Kapitel 7

Differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

7.1 Definition der Ableitung

Definition 7.1. *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion auf einer Teilmenge X von $\mathbb{R}$, die eine Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}$ enthält. Dann heißt f im Punkt x_0 differenzierbar, wenn es ein $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die folgende reelle Funktion stetig in $x = x_0$ ist:*

$$X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{für } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{für } x = x_0 \end{cases} .$$

Wenn X offen ist und f in jedem Punkt differenzierbar ist, heißt f differenzierbar und die Funktion $f' : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$ heißt Ableitung von f.

Satz 7.2. *Sei f im Punkt x_0 differenzierbar, dann ist f im Punkt x_0 auch stetig.*

Beweis:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Also folgt die Aussage aus den Rechenregeln für Folgen und daraus, dass $x \mapsto (x - x_0)$ stetig ist. Hierbei benutzen wir das Kriterium (iii) aus Satz 5.14 **q.e.d.**

Definition 7.3. *Das Differential von f im Punkt x_0 ist die lineare Abbildung $df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h \mapsto f'(x_0)h$. Die Gerade $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)\}$ heißt Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Der Graph ist dabei*

$$\mathit{Graph}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}.$$

Die Sekante durch zwei Punkte $(x_0, f(x_0)) \neq (x_1, f(x_1))$ des Graphen ist gegeben durch

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x_0) + \tfrac{x-x_0}{x_1-x_0}(f(x_1) - f(x_0))\}.$$

Im Grenzwert $x_1 \to x_0$ 'konvergiert' die Sekante durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ gegen die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0.f(x_0))$.

Beispiel 7.4. **(i)** *$f(x) = |x|$. Für $x_0 = 0$ ist* $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$ *Also ist f im Punkt $x_0 = 0$ stetig aber nicht differenzierbar.*

(ii) *$f(x) = c \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$ für alle $x \neq x_0$. Also ist f differenzierbar mit $f'(x) = 0$.*

(iii) *$f(x) = x \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 1$ für alle $x \neq x_0$. Also ist f differenzierbar mit $f'(x) = 1$.*

(iv) *$f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$. $\Longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \ldots + x_0^{n-1}$ für alle $x \neq x_0$. Also ist f differenzierbar mit $f'(x) = nx^{n-1}$.*

(v) *Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihenfunktion mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n$ auch ein Potenzreihe mit Konvergenzradius R und wegen Satz 4.26 (iv) stetig. Deshalb ist f in $x = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = a_1$. Aus Satz 4.27 (ii) folgt, dass f für alle $x \in (-R, R)$ in x differenzierbar und die Ableitung $f'(x)$ gegeben ist durch die Potenzreihe $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ mit Konvergenzradius R.*

(vi) *$f(x) = \exp(x)$*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left(\frac{\exp(x-x_0)-1}{x-x_0}\right)\exp(x_0).$$

Aufgrund der Definition der Exponentialfunktion gilt: $\frac{\exp(x-x_0)-1}{x-x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{(n+1)!}$. Diese Potenzreihenfunktion ist stetig und bei $x - x_0 = 0$ gleich 1. Also folgt

$$f'(x) = \exp(x)$$

(vii) *$f(x) = \sin(x)$*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2} + \frac{x+x_0}{2}\right) + \sin\left(\frac{x-x_0}{2} - \frac{x+x_0}{2}\right)}{x-x_0} = \frac{2}{x-x_0}\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$$

Und wegen der Potenzreihe von $\sin$ gilt $\frac{2}{x-x_0}\sin(\frac{x-x_0}{2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(\frac{x-x_0}{2})^{2k}$. Diese Potenzreihenfunktion ist stetig und bei $\frac{x-x_0}{2} = 0$ gleich 1. Also folgt

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x+x}{2}\right) = \cos(x).$$

(viii) $f(x) = \cos(x)$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\cos(x)-\cos(x_0)}{x-x_0} =$$
$$= \frac{\cos\left(\frac{x_0+x}{2} - \frac{x_0-x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x_0+x}{2} + \frac{x_0-x}{2}\right)}{x-x_0} = \frac{2}{x-x_0}\sin\left(\frac{x_0+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x_0-x}{2}\right).$$

Wegen $\frac{2}{x-x_0}\sin\left(\frac{x_0-x}{2}\right) = -\frac{2}{x-x_0}\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)$ *folgt* $f'(x) = -\sin(\frac{x+x}{2}) = -\sin(x)$.

7.2 Rechenregeln der Ableitung

Satz 7.5. *(Leibnizregel) Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Dann sind auch die Funktionen $\lambda f, f+g$ und $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0) \qquad (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0).$$

Wenn $f(x_0) \neq 0$ dann ist $X' = f^{-1}[\mathbb{R}\setminus\{0\}]$ wegen Satz 7.2 eine Umgebung von x_0 und $\frac{1}{f} : X' \to \mathbb{R}, \quad x \to \frac{1}{f(x)}$ in x_0 differenzierbar mit $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$.

Beweis: Es gilt

$$\frac{\lambda f(x)-\lambda f(x_0)}{x-x_0} = \lambda\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \text{und}$$
$$\frac{f(x)+g(x)-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x_0-x_0} \qquad \text{und}$$
$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x) + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x_0) \qquad \text{und}$$
$$\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right)\frac{1}{x-x_0} = -\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x)f(x_0)(x-x_0)}.$$

Also folgt die Aussage aus Beispiel 5.19 und Satz 7.2. **q.e.d.**

Satz 7.6. *(Kettenregel) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen und $X \subset \mathbb{R}$ eine Umgebung von x_0 und $Y \subset \mathbb{R}$ eine Umgebung von $f(x_0)$. Wenn f in x_0 differenzierbar ist und g in $f(x_0)$, dann ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar mit*

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Beweis: $\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, wobei wir den linken Faktor für $f(x) = f(x_0) = y_0$ durch $g'(y_0)$ ersetzen. Dieser linke Faktor ist die Komposition von $x \mapsto f(x)$ mit $y \mapsto \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$ für $y \neq y_0$ und $y_0 \to g'(y_0)$, also wegen Satz 5.16 und Satz 7.2 in x_0 stetig. Also folgt die Behauptung aus Beispiel 5.19.**q.e.d.**

Satz 7.7. *(Ableitung der Umkehrfunktion) Sei $f : X \to Y$ eine bijektive Funktion von einer Umgebung $X \subset \mathbb{R}$ von x_0 auf eine Umgebung $Y \subset \mathbb{R}$ von $y_0 = f(x_0)$. Wenn f in x_0 differenzierbar ist mit $f'(x_0) \neq 0$ und f^{-1} in y_0 stetig ist, dann ist f^{-1} in y_0 differenzierbar mit $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

Beweis: $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$ für $y = f(x)$ und $y_0 = f(x_0)$. Die Funktion $y \mapsto \begin{cases} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} & \text{für } y \neq y_0 \\ \frac{1}{f'(x_0)} & \text{für } y = y_0 \end{cases}$ ist die Komposition der Funktion $y \to f^{-1}(y)$ mit $x \mapsto \begin{cases} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} & \text{für } x \neq x_0 \Leftrightarrow f(x) \neq f(x_0) \\ \frac{1}{f'(x_0)} & \text{für } x = x_0 \end{cases}$. Der Satz folgt aus Korollar 5.16. **q.e.d.**

Beispiel 7.8. (i) $\ln \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x)$

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(y)} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{x} \ \textit{mit} \ \exp(y) = x.$$

(ii) $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad x \mapsto \arcsin(x)$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ \textit{mit} \ \sin(y) = x \ \textit{und} \ x^2 \neq 1.$$

(iii) $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi], \quad x \mapsto \arccos(x)$

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(y)} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \ \textit{mit} \ \cos(y) = x \ \textit{und} \ x^2 \neq 1.$$

(iv) $\cdot^\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}.$

$$(\cdot^\alpha)'(x) = \exp(\alpha \ln(x))' = \exp(\alpha \ln(x)) \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

(v) $a^\cdot : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a^x, a \in \mathbb{R}^+.$

$$(a^\cdot)'(x) = \exp(x \cdot \ln(a))' = \exp(x \ln(a)) \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x.$$

(vi) Quotientenregel. *Seien f und g in x_0 differenzierbar und $g(x_0) \neq 0$. Dann ist $\dfrac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)}{g^2(x_0))} g'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

(vii) $x \mapsto \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

(viii) $x \mapsto \cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

$$\cot'(x) = \frac{-\sin(x)\sin(x) - \cos(x)cos(x)}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}.$$

(ix) $\arctan : \mathbb{R} \to \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x \mapsto \arctan(x)$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(y)} = \frac{1}{1 + x^2} \text{ mit } \tan(y) = x.$$

(x) $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi), \quad x \mapsto \operatorname{arccot}(x)$

$$\operatorname{arccot}'(x) = \frac{-1}{1 + \cot^2(g)} = \frac{-1}{1 + x^2} \text{ mit } \cot(y) = x.$$

(xi) $\log_a \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x) \quad \log_a'(x) = \left(\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \dfrac{1}{x\ln(a)}.$

(xii) $x^x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto x^x$

$$(x^x)' = \exp(x \cdot \ln(x))' = \exp(x \cdot \ln(x)) \left(\ln(x) + x\frac{1}{x}\right) = (\ln(x) + 1) \cdot x^x.$$

(xiii) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0\pm} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim\limits_{x \to 0\pm} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 & \text{für } x = 0 \\ 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0. \end{cases}.$$

Diese Funktion ist zwar differenzierbar, aber f' ist im Punkt $x = 0$ nicht stetig.

7.3 Mittelwertsatz und Monotonie

Definition 7.9. *(lokale Maxima und Minima) Eine relle Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ hat bei $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Maximum bzw. Minimum, falls es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ bzw. $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ gilt.*

Wenn für eine bei x_0 differenzierbaren Funktion $f'(x_0)$ nicht verschwindet, dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)| < |f'(x_0)|$ für alle $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ gilt. Dort hat $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ das gleiche Vorzeichen wie $f'(x_0)$. Dann gilt entweder $f(x) < f(x_0)$ für $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ und $f(x) > f(x_0)$ für $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$ oder $f(x) > f(x_0)$ für $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ und $f(x) < f(x_0)$ für $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$. Eine differenzierbare Funktion kann also nur an den Nullstellen der Ableitung lokale Extremwerte besitzen.

Definition 7.10. *(kritischer Punkt und kritischer Wert) Eine Nullstelle der Ableitung einer differenzierbaren Funktion heißt kritischer Punkt. Der entsprechende Funktionswert heißt kritischer Wert.*

Kanditaten für die Minima und Maxima einer stetigen Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind

(i) Kritische Punkte in (a,b)

(ii) Randpunkte, also entweder a oder b

(iii) Punkte in (a,b) an denen f nicht differenzierbar ist.

Satz 7.11. *(Satz von Rolle) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Falls $f(a) = f(b)$, dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$.*

Beweis: Wegen Korollar 5.17 gibt es $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ für alle $x \in [a,b]$. Wenn x_1 und x_2 beide am Rand liegen $x_1, x_2 \in \{a,b\}$ dann muss f konstant gleich $f(a) = f(b)$ sein. Also gilt dann $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. Andernfalls muss es einen lokalen Extremwert in (a,b) geben, an dem die Ableitung verschwindet. **q.e.d.**

Satz 7.12. *(Verallgemeinerter Mittelwertsatz) Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit*

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0) \quad \textit{d.h. für } g(b) \neq g(a) \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Die Tangente an $\{(f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b]\}$ in $(f(x_0), g(x_0))$ verläuft also parallel zu der Verbindungsgeraden der Endpunkte $(f(a), g(a))$ und $(f(b), g(b))$.
Beweis: $x \mapsto (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$ erfüllt die Vorraussetzungen von Satz 7.11. Die Ableitung ist Null für $f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0)$. **q.e.d.**

Satz 7.13. *(Mittelwertsatz) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Beweis: Wende den verallgemeinerten Mittelwertsatz auf f und $\mathbb{1}_{[a,b]}$ an. **q.e.d.**

Satz 7.14. *(Schrankensatz) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar mit $|f'(x)| \leq L$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist f lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L.*

Beweis: Seien $x < y \in [a,b]$. Dann erfüllt $f : [x,y] \to \mathbb{R}$ die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Also gibt es $x_0 \in (x,y)$ mit $f(y) - f(x) = f'(x_0)(y-x)$. Dann folgt $|f(y) - f(x)| = |f'(x_0)||y-x| \leq L|y-x|$. **q.e.d.**

Satz 7.15. *(Ableitung und Monotonie) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann gilt*

(i) *$f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b) \iff f$ ist konstant.*

(ii) *$f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b) \iff f$ ist monoton steigend.*

(iii) *$f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b) \iff f$ ist monoton fallend.*

(iv) *$f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$ und der Abschluss der Menge $\{x \in (a,b) \mid f'(x) > 0\}$ ist $[a,b] \iff f$ ist streng monoton steigend.*

(v) *$f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$ und der Abschluss der Menge $\{x \in (a,b) \mid f'(x) < 0\}$ ist $[a,b] \iff f$ ist streng monoton fallend.*

Beweis: Weil eine Funktion genau dann konstant ist, wenn sie monoton steigend und monoton fallend ist, folgt (i) aus (ii) und (iii). Wir beweisen nur (ii) und (iv). Für $a \leq x < y \leq b$ erfüllt $f : [x,y] \to \mathbb{R}$ die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Aus $f'(x_0) \geq 0$ für alle $x_0 \in (a,b)$ folgt $f(y) - f(x) \geq 0$, und f ist monoton wachsend. Umgekehrt folgt $f(x_0) > f(x)$ für ein $x > x_0$ aus $f'(x_0) < 0$ und f ist nicht monoton steigend. Es folgt (ii). Wenn f monoton wachsend, aber nicht streng monoton ist, dann gibt es $a \leq x < y \leq b$ mit $f(x) = f(y)$. Auf $[x,y]$ ist dann f konstant und $f'(z) = 0$ für $z \in (x,y)$. Weil jede offene Menge ein solches Intervall enthält folgt (iv). **q.e.d.**

Korollar 7.16. *(isolierte kritische Punkte) Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in (a,b)$ ein kritischer Punkt.*

(i) *Sei f' bei x_0 differenzierbar und $f''(x_0) > 0$. Dann ist x_0 ein lokales Minimum.*

(ii) *Sei f' bei x_0 differenzierbar und $f''(x_0) < 0$. Dann ist x_0 ein lokales Maximum.*

(iii) *Wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $f'(x) \leq 0$ für $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ und $f'(x) \geq 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$ gilt, dann ist x_0 ein lokales Minimum.*

(iv) *Wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $f'(x) \geq 0$ für $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ und $f'(x) \leq 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$ gilt, dann ist x_0 ein lokales Maximum.* **q.e.d.**

Beispiel 7.17. *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x+1)e^{-x}$ hat die Ableitung $f'(x) = (1 - (x+1))e^{-x} = -xe^{-x}$. Also ist sie auf $(-\infty, 0]$ streng monoton wachsend und auf $[0,\infty)$ streng monoton fallend. Insbesondere ist $f(0) = 1$ ein globales Maximum. Also gilt $x + 1 \leq e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \leq e^{y-1}$ für alle $y = x + 1 \in \mathbb{R}$.*

7.4 Regel von de L'Hopital

Definition 7.18. *(Grenzwerte von Funktionswerten) Für eine Funktion $f:(a,b)\to\mathbb{K}$ existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ genau dann, wenn für ein $f(a)\in\mathbb{K}$ die Funktion $x\mapsto\begin{cases} f(x) \text{ für } x\in(a,b)\\ f(a) \text{ für } x=a\end{cases}$ stetig bei $x=a$ ist. Wir schreiben dann $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=f(a)$.*

Der analoge Grenzwert $x\to b$ wird mit $\lim_{x\to b-} f(x)$ bezeichnet. Aufgrund der Definition der Stetigkeit existiert der Grenzwert $\lim_{x\to a+} f(x)$ also genau dann, wenn es ein $f(a)\in\mathbb{K}$ gibt, so dass für jedes $\epsilon>0$ ein $\delta>0$ gibt mit den aus $|x-a|<\delta$ folgt $|f(x)-f(a)|<\epsilon$. Wegen Satz 5.14 ist das äquivalent dazu, dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (a,b), die gegen a konvergiert, die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(a)$ konvergiert.

Satz 7.19. *(1. Regel von de L'Hopital) Seien $\infty<a<b<\infty$ und f und g auf (a,b) differenzierbare Funktionen mit $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=0=\lim\limits_{x\to a+} g(x)$. Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existsiert, dann existiert auch $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Bemerkung 7.20. *Wenn die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)$ und $\lim\limits_{x\to a+} g'(x)$ existieren und der zweite nicht verschwindet, dann existiert auch $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ mit $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a+} f'(x)}{\lim\limits_{x\to a+} g'(x)}$.*

Beweis: Wenn der Grenzwert $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, ist $g'(x)\neq 0$ für $x\in(a,b')$ mit $a<b'\leq b$. Aus dem Mittelwertsatz folgt $g(x)=g(x)-g(a)\neq 0$ für $x\in(a,b')$. Die auf $[a,b')$ stetig fortgesetzten Funktionen f und g erfüllen die Voraussetzungen des Verallgemeinerten Mittelwertsatzes. Deshalb gibt es für jedes $x\in(a,b')$ ein $x_0\in(a,x)$ so dass $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ gilt. Wenn also der Grenzwert $\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch der Grenzwert $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. **q.e.d.**

Satz 7.21. *(2. Regel von de L'Hopital) Unter derselben Voraussetzung wie bei der 1.Regel von de L'Hopital, nur gelte $\lim\limits_{x\to a+} g(x)=\infty$ statt $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\lim\limits_{x\to a+} g(x)=0$, gilt dieselbe Schlußfolgerung.*

Beweis*: Wenn $\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, gibt es $b'\in(a,b)$ mit $g'(x)\neq 0$ für $x\in(a,b')$. Für $a<x<y<b'$ folgt $g(y)\neq g(x)$ aus dem Mittelwertssatz, und wegen dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gibt es $x_0\in(x,y)$ mit $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. Wenn f und g die Vorraussetzungen der 2. Regel von de L'Hopital erfüllen, dann gibt es für jedes $\epsilon>0$ ein $y\in(a,b')$, so dass es für alle $x_0\in(a,y)$ gilt $|\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}-\alpha|<\frac{\epsilon}{2}$ mit $\alpha=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Dann folgt $\alpha-\frac{\epsilon}{2}<\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}<\alpha+\frac{\epsilon}{2}$ für alle $x\in(a,y)$. Wegen $\lim_{x\to a+} g(x)=\infty$ gibt es ein $y_0 \in (a, y)$ so dass für alle $x \in (a, y_0)$ gilt $g(x) > \min\{(g(y), 0\}$. Daraus folgt

$$\left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right)(g(x) - g(y)) + f(y) < f(x) < \left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right)(g(x) - g(y)) + f(x) \quad \text{oder}$$

$$\left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{f(y) - g(y)\left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < \left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{f(y) - g(y)\left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right)}{g(x)}.$$

Wegen $\lim_{x\to a+} g(x) = \infty$ gibt es dann auch ein $y_1 \in (a, y_0)$, so dass für alle $x \in (a, y_1)$ gilt $\alpha - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha + \epsilon$. Also gilt $\lim_{x_0\to a+} \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \lim_{x_0\to a+} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. **q.e.d.**

Die analogen Aussagen für die Grenzwerte $\lim_{x\to b-}$ gelten natürlich auch. Grenzwerte der Form $\lim_{x\to-\infty+} f(x)$ bzw. $\lim_{x\to\infty-} f(x)$ definieren wir als die Grenzwerte $\lim_{x\to 0-} f(1/x)$ bzw. $\lim_{x\to 0+} f(1/x)$. Wegen der Kettenregel gilt dann

$$\frac{df(\frac{1}{x})}{dx}\left(\frac{dg(\frac{1}{x})}{dx}\right)^{-1} = \tfrac{-1}{x^2} f'(\tfrac{1}{x})\left(\tfrac{-1}{x^2} g'(\tfrac{1}{x})\right)^{-1} = f'(\tfrac{1}{x})/g'(\tfrac{1}{x}).$$

Deshalb gelten die analogen Aussagen auch für diese Grenzwerte.

7.5 Konvexität und Ableitungen

Definition 7.22. *Eine reelle Funktion auf einem Intervall heißt konvex bzw. streng konvex, wenn für alle $a \neq b$ im Definitionsbereich und alle $t \in (0, 1)$ Folgendes gilt*

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b) \quad \textit{bzw.} \quad f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b).$$

Satz 7.23. *Für eine reelle Funktion f auf einem Intervall I ist Folgendes äquivalent:*

(i) *f ist konvex*

(ii) *Für $[a, b] \subset I$ und $x \in (a, b)$ gilt* $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

(iii) *Für $[a, b] \subset I$ und $x \in (a, b)$ gilt* $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \dfrac{f(b) - f(x)}{b - x}$.

(iv) *Für $[a, b] \subset I$ und $x \in (a, b)$ gilt* $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \dfrac{f(b) - f(x)}{b - x}$.

Die analogen Äquivalenzen zu streng konvex gelten, wenn $\leq$ durch $<$ ersetzt wird.

Beweis: Wir können wegen der Symmetrie $(a, b, t) \leftrightarrow (b, a, 1-t)$ in (i) $a < b$ annehmen. Dann sei $x = (1-t)a + tb \in (a, b) \Leftrightarrow t = \frac{x-a}{b-a} \in (0, 1)$. Also ist (i) äquivalent zu

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \quad \Leftrightarrow \quad (b-a)f(x) \leq (b-x)f(a) + (x-a)f(b).$$

Ersetzen wir entweder $(b-x) = (b-a) - (x-a)$, oder $(x-a) = (b-a) - (b-x)$ oder $(b-a) = (b-x) + (x-a)$, dann ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$\begin{array}{lcl} (b-a)(f(x)-f(a)) \leq (x-a)(f(b)-f(a)) & \Leftrightarrow & \text{(ii)} \\ (b-a)(f(x)-f(b)) \leq (b-x)(f(a)-f(b)) & \Leftrightarrow & \text{(iii)} \\ (b-x)(f(x)-f(a)) \leq (x-a)(f(b)-f(x)) & \Leftrightarrow & \text{(iv)}. \end{array}$$

Die analogen Aussagen für streng konvex lassen sich genauso beweisen, wenn wir alle Ungleichungen $\leq$ durch $<$ ersetzen. **q.e.d.**

Korollar 7.24. *Für eine stetige relle Funktion auf einem Intervall I, die im Inneren von I differenzierbar ist, ist Folgendes äquivalent:*

(i) *f ist (streng) konvex*

(ii) *f' ist (streng) monoton wachsend*

Beweis: (i)$\Rightarrow$(ii): Seien $a < x < b$, $y \in (a,x)$ und $z \in (x,b)$ Punkte im Inneren von I. Aus Satz 7.23 folgt $\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \leq \frac{f(b)-f(z)}{b-z}$. Aus den Grenzwerten $y \to a+$ und $z \to b-$ folgt $f'(a) \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \leq f'(b)$ und damit (ii).
(ii)$\Rightarrow$(i): Für $[a,b] \subset I$ und $x \in (a,b)$ gibt es wegen dem Mittelwertsatz $y \in (a,x)$ und $z \in (x,b)$ mit $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(y) \leq f'(z) = \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$. Aus Satz 7.23 (iv) folgt (i). **q.e.d.**

Korollar 7.25. *Für eine stetige reelle Funktion auf einem Intervall, die im Inneren zweimal differenzierbar ist, ist Folgendes äquivalent*

(i) *f ist (streng) konvex.*

(ii) *$f''(x) \geq 0$ im Inneren des Intervalls (und der Abschluss der Menge $\{x \mid f''(x) > 0\}$ ist das ganze Intervall).*

Dieses Korollar folgt sofort aus Korollar 7.24 und Satz 7.15. **q.e.d.**

Wenn wir die Ungleichungen zwischen den Funktionswerten alle umdrehen, so erhalten wir die analogen Aussagen für konkave Funktionen. Also ist eine Funktion f genau dann (streng) konkav, wenn die negative Funktion $-f$ (streng) konvex ist.

Übungsaufgabe 7.26. *Zeige, dass die Umkehrfunktion einer (streng) konvexen bijektiven (streng) monoton wachsenden Funktion (streng) konkav ist.*

Beispiel 7.27. **(i)** *$f(x) = x^2 \Longrightarrow f'' = 2$. Also ist f streng konvex.*

(ii) *$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto \sqrt{x} \Longrightarrow f'' = \frac{-1}{4x^{3/2}}$. Also ist f streng konkav.*

(iii) *$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \exp(x) \Longrightarrow \exp'' = \exp$. Also ist $\exp$ streng konvex.*

(iv) *$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x) \Longrightarrow \ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Also ist $\ln$ streng konkav.*

7.6 Konvexität und Ungleichungen

Satz 7.28.* *(Ungleichung von Jensen) Sei f eine reelle konvexe Funktion auf einem Intervall. Seien $x_1, \ldots, x_n$ im Definitionsbereich und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positive Zahlen, die $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ erfüllen. Dann gilt*

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n).$$

Wenn f streng konvex ist, dann gilt Gleichheit nur für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Beweis*: durch vollständige Induktion:

(i) Für $n = 1$ muss $\lambda_1 = 1$ sein, so dass die Aussage klar ist.

(ii) Die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}$. Seien $x_1, \ldots, x_{n+1}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ wie gefordert. Dann definieren wir $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ und $x = \frac{\lambda_1}{\lambda}x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda}x_n$. Also gilt $\lambda_{n+1} = 1 - \lambda$ und $\frac{\lambda_1}{\lambda} + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda} = 1$. Dann folgt aus der Induktionsvoraussetzung $f(x) \leq \frac{\lambda_1}{\lambda} f(x_1) + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda} f(x_n)$. Wenn f streng konvex ist, dann gilt Gleichhheit nur für $x_1 = \ldots = x_n$. Weil f konvex ist folgt aber $f(\lambda x + (1-\lambda)x_{n+1}) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x_{n+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$. Wenn f streng konvex ist, dann gilt Gleichheit wieder nur für $x_{n+1} = x = x_1 = \ldots = x_n$. **q.e.d.**

Korollar 7.29.* *(Ungleichung arithmetisches-geometrisches Mittel) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positive Zahlen mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n = 1$. Dann gilt für positive Zahlen $x_1, \ldots, x_n$*

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n.$$

Insbesondere gilt $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$. Gleichheit gilt nun für $x_1 = x_2 \ldots = x_n$.

Beweis*: $-\ln$ ist streng konvex. Also folgt aus Jensen's Ungleichung

$$\begin{aligned} -\ln(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) &\leq -\lambda_1 \ln x_1 - \ldots - \lambda_n \ln x_n \\ \iff \lambda_1 \ln x_1 + \ldots + \lambda_n \ln x_n &\leq \ln(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \end{aligned}$$

Wegen der Monotonie von exp folgt:

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} = \exp(\lambda_1 \ln x_1 + \ldots + \lambda_n \ln x_n) \leq \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n.$$ **q.e.d.**

Ersetzen wir $x_1, \ldots, x_n$ durch $y_1^{1/\lambda_1}, \ldots, y_n^{1/\lambda_n}$ so erhalten wir

Korollar 7.30.* *Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positive Zahlen mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Dann gilt*

$$y_1 \ldots y_n \leq \lambda_1 y_1^{1/\lambda_1} + \ldots + \lambda_n y^{1/\lambda_n}$$

für alle $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^+$. Gleichheit gilt nur für $y_1^{1/\lambda_1} = y_2^{1/\lambda_2} = \ldots = y_n^{1/\lambda_n}$. **q.e.d.**

Korollar 7.31. *(Young'sche Ungleichung) Seien $p,q\in\mathbb{R}^+$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Dann gilt*

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q \quad \text{für alle } x,y\in\mathbb{R}^+ \text{ und Gleichheit nur } x^p=y^q.$$

Beweis: Wegen der strengen Monotonie von ln ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$\ln(xy)=\tfrac{1}{p}\ln(a)+\tfrac{1}{q}\ln(b)\leq \ln\left(\tfrac{1}{p}a+\tfrac{1}{q}b\right)=\ln\left(\tfrac{1}{p}x^p+\tfrac{1}{q}y^q\right) \qquad \text{mit } a=x^p \text{ und } b=y^q.$$

Weil ln streng konkav ist, gilt diese Ungleichung und Gleichheit nur für $a=b$. **q.e.d.**

7.7 Taylorreihen

Auf offenen Intervallen I (Teilmenge von $\mathbb{R}$) ist die Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion f wieder eine Funktion auf I. Die Bildung der Ableitung ist also ein linearer Operater $\frac{d}{dx}$, der differenzierbaren Funktionen auf I, Funktionen auf I zuordnet. Wenn die Ableitung wieder differenzierbar ist, können wir diesen Operator nochmal anwenden und erhalten $(\frac{d}{dx})^2 f = f''$ die zweite Ableitung von f. Durch n–faches Anwenden erhalten wir gegebenenfalls dann die n-te Ableitung $f^{(n)}$.

Definition 7.32. *Für alle $n\in\mathbb{N}_0$ und alle offenen Teilmengen $I\subset\mathbb{R}$ sei $C^n(I)$ die Menge aller n-mal stetig differenzierbaren reellen Funktionen auf I, und $C^\infty(I)$ die Menge aller beliebig oft differenzierbaren reellen Funktionen auf I.*

$$C(I)=C^0(I)\supset C^1(I)\supset\ldots\supset C^n(I)\supset\ldots\supset C^\infty(I)$$

Beispiel 7.33. **(i)** $\exp\in C^\infty(\mathbb{R})$, *weil* $\exp^{(n)}=\exp$.

(ii) *für alle $n\in\mathbb{N}_0$ ist $x\mapsto x^n\in C^\infty(\mathbb{R})$, weil $(x^n)^{(n)}=n!$ und $(x^n)^{(m)}=0$ für $m>n$.*

(iii) *für alle $n\in\mathbb{N}$ ist $x\mapsto x^{-n}\in C^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, weil $(x\mapsto x^{-n})^{(m)}=$*

$$x\mapsto \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-m+1)}{x^{n+m}}=(-1)^m\frac{(n+m-1)(n+m-2)\ldots n}{x^{n+m}}.$$

(iv) $\ln\in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ *weil* $\ln^{(m)}(x)=\dfrac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{x^m}$ *für $m\geq 1$ und mit $0!=1$.*

Übungsaufgabe 7.34. *Zeige mit vollständiger Induktion für alle $n\in\mathbb{N}$:*

(i) $\dfrac{d^n}{dx^n}f\cdot g=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$ *für alle $f,g\in C^n(I)$ (Verallgemeinerte Leibnizregel).*

(ii) *$C^n(I)$ ist eine Unteralgebra von $C(I)$.*

Aus der Rechenregel und der Kettenregel folgt auch

Korollar 7.35. **(i)** *Die Komposition von n-mal (stetig) differenzierbaren Funktionen ist wieder n-mal (stetig) differenzierbar.*

(ii) *Die Umkehrfunktion einer n-mal (stetig) differenzierbaren bijektiven Funktion ist n-mal (stetig) differenzierbar, wenn die Ableitung keine Nullstellen hat.* **q.e.d.**

Definition 7.36. *(Taylor-Polynom) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 n-mal differenzierbar, d.h. es gibt eine offene Umgebung $O \subset I$ von x_0, so dass die Einschränkung von f auf O in $C^{n-1}(O)$ liegt, und $f^{(n-1)}$ in x_0 differenzierbar ist. Dann heißt*

$$T_{n,x_0}(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f^{(2)}(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

das Taylorpolynom von f der Ordnung n in x_0.

Offenbar hat das Taylorpolynom der Ordnung n in x_0 die gleichen Ableitungen bis zur Ordnung n wie f an dem Punkt x_0. Es ist das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad n, das an der Stelle x_0 die Ableitungen $f(x_0), f^{(1)}(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ besitzt:

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n \Longrightarrow p(x_0) = c_0, p^{(1)}(x_0) = c_1, \ldots, p^{(n)}(x_0) = n!c_n.$$

Satz 7.37. *(Taylorformel) Sei $f \in C^n((a, b))$. Wenn $f^{(n+1)}(x)$ für alle $x \in (a, b)$ existiert, dann gibt es für jedes $x_0 \neq x \in (a, b)$ ein $\xi \in (x_0, x)$ bzw. $\xi \in (x, x_0)$, so dass*

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad \textit{gilt.}$$

Beweis: Sei $x \in (a, b)$ und $g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k$ für $t \in (a, b)$. Dann gilt

$$g'(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x - t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k - 1)!}(x - t)^{k-1} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n.$$

Außerdem sei $h(t) = (x - t)^{n+1}$ und $h'(t) = -(n + 1)(x - t)^n$. Dann folgt aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz, dass es ein $\xi \in (x_0, x)$ bzw. $\xi \in (x_0, x)$ gibt mit

$$(g(x) - g(x_0))h'(\xi) = (h(x) - h(x_0))g'(\xi).$$

Es gilt aber $g(x) - g(x_0) = f(x) - T_{n,x_0}(x)$ und $h(x) - h(x_0) = -(x - x_0)^{n+1}$. Also folgt $f(x) - T_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n(x - x_0)^{n+1}}{n!(n + 1)(x - \xi)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$. **q.e.d.**

Definition 7.38. *(Taylorreihe) Für $f \in C^\infty((a, b))$ und $x_0 \in (a, b)$ heißt die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ Taylorreihe von f in x_0.*

Für $f \in C^\infty((a,b))$ und $x_0, x \in (a,b)$ gibt es drei Möglichkeiten:

(i) Die Taylorreihe von f in x_0 konvergiert an dem Punkt x gegen $f(x)$.

(ii) Die Taylorreihe von f in x_0 konvergiert an dem Punkt x, aber nicht gegen $f(x)$.

(iii) Die Taylorreihe von f in x_0 konvergiert an dem Punkt x nicht.

Korollar 7.39. *Sei $f \in C^\infty((a,b))$ und $x_0 \in (a,b)$. Dann konvergiert die Taylorreihe von f in x_0 an dem Punkt $x \in (a,b)$ gegen $f(x)$, wenn auf $\xi \in (x_0, x)$ bzw. (x, x_0) die Folge $(\frac{|f^n(\xi)|}{n!}|x - x_0|^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichmäßig gegen Null konvergiert.* **q.e.d.**

Beispiel 7.40.

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \textit{für } x > 0 \\ 0 & \textit{für } x \leq 0 \end{cases} \\ f^{(n)}(x) &= \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \textit{ Polynom vom Grad 3n von } \frac{1}{x} & \textit{für } x > 0 \\ 0 & \textit{für } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Wegen Beispiel 7.17 gilt $x \leq e^{x-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann folgt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{1}{|x|} \leq e^{(\frac{1}{|x|}-1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|x|^n} \leq e^{(\frac{n}{|x|}-n)} \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{|x|^n} \leq \exp\left(\frac{-1 + n|x| - nx^2}{x^2}\right).$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist dann $x \to \begin{cases} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} & \textit{für } x > 0 \\ 0 & \textit{für } x \leq 0 \end{cases}$ stetig, und $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Die Taylorreihe von f bei $x_0 = 0$ verschwindet mit allen Ableitungen von f bei $x_0 = 0$.

Satz 7.41. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $C^1((a,b))$ eines beschränkten Intervalles (a,b), die für ein $x_0 \in (a,b)$ punktweise konvergiert. Wenn die Folge $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ außerdem gleichmäßig gegen g konvergiert, dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in C^1((a,b))$ und es gilt $f' = g$.*

Beweis: Wegen dem Mittelwertsatz gilt für alle $x, x_0 \in (a,b)$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |x - x_0| \sup\{|f'_n(y) - f'_m(y)| \mid y \in (a,b)\}.$$

Wegen Satz 5.27 konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in C((a,b))$. Wegen dem Mittelwertsatz gibt es für alle $x_1, x \in (a,b)$ eine Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (x, x_1) bzw. (x_1, x), so dass $f_n(x) - f_n(x_1) = (x - x_1)f'_n(\xi_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen dem Auswahlprinzipien von Bolzano-Weierstraß gibt es eine konvergente Teilfolge von $(\xi_n)_{n\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $\xi \in [x, x_1]$ bzw. $\xi \in [x_1, x]$. Wegen

$$|f'_n(\xi_n) - g(\xi)| \leq |f_n(\xi_n) - g(\xi_n)| + |g(\xi_n) - g(\xi)|,$$

und weil g wegen Satz 5.27 stetig ist, konvergiert die Folge $(f'_n(\xi_n))_{n\mathbb{N}}$ gegen $g(\xi)$. Also konvergiert $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x) = f(x_1) + (x - x_1)g(\xi)$. Aus der Stetigkeit von g folgt, dass f bei x_1 differenzierbar ist und $g(x_1)$ die Ableitung $f'(x_1)$ ist. **q.e.d.**

Korollar 7.42.* *Sei $(\sum f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Reihe in $C(I)$ auf einem beschränktem Intervall I und $(\sum f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $x_0 \in I$. Dann konvergiert $(\sum f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in C^1(I)$ und $(\sum f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f'.* **q.e.d.**

Korollar 7.43.* *(Satz von Borel) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R}$. Dann gibt es eine Funktion, deren Taylorreihe bei $x_0 = 0$ gleich $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ ist, und die außerhalb von $(-2, 2)$ verschwindet. D.h. alle Potenzreihen sind Taylorreihen einer solchen Funktion.*

Beweis*:

$$\text{Sei} \quad h(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \le 1 \\ \exp\left(\exp\left(\frac{-1}{(|x|-1)^2}\right) \cdot \frac{-1}{(|x|-2)^2}\right) & \text{für } 1 < |x| < 2 \\ 0 & \text{für } 2 \le |x| \end{cases}$$

Dann ist $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine 'Hutfunktion', die außerhalb von $(-2, 2)$ verschwindet, und die auf $[-1, 1]$ gleich 1 ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert dann eine Konstante $M_n > 0$

$$M_n = \max\{\|h_n\|_\infty, \|h'_n\|_\infty, \dots, \|h_n^{(n-1)}\|_\infty\}$$

mit $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n \cdot h(x)$. Dann sei für eine beliebige reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$C_n = |a_n|M_n + 1 \quad \text{und} \qquad f_n(x) = \frac{a_n}{n!C_n^n} h_n(C_n \cdot x) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt dann $f_n^{(m)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } m \ne n \\ a_n & \text{für } m = n. \end{cases}$ Außerdem gilt

$$\|f_n^{(m)}\|_\infty = \frac{|a_n|C_n^m}{n!C_n^n} \|h_n^{(m)}\|_\infty \le \frac{|a_n|M_n C_n^m}{n!C_n^n} < \frac{C_n^{m+1}}{n!C_n^n} \le \frac{1}{n!} \quad \text{für alle } n > m \in \mathbb{N}_0.$$

Also konvergiert für alle $m \in \mathbb{N}_0$ $(\Sigma f_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichmäßig. Wegen Korollar 7.42 konvergieren also für alle $m \in \mathbb{N}_0$ die Reihen $(\Sigma f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (\Sigma f'_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, \dots, (\Sigma f_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichmäßig gegen $f, f', \dots, f^{(m)}$. Also ist der Grenzwert $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ eine Funktion in $C^\infty(\mathbb{R})$ und es gilt $f^{(m)}(0) = a_m$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$. **q.e.d.**

Korollar 7.44. *Für jede Potenzreihenfunktion $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ und jedes $|x_0| < R$ hat die Taylorreihe von $f(x)$ in x_0 einen Konvergenzradius nicht kleiner als $R - |x_0|$, und konvergiert auf $B(x_0, R - |x_0|)$ gegen f.*

Beweis: Wegen Beispiel 7.4 (v) stimmen bei $x_0 = 0$ die Ableitungen von f bis zur Ordnung N mit den entsprechenden Ableitungen von $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ überein. Deshalb sind $T_{n,0} = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ die Taylorpolynome von f bei $x_0 = 0$ und f ist dort die Taylorreihe. Dann folgt die Aussage aus dem Identitätssatz für Potenzreihenfunktionen (ii). **q.e.d.**

Satz 7.45. *(Abelscher Grenzwertsatz) Wenn die Potenzreihe* $(\sum a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *für ein* $x \in \mathbb{K}$ *konvergiert, dann konvergiert die Potenzreihenfunktion* $t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n(tx)^n$ *auf* $t \in [0, 1]$ *gleichmäßig gegen eine stetige Funktion von* $[0, 1]$ *nach* $\mathbb{K}$.

Beweis: Indem wir a_n durch $a_n x^n$ ersetzen können wir x weglassen. Zur Abkürzung setzen wir $S_{m,k} = \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n$. Wegen dem Cauchykriterium für Reihen gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $|S_{m,k}| < \epsilon$ für alle $m \geq N$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Dann folgt

$$\sum_{n=m+1}^{m+k} a_n t^n = S_{m,1}t^{m+1} + (S_{m,2} - S_{m,1})t^{m+2} + \ldots + (S_{m,k} - S_{m,k-1})t^{m+k}$$
$$= S_{m,1}(t^{m+1} - t^{m+2}) + S_{m,2}(t^{m+2} - t^{m+3}) + \ldots + S_{m,k-1}(t^{m+k-1} - t^{m+k}) + S_{m,k}t^{m+k}.$$

Für $t \in [0, 1]$ sind die hinteren Faktoren $t^{m+1}-t^{m+2}, t^{m+2}-t^{m+3}, \ldots, t^{m+k-1}-t^{m+k}, t^{m+k}$ alle nicht negativ und ihre Summe gleich $t^{m+1} \leq 1$. Aus $|S_{m,k}| < \epsilon$ folgt also

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+k} a_n t^k\right| < \epsilon(t^{m+1}-t^{m+2}+t^{m+2}-\ldots-t^{m+k}+t^{m+k}) = \epsilon t^{m+1} \leq \epsilon \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

Also konvergiert die Potenzreihe auf $t \in [0, 1]$ gleichmäßig, und damit wegen Satz 5.27 gegen eine stetige Funktion. **q.e.d.**

Definition 7.46. *Eine Funktion* $f \in C^\infty(I)$ *heißt reellanalytisch bei* x_0*, falls die Taylorreihe bei* x_0 *einen Konvergenzradius größer als Null hat und auf einer Umgebung von* x_0 *gegen* $f(x)$ *konvergiert. Sie heißt reellanalytisch, wenn das für alle* $x_0 \in I$ *gilt.*

Also sind alle Potenzreihenfunktionen im Inneren ihres Kovergenzbereiches reellanalytisch. Umgekehrt sind alle reellanalytischen Funktionen Potenzreihenfunktionen.

Beispiel 7.47. (i) *Die Funktionen* $\exp, \sin, \cos, x \mapsto a^x$ *und alle Polynome sind reellanalytische Funktionen auf ganz* $\mathbb{R}$.
(ii) *Wegen Satz 4.26 (iv) gibt es für jede Potenzreihenfunktion* f *mit* $f(0) \neq 0$ *und Konvergenzradius* $R > 0$ *ein* $r > 0$*, so dass* $|\frac{f(0)-f(x)}{f(0)}| \leq L < 1$ *für alle* $x \in B(0, r)$ *gilt. Weil* $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ *auf* $x \in [0, L]$ *stetig ist, konvergiert die Potenzreihenfunktion* $\frac{1}{f(0)} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{f(0)-f(x)}{f(0)})^n$ *für* $x \in B(0, r)$ *gegen* $\frac{1}{f(0)} \frac{1}{1-(f(0)-f(x))/f(0)} = \frac{1}{f(x)}$*. Aus dem Identitässatz für Potenzreihenfunktionen folgt, dass der Quotient zweier Potenzreihenfunktionen reellanalytisch ist, solange beide Potenzreihenfunktionen absolut konvergieren und der Nenner nicht verschwindet. Also sind* $\tan$ *und* $\cot$ *und alle rationalen Funktionen auf dem Definitionsbereich reellanalytisch.*

(iii) *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^+$ (für $\alpha \in \mathbb{Z}$ auch $x_0 \in \mathbb{R}^-$) hat die Potenzreihenfunktion*

$$x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x_0^{\alpha-n} x^n \quad \textit{mit} \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\cdots 1}$$

wegen dem Quotiententest den Konvergenzradius $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\alpha-n|}{|x_0|(n+1)}} = |x_0|$. *Die Ableitung ist* $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x_0^{\alpha-n} x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x_0^{\alpha-1-n} x^n$. *Wegen*

$$\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}(\alpha-n+n) = \binom{\alpha}{n}$$

ist $(x_0 + x)\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x_0^{\alpha-1-n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x_0^{\alpha-n} x^n$. *Dann erfüllt f die Differentialgleichung $(x_0 + x)f' = \alpha f$ mit $f(0) = x_0^{\alpha}$. Also verschwindet die Ableitung von*

$$g(x) = \frac{f(x)}{(x_0+x)^{\alpha}} \quad g'(x) = \frac{(x+x_0)f'(x) - \alpha f(x)}{(x+x_0)^{\alpha+1}} = 0 \quad \textit{mit } g(0) = 1.$$

Dann folgt aus Satz 7.15 (i), dass für alle $|x| < x_0$ gilt $f(x) = (x + x_0)^{\alpha}$. Also sind für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktionen $x \mapsto x^{\alpha}$ auf $\mathbb{R}^+$ und für $\alpha \in \mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ reellanalytisch.

(iv) *Für alle $x_0 \in \mathbb{R}^+$ hat die Potenzreihenfunktion $x \mapsto f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n x_0^n}$ im Konveregemzbereich $|x| < x_0$ die Ableitung $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{x_0^{n+1}} = \frac{1}{x+x_0}$. Also stimmt sie mit $f(x) = \ln(x+x_0) - \ln(x_0)$ überein. Deshalb sind sowohl* $\ln$ *also auch* $\log_a$ *auf $\mathbb{R}^+$ reellanalytisch. Insbesondere folgt aus dem Abelschen Grenzwertsatz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.*

(v) *Die Ableitungen der Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen sind wegen (iii) im Inneren ihrer Definitionsbereiche reellanalytisch. Für alle $|x| < 1$ gilt*

$$\arcsin'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n} \qquad \arccos'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n}$$

$$\arctan'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad \operatorname{arccot}'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Wegen Beispiel 7.4 (v) sind sie selber dann auch reellanalytisch. Für alle $|x| < 1$ gilt

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Wegen Beispiel 7.17 gilt $x \geq \ln(1+x)$ *für* $x > -1$. *Dann folgt*

$$\ln\left((-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right) = \ln\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right)$$
$$\leq -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{1}\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Dann konvergieren aber die ersten beiden Potenzreihen auch für $x=\pm 1$ *und die letzten beiden wegen der alternierenden Reihe von Leibniz. Wegen dem Abelschen Grenzwertsatz gelten die obigen Gleichungen dann auch für* $x=\pm 1$. *Insbesondere ist*

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

(vi) *Die Funktionen* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x>0 \\ 0 & \text{für } x\leq 0\end{cases}$ *ist reellanalytisch auf* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, *aber nicht bei* $x_0=0$.

(vii) *Die Funktion* $x\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{e^x-1}{x}$ *ist auf ganz* $\mathbb{R}$ *reellanalytisch und hat dort keine Nullstellen. Deshalb definiert* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto\dfrac{x}{e^x-1}$ *eine Funktion in* $C^\infty(\mathbb{R})$. *Die Ableitungen bei* $x=0$ *heißen Bernoulli Zahlen* $B_0=f(0)=1, B_1=f'(0)=-\frac{1}{2},\ldots$. *Dann hat* f *die Taylorreihe* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_nx^n}{n!}$. *Aus* $(e^x-1)f(x)=x$ *folgt*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_nx^n}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{B_k}{k!(n-k)!}x^n = x.$$

Wegen (ii) ist f *reellanalytisch und es folgt für alle* $n\in\mathbb{N}$ *die Rekursionsformel*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k = 0 \text{ also } B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k \text{ und } B_0=1.$$

Aus $f(x)-f(-x)=\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{e^{-x}-1}=\frac{x}{e^x-1}+\frac{xe^x}{1-e^x}=-x$ *folgt* $B_{2n+1}=0$ *für alle* $n\in\mathbb{N}$.

(viii) *Die Funktion* tan *ist wegen (ii) reellanalytisch. Sie hat bei* $x_0=0$ *die Taylorreihe*

$$\tan(x) = \frac{e^{\imath x}-e^{-\imath x}}{\imath(e^{\imath x}+e^{\imath x})} = -\imath\frac{e^{2\imath x}+1-2}{e^{2\imath x}+1} = \frac{2\imath(e^{2\imath x}-1)}{e^{4\imath x}-1}-\imath = \frac{2\imath(e^{2\imath x}+1)-4\imath}{e^{4\imath x}-1}-\imath =$$
$$= \frac{1}{x}\left(\frac{2\imath x}{e^{2\imath x}-1}+\imath x+\frac{4\imath x}{e^{4\imath x}-1}-2\imath x\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}-4^{2n}}{(2n)!}(-1)^nB_{2n}x^{2n-1}.$$

Aus dem Identitätssatz für Potenzreihenfunktionen folgt zuletzt

Korollar 7.48.* *Zwei reellanalytische Funktionen in* $C^\infty((a,b))$ *stimmen genau dann auf* (a,b) *überein, wenn ihre Taylorreihen für ein* $x_0\in(a,b)$ *übereinstimmen.* **q.e.d.**