Wir schreiben dann $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$.*

Der analoge Grenzwert $x \to b$ wird mit $\lim_{x \to b-} f(x)$ bezeichnet. Aufgrund der Definition der Stetigkeit existiert der Grenzwert $\lim_{x \to a+} f(x)$ also genau dann, wenn es ein $f(a) \in \mathbb{K}$ gibt, so dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit den aus $|x - a| < \delta$ folgt $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Wegen Satz 5.14 ist das äquivalent dazu, dass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (a, b), die gegen a konvergiert, die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(a)$ konvergiert.

Satz 7.19. *(1. Regel von de L'Hopital) Seien $\infty < a < b < \infty$ und f und g auf (a, b) differenzierbare Funktionen mit $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to a+} g(x)$. Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existsiert, dann existiert auch $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Bemerkung 7.20. *Wenn die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to a+} f'(x)$ und $\lim\limits_{x \to a+} g'(x)$ existieren und der zweite nicht verschwindet, dann existiert auch $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ mit $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a+} f'(x)}{\lim\limits_{x \to a+} g'(x)}$.*

Beweis: Wenn der Grenzwert $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, ist $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b')$ mit $a < b' \leq b$. Aus dem Mittelwertsatz folgt $g(x) = g(x) - g(a) \neq 0$ für $x \in (a, b')$. Die auf $[a, b')$ stetig fortgesetzten Funktionen f und g erfüllen die Voraussetzungen des Verallgemeinerten Mittelwertsatzes. Deshalb gibt es für jedes $x \in (a, b')$ ein $x_0 \in (a, x)$ so dass $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ gilt. Wenn also der Grenzwert $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch der Grenzwert $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. **q.e.d.**

Satz 7.21. *(2. Regel von de L'Hopital) Unter derselben Voraussetzung wie bei der 1.Regel von de L'Hopital, nur gelte $\lim\limits_{x \to a+} g(x) = \infty$ statt $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = 0$, gilt dieselbe Schlußfolgerung.*

Beweis*: Wenn $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, gibt es $b' \in (a, b)$ mit $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b')$. Für $a < x < y < b'$ folgt $g(y) \neq g(x)$ aus dem Mittelwertssatz, und wegen dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gibt es $x_0 \in (x, y)$ mit $\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. Wenn f und g die Vorraussetzungen der 2. Regel von de L'Hopital erfüllen, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $y \in (a, b')$, so dass es für alle $x_0 \in (a, y)$ gilt $|\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$ mit $\alpha = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Dann folgt $\alpha - \frac{\epsilon}{2} < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < \alpha + \frac{\epsilon}{2}$ für alle $x \in (a, y)$. Wegen $\lim_{x \to a+} g(x) = \infty$ gibt es ein $y_0 \in (a, y)$ so dass für alle $x \in (a, y_0)$ gilt $g(x) > \min\{(g(y), 0\}$. Daraus folgt

$$\left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right)(g(x) - g(y)) + f(y) < f(x) < \left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right)(g(x) - g(y)) + f(x) \quad \text{oder}$$

$$\left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{f(y) - g(y)\left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < \left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{f(y) - g(y)\left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right)}{g(x)}.$$

Wegen $\lim_{x \to a+} g(x) = \infty$ gibt es dann auch ein $y_1 \in (a, y_0)$, so dass für alle $x \in (a, y_1)$ gilt $\alpha - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha + \epsilon$. Also gilt $\lim_{x_0 \to a+} \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \lim_{x_0 \to a+} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. **q.e.d.**

Die analogen Aussagen für die Grenzwerte $\lim_{x \to b-}$ gelten natürlich auch. Grenzwerte der Form $\lim_{x \to -\infty+} f(x)$ bzw. $\lim_{x \to \infty-} f(x)$ definieren wir als die Grenzwerte $\lim_{x \to 0-} f(1/x)$ bzw. $\lim_{x \to 0+} f(1/x)$. Wegen der Kettenregel gilt dann

$$\frac{df(\frac{1}{x})}{dx}\left(\frac{dg(\frac{1}{x})}{dx}\right)^{-1} = \tfrac{-1}{x^2} f'(\tfrac{1}{x}) \left(\tfrac{-1}{x^2} g'(\tfrac{1}{x})\right)^{-1} = f'(\tfrac{1}{x})/g'(\tfrac{1}{x}).$$

Deshalb gelten die analogen Aussagen auch für diese Grenzwerte.

7.5 Konvexität und Ableitungen

Definition 7.22. *Eine reelle Funktion auf einem Intervall heißt konvex bzw. streng konvex, wenn für alle $a \neq b$ im Definitionsbereich und alle $t \in (0, 1)$ Folgendes gilt*

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b) \quad \text{bzw.} \quad f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b).$$

Satz 7.23. *Für eine reelle Funktion f auf einem Intervall I ist Folgendes äquivalent:*

(i) *f ist konvex*

(ii) *Für $[a, b] \subset I$ und $x \in (a, b)$ gilt* $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

(iii) *Für $[a, b] \subset I$ und $x \in (a, b)$ gilt* $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \dfrac{f(b) - f(x)}{b - x}$.

(iv) *Für $[a, b] \subset I$ und $x \in (a, b)$ gilt* $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \dfrac{f(b) - f(x)}{b - x}$.

Die analogen Äquivalenzen zu streng konvex gelten, wenn $\leq$ durch $<$ ersetzt wird.

Beweis: Wir können wegen der Symmetrie $(a, b, t) \leftrightarrow (b, a, 1-t)$ in (i) $a < b$ annehmen. Dann sei $x = (1-t)a + tb \in (a, b) \Leftrightarrow t = \frac{x-a}{b-a} \in (0, 1)$. Also ist (i) äquivalent zu

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \quad \Leftrightarrow \quad (b-a)f(x) \leq (b-x)f(a) + (x-a)f(b).$$

Ersetzen wir entweder $(b-x) = (b-a) - (x-a)$, oder $(x-a) = (b-a) - (b-x)$ oder $(b-a) = (b-x) + (x-a)$, dann ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$
\begin{aligned}
(b-a)(f(x) - f(a)) &\le (x-a)(f(b) - f(a)) && \Leftrightarrow && \text{(ii)}\\
(b-a)(f(x) - f(b)) &\le (b-x)(f(a) - f(b)) && \Leftrightarrow && \text{(iii)}\\
(b-x)(f(x) - f(a)) &\le (x-a)(f(b) - f(x)) && \Leftrightarrow && \text{(iv)}.
\end{aligned}
$$

Die analogen Aussagen für streng konvex lassen sich genauso beweisen, wenn wir alle Ungleichungen $\le$ durch $<$ ersetzen. **q.e.d.**

Korollar 7.24. *Für eine stetige relle Funktion auf einem Intervall I, die im Inneren von I differenzierbar ist, ist Folgendes äquivalent:*

(i) *f ist (streng) konvex*

(ii) *f' ist (streng) monoton wachsend*

Beweis: (i)$\Rightarrow$(ii): Seien $a < x < b$, $y \in (a, x)$ und $z \in (x, b)$ Punkte im Inneren von I. Aus Satz 7.23 folgt $\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \le \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \le \frac{f(b)-f(z)}{b-z}$. Aus den Grenzwerten $y \to a+$ und $z \to b-$ folgt $f'(a) \le \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \le f'(b)$ und damit (ii).
(ii)$\Rightarrow$(i): Für $[a, b] \subset I$ und $x \in (a, b)$ gibt es wegen dem Mittelwertsatz $y \in (a, x)$ und $z \in (x, b)$ mit $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(y) \le f'(z) = \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$. Aus Satz 7.23 (iv) folgt (i). **q.e.d.**

Korollar 7.25. *Für eine stetige reelle Funktion auf einem Intervall, die im Inneren zweimal differenzierbar ist, ist Folgendes äquivalent*

(i) *f ist (streng) konvex.*

(ii) *$f''(x) \ge 0$ im Inneren des Intervalls (und der Abschluss der Menge $\{x \mid f''(x) > 0\}$ ist das ganze Intervall).*

Dieses Korollar folgt sofort aus Korollar 7.24 und Satz 7.15. **q.e.d.**

Wenn wir die Ungleichungen zwischen den Funktionswerten alle umdrehen, so erhalten wir die analogen Aussagen für konkave Funktionen. Also ist eine Funktion f genau dann (streng) konkav, wenn die negative Funktion $-f$ (streng) konvex ist.

Übungsaufgabe 7.26. *Zeige, dass die Umkehrfunktion einer (streng) konvexen bijektiven (streng) monoton wachsenden Funktion (streng) konkav ist.*

Beispiel 7.27. **(i)** $f(x) = x^2 \Longrightarrow f'' = 2$. *Also ist f streng konvex.*

(ii) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto \sqrt{x} \Longrightarrow f'' = \frac{-1}{4x^{3/2}}$. *Also ist f streng konkav.*

(iii) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \exp(x) \Longrightarrow \exp'' = \exp$. *Also ist* exp *streng konvex.*

(iv) $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x) \Longrightarrow \ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$. *Also ist* ln *streng konkav.*

7.6 Konvexität und Ungleichungen

Satz 7.28.* *(Ungleichung von Jensen) Sei f eine reelle konvexe Funktion auf einem Intervall. Seien $x_1, \ldots, x_n$ im Definitionsbereich und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positive Zahlen, die $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ erfüllen. Dann gilt*

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n).$$

Wenn f streng konvex ist, dann gilt Gleichheit nur für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Beweis*: durch vollständige Induktion:

(i) Für $n = 1$ muss $\lambda_1 = 1$ sein, so dass die Aussage klar ist.

(ii) Die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}$. Seien $x_1, \ldots, x_{n+1}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ wie gefordert. Dann definieren wir $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ und $x = \frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda} x_n$. Also gilt $\lambda_{n+1} = 1 - \lambda$ und $\frac{\lambda_1}{\lambda} + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda} = 1$. Dann folgt aus der Induktionsvoraussetzung $f(x) \leq \frac{\lambda_1}{\lambda} f(x_1) + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda} f(x_n)$. Wenn f streng konvex ist, dann gilt Gleichhheit nur für $x_1 = \ldots = x_n$. Weil f konvex ist folgt aber $f(\lambda x + (1-\lambda) x_{n+1}) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x_{n+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$. Wenn f streng konvex ist, dann gilt Gleichheit wieder nur für $x_{n+1} = x = x_1 = \ldots = x_n$. **q.e.d.**

Korollar 7.29.* *(Ungleichung arithmetisches-geometrisches Mittel) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positive Zahlen mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Dann gilt für positive Zahlen $x_1, \ldots, x_n$*

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n.$$

Insbesondere gilt $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$. Gleichheit gilt nun für $x_1 = x_2 \ldots = x_n$.

Beweis*: $-\ln$ ist streng konvex. Also folgt aus Jensen's Ungleichung

$$\begin{aligned} -\ln(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) &\leq -\lambda_1 \ln x_1 - \ldots - \lambda_n \ln x_n \\ \iff \lambda_1 \ln x_1 + \ldots + \lambda_n \ln x_n &\leq \ln(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \end{aligned}$$

Wegen der Monotonie von exp folgt:

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} = \exp(\lambda_1 \ln x_1 + \ldots + \lambda_n \ln x_n) \leq \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n.$$ **q.e.d.**

Ersetzen wir $x_1, \ldots, x_n$ durch $y_1^{1/\lambda_1}, \ldots, y_n^{1/\lambda_n}$ so erhalten wir

Korollar 7.30.* *Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positive Zahlen mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Dann gilt*

$$y_1 \ldots y_n \leq \lambda_1 y_1^{1/\lambda_1} + \ldots + \lambda_n y^{1/\lambda_n}$$

für alle $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^+$. Gleichheit gilt nur für $y_1^{1/\lambda_1} = y_2^{1/\lambda_2} = \ldots = y_n^{1/\lambda_n}$. **q.e.d.**

Korollar 7.31. *(Young'sche Ungleichung) Seien $p, q \in \mathbb{R}^+$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt*

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^+ \text{ und Gleichheit nur } x^p = y^q.$$

Beweis: Wegen der strengen Monotonie von ln ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$\ln(xy) = \tfrac{1}{p}\ln(a) + \tfrac{1}{q}\ln(b) \leq \ln\left(\tfrac{1}{p}a + \tfrac{1}{q}b\right) = \ln\left(\tfrac{1}{p}x^p + \tfrac{1}{q}y^q\right) \qquad \text{mit } a = x^p \text{ und } b = y^q.$$

Weil ln streng konkav ist, gilt diese Ungleichung und Gleichheit nur für $a = b$. **q.e.d.**

7.7 Taylorreihen

Auf offenen Intervallen I (Teilmenge von $\mathbb{R}$) ist die Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion f wieder eine Funktion auf I. Die Bildung der Ableitung ist also eine lineare Abbildung $\frac{d}{dx}$, die differenzierbaren Funktionen auf I, Funktionen auf I zuordnet. Wenn die Ableitung wieder differenzierbar ist, können wir diese Abbildung nochmal anwenden und erhalten $(\frac{d}{dx})^2 f = f''$ die zweite Ableitung von f. Durch n–faches Anwenden erhalten wir gegebenenfalls dann die n-te Ableitung $(\frac{d}{x})^n f = f^{(n)}$.

Definition 7.32. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle offenen Teilmengen $I \subset \mathbb{R}$ sei $C^n(I)$ die Menge aller n-mal stetig differenzierbaren reellen Funktionen auf I, und $C^\infty(I)$ die Menge aller beliebig oft differenzierbaren reellen Funktionen auf I.*

$$C(I) = C^0(I) \supset C^1(I) \supset \ldots \supset C^n(I) \supset \ldots \supset C^\infty(I)$$

Beispiel 7.33. **(i)** $\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$, *weil* $\exp^{(n)} = \exp$.

(ii) *für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $x \mapsto x^n \in C^\infty(\mathbb{R})$, weil $(x^n)^{(n)} = n!$ und $(x^n)^{(m)} = 0$ für $m > n$.*

(iii) *für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x \mapsto x^{-n} \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, weil $(x \mapsto x^{-n})^{(m)} =$*

$$x \mapsto \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-m+1)}{x^{n+m}} = (-1)^m \frac{(n+m-1)(n+m-2)\ldots n}{x^{n+m}}.$$

(iv) $\ln \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ *weil* $\ln^{(m)}(x) = \dfrac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{x^m}$ *für $m \geq 1$ und mit $0! = 1$.*

Übungsaufgabe 7.34. *Zeige mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:*

(i) $\dfrac{d^n}{dx^n} f \cdot g = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ *für alle $f, g \in C^n(I)$ (Verallgemeinerte Leibnizregel).*

(ii) *$C^n(I)$ ist eine Unteralgebra von $C(I)$.*

Aus der Rechenregel und der Kettenregel folgt auch

Korollar 7.35. **(i)** *Die Komposition von n-mal (stetig) differenzierbaren Funktionen ist wieder n-mal (stetig) differenzierbar.*

(ii) *Die Umkehrfunktion einer n-mal (stetig) differenzierbaren bijektiven Funktion ist n-mal (stetig) differenzierbar, wenn die Ableitung keine Nullstellen hat.* **q.e.d.**

Definition 7.36. *(Taylor-Polynom) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 n-mal differenzierbar, d.h. es gibt eine offene Umgebung $O \subset I$ von x_0, so dass die Einschränkung von f auf O in $C^{n-1}(O)$ liegt, und $f^{(n-1)}$ in x_0 differenzierbar ist. Dann heißt*

$$T_{n,x_0}(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f^{(2)}(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

das Taylorpolynom von f der Ordnung n in x_0.

Offenbar hat das Taylorpolynom der Ordnung n in x_0 die gleichen Ableitungen bis zur Ordnung n wie f an dem Punkt x_0. Es ist das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad n, das an der Stelle x_0 die Ableitungen $f(x_0), f^{(1)}(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ besitzt:

$$p(x) = c_0+c_1(x-x_0)+\ldots+c_n(x-x_0)^n \Longrightarrow p(x_0) = c_0, p^{(1)}(x_0) = c_1, \ldots, p^{(n)}(x_0) = n!c_n.$$

Satz 7.37. *(Taylorformel) Sei $f \in C^n((a,b))$. Wenn $f^{(n+1)}(x)$ für alle $x \in (a,b)$ existiert, dann gibt es für jedes $x_0 \neq x \in (a,b)$ ein $\xi \in (x_0,x)$ bzw. $\xi \in (x,x_0)$, so dass*

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad \textit{gilt.}$$

Beweis: Sei $x \in (a,b)$ und $g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$ für $t \in (a,b)$. Dann gilt

$$g'(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Außerdem sei $h(t) = (x-t)^{n+1}$ und $h'(t) = -(n+1)(x-t)^n$. Dann folgt aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz, dass es ein $\xi \in (x_0,x)$ bzw. $\xi \in (x_0,x)$ gibt mit

$$(g(x) - g(x_0))h'(\xi) = (h(x) - h(x_0))g'(\xi).$$

Es gilt aber $g(x) - g(x_0) = f(x) - T_{n,x_0}(x)$ und $h(x) - h(x_0) = -(x - x_0)^{n+1}$. Also folgt $f(x) - T_{n,x_0}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)^{n+1}}{n!(n+1)(x-\xi)^n} = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$. **q.e.d.**

Definition 7.38. *(Taylorreihe) Für $f \in C^\infty((a,b))$ und $x_0 \in (a,b)$ heißt die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ Taylorreihe von f in x_0.*

Für $f \in C^\infty((a,b))$ und $x_0, x \in (a,b)$ gibt es drei Möglichkeiten:

(i) Die Taylorreihe von f in x_0 konvergiert an dem Punkt x gegen $f(x)$.

(ii) Die Taylorreihe von f in x_0 konvergiert an dem Punkt x, aber nicht gegen $f(x)$.

(iii) Die Taylorreihe von f in x_0 konvergiert an dem Punkt x nicht.

Korollar 7.39. *Sei $f \in C^\infty((a,b))$ und $x \neq x_0 \in (a,b)$. Dann konvergiert die Taylorreihe von f in x_0 an dem Punkt x gegen $f(x)$, wenn auf $\xi \in (x_0, x)$ bzw. (x, x_0) die Folge $(\frac{|f^n(\xi)|}{n!}|x-x_0|^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichmäßig gegen Null konvergiert.* **q.e.d.**

Beispiel 7.40.

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \textit{für } x > 0 \\ 0 & \textit{für } x \leq 0 \end{cases} \\ f^{(n)}(x) &= \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \textit{ Polynom vom Grad 3n von } \frac{1}{x} & \textit{für } x > 0 \\ 0 & \textit{für } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Wegen Beispiel 7.17 gilt $x \leq e^{x-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann folgt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{1}{|x|} \leq e^{(\frac{1}{|x|}-1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|x|^n} \leq e^{(\frac{n}{|x|}-n)} \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{|x|^n} \leq \exp\left(\frac{-1+n|x|-nx^2}{x^2}\right).$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist dann $x \to \begin{cases} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} & \textit{für } x > 0 \\ 0 & \textit{für } x \leq 0 \end{cases}$ stetig, und $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Die Taylorreihe von f bei $x_0 = 0$ verschwindet mit allen Ableitungen von f bei $x_0 = 0$.

Satz 7.41. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $C^1((a,b))$ eines beschränkten Intervalles (a,b), die für ein $x_0 \in (a,b)$ punktweise konvergiert. Wenn die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ außerdem gleichmäßig gegen g konvergiert, dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in C^1((a,b))$ und es gilt $f' = g$.*

Beweis: Wegen dem Mittelwertsatz gilt für alle $x, x_0 \in (a,b)$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |x - x_0| \sup\{|f_n'(y) - f_m'(y)| \mid y \in (a,b)\}.$$

Wegen Satz 5.27 konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in C((a,b))$. Wegen dem Mittelwertsatz gibt es für alle $x \neq x_1 \in (a,b)$ eine Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (x, x_1) bzw. (x_1, x), so dass $f_n(x) - f_n(x_1) = (x - x_1) f_n'(\xi_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen dem Auswahlprinzipien von Bolzano-Weierstraß gibt es eine konvergente Teilfolge von $(\xi_n)_{n\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $\xi \in [x, x_1]$ bzw. $\xi \in [x_1, x]$. Wegen

$$|f_n'(\xi_n) - g(\xi)| \leq |f_n(\xi_n) - g(\xi_n)| + |g(\xi_n) - g(\xi)|,$$

und weil g wegen Satz 5.27 stetig ist, konvergiert die Folge $(f_n'(\xi_n))_{n\mathbb{N}}$ gegen $g(\xi)$. Also konvergiert $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x) = f(x_1) + (x - x_1)g(\xi)$. Aus der Stetigkeit von g folgt, dass f bei x_1 differenzierbar ist und $g(x_1)$ die Ableitung $f'(x_1)$ ist. **q.e.d.**

Korollar 7.42.* *Sei $(\sum f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Reihe in $C(I)$ auf einem beschränktem Intervall I und $(\sum f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $x_0 \in I$. Dann konvergiert $(\sum f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in C^1(I)$ und $(\sum f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f'.* **q.e.d.**

Korollar 7.43.* *(Satz von Borel) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R}$. Dann gibt es eine Funktion, deren Taylorreihe bei $x_0 = 0$ gleich $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ ist, und die außerhalb von $(-2, 2)$ verschwindet. D.h. alle Potenzreihen sind Taylorreihen einer solchen Funktion.*

Beweis*:

$$\text{Sei} \quad h(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq 1 \\ \exp\left(\exp\left(\frac{-1}{(|x|-1)^2}\right) \cdot \frac{-1}{(|x|-2)^2}\right) & \text{für } 1 < |x| < 2 \\ 0 & \text{für } 2 \leq |x| \end{cases}$$

Dann ist $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine 'Hutfunktion', die außerhalb von $(-2, 2)$ verschwindet, und die auf $[-1, 1]$ gleich 1 ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert dann eine Konstante $M_n > 0$

$$M_n = \max\{\|h_n\|_\infty, \|h_n'\|_\infty, \dots, \|h_n^{(n-1)}\|_\infty\}$$

mit $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n \cdot h(x)$. Dann sei für eine beliebige reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$C_n = |a_n| M_n + 1 \quad \text{und} \qquad f_n(x) = \frac{a_n}{n! C_n^n} h_n(C_n \cdot x) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt dann $f_n^{(m)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ a_n & \text{für } m = n. \end{cases}$ Außerdem gilt

$$\|f_n^{(m)}\|_\infty = \frac{|a_n| C_n^m}{n! C_n^n} \|h_n^{(m)}\|_\infty \leq \frac{|a_n| M_n C_n^m}{n! C_n^n} < \frac{C_n^{m+1}}{n! C_n^n} \leq \frac{1}{n!} \quad \text{für alle } n > m \in \mathbb{N}_0.$$

Also konvergiert für alle $m \in \mathbb{N}_0$ $(\Sigma f_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichmäßig. Wegen Korollar 7.42 konvergieren also für alle $m \in \mathbb{N}_0$ die Reihen $(\Sigma f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (\Sigma f_n')_{n\in\mathbb{N}_0}, \dots, (\Sigma f_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichmäßig gegen $f, f', \dots, f^{(m)}$. Also ist der Grenzwert $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ eine Funktion in $C^\infty(\mathbb{R})$ und es gilt $f^{(m)}(0) = a_m$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$. **q.e.d.**

Satz 7.44. *Für jede Potenzreihenfunktion $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ und jedes $|x_0| < R$ hat die Taylorreihe von $f(x)$ in x_0 einen Konvergenzradius nicht kleiner als $R - |x_0|$, und konvergiert auf $B(x_0, R - |x_0|)$ gegen f.*

Beweis: Wegen Beispiel 7.4 (v) stimmen bei $x_0 = 0$ die Ableitungen von f bis zur Ordnung N mit den entsprechenden Ableitungen von $\sum_{n=0}^N a_n x^n$ überein. Deshalb sind $T_{n,0} = \sum_{n=0}^N a_n x^n$ die Taylorpolynome von f bei $x_0 = 0$ und f ist dort die Taylorreihe. Dann folgt die Aussage aus dem Identitätssatz für Potenzreihenfunktionen (ii). **q.e.d.**

Satz 7.45. *(Abelscher Grenzwertsatz) Wenn die Potenzreihe* $(\sum a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *für ein* $x \in \mathbb{K}$ *konvergiert, dann konvergiert die Potenzreihenfunktion* $t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n(tx)^n$ *auf* $t \in [0,1]$ *gleichmäßig gegen eine stetige Funktion von* $[0,1]$ *nach* $\mathbb{K}$.

Beweis: Indem wir a_n durch $a_n x^n$ ersetzen können wir x weglassen. Zur Abkürzung setzen wir $S_{m,k} = \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n$. Wegen dem Cauchykriterium für Reihen gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $|S_{m,k}| < \epsilon$ für alle $m \geq N$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Dann folgt

$$\sum_{n=m+1}^{m+k} a_n t^n = S_{m,1} t^{m+1} + (S_{m,2} - S_{m,1}) t^{m+2} + \ldots + (S_{m,k} - S_{m,k-1}) t^{m+k}$$
$$= S_{m,1}(t^{m+1} - t^{m+2}) + S_{m,2}(t^{m+2} - t^{m+3}) + \ldots + S_{m,k-1}(t^{m+k-1} - t^{m+k}) + S_{m,k} t^{m+k}.$$

Für $t \in [0,1]$ sind die hinteren Faktoren $t^{m+1} - t^{m+2}, t^{m+2} - t^{m+3}, \ldots, t^{m+k-1} - t^{m+k}, t^{m+k}$ alle nicht negativ und ihre Summe gleich $t^{m+1} \leq 1$. Aus $|S_{m,k}| < \epsilon$ folgt also

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+k} a_n t^k\right| < \epsilon(t^{m+1} - t^{m+2} + t^{m+2} - \ldots - t^{m+k} + t^{m+k}) = \epsilon t^{m+1} \leq \epsilon \quad \text{für alle } t \in [0,1].$$

Also konvergiert die Potenzreihe auf $t \in [0,1]$ gleichmäßig, und damit wegen Satz 5.27 gegen eine stetige Funktion. **q.e.d.**

Definition 7.46. *Eine Funktion* $f \in C^\infty(I)$ *heißt reellanalytisch bei* x_0*, falls die Taylorreihe bei* x_0 *einen Konvergenzradius größer als Null hat und auf einer Umgebung von* x_0 *gegen* $f(x)$ *konvergiert. Sie heißt reellanalytisch, wenn das für alle* $x_0 \in I$ *gilt.*

Also sind alle Potenzreihenfunktionen im Inneren ihres Kovergenzbereiches reellanalytisch. Umgekehrt sind alle reellanalytischen Funktionen Potenzreihenfunktionen.

Beispiel 7.47. (i) *Die Funktionen* $\exp, \sin, \cos, x \mapsto a^x$ *und alle Polynome sind reellanalytische Funktionen auf ganz* $\mathbb{R}$.
(ii) *Wegen Satz 4.26 (iv) gibt es für jede Potenzreihenfunktion* f *mit* $f(0) \neq 0$ *und Konvergenzradius* $R > 0$ *ein* $r > 0$*, so dass* $|\frac{f(0)-f(x)}{f(0)}| \leq L < 1$ *für alle* $x \in B(0,r)$ *gilt. Weil* $x \mapsto \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x}$ *auf* $x \in [0,L]$ *stetig ist, konvergiert die Potenzreihenfunktion* $\frac{1}{f(0)} \sum_{n=0}^\infty (\frac{f(0)-f(x)}{f(0)})^n$ *für* $x \in B(0,r)$ *gegen* $\frac{1}{f(0)} \frac{1}{1-(f(0)-f(x))/f(0)} = \frac{1}{f(x)}$*. Aus dem Identitässatz für Potenzreihenfunktionen folgt, dass der Quotient zweier Potenzreihenfunktionen reellanalytisch ist, solange beide Potenzreihenfunktionen absolut konvergieren und der Nenner nicht verschwindet. Also sind* tan *und* cot *und alle rationalen Funktionen auf dem Definitionsbereich reellanalytisch.*

(iii) *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^+$ (für $\alpha \in \mathbb{Z}$ auch $x_0 \in \mathbb{R}^-$) hat die Potenzreihenfunktion*

$$x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x_0^{\alpha-n} x^n \quad \textit{mit} \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\cdots 1}$$

wegen dem Quotiententest den Konvergenzradius $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\alpha-n|}{|x_0|(n+1)}} = |x_0|$. *Die Ableitung ist* $x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x_0^{\alpha-n} x^{n-1} = \alpha \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x_0^{\alpha-1-n} x^n$. *Wegen*

$$\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}(\alpha-n+n) = \binom{\alpha}{n}$$

ist $(x_0+x)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n} x_0^{\alpha-1-n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x_0^{\alpha-n}x^n$. *Dann erfüllt f die Differentialgleichung $(x_0+x)f' = \alpha f$ mit $f(0) = x_0^{\alpha}$. Also verschwindet die Ableitung von*

$$g(x) = \frac{f(x)}{(x_0+x)^{\alpha}} \quad g'(x) = \frac{(x+x_0)f'(x) - \alpha f(x)}{(x+x_0)^{\alpha+1}} = 0 \qquad \textit{mit } g(0) = 1.$$

Dann folgt aus Satz 7.15 (i), dass für alle $|x| < x_0$ gilt $f(x) = (x+x_0)^{\alpha}$. Also sind für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktionen $x \mapsto x^{\alpha}$ auf $\mathbb{R}^+$ und für $\alpha \in \mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ reellanalytisch.

(iv) *Für alle $x_0 \in \mathbb{R}^+$ hat die Potenzreihenfunktion $x \mapsto f(x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-x)^n}{n x_0^n}$ im Konveregemzbereich $|x| < x_0$ die Ableitung $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-x)^n}{x_0^{n+1}} = \dfrac{1}{x+x_0}$. Also stimmt sie mit $f(x) = \ln(x+x_0) - \ln(x_0)$ überein. Deshalb sind sowohl* $\ln$ *also auch* $\log_a$ *auf $\mathbb{R}^+$ reellanalytisch. Insbesondere folgt aus dem Abelschen Grenzwertsatz $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.*

(v) *Die Ableitungen der Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen sind wegen (iii) im Inneren ihrer Definitionsbereiche reellanalytisch. Für alle $|x| < 1$ gilt*

$$\arcsin'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n} \qquad \arccos'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n}$$

$$\arctan'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad \operatorname{arccot}'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Wegen Beispiel 7.4 (v) sind sie selber dann auch reellanalytisch. Für alle $|x| < 1$ gilt

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Wegen Beispiel 7.17 gilt $x \geq \ln(1+x)$ für $x > -1$. Dann folgt

$$\ln\left((-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right) = \ln\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right)$$
$$\leq -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{1}\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Dann konvergieren aber die ersten beiden Potenzreihen auch für $x = \pm 1$ und die letzten beiden wegen der alternierenden Reihe von Leibniz. Wegen dem Abelschen Grenzwertsatz gelten die obigen Gleichungen dann auch für $x = \pm 1$. Insbesondere ist

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

(vi) *Die Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$ ist reellanalytisch auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, aber nicht bei $x_0 = 0$.*

(vii) *Die Funktion $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{e^x-1}{x}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ reellanalytisch und hat dort keine Nullstellen. Deshalb definiert $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto \dfrac{x}{e^x-1}$ eine Funktion in $C^\infty(\mathbb{R})$. Die Ableitungen bei $x = 0$ heißen Bernoulli Zahlen $B_0 = f(0) = 1, B_1 = f'(0) = -\frac{1}{2}, \ldots$. Dann hat f die Taylorreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n x^n}{n!}$. Aus $(e^x-1)f(x) = x$ folgt*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n x^n}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{B_k}{k!(n-k)!}x^n = x.$$

Wegen (ii) ist f reellanalytisch und es folgt für alle $n\in\mathbb{N}$ die Rekursionsformel

$$\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k = 0 \text{ also } B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k \text{ und } B_0 = 1.$$

Aus $f(x) - f(-x) = \frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{e^{-x}-1} = \frac{x}{e^x-1} + \frac{xe^x}{1-e^x} = -x$ folgt $B_{2n+1} = 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

(viii) *Die Funktion* tan *ist wegen (ii) reellanalytisch. Sie hat bei $x_0 = 0$ die Taylorreihe*

$$\tan(x) = \frac{e^{\imath x}-e^{-\imath x}}{\imath(e^{\imath x}+e^{\imath x})} = -\imath\frac{e^{2\imath x}+1-2}{e^{2\imath x}+1} = \frac{2\imath(e^{2\imath x}-1)}{e^{4\imath x}-1} - \imath = \frac{2\imath(e^{2\imath x}+1)-4\imath}{e^{4\imath x}-1} - \imath =$$
$$= \frac{1}{x}\left(\frac{2\imath x}{e^{2\imath x}-1} + \imath x + \frac{4\imath x}{e^{4\imath x}-1} - 2\imath x\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}-4^{2n}}{(2n)!}(-1)^n B_{2n}x^{2n-1}.$$

Aus dem Identitätssatz für Potenzreihenfunktionen folgt zuletzt

Korollar 7.48.* *Zwei reellanalytische Funktionen in $C^\infty((a,b))$ stimmen genau dann auf (a,b) überein, wenn ihre Taylorreihen für ein $x_0\in(a,b)$ übereinstimmen.* **q.e.d.**

Kapitel 8

Das Riemannintegral

8.1 Riemannintegrable Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir nur beschränkte Funktionen $f \in B([a,b],\mathbb{R})$ auf einem beschränkten abeschlossenen Intervall. Das Ziel ist für solche Funktionen den Flächeninhalt zwischen den Graphen der Funktion und der x-Achse zu definieren. Dabei werden wir diese Fläche durch eine disjunkte Vereinigung von Rechtecken annähern.

Definition 8.1. *(Partition) Eine Partition p von $[a,b]$ ist eine endliche geordnete Menge $\{x_0,\ldots,x_n\}$ von Punkten $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ in $[a,b]$. Die Feinheit der Partition p ist dann $\|p\| = \max\{\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n\}$ mit $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ für alle $i = 1,\ldots,n$. $\mathcal{P}[a,b]$ bezeichnet die Menge aller Partitionen von $[a,b]$.*

Für eine Funktion $f \in B([a,b],\mathbb{R})$ und eine Partition $p \in \mathcal{P}[a,b]$ seien

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1},x_i]\} \quad & M_i &= \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1},x_i]\} \text{ für alle } i = 1,\ldots,n \\ m &= \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\} & M &= \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}. \end{aligned}$$

Definition 8.2. *(Untersummen und Obersummen) Dann heißen*

$$s(p,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \textit{und} \qquad S(p,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

die Untersumme und Obersumme von f bezüglich der Partition $p \in \mathcal{P}[a,b]$.

Offenbar gilt $m(b-a) \leq s(p,f) \leq S(p,f) \leq M(b-a)$.

Definition 8.3. *(Verfeinerung) $p' \in \mathcal{P}[a,b]$ heißt Verfeinerung von $p \in \mathcal{P}[a,b]$, wenn $p' \supset p$. Offenbar gibt es für endlich viele Partitionen $p_1,\ldots,p_n \in \mathcal{P}[a,b]$ eine gemeinsame Verfeinerung $p' = p_1 \cup \ldots \cup p_n \in \mathcal{P}[a,b]$.*

Lemma 8.4. **(i)** *Wenn $p \subset p'$ gilt $s(p,f) \leq s(p',f)$ und $S(p',f) \leq S(p,f)$.*

(ii) *Für $p, p' \in \mathcal{P}[a,b]$ gilt $s(p,f) \leq S(p',f)$.*

Beweis:(i) Die Verfeinerung p' von p besteht aus einer Partition jedes Teilintervalles $[x_{i-1}, x_i]$ von p. Dann folgt (i) aus den Ungleichungen

$$m(b-a) \leq s(p,f) \quad \text{und} \quad S(p,f) \leq M(b-a).$$

(ii) Sei $p'' = p \cup p'$. Dann folgen aus (i) die Ungleichungen

$$s(p,f) \leq s(p'',f) \leq S(p'',f) \leq S(p,f) \quad s(p',f) \leq s(p'',f) \leq S(p'',f) \leq S(p',f).$$

Daraus folgt dann (ii). **q.e.d.**

Definition 8.5. *(Unterintegral und Oberintegral) Für $f \in B([a,b],\mathbb{R})$ heißt*

$$\underline{\int} f = \sup\{s(p,f) \mid p \in \mathcal{P}[a,b]\} \qquad \textit{Unterintegral von } f \textit{ und}$$

$$\overline{\int} f = \inf\{S(p,f) \mid p \in \mathcal{P}[a,b]\} \qquad \textit{Oberintegral von } f.$$

Offenbar gilt $\underline{\int} f \leq \overline{\int} f$.

Definition 8.6. *Eine Funktion $f \in B([a,b],\mathbb{R})$ heißt riemannintegrabel, wenn $\underline{\int} f = \overline{\int} f$ gilt. Diese Zahl heißt Riemannintegral $\int_a^b f dx$ von f über $[a,b]$. Die Menge aller riemannintegrablen Funktionen auf $[a,b]$ bezeichnen wir mit $\mathcal{R}[a,b]$. Für $f \in \mathcal{R}[a,b]$ definieren wir $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.*

Aufgrund der Definition von $s(p,f)$ und $S(p,f)$ liegt der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse in dem Intervall $[s(p,f), S(p,f)]$. Deshalb interpretieren wir für $f \in \mathcal{R}[a,b]$ das Riemannintegral $\int_a^b f(x)dx$ als diesen Flächeninhalt.

8.2 Kriterien von Darboux und Riemann

Satz 8.7. *(Darboux) Eine Funktion $f \in B([a,b],\mathbb{R})$ ist genau dann riemannintegrabel, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $p \in \mathcal{P}[a,b]$ gibt mit $S(p,f) - s(p,f) < \epsilon$.*

Beweis: Sei $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ Partitionen $p', p'' \in \mathcal{P}[a,b]$ mit $\int_a^b f(x)dx - s(p',f) < \frac{\epsilon}{2}$ und $S(p'',f) - \int_a^b f(x)dx < \frac{\epsilon}{2}$. Dann folgt für $p = p' \cup p''$

$$S(p,f) - s(p,f) \leq S(p'',f) - \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b f(x)dx - s(p',f) < \epsilon.$$

Wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $p_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b]$ gibt mit $S(p_\epsilon, f) - s(p_\epsilon, f) < \epsilon$ dann folgt

$$0 \leq \overline{\int} f - \underline{\int} f \leq S(p_\epsilon, f) - s(p_\epsilon, f) < \epsilon \quad \text{für alle } \epsilon > 0.$$

Also gilt dann auch
$$\underline{\int} f = \overline{\int} f.$$
q.e.d.

Beispiel 8.8. *Sei* $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in [a,b] \text{ und } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ *Dann gilt für alle* $p \in \mathcal{P}[a,b]$

$$S(p,f) - s(p,f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a > 0.$$

Also ist $\underline{\int} f = 0$ *und* $\overline{\int} f = b - a$ *und* $f \notin \mathcal{R}[a,b]$.

Definition 8.9. *(Riemannsummen) Für* $p \in \mathcal{P}[a,b]$ *sei* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *eine Wahl von Zwischenpunkten* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ *für alle* $i = 1, \ldots, n$. *Dann heißt*

$$R(p, f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Riemannsumme von f *bezüglich der Partition* p *und der Zwischenpunkte* ξ.

Aus der Definition von $s(p,f)$ und $S(p,f)$ folgt für $f \in B([a,b], \mathbb{R})$ und $p \in \mathcal{P}[a,b]$

$$\inf\{R(p,f,\xi) \mid \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\} = s(p,f) \quad \sup\{R(p,f,\xi) \mid \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\} = S(p,f).$$

Satz 8.10. *(Kriterium von Riemann) Eine Funktion* $f \in B([a,b], \mathbb{R})$ *ist genau dann riemannintegrabel, wenn es ein* $A \in \mathbb{R}$ *und für jedes* $\epsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *gibt, so dass für alle* $p \in \mathcal{P}[a,b]$ *mit* $\|p\| < \delta$ *und alle entsprechenden Zwischenpunkte* ξ *Folgendes gilt:*

$$|R(p,f,\xi) - A| < \epsilon. \quad \textit{Wenn das Krierium erfüllt ist, dann gilt } A = \int_a^b f(x)dx.$$

Beweis: Für jede Funktion $f \in B([a,b], \mathbb{R})$, die das Kriterium von Riemann erfüllt gibt es für alle $\epsilon > 0$ eine Partition $p \in \mathcal{P}[a,b]$ mit $S(p,f) - s(p,f) =$

$$= \sup\{R(p,f,\xi) \mid \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\} - \inf\{R(p,f,\xi) \mid \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq 2\epsilon.$$

Dann ist das Kriterium von Darboux erfüllt. Sei umgekehrt f eine Funktion, die das Kriterium von Darboux erfüllt. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $p \in \mathcal{P}[a,b]$, so dass $S(p,f) - s(p,f) < \frac{\epsilon}{2}$ gilt. Sei n die Anzahl der Teilintervalle von p und

$$\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{4n\|f\|_\infty + 1}, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n\right\} \quad \text{mit} \quad \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}.$$

Jedes Teilintervall einer Partition $p' \in \mathcal{P}[a,b]$ mit $\|p'\| < \delta$ ist entweder in einem Teilintervall von p enthalten, oder enthält im Inneren einen Punkt von $p \setminus \{a,b\}$. Höchstens n Teilintervalle von p' sind nicht in einem Teilintervall von p enthalten. Es folgt

$$S(p',f) - s(p',f) \leq S(p,f) - s(p,f) + 2\|f\|_\infty \cdot n \cdot \delta < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Für alle Zwischenpunkte ξ von p' gilt $R(p',f,\xi), \int_a^b f(x)dx \in [s(p',f), S(p',f)]$. Es folgt

$$\left| R(p',f,\xi) - \int\limits_a^b f(x)dx \right| \leq S(p',f) - s(p',f) < \epsilon.$$ **q.e.d.**

Korollar 8.11. *Sei $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Dann gilt für alle $t \in [0,1]$*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{i-t}{n}(b-a)\right).$$

Beweis: Die Partitionen $p_n \in \mathcal{P}[a,b]$ mit $p_n = \left\{x_i = a + \frac{i}{n}(b-a) \mid i = 0,\ldots,n\right\}$ mit den Zwischenpunkten $\xi_i = a + \frac{i-t}{n}(b-a)$ für $i = 1,\ldots,n$ erfüllt $\|p_n\| = \frac{b-a}{n}$. Also folgt die Aussage aus dem Kriterium von Riemann. **q.e.d.**

Korollar 8.12*. *Seien $f,g \in \mathcal{R}[a,b]$. Wenn f und g auf einer dichten Teilmenge von $[a,b]$ (z.B. $\mathbb{Q} \cap [a,b]$) übereinstimmen, dann gilt $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.*

Beweis*: Weil jedes Teilintervall einer beliebigen Partition $p \in \mathcal{P}[a,b]$ immer Elemente einer dichten Teilmenge von $[a,b]$ enthält, können die Zwischenpunkte immer aus einer dichten Teilmenge gewählt werden. **q.e.d.**

Satz 8.13. *(Eigenschaften des Riemannintegrals)*

(i) *$\mathcal{R}[a,b]$ ist eine Unteralgebra von $B([a,b],\mathbb{R})$ die $C([a,b])$ enthält. Die Abbildung $\mathcal{R}[a,b] \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int\limits_a^b f(x)dx$ ist $\mathbb{R}$-linear.*

(ii) *$\mathcal{R}[a,b]$ enthält die monotonen Funktionen, und mit $f \in \mathcal{R}[a,b]$ auch $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$.*

(iii) *Monotonie: Für $f,g \in \mathcal{R}[a,b]$ folgt aus $f \leq g$ (d.h. $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$) $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$. Insbesondere gilt $|\int\limits_a^b f(x)dx| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx \leq (b-a)\|f\|_\infty$.*

(iv) *Normierung: $\int\limits_a^b 1dx = b-a$.*

(v) *Stetigkeit:* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *und* $g \in C(\mathbb{R})$, *dann ist* $g \circ f \in \mathcal{R}[a,b]$.

(vi) *Intervall Additivität: Für jedes* $c \in (a,b)$ *gilt:*

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \iff f \in \mathcal{R}[a,c] \cap \mathcal{R}[c,b] \text{ und } \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

(vii) *Sei* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *und* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen in* $[a,b]$ *mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Dann konvergiert* $(\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* $\int_a^b f(x)dx$.

(viii) *Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit des Riemannintegrals: Der Grenzwert* f *einer gleichmäßig konvergenten Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathcal{R}[a,b]$ *liegt auch in* $\mathcal{R}[a,b]$ *und die Folge* $(\int_a^b f_n(x)dx)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert dann gegen* $\int_a^b f(x)dx$.

Beweis:(i) Für $f, g \in B([a,b],\mathbb{R})$ und $p \in [a,b]$ gilt

$$S(p,f+g) \leq S(p,f) + S(p,g) \text{ und } \qquad -s(p,f+g) \leq -s(p,f) - s(p,g)$$

Daraus und aus $f(x)g(x) - f(y)g(y) = g(x)(f(x)-f(y)) + f(y)(g(x)-g(y))$ folgt

$$\begin{aligned} S(p,f+g) - s(p,f+g) &\leq S(p,f) - s(p,f) + S(p,g) - s(p,g) \\ S(p,fg) - s(p,fg) &\leq \|g\|_\infty(S(p,f) - s(p,f)) + \|f\|_\infty(S(p,g) - s(p,g)) \end{aligned}$$

Aus $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ folgt also wegen dem Darbouxkriterium $f+g, fg \in \mathcal{R}[a,b]$. Wegen Satz 5.22 ist jede Funktion $f \in C([a,b])$ gleichmäßig stetig, d.h. es gibt für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{b-a}$ aus $|x - x'| < \delta$ folgt. Dann gilt $S(p,f) - s(p,f) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{b-a}\Delta x_i = \epsilon$ für alle $p \in \mathcal{P}[a,b]$ mit $\|p\| < \delta$. Also folgt aus dem Kriterium von Darboux $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Die Linearität des Riemannintegrals folgt aus der Linearität der Riemannsummen und den Rechenregeln für Folgen.
(ii) Sei f monoton steigend ist. Dann gilt $S(p,f) - s(p,f) =$

$$= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \leq \|p\| \sum_{i=1}^n f(x_i) - f(x_{i-1}) = \|p\|(f(b) - f(a)).$$

Für $\|p\| < \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}$ folgt $S(p,f) - s(p,f) < \epsilon$. Wegen dem Kriterium von Darboux gehört dann f zu $\mathcal{R}[a,b]$. Analoges gilt für monoton fallende f.

Für $f \in \mathcal{R}[a,b]$ seien $f^+(x) = \max\{f(x),0\}$ und $f^-(x) = \min\{f(x),0\}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sup\{f^\pm(x) \mid x \in [x_{i-1},x_i]\} - \inf\{f^\pm(x) \mid x \in [x_{i-1},x_i]\} \\ &\leq \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1},x_i]\} - \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1},x_i]\}. \end{aligned}$$

Also gilt $S(p,f^\pm) - s(p,f^\pm) \leq S(p,f) - s(p,f)$ für alle $p \in \mathcal{P}[a,b]$. Dann folgt $f^\pm \in \mathcal{R}[a,b]$ und damit auch $|f| = f^+ - f^- \in \mathcal{R}[a,b]$ aus dem Kriterium von Darboux.

(iii) Aus $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ mit $f \leq g$ folgt $\int_a^b f(x)dx = \underline{\int} f \leq \underline{\int} g = \int_a^b g(x)dx$.
(iv) Für $f = 1$(konstant) gilt $S(p, 1) = s(p, 1) = b - a$ für alle $p \in \mathcal{P}[a, b]$.
(v) Sei $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und $g \in C(\mathbb{R})$. Dann ist g auf $[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$ gleichmäßig stetig. Also gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|g(x) - g(x')| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ aus $|x - x'| < \delta$ mit $x, x' \in [-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$ folgt. Sei $\|g\|_\infty = \max\{|g(x)| \mid x \in [-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]\}$. Wegen dem Darbouxkriterium gibt es für $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ein $p \in \mathcal{P}[a, b]$ mit $S(p, f) - s(p, f) < \frac{\epsilon \cdot \delta}{4\|g\|_\infty}$. Sei wieder $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ und $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ für $i = 1, \ldots, n$. Wir zerlegen die Summe $S(p, g \circ f) - s(p, g \circ f)$ in die Summe über Teilintervalle, auf denen $M_i - m_i < \delta$ gilt, und die Summe über Teilintervalle, auf denen $M_i - m_i \geq \delta$ gilt. Aus der Wahl von δ folgt, dass die erste Summe nicht größer ist als $\frac{\epsilon}{2(b-a)} \cdot (b - a) = \frac{\epsilon}{2}$. Weil die Summe der Teilintervalllängen in der zweiten Summe nicht größer ist als $\frac{S(p,f)-s(p,f)}{\delta}$, ist die zweite Summe nicht größer als $(S(p, f) - s(p, f))\frac{2\|g\|_\infty}{\delta} < \frac{\epsilon}{2}$. Also gilt $S(p, g \circ f) - s(p, g \circ f) < \epsilon$ und $g \circ f$ erfüllt das Darbouxkriterium.
(vi) Jede Partition $p \in \mathcal{P}[a, b]$ besitzt eine Verfeinerung $p \cup \{c\} \in \mathcal{P}[a, b]$, die aus zwei Partitionen von $[a, c]$ und $[c, b]$ besteht. Dann folgt (v) aus dem Darbouxkriterium.
(vii) Wegen (vi) und (iii) gilt $|\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx| \leq (a_n - a + b - b_n)\|f\|_\infty$.
(viii) Aus dem Beweis von (i) folgt für $f, f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ und $p \in \mathcal{P}[a, b]$

$$|S(p, f) - s(p, f) - (S(p, f_n) - s(p, f_n))| \leq S(p, f - f_n) - s(p, f - f_n) \leq 2(b-a)\|f - f_n\|_\infty.$$

Für ein $\epsilon > 0$ wählen wir zuerst n so groß, dass $\|f - f_n\|_\infty < \frac{\epsilon}{4(b-a)}$ gilt, und dann p so dass $S(p, f_n) - s(p, f_n) < \frac{\epsilon}{2}$ gilt. Dann erfüllt f das Kriterium von Darboux.

Andererseits folgt für $f, f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ aus der Monotonie $|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx| \leq (b - a)\|f - f_n\|_\infty$. Also konvergiert $(\int_a^b f_n(x)dx)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\int_a^b f(x)dx$. **q.e.d.**

8.3 Differentiation und Integration

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 8.14. *Sei $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und F eine stetige Funktion auf $[a, b]$, die auf (a, b) differenzierbar ist mit $F' = f$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Beweis: Für alle $p \in \mathcal{P}[a, b]$ gibt es wegen dem Mittelwertsatz in jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ von p einen Zwischenpunkt ξ_i mit $f(\xi_i)\Delta x_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$ und $R(p, f, \xi) = F(b) - F(a)$. Aus dem Kriterium von Riemann folgt $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. **q.e.d.**

Beispiel 8.15. **(i)** *Sei $F \in C^1((a, b))$ Dann ist $F' \in \mathcal{R}[x_0, x]$ für alle $[x_0, x] \subset (a, b)$ und es gilt*

$$\int_{x_0}^x F'(t)dt = F(x) - F(x_0).$$

(ii) *Sei* $1 < \alpha < 2$ *und* $F(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$ *Dann ist* F *für* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *differenzierbar mit*

$$F'(x) = \alpha \frac{|x|^\alpha}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{|x|^\alpha}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Wegen $\frac{F(x)-F(0)}{|x|} = |x|^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *ist* f *auch bei* $x = 0$ *differenzierbar und dort gilt* $F'(0) = 0$. *Also gibt es differenzierbare Funktionen, deren Ableitungen auf einer kompakten Teilmenge nicht beschränkt sind und nicht riemannintegrabel sind.*

(iii) *Sei* $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$ *Dann ist* f *auf allen kompakten Intervallen riemannintegrabel. Offenbar gilt* $F(x) = \int_0^x f(t)dt = |x|$. *Also sind nicht alle Integrale von riemannintegrablen Funktionen differenzierbar.*

Satz 8.16. *Sei* $f \in \mathcal{R}[a, b]$. *Dann ist* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *auf* $x \in [a, b]$ *lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante* $L = \|f\|_\infty$.

Beweis:
$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq |y - x| \cdot \|f\|_\infty.$$
q.e.d.

Satz 8.17. *Für* $f \in \mathcal{R}[a, b]$ *ist* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *an allen Punkten* $x_0 \in (a, b)$, *an denen* f *stetig ist, differenzierbar mit* $F'(x_0) = f(x_0)$.

Beweis: Wenn f im Punkt $x_0 \in (a, b)$ stetig ist folgt aus den Eigenschaften des Integrals (iii), dass es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass aus $|x - x_0| < \delta$ folgt

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt \right| < \epsilon.$$
q.e.d.

Also sind die Integrale $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ aller stetigen Funktionen $f \in C([a, b])$ differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in (a, b)$.

Definition 8.18. *(Stammfunktion) Eine differenzierbare Funktion* F *mit* $F' = f$ *heißt Stammfunktion von* f. *Die Differenz zweier Stammfunktionen von* f *ist eine konstante Funktion. Wir bezeichnen eine Stammfunktion von* f *als* $\int f(x)dx$.

Beispiel 8.19. (i) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ *für* $\alpha \neq -1$ *und entweder* $\alpha \in \mathbb{N}$ *oder* $x \in \mathbb{R}^+$.

(ii) $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$ *für* $x \neq 0$.

(iii) $\int e^x dx = e^x + C$.

(iv) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$ *für* $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

(v) $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$.

(vi) $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$.

(vii) $\int \tan(x)dx = -\ln|\cos(x)| + C$ *für* $x \notin \{(n + \frac{1}{2})\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

(viii) $\int \cot(x)dx = \ln|\sin(x)| + C$ *für* $x \notin \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

(ix) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$.

(x) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$ *für* $x \in [-1, 1]$.

Satz 8.20. *(Restglied der Taylorformel in Integralform) Sei* $f \in C([a, b])$ *auf* (a, b) $(n+1)$*-mal differenzierbar mit auf* $[a, b]$ *stetig fortsetzbaren Ableitungen* $f', \ldots, f^{(n)}$ *und* $f^{(n+1)} \in \mathcal{R}[a, b]$*. Dann gilt für alle* $x_0, x \in [a, b]$

$$f(x) - T_{n,x_0}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n dt.$$

Beweis: Wir definieren $g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k$ für $x, t \in [a, b]$. Dann ist g auf (a, b) differenzierbar mit $g' \in \mathcal{R}[a, b]$ und es gilt wie im Beweis von Satz 7.37

$$f(x) - T_{n,x_0}(x) = g(x) - g(x_0) = \int_{x_0}^{x} g'(t)dt = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n dt.$$ **q.e.d.**

Satz 8.21.* *(Mittelwertsatz der Integralrechnung) Seien* $f \in \mathcal{R}[a, b]$*. Dann ist*

$$\frac{1}{b - a} \int_{a}^{b} f(x)dx \in [\inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}, \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}]$$

Wenn $f \in C([a, b])$*, dann gibt es ein* $x_0 \in (a, b)$ *mit* $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(x_0)$*.*

Beweis:* Wegen $\inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \leq f \leq \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ folgt die erste Aussage aus der Monotonie. Wenn f stetig ist folgt für $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ aus dem Mittelwertsatz $f(x_0) = F'(x_0) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ mit $x_0 \in (a, b)$. **q.e.d.**

8.4 Technik des Integrierens

Substitutionsregel 8.22. *Sei $f \in C([a,b])$ und $\phi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ eine stetige auf (α,β) differenzierbare Funktion, so dass $\phi' \in \mathcal{R}[\alpha,\beta]$. Dann gilt*

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Für die Stammfunktionen gilt $$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = \left(\int f(x)dx\right) \circ \phi + C.$$

Beweis: Sei F eine Stammfunktion von f. Dann ist F wegen Satz 8.17 stetig differenzierbar und es gilt $F' = f$. Also ist $(F \circ \phi)' = (F' \circ \phi) \cdot \phi'$. Wegen den Eigenschaften des Riemannintegrals (i) und (iv) ist $(F' \circ \phi) \cdot \phi' = (f \circ \phi) \cdot \phi' \in \mathcal{R}[a,b]$. Dann folgt die Aussage aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. **q.e.d.**

Die Voraussetzung, dass das Bild von ϕ gleich $[a,b]$ sein muss kann abgeschwächt werden zu der Voraussetzung, dass f auf dem Bild von ϕ definiert und stetig sein muss.

Korollar 8.23. *(Transformation der Variabeln) Sei $\phi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ bijektiv, stetig und auf (α,β) differenzierbar mit $\phi' \in \mathcal{R}[\alpha,\beta]$ und $f \in C([a,b])$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Also gilt $$\int f(x)dx = \left(\int f(\phi(t))\phi'(t)dt\right) \circ \phi^{-1} + C.$$ **q.e.d.**

Beispiel 8.24. (i)

$$\int_a^b f(\alpha t + \beta)dt = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(x)dx$$

Insbesondere gilt für das Restglied der Taylorformel $f(x) - T_{n,x_0}(x) =$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{n+1}(x_0 + s(x-x_0))(1-s)^n ds.$$

(ii)

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx = \int R\left(\frac{t^n - b}{a}, t\right)\frac{n}{a}t^{n-1}dt + C$$

für $n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ und einer Funktion $R(\cdot,\cdot)$ in zwei Variablen. Wir substituieren $t = \sqrt[n]{ax+b} \Longrightarrow ax + b = t^n \Longrightarrow x = \frac{t^n-b}{a}$ und $dx = \frac{nt^{n-1}}{a}dt$.

(iii)

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2+1}\right) dx = \int R(\sinh t, \cosh t) \cosh t dt + C$$

mit der Substitution $x = \sinh t$, $\sqrt{x^2+1} = \cosh t$ *und* $dx = \cosh t dt$.

(iv)

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2-1}\right) dx = \pm \int R(\pm \cosh t, \sinh t) \sinh t dt + C$$

mit der Substitution $x = \pm \cosh t$, *je nachdem ob* $x \in \mathbb{R}^{\pm}$. *Dann gilt* $\sqrt{x^2-1} = \sinh t$ *und* $dx = \pm \sinh t dt$.

(v)

$$\int R\left(x, \sqrt{1-x^2}\right) dx = \mp \int R(\pm \cos t, \sin t) \sin t dt + C.$$

mit der Substitution $x = \pm \cos t$, $\sqrt{1-x^2} = \sin t$ *und* $dx = \mp \sin t dt$.

(vi)

$$\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} + C$$

mit der Substition $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $x = 2\arctan(t)$ *und* $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, *so dass gilt*

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \cos(x) \text{ und } \quad \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \sin(x).$$

(vii)

$$\int R(\cosh x, \sinh x) dx = \int R\left(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{t^2-1}{2t}\right) \frac{dt}{t} + C$$

mit der Substition $t = e^x$, $x = \ln(t)$ *und* $dx = \frac{dt}{t}$.

Partielle Integration 8.25. *Seien* $f, g \in C([a,b])$ *auf* (a,b) *differenzierbar mit* $f', g' \in \mathcal{R}[a,b]$. *Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Also gilt
$$\int f(x)g'(x)dx = fg - \int f'(x)g(x)dx + C.$$

Beweis folgt aus dem Hauptsatz der Differentialrechnung und der Leibnizregel. **q.e.d.**

Beispiel 8.26. **(i)** $\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x(\ln(x)-1) + C$.

(ii) $\int \sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + C$
$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + C$
$\Longrightarrow \int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin(x)}{2} + C$ *also* $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.

(iii) $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx$

(iv) $\int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x dx$.

(v) $\int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x dx$.

Partialbruchzerlegung 8.27. *(Integration von rationalen Funktionen $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$)*
1. Faktorisierung des Nenners. *In der Algebra $\mathbb{K}[x]$ der rellen bzw. komplexen Polynome heißt $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ Teiler von $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, wenn es ein $r(x) \in \mathbb{K}[x]$ mit $p(x) = q(x)r(x)$ gibt. Wegen dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ in ein Produkt von Polynomen ersten Grades. $\mathbb{R}[x]$ ist in $\mathbb{C}[x]$ enthalten, und $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ ist genau dann reell, wenn es $\overline{Q(x)} = Q(\bar{x})$ erfüllt. Deshalb sind die komplexen Nullstellen von $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ entweder reell oder komplex konjugierte Paare. Insbesondere ist $(x - x_0)(x - \bar{x}_0) = x^2 - 2\Re(x_0)x + |x_0|^2 \in \mathbb{R}[x]$. In $\mathbb{R}[x]$ zerfällt $Q(x)$ in*

$$Q(x) = C\prod_i (x - x_i)^{k_i} \prod_j (x^2 + p_j x + q_j)^{l_j} \qquad \text{mit } p_j^2 - 4q_j < 0.$$

Wenn wir $P(x)$ und $Q(x)$ durch den Koeffizienten C von $Q(x)$ teilen, wird $C = 1$.
2. Polynomdivision.

Lemma 8.28. (i) *Eine rationale Funktion $\frac{P(x)}{Q(x)}$ mit komplexen Koeffizienten läßt sich schreiben als eine Summe eines komplexen Polynoms $S(x)$ und Summanden von der Form $\frac{c_{ik}}{(x-x_i)^k}$, wobei $(x - x_i)^k$ Teiler von $Q(x)$ sind und $c_{ik} \in \mathbb{C}$.*

(ii) *Eine reelle rationale Funktion $\frac{P(x)}{Q(x)}$ läßt sich schreiben als eine Summe eines reellen Polynoms $S(x)$ und Summanden von der Form $\frac{c_{ik}}{(x-x_i)^k}$ und $\frac{a_{jl}x+b_{jl}}{(x^2+p_jx+q_j)^l}$, wobei $(x - x_i)^k$ und $(x^2 + p_j x + q_j)^l$ reelle Teiler von $Q(x)$ sind mit $a_{jl}, b_{jl}, c_{ik} \in \mathbb{R}$.*

Beweis: (i) *Sei x_i eine k-fache Nullstele vom Nennerpolynom $Q(x)$, d.h. $Q(x) = (x - x_i)^k q(x)$ mit $q(x_i) \neq 0$. Dann hat $P(x) - \frac{P(x_i)}{q(x_i)}q(x)$ bei $x = x_i$ eine Nullstelle. Deshalb gibt es ein $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ mit $P(x) = \frac{P(x_i)}{q(x_i)}q(x) + (x - x_i)p(x)$. Es folgt*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\frac{P(x_i)}{q(x_i)}q(x) + (x - x_i)p(x)}{(x - x_i)^l q(x)} = \frac{\frac{P(x_i)}{q(x_i)}}{(x - x_i)^l} + \frac{p(x)}{(x - x_i)^{l-1}q(x)}.$$

Der Grad des Nenners von dem zweiten Summanden ist dabei um Eins kleiner als der Grad von $Q(x)$. Indem wir diese Formel mehrfach bei allen Nullstellen von $Q(x)$ auf diesen Rest anwenden erhhalten wir als letzten Summanden ein Polynom $S(x)$.
(ii) *Für reelle Nullstellen x_i von $Q(x)$ sind die Koeffizienten in (i) reell. Deshalb genügt es ein analoges Vorgehen für Teiler $Q(x) = (x^2 + p_j x + q_j)^l q(x)$ von $Q(x)$ anzugeben, wobei $q(x)$ an den komplexen Nullstelen $x_{1,2} = \frac{-p_j \pm \sqrt{p_j^2 - 4q_j}}{2}$ von $x^2 + p_j x + q_j$ nicht verschwindet. Dort verschwindet $P(x) - (ax + b)q(x)$ genau dann, wenn*

$$\frac{P(x_1)}{q(x_1)} = ax_1 + b \qquad \frac{P(x_2)}{q(x_2)} = ax_2 + b$$
$$a = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{P(x_1)}{q(x_1)} - \frac{P(x_2)}{q(x_2)}\right) \qquad b = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(x_1 \frac{P(x_2)}{q(x_2)} - x_2 \frac{P(x_1)}{q(x_1)}\right)$$

gilt. Weil $P(x)$ und $q(x)$ relle Koeffzienten haben, gilt $\overline{P(x)} = P(\bar{x})$ und $\overline{q(x)} = q(\bar{x})$. Dann folgt $\overline{(\frac{P(x_1)}{q(x_1)})} = \frac{P(x_2)}{q(x_2)}$ aus $\bar{x}_1 = x_2$. Deshalb sind a und b reell mit

$$a = \frac{2}{\sqrt{4q_j - p_j^2}} \Im\left(\frac{P(x_1)}{q(x_1)}\right) \qquad b = \Re\left(\frac{P(x_1)}{q(x_1)}\right) + \frac{p_j}{\sqrt{4q_j - p_j^2}} \Im\left(\frac{P(x_1)}{q(x_1)}\right).$$

Wieder gibt es ein $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ mit $P(x) = (ax + b)q(x) + (x^2 + p_j x + q_j)p(x)$ und

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{ax + b}{(x^2 + p_j x + q_j)^l} + \frac{p(x)}{(x^2 + p_j x + q_j)^{l-1} q(x)}.$$

Nach mehrmaligem Anwenden erhalten wir als Rest ein reelles Polynom $S(x)$. **q.e.d.**

3. Termweise Integration. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x - x_i)^k} = \begin{cases} \ln|x - x_i| + C & \text{für } k = 1 \\ \frac{-1}{(k-1)(x - x_i)^{k-1}} + C & \text{sonst.} \end{cases}$

$$\int \frac{(ax + b)dx}{(x^2 + px + q)^l} = \begin{cases} \frac{a}{2}\ln(x^2 + px + q) + \left(b - \frac{ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2 + px + q} + C & \text{für } l = 1 \\ \frac{-a}{2(l-1)(x^2 + px + q)^{l-1}} + \left(b - \frac{ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^l} + C & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^l} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan\left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}\right) + C & l = 1 \\ \frac{2x + p}{(l-1)(4q - p^2)(x^2 + px + q)^{l-1}} + \frac{2(2l-3)}{(l-1)(4q - p^2)}\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{l-1}} + C & l \neq 1. \end{cases}$$

In der Polynomdivison ist es meist einfacher zuerst das Polynom $S(x)$ zu bestimmen. Wenn der Grad des Zählers $P(x)$ nicht kleiner ist als der Grad des Nenners, dann subtrahieren wir von $P(x)$ der Reihe nach das Produkt von solchen Monomen $S_l x^l$ mit $Q(x)$, so dass sich jeweils der Grad der Differenz um Eins erniedrigt. Damit können wir solange fortfahren, bis der Grad der Differenz niedriger ist als der von $Q(x)$. Dann haben wir das Polynome $S(x)$ und ein Polynom $R(x)$ bestimmt, dessen Grad kleiner ist als der von $Q(x)$, so dass $P(x) - S(x)Q(x) = R(x)$ bzw. $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ gilt. Weil im

Grenzwert $|x| \to \infty$ alle anderen Summanden in Lemma 8.28 und $\frac{R(x)}{Q(x)}$ verschwinden, stimmt dieses Polynom $S(x)$ mit dem aus Lemma 8.28 überein.

Danach betsimmt man die Koeffizienten a_{jl}, b_{jl} und c_{ik} mit dem Ansatz

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_i \sum_{k=1}^{k_i} \frac{c_{ik}}{(x-x_i)^k} + \sum_j \sum_{l=1}^{l_j} \frac{a_{jl}x + b_{jl}}{(x^2+p_jx+q_j)^l}$$

Wenn wir beide Seiten mit $Q(x)$ multiplizieren, erhalten wir eine Gleichung zwischen 2 reellen Polynomen. Durch Einsetzen von geeigneten Werten von x (Nullstellen von $Q(x)$) und druch Koeffizientenvergleich erhalten wir die Zahlen a_{jl}, b_{jl} und c_{ik}.

Beispiel 8.29. *$\int f(x)dx$ mit $f(x) = \frac{2x^5+x^4+x^2+2x-2}{x^4-1}$.*
1. Faktorisierung des Nenners. $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$.
2. Polynomdivision.

$$\begin{aligned} 2x^5 + x^4 + x^2 + 2x - 2 &= (2x+1)(x^4-1) + x^2 + 4x - 1 \\ -2x(x^4-1) & \\ = x^4 + x^2 + 4x - 2 & \\ -(x^4-1) & \\ = x^2 + 4x - 1 & \end{aligned}$$

$$x^2 + 4x - 1 = c_1(x+1)(x^2+1) + c_2(x-1)(x^2+1) + (ax+b)(x-1)(x+1)$$

Einsetzen von $x = 1$ und $x = -1$ ergibt $4 = 4c_1$ und $-4 = -4c_2$ also $c_1 = 1$ und $c_2 = 1$. Koeffizientenvergleich von x^3 und x^0 ergibt $0 = c_1 + c_2 + a$ und $-1 = c_1 - c_2 - b$. Dann folgt $a = -2$, $b = 1$ und $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{-2x+1}{x^2+1}$.
3. Termweise Integration.

$$\int f(x)dx = x^2 + x + \ln|x-1| + \ln|x+1| - \ln(x^2+1) + \arctan(x) + C.$$

8.5 Uneigentliches Integral

In diesem Abschnitt erweitern wir den Begriff des Riemannintegrals auf offene und unbeschränkte Intervalle.

Definition 8.30. *Eine Funktion f heißt riemannintegrabel auf dem offenen (nicht notwendigerweise beschränkten) Intervall $(a,b) \subset \mathbb{R}$, wenn f auf allen kompakten Teilintervallen riemannintegrabel ist, und wenn für ein $c \in (a,b)$ beide Grenzwerte $\lim_{x\to a+} \int_x^c f(t)dt$ und $\lim_{x\to b-} \int_c^b f(t)dt$ existieren.*

Beispiel 8.31. **(i)** $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$. $\int \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + C & \text{für } \alpha \neq 1 \\ \ln|x| + C & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$. *Also existiert der Grenzwert* $\lim_{x\to\infty-} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}dt$ *nur für* $\alpha > 1$. *Dann gilt* $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{\alpha-1}$.

(ii) $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$. $\int \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + C & \text{für } \alpha \neq 1 \\ \ln|x| + C & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$. *Dann existiert der Grenzwert* $\lim_{x\to 0+} \int_x^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ *genau dann, wenn* $\alpha < 1$. *In diesem Fall gilt* $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{1-\alpha}$. *Wegen (i) folgt dann, dass* $\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ *für kein* α *existiert.*

(iii) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C$. *Also gilt* $\lim\limits_{x\to-\infty+} \int_x^0 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2} = \lim_{x\to\infty-} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$. *Dann folgt* $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$.

Verschiedenen Kriterien helfen zu entscheiden, ob diese Grenzwerte existieren. Hier einige Kriterien für uneigentliche Integrale $\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)dt$.

Cauchykriterium: $\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)dt$ existiert genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $c \in (a,b)$ gibt, so dass für alle $a < c < d < e < b$ gilt $\left|\int_d^e f(x)dx\right| < \epsilon$.

Monotoniekriterium: Wenn $f \geq 0$, dann existiert $\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)dt$ genau dann, wenn $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ auf $x \in (a,b)$ beschränkt ist.

Majorantenkriterium: Wenn $f \geq 0$ und $f \leq g$, dann existiert $\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)dt$, wenn $\lim_{x\to b-} \int_a^x g(t)dt$ existiert.

Definition 8.32. *Eine Funktion* f *auf einem offenen (unbeschränkten) Intervall heißt absolut riemannintegrabel, wenn* $|f|$ *riemannintegrabel ist.*

Wegen der Dreiecksungleichung gilt dann $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$. Alle absolut riemannintegrablen Funktionen sind also auch riemannintegrabel.

Satz 8.33. *(Integralkriterium für Reihen) Sei* $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}^+$ *monoton fallend mit dem Grenzwert* $f(x) \to 0$ *für* $x \to \infty$. *Dann ist die Folge*

$$\left(\sum_{k=1}^n f(k) - \int\limits_1^n f(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine monoton fallende konvergente Folge positiver Zahlen. Für alle $m < n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$-f(m) \leq f(n) - f(m) \leq \sum_{k=m+1}^n f(k) - \int\limits_m^n f(x)dx \leq 0.$$

Die Reihe $(\sum f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert genau dann, wenn* $\int_1^\infty f(x)dx < \infty$. *Dann gilt:*

$$\int_1^\infty f(x)dx \le \sum_{n=1}^\infty f(n) \le f(1) + \int_1^\infty f(x)dx.$$

Beweis: Für $m < n \in \mathbb{N}$ sei $p_{m,n} \in \mathcal{P}[m,n]$ die Partition $\{m, m+1, \ldots, n\}$. Dann ist offenbar $s(p_{m,n}, f) = \sum_{k=m+1}^n f(k)$ und $S(p_{m,n}, f) = \sum_{k=m}^{n-1} f(k)$. Also gilt

$$\sum_{k=m+1}^n f(k) \le \int_m^n f(x)dx \le \sum_{k=m}^{n-1} f(k).$$

Wenn wir die rechte Summe subtrahieren erhalten wir

$$-f(m) \le f(n) - f(m) = \sum_{k=m+1}^n f(k) - \sum_{k=m}^{n-1} f(k) \le \sum_{k=m+1}^n f(k) - \int_m^n f(x)dx \le 0.$$

Also ist die Folge $(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x)dx)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende beschränkte Folge, die wegen dem Monotonieprinzip konvergiert. Aus den oberen Ungleichungen folgt

$$\int_1^n f(x)dx \le \int_1^{n+1} f(x)dx \le \sum_{k=1}^n f(k) \le f(1) + \int_1^n f(x)dx.$$

Dann folgt die Aussage aus dem Majorantenkriterium. **q.e.d.**

Beispiel 8.34. (i) $(\sum \frac{1}{n^s})_{n\in\mathbb{N}}$ *ist genau dann konvergent, wenn* $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx$ *existiert. Also für* $s > 1$. *Dann gilt*

$$\frac{1}{s-1} < \zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} < 1 + \frac{1}{s-1}.$$

Der Grenzwert heißt Riemannsche ζ*-Funktion.*

(ii) *Die Folge* $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ *ist eine monoton fallende konvergente Folge positiver Zahlen. Der Grenzwert* $\gamma = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}) - \ln(n)$ *wird Eulersche Konstante genannt. Bis heute ist nicht bekannt, ob er rational oder irrational ist.*

(iii) *Wegen (i) ist die Funktion* $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty n^{-s}$ *für* $s \in (1,\infty)$ *konvergent. Die Folge von Funktionen*

$$f_n(s) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} - \int_1^n \frac{dx}{x^s}$$

ist wegen dem vorangehenden Satz auf $s \in (0,\infty)$ eine monoton fallende Folge von Funktionen. Weil die folgende Formel auch für $s = 1$ gilt

$$\int_1^n \frac{dx}{x^s} = \frac{n^{1-s}-1}{1-s} = \frac{\exp((1-s)\ln n)-1}{1-s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln(n))^k(1-s)^{k-1}}{k!},$$

ist das eine Folge von stetigen Funktionen auf $s \in \mathbb{R}^+$. Wegen dem vorangehenden Satz, Satz 5.27 und weil die Funktion $s \mapsto m^{-s}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ auf $s \in \mathbb{R}^+$ monoton fallend ist, konvergiert sie für alle $\epsilon > 0$ auf $[\epsilon,\infty)$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion auf $[\epsilon,\infty)$. Auf $s \in (1,\infty)$ ist wegen (i) der Grenzwert gleich

$$\zeta(s) - \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}.$$

Und für $s = 1$ ist der Grenzwert gleich

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{dx}{x}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \gamma.$$

Also folgt

$$\lim_{s\to 1+}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \gamma.$$

(iv) $\left(\sum \frac{1}{(n+1)\ln^s(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist genau dann konvergent, wenn $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^s(x)}dx = \int_{\ln(2)}^\infty \frac{1}{x^s}dx$ existiert, also für $s > 1$.*

(v) *Nach Euler ist die Γ-Funktion definiert durch*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Dieses Integral ist an beiden Grenzen uneigentlich. Deshalb zerlegen wir es in eine Summe von zwei Integralen $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$. Auf $t \in (0,1]$ ist der Integrand beschränkt durch $e^{-1}t^{x-1} \leq e^{-t}t^{x-1} \leq t^{x-1}$. Deshalb konvergiert das erste Integral für $x - 1 > -1 \iff x > 0$. Wegen $e^{-t}t^{x-1} = \exp(-t + (x-1)\ln(t))$ und weil für alle $\epsilon > 0$ im Grenzwert $\lim_{t\to\infty}$ der Ausdruck$-\epsilon t + (x-1)\ln(t)$ negativ ist, konvergiert das zweite Intgeral für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist $\Gamma(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ definiert. Durch eine partielle Integration erhalten wir

$$\int_\epsilon^R e^{-t}t^x dt = -e^{-t}t^x|_{t=\epsilon}^{t=R} + x\int_\epsilon^R e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Im Grenzwert $\epsilon \to 0$ und $R \to \infty$ erhalten wir folgende Funktionalgleichung:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Mit $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$ folgt induktiv $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Index