Kapitel 6

Stetige Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

6.1 Umkehrfunktionen

Satz 6.1. *(Zwischenwertsatz) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ stetig. Dann enthält das Bild $f\,[[a, b]]$ das abgeschlossene Intervall* $[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$.

Beweis: Für $f(a) = f(b)$ ist die Aussage trivial. Sei y eine reelle Zahl im offenen Intervall zwischen $f(a)$ und $f(b)$ und $A = f^{-1}[(-\infty, y]]$ für $f(a) < f(b)$ bzw. $A = f^{-1}[[y, \infty)]$ für $f(a) < f(b)$. Diese Menge enthält a, ist beschränkt und wegen der Stetigkeit von f abgeschlossen. Also ist A kompakt und besitzt ein Maximum $x = \max A$ mit $f(x) \leq y$ für $f(a) < f(b)$ bzw. $f(x) \geq y$ für $f(a) > f(b)$. Weil y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt, ist $x < b$ und für alle $z \in (x, b]$ liegt $f(z)$ auf der selben Seite von y wie $f(b)$. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in $(x, b]$, die gegen x konvergiert. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ und $f(x) \geq y$ für $f(a) < f(b)$ bzw. $f(x) \leq y$ für $f(a) > f(b)$. Also ist $f(x) = y$ und das Bild von f enthält neben $f(a)$ und $f(b)$ alle reellen Zahlen zwischen $f(a)$ und $f(b)$. **q.e.d.**

Mit diesem Satz läßt sich von vielen stetigen reellen Funktionen die Surjektivität zeigen oder ihr Bild bestimmen. Die Injektivität von solchen stetigen reellen Funktionen ist dagegen äquivalent zur Monotonie.

Definition 6.2. *(Monotonie) Eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ auf einer Teilmenge X von $\mathbb{R}$ heißt*

monoton wachsend, *wenn $f(x) \leq f(x')$ für alle $x, x' \in X$ mit $x \leq x'$ gilt*

streng monoton wachsend, *wenn $f(x) < f(x')$ für alle $x, x' \in X$ mit $x < x'$ gilt.*

monoton fallend, *wenn $f(x) \geq f(x')$ für alle $x, x' \in X$ mit $x \leq x'$ gilt.*

streng monoton fallend, *wenn $f(x) > f(x')$ für alle $x, x' \in X$ mit $x < x'$ gilt.*

Satz 6.3. *Eine stetige reelle Funktion f auf einem Intervall ist genau dann injektiv, wenn f entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.*

Beweis: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I stetig und injektiv. Offenbar ist f genau dann streng monoton (wachsend oder fallend), wenn für je drei verschiedenen Punkte $a < x < b$ in I entweder $f(a) < f(x) < f(b)$ oder $f(a) > f(x) > f(b)$ gilt, wenn also die offenen Intervalle zwischen $f(a)$ und $f(x)$ und zwischen $f(x)$ und $f(b)$ disjunkt sind. Wenn es andernfalls ein $x_0 \in (a, b)$ gibt, dessen Funktionswert $f(x_0)$ nicht zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt, dann folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass jeder Wert, der sowohl zwischen $f(x_0)$ und $f(a)$ als auch zwischen $f(x_0)$ und $f(b)$ liegt, einmal auf (a, x_0) und einmal auf (x_0, b) angenommen wird, was der Injektivität widerspricht.

Umgekehrt ist jede streng monotone Funktion injektiv. **q.e.d.**

Korollar 6.4. *Die Umkehrfunktion einer bijektiven stetigen Funktion von einem Intervall auf ein Intervall ist stetig.*

Beweis: Offenbar besitzt jeder Punkt x eines Intervalls, das mehr als einen Punkt enthält, eine Umgebung in diesem Intervall, die ein abgeschlossenes beschränktes Intervall ist. Das Bild solcher kompakter Intervalle ist wegen dem Zwischenwertsatz und dem vorangehenden Satz eine Umgebung von $f(x)$ im Bild von f. Dann ist f^{-1} wegen Korollar 5.18 bei $y = f(x)$ stetig. Weil f surjetiv ist, ist damit f^{-1} stetig. **q.e.d.**

Beispiel 6.5. *Für $k \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \to x^k$ streng monoton wachsend. Dann ist die Umkehrabbildung $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \to x^{\frac{1}{k}}$ stetig und streng monoton wachsend. Dasselbe gilt für die Abbildung $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \to x^{\frac{p}{q}}$ mit Umkehrabbildung $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \to x^{\frac{q}{p}}, p, q \in \mathbb{N}$. Für negative $\frac{p}{q}$ sind diese Abbildungen von $\mathbb{R}^+$ nach $\mathbb{R}^+$ streng monoton fallend.*

Satz 6.6.* *Sei f eine monoton wachsende (fallende) Funktion von einem Interval I nach $\mathbb{R}$. Dann ist die Menge aller Unstetigkeitsstellen von f höchstens abzählbar.*

Beweis*: Wir betrachten monoton wachsende Funktionen. Für monoton fallende Funktionen verläuft der Beweis analog. Für jeden inneren Punkt ξ von I sei $f(\xi_-) = \sup\{f(x) \mid x \in I \text{ und } x < \xi\}$ und $f(\xi_+)\} = \inf\{f(x) \mid x \in I \text{ und } \xi < x\}$. Wenn $f(\xi_-) = f(\xi_+)$, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ Punkte $x_-, x_+ \in I$ mit $x_- < \xi < x_+$ und

$$f(x_+) - \epsilon < f(\xi_+) = f(\xi_-) < f(x_-) + \epsilon.$$

Wegen der Monotonie gilt $f(\xi_-) \leq f(\xi) \leq f(\xi_+)$. Dann gilt für alle $x \in [x_-, x_+]$ auch

$$-\epsilon < f(x_-) - f(\xi_-) \leq f(x) - f(\xi) \leq f(x_+) - f(\xi_+) < \epsilon.$$

Also ist f bei solchen ξ stetig. Die Unstetigkeitsstellen im Inneren von I bestehen sogar aus den ξ mit $f(\xi_-) < f(\xi_+)$. Wegen der Monotonie sind diese offenen Intervall $(f(\xi_-), f(\xi_+))$ parrweise disjunkt. Wir wählen in jedem eine rationale Zahl und erhalten eine injektive Abbildung von den Unstetigkeitsstellen im Inneren von I auf die rationalen Zahlen. Damit sind die Unstetigkeitsstellen gleichmächtig zu einer Teilmenge der rationalen Zahlen also höchstens abzählbar. **q.e.d.**

6.2 Die reellen Funktionen $e^x, \ln x, a^x, \log_a x$.

Satz 6.7. *(Eigenschaften von* exp*)*

(i) $e^0 = \exp(0) = 1.$

(ii) $e^x > \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *und* $x > 0$.

(iii) *Für* $x, y \in \mathbb{R}$ *folgt* $e^x < e^y$ *aus* $x < y$.

(iv) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto e^x$ *ist bijektiv.*

Beweis:(i) und **(ii)** folgen aus der Definition.
(iii) Aus $x < y$ folgt $y - x > 0$. Dann gilt wegen (ii) $e^{y-x} > 1$. Wegen Satz 4.19 (i) und (ii) gilt dann $e^y - e^x = (e^{y-x} - 1)e^x > 0$. Also folgt $e^x < e^y$.
(iv) Offenbar ist die Funktion wegen (iii) injektiv. Wegen $e > 1$ und Satz 3.4 gibt es für jedes $y \in \mathbb{R}^+$ zwei $n, m \in \mathbb{N}$ mit $e^{-n} < y < e^m$. Wegen dem Zwischenwertsatz gehört dann y zum Bild von $[-n, m] \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto e^x$. **q.e.d.**

Definition 6.8. *(des natürlichen Logarithmus). Die Umkehrfunktion von* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto e^x$ *heißt natürlicher Logarithmus:* $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln x$.

Wegen Korollar 6.4 ist der Logarithmus stetig.

Satz 6.9. *(Eigenschaften von* ln*)*

(i) $\ln(1) = 0$.

(ii) $\ln(e) = 1$.

(iii) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}^+$.

(iv) $a^r = e^{\ln(a)\cdot r}$ *für alle* $r \in \mathbb{Q}$ *und* $a \in \mathbb{R}^+$.

(v) $\ln\left(e^{ln(a)x}\right) = x\ln(a)$ *für alle* $a \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}$.

(vi) *Für* $x, y \in \mathbb{R}^+$ *folgt* $\ln(x) < \ln(y)$ *aus* $x < y$.

(vii) $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x)$ *ist bijektiv.*

Beweis: (i) $\Leftrightarrow e^0 = 1$ und **(ii)** $\Leftrightarrow e^1 = e$ und **(iii)** $\Longleftrightarrow e^{\ln(x)+\ln(y)} = (e^{\ln(x)})(e^{\ln(y)})$.
(iv) Für $r = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ gilt $(e^{\ln(a)\frac{p}{q}})^q = e^{\ln(a)p} = a^p$ und $e^{\ln(a)\frac{p}{q}} > 0$. Wegen der Eindeutigkeit der k-ten Wurzel folgt $e^{\ln(a)\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}$.
(v) ist offensichtlich.
(vi) folgt aus (iii) des vorhergehenden Satzes.
(vii) folgt aus (iv) des vorhergehenden Satzes. **q.e.d.**

Definition 6.10. *Für alle $a > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ sei $a^x = e^{x\ln(a)}$*

Satz 6.11. *(Eigenschaften von a^x)*

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$ *für alle $a \in \mathbb{R}^+, x, y \in \mathbb{R}$.*

(ii) $(a^x)^y = a^{xy}$ *für alle $a \in \mathbb{R}^+, x, y \in \mathbb{R}$.*

(iii) *Für $a > 1$ und $x, y \in \mathbb{R}$ folgt $a^x < a^y$ aus $x < y$.*

(iv) *Für $0 < a < 1$ und $x, y \in \mathbb{R}$ folgt $a^x > a^y$ aus $x < y$.*

(v) *Für $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ ist $a^\cdot : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto a^x$ bijektiv und stetig.*

Beweis:(i) $a^{x+y} = e^{x\ln(a)+y\ln(a)} = e^{x\ln(a)}e^{y\cdot\ln(a)} = a^x a^y$.
(ii) $(a^x)^y = e^{y\ln(e^{x\ln(a)})} = e^{y\cdot x\ln(a)} = a^{xy}$.
(iii) Für $a > 1$ ist $\ln(a) > 0$. Also folgt $x\ln(a) < y\ln(a)$ und $a^x < a^y$ aus $x < y$.
(iv) Für $a < 1$ ist $\ln(a) < 0$. Also folgt $x\ln(a) > y\ln(a)$ und $a^x > a^y$ aus $x < y$.
(v) Für $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ ist $\ln(a) \neq 0$. Also ist $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(a)x$ bijektiv und stetig, und damit auch auch $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \exp(\ln(a)x)$. **q.e.d.**

Definition 6.12. *(des Logarithmus zur Basis a) Für alle $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ sei $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ die Umkehrfunktion von $a^\cdot$.*

Satz 6.13. *(Eigenschaften des Logarithmus zur Basis a)*

(i) $\log_a(1) = 0$

(ii) $\log_a(a) = 1$

(iii) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

(iv) *Für $a > 1$ und $x, y \in \mathbb{R}^+$ folgt $\log_a(x) < \log_a(y)$ aus $x < y$.*

(v) *Für $0 < a < 1$ und $x, y \in \mathbb{R}^+$ folgt $\log_a(x) > \log_a(y)$ aus $x < y$.*

(vi) $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x)$ *ist bijektiv und stetig.*

Beweis analog zum Beweis der Eigenschaften von ln. **q.e.d.**

6.3 Die reellen Funktionen $\sin, \cos, \arcsin, \arccos$

Satz 6.14. **(i)** *Für alle* $x \in [-5,5] \setminus \{0\}$ *gilt* $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

(ii) *Für alle* $x \in [-4,4] \setminus \{0\}$ *gilt* $1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} < 1$.

(iii) $\cos : [0, \sqrt{6}] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(x)$ *ist streng monoton fallend.*

(iv) $\cos$ *hat auf* $[0,2]$ *genau eine Nullstelle, die wir mit* $\frac{\pi}{2}$ *bezeichnen.*

(v) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \exp\left(\imath\frac{\pi}{2}\right) = \imath$.

(vi) $\cos(n\pi) = (-1)^n \quad \sin(n\pi) = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(vii) $\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0 \quad \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(viii) $\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos(x) \quad \sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin(x)$

(ix) $\cos\left(x + \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n \sin(x) \quad \sin\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n \cos(x)$.

(x) $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1], \quad x \mapsto \sin(x)$ *ist streng monoton steigend und bijektiv.*

(xi) $\cos : [0,\pi] \to [-1,1], \quad x \mapsto \cos(x)$ *ist streng monton fallend und bijektiv.*

Beweis:(i) Für alle $x \in [-5,5]$ und $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt $0 < \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} < 1$. Also ist für $x \in [-5,5] \setminus \{0\}$ die Folge $(\frac{x^{2k}}{2k!})_{k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0,1\}}$ streng monoton fallend und positiv. Für diese $x \in [-5,5] \setminus \{0\}$ folgt dann $1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ wie im Beweis zu Satz 4.13.
(ii) Für $x \in [-4,4]$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $0 < \frac{x^2}{(2k+2)(2k+3)} < 1$. Also ist für $x \in [-4,4] \setminus \{0\}$ die Folge $(\frac{x^{2k}}{(2k+1)!})_{k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}}$ streng monoton fallend und positiv. Für diese $x \in [-4,4] \setminus \{0\}$ folgt wieder $1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} < 1$ wie im Beweis von Satz 4.13.
(iii) Wegen dem Additionstheorem gilt: $\cos(x) - \cos(y) = \cos(\frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2}) - \cos(\frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{y-x}{2}) > 0$ wegen (ii) für $x, y \in [0, \sqrt{6}]$ und $x < y$.
(iv) $\sin$ und $\cos$ sind wegen Beispiel 5.21 stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Wegen (i) ist $\cos(2) \leq 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$. Dann folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass es eine Nullstelle in $[0,2]$ gibt. Wegen (iii) kann es höchstens eine Nullstelle geben.
(v) Wegen $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ folgt aus (iv) $\sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1$ und aus (ii) $\sin(\frac{\pi}{2}) > 0$. Also gilt $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Dann folgt aus der Eulerschen Formel $\exp(\imath\frac{\pi}{2}) = \imath$.
(vi) Wegen (v) folgt aus der Eulerschen Formel $\exp(n\imath\pi) = (-1)^n$, also $\cos(n\pi) = (-1)^n$ und $\sin(n\pi) = 0$.
(vii) Wegen (v) folgt aus der Eulerschen Formel: $\exp((n + \frac{1}{2})\imath\pi) = (-1)^n\imath$ also $\cos((n + \frac{1}{2})\pi) = 0$ und $\sin((n + \frac{1}{2})\pi) = (-1)^n$.
(viii) Aus dem Additionstheorem und (vi) folgt (viii).
(ix) Aus dem Additionstheorem und (vii) folgt (ix).

(x) Aus (ix) folgt $\sin(x) = \begin{cases} -\cos(x + \frac{\pi}{2}) & \text{für } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \\ -\sin(-x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) & \text{für } x \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$
Dann folgt (x) aus (iii).

(xi) Aus (viii) folgt $\cos(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{für } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \cos(-x) = -\cos(\pi - x) & \text{für } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$
Dann folgt (xi) aus (iii). **q.e.d.**

Die Umkehrfunktion von $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1], \quad x \mapsto \cos(x)$ heißt

$$\text{Arcuscosinus} \quad \arccos : [-1, 1] \to [0, \pi], \quad x \mapsto \arccos(x).$$

Sie ist wegen (xi) streng monoton fallend und wegen Korollar 6.4 stetig. Die Umkehrfunktion von $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1], \quad x \mapsto \sin(x)$ heißt

$$\text{Arcussinus} \quad \arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad x \mapsto \arcsin(x).$$

Sie ist wegen (x) streng monoton steigend und wegen Korollar 6.4 stetig.

Satz 6.15. *(Polardasrstellung von $z \in \mathbb{C}$) Jede komplexe Zahl hat die Darstellung:*

$$z = r \cdot e^{\imath\varphi} \text{ mit } r = |z| \text{ und } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Für $z \neq 0$ ist φ bis auf Addition von $2\pi n$ eindeutig und heißt Argument von z.

Beweis: Der Fall $z = 0$ ist trivial. Sei $z = x + \imath y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Für $y \geq 0$ sei $\varphi = \arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}) \in [0, \pi]$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dann gilt $x = r \cdot \cos(\varphi)$ und $r \sin(\varphi) \geq 0$. Aus $\frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{x^2+y^2} = 1$ folgt $y = r \sin(\varphi)$. Wegen der Eulerschen Formel gilt dann

$$z = r \cdot e^{\imath\varphi} = r\cos(\varphi) + \imath r \sin(\varphi) = x + \imath y.$$

Für $y < 0$ sei $\varphi = \arccos(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}) + \pi$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Aus Satz 6.14 (viii) folgt wieder

$$z = re^{\imath\varphi} = r\cos(\varphi) + \imath r \sin(\varphi) = x + \imath y.$$

Für $(r, \varphi), (s, \vartheta) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ folgt $r = |re^{\imath\varphi}| = |se^{\imath\vartheta}| = s$ aus $re^{\imath\varphi} = se^{\imath\vartheta}$ und für $r = s \neq 0$ auch $e^{\imath\varphi}e^{-\imath\vartheta} = e^{\imath(\varphi-\vartheta)} = 1$, was äquivalent ist zu $\varphi - \vartheta = 2\pi n$. **q.e.d.**

Korollar 6.16. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *ist surjektiv und* $\exp(z) = \exp(z') \Leftrightarrow z - z' \in 2\pi\imath\mathbb{Z}$.

Beweis: Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann gilt $e^z = e^x e^{iy}$. Also folgt das Korollar aus dem Satz 6.15 und weil $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ bijektiv ist. **q.e.d.**

Korollar 6.17. *Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau n $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$.*

Beweis: Seien (r, φ) die Polarkoordinaten von z. Dann müssen die Polarkoordinaten $(s, \vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ der Lösungen von $w^n = z$ die Gleichungen $n\vartheta = \varphi + 2\pi m$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $s^n = r$ erfüllen. Also sind die Lösungen gegeben durch $s = \sqrt[n]{r}$ und $\vartheta_m = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi m}{n}$, wobei zwei Lösungen (s, ϑ_m) und $(s, \vartheta_{m'})$ genau dann übereinstimmen, wenn $\frac{m-m'}{n} \in \mathbb{Z}$. Also ergeben $m = 0, \ldots, n-1$ alle Lösungen. **q.e.d.**

Satz 6.18. *(Fundamentalsatz der Algebra) Jedes komplexe Polynom $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ mit $a_n \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ hat mindestens eine Nullstelle auf $z \in \mathbb{C}$.*

Beweis: Für $|z| \geq R = 1 + 2\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \ldots + 2\left|\frac{a_0}{a_n}\right| \geq 1$ gilt

$$\left|\frac{p(z)}{z^n}\right| = \left|\frac{p(z)}{z^n}\right| + \left|-\frac{a_{n-1}}{z} - \ldots - \frac{a_0}{z^n}\right| - \left|-a_n\left(\frac{a_{n-1}}{a_n z} + \ldots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right)\right|$$
$$\geq |a_n| - |a_n|\left|\frac{a_{n-1}}{a_n z} + \ldots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right| \geq |a_n|\left(1 - \frac{\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \ldots + \left|\frac{a_0}{a_n}\right|}{|z|}\right) > |a_n|\frac{1}{2}.$$

Also ist $|p(z)| > \frac{|a_n|}{2}|z|^n \geq \frac{|a_n|}{2}|z| > \frac{|a_n|}{2}2\frac{|a_0|}{|a_n|} = |a_0| = |p(0)|$ für alle $z \notin B(0, R)$. Auf der kompakten Menge $\overline{B(0, R)}$ nimmt $z \mapsto |p(z)|$ wegen Satz 5.26 das Minimum bei einem z_0 an. Dieses liegt in $B(0, R)$ und ist dann das Minimum auf ganz $z \in \mathbb{C}$.

Wir zeigen jetzt $p(z_0) = 0$. Andernfalls sei $p(y + z_0) = b_n y^n + \ldots + b_0$ das entsprechende Polynom in $y = z - z_0$ mit $b_n = a_n \neq 0$ und $b_0 = p(z_0) \neq 0$. Sei m das kleinste $m > 0$ mit $b_m \neq 0$. Für $0 < |y| \leq r = \dfrac{1}{1 + 2\left|\frac{b_{m+1}}{b_m}\right| + \ldots + 2\left|\frac{b_n}{b_m}\right|} \leq 1$ gilt dann

$$\left|b_{m+1}y^{m+1} + \ldots + b_n y^n\right| \leq |b_m||y|^m\left(\left|\frac{b_{m+1}}{b_m}\right||y| + \ldots + \left|\frac{b_n}{b_m}\right||y|\right) < \frac{|b_m||y|^m}{2}.$$

Also gilt $$|p(z_0 + y)| < |b_0 + b_m y^m| + \frac{|b_m||y|^m}{2}.$$
Sei w eine Lösung der Gleichung $w^m b_m = -b_0$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{C}$ mit $0 < |tw| \leq r$

$$|p(z_0 + tw)| < |b_0||1 - t^m| + \frac{|b_0|}{2}|t|^m.$$

Insbesondere gilt $\quad |p(z_0 + tw)| < |b_0|\left(1 - \dfrac{t^m}{2}\right) < |b_0| \quad$ für alle $0 < t \leq \min\left\{1, \frac{r}{|w|}\right\}$.
Also sind alle $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_0) \neq 0$ keine Minima von $z \mapsto |p(z)|$. **q.e.d.**

Korollar 6.19. *Jedes komplexe Polynom vom Grade $n \in \mathbb{N}$ zerfällt in ein Produkt von Polynomen ersten Grades.*

Beweis durch vollständige Induktion:

(i) für $n = 1$ ist die Aussage trivial.

(ii) Die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}$. Sei p ein beliebiges Polynom $(n+1)$-ten Grades. Wegen dem Fundamentalsatz der Algebra hat p eine Nullstelle bei $z_0 \in \mathbb{C}$. Wenn wir p als Polynom in $z - z_0$ schreiben, erhalten wir p als Produkt von $(z - z_0)$ mit einem Polynom n-ten Grades. Wegen der Induktionsvoraussetzung zerfällt dieses in ein Produkt von Polynomen ersten Grades, also auch p. **q.e.d.**

Definition 6.20. *(von Tangens und Cotangens)*

$$\tan : \mathbb{C} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right) \to \mathbb{C}, \quad x \to \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot : \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}\pi) \to \mathbb{C}, \quad x \to \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Beachte $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$ und $\cot(x+\pi) = \cot(x)$.

Satz 6.21. (i) $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton steigend, stetig und bijektiv.*

(ii) $\cot : (0,\pi) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cot(x)$ *ist streng monoton fallend, stetig und bijektiv.*

Beweis: Auf $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ist sin streng monoton steigend und cos streng monoton fallend und beide positiv. Also ist tan streng monoton steigend und positiv. Aus $\tan(-x) = -\tan(x)$ folgt dann, dass tan auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton steigend ist.

Für $x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ gilt $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$ und für $x \notin \pi\mathbb{Z}$ wegen Satz 6.14 (ix) $\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\cot(x)$. Also ist cot auf $(0,\pi)$ streng monoton fallend.

Beide Funktionen tan und cot sind wegen Beispiel 5.19 (iii) stetig. Dann sind die Folgen $(\tan(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$, $(-\tan(-\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$, $(\cot(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(-\cot(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ identische streng monoton fallende positive Nullfolgen. Dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \tan\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) = -\infty \quad \lim_{n\to\infty} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right) = \infty$$
$$\lim_{n\to\infty} \cot\left(\frac{1}{n}\right) = \infty \quad \lim_{n\to\infty} \cot\left(\pi - \frac{1}{n}\right) = -\infty$$

Also sind $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ und $\cot : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ wegen Satz 6.1 surjektiv. **q.e.d.**

Die Umkehrfunktion von $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ heißt

$$\text{Arcustangens} \quad \arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x \mapsto \arctan(x).$$

Die Umkehrfunktion von $\cot : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ heißt

$$\text{Arcuscotangens} \quad \operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0,\pi), \quad x \mapsto \operatorname{arccot}(x).$$

Diese beiden Umkehrfunktionen sind wegen Satz 6.21 streng monoton und wegen Korollar 6.4 stetig.