Kapitel 8

Das Riemannintegral

8.1 Riemannintegrable Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir nur beschränkte Funktionen $f \in B([a,b],\mathbb{R})$ auf einem beschränkten abeschlossenen Intervall. Das Ziel ist für solche Funktionen den Flächeninhalt zwischen den Graphen der Funktion und der x-Achse zu definieren. Dabei werden wir diese Fläche durch eine disjunkte Vereinigung von Rechtecken annähern.

Definition 8.1. *(Partition) Eine Partition p von $[a,b]$ ist eine endliche geordnete Menge $\{x_0,\ldots,x_n\}$ von Punkten $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ in $[a,b]$. Die Feinheit der Partition p ist dann $\|p\| = \max\{\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n\}$ mit $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ für alle $i = 1,\ldots,n$. $\mathcal{P}[a,b]$ bezeichnet die Menge aller Partitionen von $[a,b]$.*

Für eine Funktion $f \in B([a,b],\mathbb{R})$ und eine Partition $p \in \mathcal{P}[a,b]$ seien

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1},x_i]\} & M_i &= \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1},x_i]\} \text{ für alle } i = 1,\ldots,n \\ m &= \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\} & M &= \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}. \end{aligned}$$

Definition 8.2. *(Untersummen und Obersummen) Dann heißen*

$$s(p,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \text{und} \quad S(p,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

die Untersumme und Obersumme von f bezüglich der Partition $p \in \mathcal{P}[a,b]$.

Offenbar gilt $m(b-a) \leq s(p,f) \leq S(p,f) \leq M(b-a)$.

Definition 8.3. *(Verfeinerung) $p' \in \mathcal{P}[a,b]$ heißt Verfeinerung von $p \in \mathcal{P}[a,b]$, wenn $p' \supset p$. Offenbar gibt es für endlich viele Partitionen $p_1,\ldots,p_n \in \mathcal{P}[a,b]$ eine gemeinsame Verfeinerung $p' = p_1 \cup \ldots \cup p_n \in \mathcal{P}[a,b]$.*

Lemma 8.4. (i) *Wenn $p \subset p'$ gilt $s(p,f) \le s(p',f)$ und $S(p',f) \le S(p,f)$.*

(ii) *Für $p, p' \in \mathcal{P}[a,b]$ gilt $s(p,f) \le S(p',f)$.*

Beweis:(i) Die Verfeinerung p' von p besteht aus einer Partition jedes Teilintervalles $[x_{i-1}, x_i]$ von p. Dann folgt (i) aus den Ungleichungen

$$m(b-a) \le s(p,f) \quad \text{und} \quad S(p,f) \le M(b-a).$$

(ii) Sei $p'' = p \cup p'$. Dann folgen aus (i) die Ungleichungen

$$s(p,f) \le s(p'',f) \le S(p'',f) \le S(p,f) \quad s(p',f) \le s(p'',f) \le S(p'',f) \le S(p',f).$$

Daraus folgt dann (ii). **q.e.d.**

Definition 8.5. *(Unterintegral und Oberintegral) Für $f \in B([a,b],\mathbb{R})$ heißt*

$$\underline{\int} f = \sup\{s(p,f) \mid p \in \mathcal{P}[a,b]\} \qquad \textit{Unterintegral von } f \textit{ und}$$

$$\overline{\int} f = \inf\{S(p,f) \mid p \in \mathcal{P}[a,b]\} \qquad \textit{Oberintegral von } f.$$

Offenbar gilt $\underline{\int} f \le \overline{\int} f$.

Definition 8.6. *Eine Funktion $f \in B([a,b],\mathbb{R})$ heißt riemannintegrabel, wenn $\underline{\int} f = \overline{\int} f$ gilt. Diese Zahl heißt Riemannintegral $\int_a^b f dx$ von f über $[a,b]$. Die Menge aller riemannintegrablen Funktionen auf $[a,b]$ bezeichnen wir mit $\mathcal{R}[a,b]$. Für $f \in \mathcal{R}[a,b]$ definieren wir $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.*

Aufgrund der Definition von $s(p,f)$ und $S(p,f)$ liegt der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse in dem Intervall $[s(p,f), S(p,f)]$. Deshalb interpretieren wir für $f \in \mathcal{R}[a,b]$ das Riemannintegral $\int_a^b f(x)dx$ als diesen Flächeninhalt.

8.2 Kriterien von Darboux und Riemann

Satz 8.7. *(Darboux) Eine Funktion $f \in B([a,b],\mathbb{R})$ ist genau dann riemannintegrabel, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $p \in \mathcal{P}[a,b]$ gibt mit $S(p,f) - s(p,f) < \epsilon$.*

Beweis: Sei $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ Partitionen $p', p'' \in \mathcal{P}[a,b]$ mit $\int_a^b f(x)dx - s(p',f) < \frac{\epsilon}{2}$ und $S(p'',f) - \int_a^b f(x)dx < \frac{\epsilon}{2}$. Dann folgt für $p = p' \cup p''$

$$S(p,f) - s(p,f) \le S(p'',f) - \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b f(x)dx - s(p',f) < \epsilon.$$

Wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $p_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b]$ gibt mit $S(p_\epsilon, f) - s(p_\epsilon, f) < \epsilon$ dann folgt

$$0 \leq \overline{\int} f - \underline{\int} f \leq S(p_\epsilon, f) - s(p_\epsilon, f) < \epsilon \quad \text{für alle } \epsilon > 0.$$

Also gilt dann auch $$\underline{\int} f = \overline{\int} f.$$ **q.e.d.**

Beispiel 8.8. *Sei* $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in [a,b] \text{ und } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ *Dann gilt für alle* $p \in \mathcal{P}[a,b]$

$$S(p,f) - s(p,f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a > 0.$$

Also ist $\underline{\int} f = 0$ *und* $\overline{\int} f = b - a$ *und* $f \notin \mathcal{R}[a,b]$.

Definition 8.9. *(Riemannsummen) Für* $p \in \mathcal{P}[a,b]$ *sei* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *eine Wahl von Zwischenpunkten* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ *für alle* $i = 1, \ldots, n$. *Dann heißt*

$$R(p,f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Riemannsumme von f *bezüglich der Partition* p *und der Zwischenpunkte* ξ.

Aus der Definition von $s(p,f)$ und $S(p,f)$ folgt für $f \in B([a,b],\mathbb{R})$ und $p \in \mathcal{P}[a,b]$

$$\inf\{R(p,f,\xi) \mid \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\} = s(p,f) \quad \sup\{R(p,f,\xi) \mid \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\} = S(p,f).$$

Satz 8.10. *(Kriterium von Riemann) Eine Funktion* $f \in B([a,b],\mathbb{R})$ *ist genau dann riemannintegrabel, wenn es ein* $A \in \mathbb{R}$ *und für jedes* $\epsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *gibt, so dass für alle* $p \in \mathcal{P}[a,b]$ *mit* $\|p\| < \delta$ *und alle entsprechenden Zwischenpunkte* ξ *Folgendes gilt:*

$$|R(p,f,\xi) - A| < \epsilon. \quad \textit{Wenn das Krierium erfüllt ist, dann gilt } A = \int_a^b f(x)dx.$$

Beweis: Für jede Funktion $f \in B([a,b],\mathbb{R})$, die das Kriterium von Riemann erfüllt gibt es für alle $\epsilon > 0$ eine Partition $p \in \mathcal{P}[a,b]$ mit $S(p,f) - s(p,f) =$

$$= \sup\{R(p,f,\xi) \mid \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\} - \inf\{R(p,f,\xi) \mid \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq 2\epsilon.$$

Dann ist das Kriterium von Darboux erfüllt. Sei umgekehrt f eine Funktion, die das Kriterium von Darboux erfüllt. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $p \in \mathcal{P}[a,b]$, so dass $S(p,f) - s(p,f) < \frac{\epsilon}{2}$ gilt. Sei n die Anzahl der Teilintervalle von p und

$$\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{4n\|f\|_\infty + 1}, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n\right\} \quad \text{mit} \quad \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}.$$

Jedes Teilintervall einer Partition $p' \in \mathcal{P}[a,b]$ mit $\|p'\| < \delta$ ist entweder in einem Teilintervall von p enthalten, oder enthält im Inneren einen Punkt von $p\setminus\{a,b\}$. Höchstens n Teilintervalle von p' sind nicht in einem Teilintervall von p enthalten. Es folgt

$$S(p',f) - s(p',f) \leq S(p,f) - s(p,f) + 2\|f\|_\infty \cdot n \cdot \delta < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Für alle Zwischenpunkte ξ von p' gilt $R(p',f,\xi), \int_a^b f(x)dx \in [s(p',f), S(p',f)]$. Es folgt

$$\left| R(p',f,\xi) - \int\limits_a^b f(x)dx \right| \leq S(p',f) - s(p',f) < \epsilon.$$ **q.e.d.**

Korollar 8.11. *Sei $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Dann gilt für alle $t \in [0,1]$*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{i-t}{n}(b-a)\right).$$

Beweis: Die Partitionen $p_n \in \mathcal{P}[a,b]$ mit $p_n = \left\{x_i = a + \frac{i}{n}(b-a) \mid i = 0,\ldots,n\right\}$ mit den Zwischenpunkten $\xi_i = a + \frac{i-t}{n}(b-a)$ für $i = 1,\ldots,n$ erfüllt $\|p_n\| = \frac{b-a}{n}$. Also folgt die Aussage aus dem Kriterium von Riemann. **q.e.d.**

Korollar 8.12*. *Seien $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Wenn f und g auf einer dichten Teilmenge von $[a,b]$ (z.B. $\mathbb{Q} \cap [a,b]$) übereinstimmen, dann gilt $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.*

Beweis*: Weil jedes Teilintervall einer beliebigen Partition $p \in \mathcal{P}[a,b]$ immer Elemente einer dichten Teilmenge von $[a,b]$ enthält, können die Zwischenpunkte immer aus einer dichten Teilmenge gewählt werden. **q.e.d.**

Satz 8.13. *(Eigenschaften des Riemannintegrals)*

(i) *$\mathcal{R}[a,b]$ ist eine Unteralgebra von $B([a,b],\mathbb{R})$ die $C([a,b])$ enthält. Die Abbildung $\mathcal{R}[a,b] \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int\limits_a^b f(x)dx$ ist $\mathbb{R}$-linear.*

(ii) *$\mathcal{R}[a,b]$ enthält die monotonen Funktionen, und mit $f \in \mathcal{R}[a,b]$ auch $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$.*

(iii) *Monotonie: Für $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ folgt aus $f \leq g$ (d.h. $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$) $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$. Insbesondere gilt $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx \leq (b-a)\|f\|_\infty$.*

(iv) *Normierung: $\int\limits_a^b 1dx = b - a$.*

(v) *Stetigkeit:* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *und* $g \in C(\mathbb{R})$*, dann ist* $g \circ f \in \mathcal{R}[a,b]$*.*

(vi) *Intervall Additivität: Für jedes* $c \in (a,b)$ *gilt:*

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \iff f \in \mathcal{R}[a,c] \cap \mathcal{R}[c,b] \text{ und } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(vii) *Sei* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *und* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen in* $[a,b]$ *mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$*. Dann konvergiert* $(\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* $\int_a^b f(x)dx$*.*

(viii) *Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit des Riemannintegrals: Der Grenzwert* f *einer gleichmäßig konvergenten Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathcal{R}[a,b]$ *liegt auch in* $\mathcal{R}[a,b]$ *und die Folge* $(\int_a^b f_n(x)dx)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert dann gegen* $\int_a^b f(x)dx$*.*

Beweis:(i) Für $f, g \in B([a,b],\mathbb{R})$ und $p \in [a,b]$ gilt

$$S(p, f+g) \le S(p,f) + S(p,g) \text{ und } \qquad -s(p,f+g) \le -s(p,f) - s(p,g)$$

Daraus und aus $f(x)g(x) - f(y)g(y) = g(x)(f(x) - f(y)) + f(y)(g(x) - g(y))$ folgt

$$\begin{aligned} S(p,f+g) - s(p,f+g) &\le S(p,f) - s(p,f) + S(p,g) - s(p,g) \\ S(p,fg) - s(p,fg) &\le \|g\|_\infty (S(p,f) - s(p,f)) + \|f\|_\infty (S(p,g) - s(p,g)) \end{aligned}$$

Aus $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ folgt also wegen dem Darbouxkriterium $f + g, fg \in \mathcal{R}[a,b]$. Wegen Satz 5.22 ist jede Funktion $f \in C([a,b])$ gleichmäßig stetig, d.h. es gibt für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{b-a}$ aus $|x - x'| < \delta$ folgt. Dann gilt $S(p,f) - s(p,f) \le \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{b-a} \Delta x_i = \epsilon$ für alle $p \in \mathcal{P}[a,b]$ mit $\|p\| < \delta$. Also folgt aus dem Kriterium von Darboux $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Die Linearität des Riemannintegrals folgt aus der Linearität der Riemannsummen und den Rechenregeln für Folgen.
(ii) Sei f monoton steigend ist. Dann gilt $S(p,f) - s(p,f) =$

$$= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \le \|p\| \sum_{i=1}^n f(x_i) - f(x_{i-1}) = \|p\|(f(b) - f(a)).$$

Für $\|p\| < \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}$ folgt $S(p,f) - s(p,f) < \epsilon$. Wegen dem Kriterium von Darboux gehört dann f zu $\mathcal{R}[a,b]$. Analoges gilt für monoton fallende f.

Für $f \in \mathcal{R}[a,b]$ seien $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ und $f^-(x) = \min\{f(x), 0\}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &\le \sup\{f^\pm(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} - \inf\{f^\pm(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ &\le \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} - \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}. \end{aligned}$$

Also gilt $S(p,f^\pm) - s(p,f^\pm) \le S(p,f) - s(p,f)$ für alle $p \in \mathcal{P}[a,b]$. Dann folgt $f^\pm \in \mathcal{R}[a,b]$ und damit auch $|f| = f^+ - f^- \in \mathcal{R}[a,b]$ aus dem Kriterium von Darboux.

(iii) Aus $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ mit $f \leq g$ folgt $\int_a^b f(x)dx = \underline{\int} f \leq \underline{\int} g = \int_a^b g(x)dx$.
(iv) Für $f = 1$(konstant) gilt $S(p, 1) = s(p, 1) = b - a$ für alle $p \in \mathcal{P}[a, b]$.
(v) Sei $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und $g \in C(\mathbb{R})$. Dann ist g auf $[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$ gleichmäßig stetig. Also gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|g(x) - g(x')| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ aus $|x - x'| < \delta$ mit $x, x' \in [-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$ folgt. Sei $\|g\|_\infty = \max\{|g(x)| \mid x \in [-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]\}$. Wegen dem Darbouxkriterium gibt es für $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ein $p \in \mathcal{P}[a, b]$ mit $S(p, f) - s(p, f) < \frac{\epsilon \cdot \delta}{4\|g\|_\infty}$. Sei wieder $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ und $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ für $i = 1, \ldots, n$. Wir zerlegen die Summe $S(p, g \circ f) - s(p, g \circ f)$ in die Summe über Teilintervalle, auf denen $M_i - m_i < \delta$ gilt, und die Summe über Teilintervalle, auf denen $M_i - m_i \geq \delta$ gilt. Aus der Wahl von δ folgt, dass die erste Summe nicht größer ist als $\frac{\epsilon}{2(b-a)} \cdot (b - a) = \frac{\epsilon}{2}$. Weil die Summe der Teilintervalllängen in der zweiten Summe nicht größer ist als $\frac{S(p,f)-s(p,f)}{\delta}$, ist die zweite Summe nicht größer als $(S(p, f) - s(p, f))\frac{2\|g\|_\infty}{\delta} < \frac{\epsilon}{2}$. Also gilt $S(p, g \circ f) - s(p, g \circ f) < \epsilon$ und $g \circ f$ erfüllt das Darbouxkriterium.
(vi) Jede Partition $p \in \mathcal{P}[a, b]$ besitzt eine Verfeinerung $p \cup \{c\} \in \mathcal{P}[a, b]$, die aus zwei Partitionen von $[a, c]$ und $[c, b]$ besteht. Dann folgt (v) aus dem Darbouxkriterium.
(vii) Wegen (vi) und (iii) gilt $|\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx| \leq (a_n - a + b - b_n)\|f\|_\infty$.
(viii) Aus dem Beweis von (i) folgt für $f, f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ und $p \in \mathcal{P}[a, b]$

$$|S(p, f) - s(p, f) - (S(p, f_n) - s(p, f_n))| \leq S(p, f - f_n) - s(p, f - f_n) \leq 2(b - a)\|f - f_n\|_\infty.$$

Für ein $\epsilon > 0$ wählen wir zuerst n so groß, dass $\|f - f_n\|_\infty < \frac{\epsilon}{4(b-a)}$ gilt, und dann p so dass $S(p, f_n) - s(p, f_n) < \frac{\epsilon}{2}$ gilt. Dann erfüllt f das Kriterium von Darboux.

Andererseits folgt für $f, f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ aus der Monotonie $|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx| \leq (b - a)\|f - f_n\|_\infty$. Also konvergiert $(\int_a^b f_n(x)dx)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\int_a^b f(x)dx$. **q.e.d.**

8.3 Differentiation und Integration

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 8.14. *Sei $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und F eine stetige Funktion auf $[a, b]$, die auf (a, b) differenzierbar ist mit $F' = f$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Beweis: Für alle $p \in \mathcal{P}[a, b]$ gibt es wegen dem Mittelwertsatz in jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ von p einen Zwischenpunkt ξ_i mit $f(\xi_i)\Delta x_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$ und $R(p, f, \xi) = F(b) - F(a)$. Aus dem Kriterium von Riemann folgt $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. **q.e.d.**

Beispiel 8.15. **(i)** *Sei $F \in C^1((a, b))$ Dann ist $F' \in \mathcal{R}[x_0, x]$ für alle $[x_0, x] \subset (a, b)$ und es gilt*

$$\int_{x_0}^x F'(t)dt = F(x) - F(x_0).$$

(ii) *Sei* $1 < \alpha < 2$ *und* $F(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$ *Dann ist* F *für* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *differenzierbar mit*

$$F'(x) = \alpha \frac{|x|^\alpha}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{|x|^\alpha}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Wegen $\frac{F(x)-F(0)}{|x|} = |x|^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *ist* f *auch bei* $x = 0$ *differenzierbar und dort gilt* $F'(0) = 0$. *Also gibt es differenzierbare Funktionen, deren Ableitungen auf einer kompakten Teilmenge nicht beschränkt sind und nicht riemannintegrabel sind.*

(iii) *Sei* $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$ *Dann ist* f *auf allen kompakten Intervallen riemannintegrabel. Offenbar gilt* $F(x) = \int_0^x f(t)dt = |x|$. *Also sind nicht alle Integrale von riemannintegrablen Funktionen differenzierbar.*

Satz 8.16. *Sei* $f \in \mathcal{R}[a,b]$. *Dann ist* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *auf* $x \in [a,b]$ *lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante* $L = \|f\|_\infty$.

Beweis:

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq |y - x| \cdot \|f\|_\infty.$$

q.e.d.

Satz 8.17. *Für* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *ist* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *an allen Punkten* $x_0 \in (a,b)$, *an denen* f *stetig ist, differenzierbar mit* $F'(x_0) = f(x_0)$.

Beweis: Wenn f im Punkt $x_0 \in (a,b)$ stetig ist folgt aus den Eigenschaften des Integrals (iii), dass es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass aus $|x - x_0| < \delta$ folgt

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt \right| < \epsilon.$$

q.e.d.

Also sind die Integrale $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ aller stetigen Funktionen $f \in C([a,b])$ differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in (a,b)$.

Definition 8.18. *(Stammfunktion) Eine differenzierbare Funktion* F *mit* $F' = f$ *heißt Stammfunktion von* f. *Die Differenz zweier Stammfunktionen von* f *ist eine konstante Funktion. Wir bezeichnen eine Stammfunktion von* f *als* $\int f(x)dx$.

Beispiel 8.19. **(i)** $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ *für* $\alpha \neq -1$ *und entweder* $\alpha \in \mathbb{N}$ *oder* $x \in \mathbb{R}^+$.

(ii) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ *für* $x \neq 0$.

(iii) $\int e^x dx = e^x + C$.

(iv) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$ *für* $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

(v) $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$.

(vi) $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$.

(vii) $\int \tan(x) dx = -\ln|\cos(x)| + C$ *für* $x \notin \{(n + \frac{1}{2})\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

(viii) $\int \cot(x) dx = \ln|\sin(x)| + C$ *für* $x \notin \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

(ix) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$.

(x) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$ *für* $x \in [-1, 1]$.

Satz 8.20. *(Restglied der Taylorformel in Integralform) Sei* $f \in C([a, b])$ *auf* (a, b) $(n+1)$*-mal differenzierbar mit auf* $[a, b]$ *stetig fortsetzbaren Ableitungen* $f', \ldots, f^{(n)}$ *und* $f^{(n+1)} \in \mathcal{R}[a, b]$. *Dann gilt für alle* $x_0, x \in [a, b]$

$$f(x) - T_{n,x_0}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n dt.$$

Beweis: Wir definieren $g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k$ für $x, t \in [a, b]$. Dann ist g auf (a, b) differenzierbar mit $g' \in \mathcal{R}[a, b]$ und es gilt wie im Beweis von Satz 7.37

$$f(x) - T_{n,x_0}(x) = g(x) - g(x_0) = \int_{x_0}^{x} g'(t) dt = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n dt.$$ **q.e.d.**

Satz 8.21.* *(Mittelwertsatz der Integralrechnung) Seien* $f \in \mathcal{R}[a, b]$. *Dann ist*

$$\frac{1}{b - a} \int_{a}^{b} f(x) dx \in [\inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}, \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}]$$

Wenn $f \in C([a, b])$, *dann gibt es ein* $x_0 \in (a, b)$ *mit* $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(x_0)$.

Beweis:* Wegen $\inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \le f \le \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ folgt die erste Aussage aus der Monotonie. Wenn f stetig ist folgt für $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ aus dem Mittelwertsatz $f(x_0) = F'(x_0) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ mit $x_0 \in (a, b)$. **q.e.d.**

8.4 Technik des Integrierens

Substitutionsregel 8.22. *Sei $f \in C([a,b])$ und $\phi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ eine stetige auf (α,β) differenzierbare Funktion, so dass $\phi' \in \mathcal{R}[\alpha,\beta]$. Dann gilt*

$$\int\limits_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Für die Stammfunktionen gilt $$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = \left(\int f(x)dx\right) \circ \phi + C.$$

Beweis: Sei F eine Stammfunktion von f. Dann ist F wegen Satz 8.17 stetig differenzierbar und es gilt $F' = f$. Also ist $(F \circ \phi)' = (F' \circ \phi) \cdot \phi'$. Wegen den Eigenschaften des Riemannintegrals (i) und (iv) ist $(F' \circ \phi) \cdot \phi' = (f \circ \phi) \cdot \phi' \in \mathcal{R}[a,b]$. Dann folgt die Aussage aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. **q.e.d.**

Die Voraussetzung, dass das Bild von ϕ gleich $[a,b]$ sein muss kann abgeschwächt werden zu der Voraussetzung, dass f auf dem Bild von ϕ definiert und stetig sein muss.

Korollar 8.23. *(Transformation der Variabeln) Sei $\phi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ bijektiv, stetig und auf (α,β) differenzierbar mit $\phi' \in \mathcal{R}[\alpha,\beta]$ und $f \in C([a,b])$. Dann gilt*

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Also gilt $$\int f(x)dx = \left(\int f(\phi(t))\phi'(t)dt\right) \circ \phi^{-1} + C.$$ **q.e.d.**

Beispiel 8.24. (i)

$$\int\limits_{a}^{b} f(\alpha t + \beta)dt = \frac{1}{\alpha} \int\limits_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(x)dx$$

Insbesondere gilt für das Restglied der Taylorformel $f(x) - T_{n,x_0}(x) =$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!} \int\limits_{0}^{1} f^{n+1}(x_0 + s(x-x_0))(1-s)^n ds.$$

(ii)

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx = \int R\left(\frac{t^n - b}{a}, t\right) \frac{n}{a} t^{n-1} dt + C$$

für $n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ und einer Funktion $R(\cdot,\cdot)$ in zwei Variablen. Wir substituieren $t = \sqrt[n]{ax+b} \Longrightarrow ax + b = t^n \Longrightarrow x = \frac{t^n-b}{a}$ und $dx = \frac{nt^{n-1}}{a}dt$.

(iii)

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2+1}\right) dx = \int R(\sinh t, \cosh t) \cosh t dt + C$$

mit der Substitution $x = \sinh t$, $\sqrt{x^2+1} = \cosh t$ *und* $dx = \cosh t dt$.

(iv)

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2-1}\right) dx = \pm \int R(\pm \cosh t, \sinh t) \sinh t dt + C$$

mit der Substitution $x = \pm \cosh t$, *je nachdem ob* $x \in \mathbb{R}^{\pm}$. *Dann gilt* $\sqrt{x^2-1} = \sinh t$ *und* $dx = \pm \sinh t dt$.

(v)

$$\int R\left(x, \sqrt{1-x^2}\right) dx = \mp \int R(\pm \cos t, \sin t) \sin t dt + C.$$

mit der Substitution $x = \pm \cos t$, $\sqrt{1-x^2} = \sin t$ *und* $dx = \mp \sin t dt$.

(vi)

$$\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} + C$$

mit der Substition $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $x = 2\arctan(t)$ *und* $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, *so dass gilt*

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \cos(x) \text{ und } \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \sin(x).$$

(vii)

$$\int R(\cosh x, \sinh x) dx = \int R\left(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{t^2-1}{2t}\right) \frac{dt}{t} + C$$

mit der Substition $t = e^x$, $x = \ln(t)$ *und* $dx = \frac{dt}{t}$.

Partielle Integration 8.25. *Seien* $f, g \in C([a,b])$ *auf* (a,b) *differenzierbar mit* $f', g' \in \mathcal{R}[a,b]$. *Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Also gilt
$$\int f(x)g'(x)dx = fg - \int f'(x)g(x)dx + C.$$

Beweis folgt aus dem Hauptsatz der Differentialrechnung und der Leibnizregel. **q.e.d.**

Beispiel 8.26. **(i)** $\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x(\ln(x)-1) + C$.

(ii) $\int \sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + C$
$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + C$
$\Longrightarrow \int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin(x)}{2} + C$ *also* $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.

(iii) $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx$

(iv) $\int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x dx$.

(v) $\int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x dx$.

Partialbruchzerlegung 8.27. *(Integration von rationalen Funktionen $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$)*
1. Faktorisierung des Nenners. *In der Algebra $\mathbb{K}[x]$ der rellen bzw. komplexen Polynome heißt $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ Teiler von $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, wenn es ein $r(x) \in \mathbb{K}[x]$ mit $p(x) = q(x)r(x)$ gibt. Wegen dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ in ein Produkt von Polynomen ersten Grades. $\mathbb{R}[x]$ ist in $\mathbb{C}[x]$ enthalten, und $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ ist genau dann reell, wenn es $\overline{Q(x)} = Q(\bar{x})$ erfüllt. Deshalb sind die komplexen Nullstellen von $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ entweder reell oder komplex konjugierte Paare. Insbesondere ist $(x - x_0)(x - \bar{x}_0) = x^2 - 2\Re(x_0)x + |x_0|^2 \in \mathbb{R}[x]$. In $\mathbb{R}[x]$ zerfällt $Q(x)$ in*

$$Q(x) = C\prod_i (x - x_i)^{k_i} \prod_j (x^2 + p_j x + q_j)^{l_j} \qquad \textit{mit } p_j^2 - 4q_j < 0.$$

Wenn wir $P(x)$ und $Q(x)$ durch den Koeffizienten C von $Q(x)$ teilen, wird $C = 1$.
2. Polynomdivision.

Lemma 8.28. **(i)** *Eine rationale Funktion $\frac{P(x)}{Q(x)}$ mit komplexen Koeffizienten läßt sich schreiben als eine Summe eines komplexen Polynoms $S(x)$ und Summanden von der Form $\frac{c_{ik}}{(x-x_i)^k}$, wobei $(x - x_i)^k$ Teiler von $Q(x)$ sind und $c_{ik} \in \mathbb{C}$.*

(ii) *Eine reelle rationale Funktion $\frac{P(x)}{Q(x)}$ läßt sich schreiben als eine Summe eines reellen Polynoms $S(x)$ und Summanden von der Form $\frac{c_{ik}}{(x-x_i)^k}$ und $\frac{a_{jl}x+b_{jl}}{(x^2+p_jx+q_j)^l}$, wobei $(x - x_i)^k$ und $(x^2 + p_j x + q_j)^l$ reelle Teiler von $Q(x)$ sind mit $a_{jl}, b_{jl}, c_{ik} \in \mathbb{R}$.*

Beweis: **(i)** *Sei x_i eine k-fache Nullstele vom Nennerpolynom $Q(x)$, d.h. $Q(x) = (x - x_i)^k q(x)$ mit $q(x_i) \neq 0$. Dann hat $P(x) - \frac{P(x_i)}{q(x_i)}q(x)$ bei $x = x_i$ eine Nullstelle. Deshalb gibt es ein $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ mit $P(x) = \frac{P(x_i)}{q(x_i)}q(x) + (x - x_i)p(x)$. Es folgt*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\frac{P(x_i)}{q(x_i)}q(x) + (x - x_i)p(x)}{(x - x_i)^l q(x)} = \frac{\frac{P(x_i)}{q(x_i)}}{(x - x_i)^l} + \frac{p(x)}{(x - x_i)^{l-1}q(x)}.$$

Der Grad des Nenners von dem zweiten Summanden ist dabei um Eins kleiner als der Grad von $Q(x)$. Indem wir diese Formel mehrfach bei allen Nullstellen von $Q(x)$ auf diesen Rest anwenden erhhalten wir als letzten Summanden ein Polynom $S(x)$.
(ii) *Für reelle Nullstellen x_i von $Q(x)$ sind die Koeffizienten in (i) reell. Deshalb genügt es ein analoges Vorgehen für Teiler $Q(x) = (x^2 + p_j x + q_j)^l q(x)$ von $Q(x)$ anzugeben, wobei $q(x)$ an den komplexen Nullstelen $x_{1,2} = \frac{-p_j \pm \sqrt{p_j^2 - 4q_j}}{2}$ von $x^2 + p_j x + q_j$ nicht verschwindet. Dort verschwindet $P(x) - (ax + b)q(x)$ genau dann, wenn*

$$\frac{P(x_1)}{q(x_1)} = ax_1 + b \qquad \frac{P(x_2)}{q(x_2)} = ax_2 + b$$
$$a = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{P(x_1)}{q(x_1)} - \frac{P(x_2)}{q(x_2)}\right) \qquad b = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(x_1\frac{P(x_2)}{q(x_2)} - x_2\frac{P(x_1)}{q(x_1)}\right)$$

gilt. Weil $P(x)$ und $q(x)$ relle Koeffzienten haben, gilt $\overline{P(x)} = P(\bar{x})$ und $\overline{q(x)} = q(\bar{x})$. Dann folgt $\overline{(\frac{P(x_1)}{q(x_1)})} = \frac{P(x_2)}{q(x_2)}$ aus $\bar{x}_1 = x_2$. Deshalb sind a und b reell mit

$$a = \frac{2}{\sqrt{4q_j - p_j^2}}\Im\left(\frac{P(x_1)}{q(x_1)}\right) \qquad b = \Re\left(\frac{P(x_1)}{q(x_1)}\right) + \frac{p_j}{\sqrt{4q_j - p_j^2}}\Im\left(\frac{P(x_1)}{q(x_1)}\right).$$

Wieder gibt es ein $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ mit $P(x) = (ax + b)q(x) + (x^2 + p_j x + q_j)p(x)$ und

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{ax + b}{(x^2 + p_j x + q_j)^l} + \frac{p(x)}{(x^2 + p_j x + q_j)^{l-1} q(x)}.$$

Nach mehrmaligem Anwenden erhalten wir als Rest ein reelles Polynom $S(x)$. **q.e.d.**

3. Termweise Integration. $$\int \frac{dx}{(x - x_i)^k} = \begin{cases} \ln|x - x_i| + C & \text{für } k = 1 \\ \frac{-1}{(k-1)(x-x_i)^{k-1}} + C & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\int \frac{(ax + b)dx}{(x^2 + px + q)^l} = \begin{cases} \frac{a}{2}\ln(x^2 + px + q) + \left(b - \frac{ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} + C & \text{für } l = 1 \\ \frac{-a}{2(l-1)(x^2+px+q)^{l-1}} + \left(b - \frac{ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^l} + C & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^l} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + C & l = 1 \\ \frac{2x+p}{(l-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{l-1}} + \frac{2(2l-3)}{(l-1)(4q-p^2)}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{l-1}} + C & l \neq 1. \end{cases}$$

In der Polynomdivison ist es meist einfacher zuerst das Polynom $S(x)$ zu bestimmen. Wenn der Grad des Zählers $P(x)$ nicht kleiner ist als der Grad des Nenners, dann subtrahieren wir von $P(x)$ der Reihe nach das Produkt von solchen Monomen $S_l x^l$ mit $Q(x)$, so dass sich jeweils der Grad der Differenz um Eins erniedrigt. Damit können wir solange fortfahren, bis der Grad der Differenz niedriger ist als der von $Q(x)$. Dann haben wir das Polynome $S(x)$ und ein Polynom $R(x)$ bestimmt, dessen Grad kleiner ist als der von $Q(x)$, so dass $P(x) - S(x)Q(x) = R(x)$ bzw. $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ gilt. Weil im

Grenzwert $|x| \to \infty$ alle anderen Summanden in Lemma 8.28 und $\frac{R(x)}{Q(x)}$ verschwinden, stimmt dieses Polynom $S(x)$ mit dem aus Lemma 8.28 überein.

Danach betsimmt man die Koeffizienten a_{jl}, b_{jl} und c_{ik} mit dem Ansatz

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_i \sum_{k=1}^{k_i} \frac{c_{ik}}{(x-x_i)^k} + \sum_j \sum_{l=1}^{l_j} \frac{a_{jl}x + b_{jl}}{(x^2 + p_j x + q_j)^l}$$

Wenn wir beide Seiten mit $Q(x)$ multiplizieren, erhalten wir eine Gleichung zwischen 2 reellen Polynomen. Durch Einsetzen von geeigneten Werten von x (Nullstellen von $Q(x)$) und druch Koeffizientenvergleich erhalten wir die Zahlen a_{jl}, b_{jl} und c_{ik}.

Beispiel 8.29. *$\int f(x)dx$ mit $f(x) = \frac{2x^5+x^4+x^2+2x-2}{x^4-1}$.*
1. Faktorisierung des Nenners. $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$.
2. Polynomdivision.

$$\begin{aligned} 2x^5 + x^4 + x^2 + 2x - 2 &= (2x+1)(x^4-1) + x^2 + 4x - 1 \\ -2x(x^4-1) & \\ = x^4 + x^2 + 4x - 2 & \\ -(x^4-1) & \\ = x^2 + 4x - 1 & \end{aligned}$$

$$x^2 + 4x - 1 = c_1(x+1)(x^2+1) + c_2(x-1)(x^2+1) + (ax+b)(x-1)(x+1)$$

Einsetzen von $x = 1$ und $x = -1$ ergibt $4 = 4c_1$ und $-4 = -4c_2$ also $c_1 = 1$ und $c_2 = 1$. Koeffizientenvergleich von x^3 und x^0 ergibt $0 = c_1 + c_2 + a$ und $-1 = c_1 - c_2 - b$. Dann folgt $a = -2$, $b = 1$ und $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{-2x+1}{x^2+1}$.
3. Termweise Integration.

$$\int f(x)dx = x^2 + x + \ln|x-1| + \ln|x+1| - \ln(x^2+1) + \arctan(x) + C.$$

8.5 Uneigentliches Integral

In diesem Abschnitt erweitern wir den Begriff des Riemannintegrals auf offene und unbeschränkte Intervalle.

Definition 8.30. *Eine Funktion f heißt riemannintegrabel auf dem offenen (nicht notwendigerweise beschränkten) Intervall $(a,b) \subset \mathbb{R}$, wenn f auf allen kompakten Teilintervallen riemannintegrabel ist, und wenn für ein $c \in (a,b)$ beide Grenzwerte $\lim_{x\to a+} \int_x^c f(t)dt$ und $\lim_{x\to b-} \int_c^b f(t)dt$ existieren.*

Beispiel 8.31. **(i)** $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$. $\int \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + C & \text{für } \alpha \neq 1 \\ \ln|x| + C & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$. *Also existiert der Grenzwert* $\lim_{x\to\infty-} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}dt$ *nur für* $\alpha > 1$. *Dann gilt* $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{\alpha-1}$.

(ii) $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$. $\int \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + C & \text{für } \alpha \neq 1 \\ \ln|x| + C & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$. *Dann existiert der Grenzwert* $\lim_{x\to 0+} \int_x^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ *genau dann, wenn* $\alpha < 1$. *In diesem Fall gilt* $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{1-\alpha}$. *Wegen (i) folgt dann, dass* $\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ *für kein* α *existiert.*

(iii) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C$. *Also gilt* $\lim\limits_{x\to-\infty+} \int_x^0 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2} = \lim_{x\to\infty-} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$. *Dann folgt* $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$.

Verschiedenen Kriterien helfen zu entscheiden, ob diese Grenzwerte existieren. Hier einige Kriterien für uneigentliche Integrale $\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)dt$.

Cauchykriterium: $\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)dt$ existiert genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $c \in (a, b)$ gibt, so dass für alle $a < c < d < e < b$ gilt $\left|\int_d^e f(x)dx\right| < \epsilon$.

Monotoniekriterium: Wenn $f \geq 0$, dann existiert $\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)dt$ genau dann, wenn $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ auf $x \in (a, b)$ beschränkt ist.

Majorantenkriterium: Wenn $f \geq 0$ und $f \leq g$, dann existiert $\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)dt$, wenn $\lim_{x\to b-} \int_a^x g(t)dt$ existiert.

Definition 8.32. *Eine Funktion* f *auf einem offenen (unbeschränkten) Intervall heißt absolut riemannintegrabel, wenn* $|f|$ *riemannintegrabel ist.*

Wegen der Dreiecksungleichung gilt dann $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$. Alle absolut riemannintegrablen Funktionen sind also auch riemannintegrabel.

Satz 8.33. *(Integralkriterium für Reihen) Sei* $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}^+$ *monoton fallend mit dem Grenzwert* $f(x) \to 0$ *für* $x \to \infty$. *Dann ist die Folge*

$$\left(\sum_{k=1}^n f(k) - \int\limits_1^n f(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine monoton fallende konvergente Folge positiver Zahlen. Für alle $m < n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$-f(m) \leq f(n) - f(m) \leq \sum_{k=m+1}^n f(k) - \int\limits_m^n f(x)dx \leq 0.$$

Die Reihe $(\sum f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert genau dann, wenn* $\int_1^\infty f(x)dx < \infty$. *Dann gilt:*

$$\int\limits_1^\infty f(x)dx \leq \sum_{n=1}^\infty f(n) \leq f(1) + \int\limits_1^\infty f(x)dx.$$

Beweis: Für $m < n \in \mathbb{N}$ sei $p_{m,n} \in \mathcal{P}[m,n]$ die Partition $\{m, m+1, \ldots, n\}$. Dann ist offenbar $s(p_{m,n}, f) = \sum_{k=m+1}^n f(k)$ und $S(p_{m,n}, f) = \sum_{k=m}^{n-1} f(k)$. Also gilt

$$\sum_{k=m+1}^n f(k) \leq \int\limits_m^n f(x)dx \leq \sum_{k=m}^{n-1} f(k).$$

Wenn wir die rechte Summe subtrahieren erhalten wir

$$-f(m) \leq f(n) - f(m) = \sum_{k=m+1}^n f(k) - \sum_{k=m}^{n-1} f(k) \leq \sum_{k=m+1}^n f(k) - \int\limits_m^n f(x)dx \leq 0.$$

Also ist die Folge $(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x)dx)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende beschränkte Folge, die wegen dem Monotonieprinzip konvergiert. Aus den oberen Ungleichungen folgt

$$\int\limits_1^n f(x)dx \leq \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int\limits_1^n f(x)dx.$$

Dann folgt die Aussage aus dem Majorantenkriterium. **q.e.d.**

Beispiel 8.34. (i) $(\sum \frac{1}{n^s})_{n\in\mathbb{N}}$ *ist genau dann konvergent, wenn* $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx$ *existiert. Also für* $s > 1$. *Dann gilt*

$$\frac{1}{s-1} < \zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} < 1 + \frac{1}{s-1}.$$

Der Grenzwert heißt Riemannsche ζ*-Funktion.*

(ii) *Die Folge* $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ *ist eine monoton fallende konvergente Folge positiver Zahlen. Der Grenzwert* $\gamma = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}) - \ln(n)$ *wird Eulersche Konstante genannt. Bis heute ist nicht bekannt, ob er rational oder irrational ist.*

(iii) *Wegen (i) ist die Funktion* $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty n^{-s}$ *für* $s \in (1, \infty)$ *konvergent. Die Folge von Funktionen*

$$f_n(s) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} - \int\limits_1^n \frac{dx}{x^s}$$

ist wegen dem vorangehenden Satz auf $s \in (0,\infty)$ eine monoton fallende Folge von Funktionen. Weil die folgende Formel auch für $s=1$ gilt

$$\int_1^n \frac{dx}{x^s} = \frac{n^{1-s}-1}{1-s} = \frac{\exp((1-s)\ln n)-1}{1-s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln(n))^k(1-s)^{k-1}}{k!},$$

ist das eine Folge von stetigen Funktionen auf $s \in \mathbb{R}^+$. Wegen dem vorgangehenden Satz, Satz 5.27 und weil die Funktion $s \mapsto m^{-s}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ auf $s \in \mathbb{R}^+$ monoton fallend ist, konvergiert sie für alle $\epsilon > 0$ auf $[\epsilon,\infty)$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion auf $[\epsilon,\infty)$. Auf $s \in (1,\infty)$ ist wegen (i) der Grenzwert gleich

$$\zeta(s) - \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}.$$

Und für $s=1$ ist der Grenzwert gleich

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{dx}{x}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \gamma.$$

Also folgt

$$\lim_{s\to 1+}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \gamma.$$

(iv) $\left(\sum \frac{1}{(n+1)\ln^s(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist genau dann konvergent, wenn $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^s(x)}dx = \int_{\ln(2)}^\infty \frac{1}{x^s}dx$ existiert, also für $s > 1$.*

(v) *Nach Euler ist die Γ-Funktion definiert durch*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Dieses Integral ist an beiden Grenzen uneigentlich. Deshalb zerlegen wir es in eine Summe von zwei Integralen $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$. Auf $t \in (0,1]$ ist der Integrand beschränkt durch $e^{-1}t^{x-1} \le e^{-t}t^{x-1} \le t^{x-1}$. Deshalb konvergiert das erste Integral für $x-1 > -1 \iff x > 0$. Wegen $e^{-t}t^{x-1} = \exp(-t+(x-1)\ln(t))$ und weil für alle $\epsilon > 0$ im Grenzwert $\lim_{t\to\infty}$ der Ausdruck$-\epsilon t + (x-1)\ln(t)$ negativ ist, konvergiert das zweite Intgeral für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist $\Gamma(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ definiert. Durch eine partielle Integration erhalten wir

$$\int_\epsilon^R e^{-t}t^x dt = -e^{-t}t^x|_{t=\epsilon}^{t=R} + x\int_\epsilon^R e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Im Grenzwert $\epsilon \to 0$ und $R \to \infty$ erhalten wir folgende Funktionalgleichung:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Mit $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$ folgt induktiv $\Gamma(n) = (n-1)!$.