

# Kapitel 4

## Reihen

### 4.1 Konvergenzkriterien

**Definition 4.1.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge. Dann heißt die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $s_n = \sum_{j=1}^n a_j$  die zu  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gehörende Reihe. Diese Folge bezeichnen wir mit  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Wenn die Reihe  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, dann bezeichnen wir den Grenzwert mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ . Analog definieren wir  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=m}^n a_j$ .

**Beispiel 4.2. (i)** Geometrische Reihe  $(\sum q^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ . Für  $q \neq 1$  hatten wir berechnet:  
 $\sum_{j=0}^n q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ . Dann folgt aus dem letzten Abschnitt

$$\text{Für } |q| < 1 \text{ ist } \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} q^n\right) \text{ konvergent: } \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

$$\text{Für } |q| \geq 1 \text{ ist } \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} q^n\right) \text{ divergent.}$$

$$\text{Für reelles } q \geq 1 \text{ ist } \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} q^n\right) \text{ divergent: } \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty.$$

**(ii)** Die  $\zeta$ -Funktion ist definiert als  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  der Grenzwert (wenn er existiert) der Reihe  $(\sum \frac{1}{n^s})_{n \in \mathbb{N}}$ . Zunächst ist diese Reihe nur für alle rationalen Zahlen  $s \in \mathbb{Q}$  definiert. Für  $s = 1$  ist  $(\sum \frac{1}{n^s})_{n \in \mathbb{N}}$  divergent.

**Beweis:** Diese Reihe ist monoton wachsend. Also ist nur die Frage, ob sie beschränkt ist oder nicht. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt aber  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ . Also

sind für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  jeweils die Summen  $\sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{j} = 1 + \sum_{m=1}^n \sum_{j=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{j} \geq 1 + \frac{n}{2}$ . **q.e.d.**

(iii) Für alle  $k \in \mathbb{N}$  ist die Reihe  $\left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+k)} \right)$  konvergent und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+k)} = \frac{1}{k \cdot k!}$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+k)} &= \sum_{n=1}^m \frac{1}{k} \frac{n+k-n}{n(n+1) \cdots (n+k)} \\ &= \frac{1}{k} \left( \sum_{n=1}^m \frac{1}{n \cdots (n+k-1)} - \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n \cdots (n+k-1)} \right) \\ &= \frac{1}{k} \left( \frac{1}{k!} - \frac{1}{(m+1) \cdots (m+k)} \right) \end{aligned}$$

Die Folge  $\frac{1}{(m+1) \cdots (m+k)} \leq \frac{1}{m^k}$  konvergiert aber gegen Null. **q.e.d.**

Wir wenden das Cauchy Kriterium und das Monotonieprinzip auf Reihen an.

**Satz 4.3.** (Cauchy Kriterium für Reihen) Die Reihe  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert genau dann, wenn es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N$  gibt, so dass  $\left| \sum_{j=n}^m a_j \right| < \epsilon$  für alle  $m \geq n \geq N$  gilt. **q.e.d.**

**Satz 4.4.** (Monotonieprinzip für Reihen) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von nicht negativen Zahlen. Dann konvergiert die Reihe  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  genau dann, wenn sie beschränkt ist.

Für den Grenzwert gilt dann  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^m a_n$ . **q.e.d.**

**Definition 4.5.** (absolut konvergent) Die Reihe  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt absolut konvergent, wenn die Reihe  $(\sum |a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert.

**Satz 4.6.** Jede absolut konvergente Reihe konvergiert. Und es gilt  $\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .

**Beweis:** Aus der Dreiecksungleichung folgt  $\left| \sum_{j=n}^m a_j \right| \leq \sum_{j=n}^m |a_j|$  für alle  $m \geq n$ . Also ist die Reihe einer absolut konvergenten Reihe eine Cauchyfolge und konvergiert. Insbesondere gilt für alle  $m \in \mathbb{N}$  auch  $\left| \sum_{n=1}^m a_n \right| \leq \sum_{n=1}^m |a_n|$ . Dann erfüllen auch die Grenzwerte

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad \text{q.e.d.}$$

Aus dem Monotonie-Prinzip und Satz 3.5 folgt das

**Satz 4.7.** (*Majoranten Kriterium*) Die Folgen von nicht negativen Zahlen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  erfüllen  $b_n \leq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

- (i) Wenn außerdem  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, dann konvergiert auch  $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- (ii) Wenn außerdem  $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergiert, dann gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ . **q.e.d.**

**Beispiel 4.8.** Für alle  $n, k \in \mathbb{N}$  ist  $\frac{1}{(n+k)^{k+1}} \leq \frac{1}{n \cdots (n+k)}$ . Also folgt aus der Konvergenz von  $(\sum \frac{1}{n \cdots (n+k)})$  auch die Konvergenz von  $(\sum \frac{1}{n^{k+1}})_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Satz 4.9.** (*Wurzeltest*) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge und sei  $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ .

- (i) Falls  $\alpha < 1$ , dann konvergiert  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  absolut.
- (ii) Falls  $\alpha > 1$ , dann divergieren  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\sum |a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Im Fall  $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$  kann die Reihe  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sowohl konvergent als auch divergent sein. So ist z.B.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}$ . Aber die Reihe  $(\sum \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$  ist divergent, während die Reihe  $(\sum \frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent ist.

**Beweis:** (i) Sei  $\alpha < 1$ . Dann gibt es für jedes  $\alpha < \beta < 1$  aufgrund von Satz 3.21 (i) ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq N$  gilt  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta \iff |a_n| \leq \beta^n$ . Weil aber  $(\sum \beta^n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, ist auch  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  absolut konvergent.

(ii) Sei  $\alpha > 1$ . Dann gibt es wieder aufgrund von Satz 3.21 (i) unendlich viele  $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ . Also kann die Folge  $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht gegen Null konvergieren. Dann sind Reihen  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\sum |a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Cauchyfolgen, also divergent. **q.e.d.**

**Satz 4.10.** (*Exponentialfunktion:*) Für alle  $x \in \mathbb{K}$  definieren wir

$$\exp(x) : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Aufgrund des Beispiels (v) im letzten Kapitel ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$ . Also gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x^n|}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

Deshalb konvergiert die Reihe  $(\sum \frac{x^n}{n!})_{n \in \mathbb{N}_0}$  absolut.

**Satz 4.11.** (*Quotiententest*) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$  und sei  $\alpha = \overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ .

- (i) Falls  $\alpha < 1$ , dann konvergiert  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  absolut.

(ii) Falls es ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so dass alle  $n \geq N$  auch  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$  erfüllen, dann divergieren  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\sum |a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Beweis:** (i) Wegen  $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim} \left| \frac{a_n + 1}{a_n} \right|$  (Satz 3.25) folgt (i) aus dem Wurzeltest.

(ii) Aus  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$  folgt  $|a_{n+1}| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{a_{N+1}}{a_N} \right| \cdot |a_N| \geq |a_N| > 0$ . Also ist  $|a_n|$  keine Nullfolge und die Reihen  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\sum |a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  divergent. **q.e.d.**

**Satz 4.12.** (Cauchy's Verdichtungssatz) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine nicht negative monoton fallende Folge. Dann konvergiert  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  genau dann, wenn  $(\sum 2^n a_{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert.

**Beweis:** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei  $s_n = \sum_{j=1}^n a_j$  und  $t_n = \sum_{j=0}^n 2^j a_{2^j}$ . Wegen der Monotonie von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gilt für alle  $j \in \mathbb{N}$ :

$$a_{2^j} + a_{2^j+1} + \dots + a_{2^{j+1}-1} \leq 2^j a_{2^j} \leq 2(a_{2^{j-1}+1} + a_{2^{j-1}+2} + \dots + a_{2^j})$$

und für  $j = 0$  gilt:  $a_1 \leq a_1 \leq 2a_1$ . Deshalb gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq s_{2^{n+1}-1} \leq t_n \leq 2s_{2^n}.$$

Also ist die Beschränktheit von der Folge  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  äquivalent zu der von  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . **q.e.d.**

Die Reihe  $(\sum \frac{1}{n^s})_{n \in \mathbb{N}}$  ist für  $s \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  genau dann konvergent, wenn die Reihe

$$\left( \sum \frac{2^n}{(2^n)^s} \right)_{n \in \mathbb{N}_0} = \left( \sum 2^{(1-s) \cdot n} \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

konvergent ist, also für  $s > 1$ .  $\implies$  Für alle  $s \in \mathbb{Q}$  mit  $s > 1$  ist  $\zeta(s)$  wohl definiert.

**Satz 4.13.** (Alternierende Reihe von Leibniz) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert  $(\sum (-1)^n a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

**Beweis:** Wegen dem Monotonieprinzip sind die Glieder einer monoton fallenden Nullfolge nicht negativ. Sei  $s_n = \sum_{m=0}^n (-1)^m a_m$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Aus der Monotonie folgt:

$$s_1 \leq s_3 \leq \dots \leq s_{2n+1} \leq \dots \leq s_{2n} \leq \dots \leq s_2 \leq s_0.$$

Also ist die Folge  $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$  monoton wachsend und beschränkt und  $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}_0}$  monoton fallend und beschränkt. Dann konvergieren aber beide Folgen und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = - \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$$

Also konvergiert die Reihe  $(\sum (-1)^n a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **q.e.d.**

Also ist  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  konvergent, aber nicht absolut konvergent, weil  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ .

## 4.2 Dezimalbruchdarstellung von reellen Zahlen

Als Ziffern wählen wir  $Z = \{0, 1, \dots, 9\}$  (bzw.  $\{0, 1, \dots, p-1\}$ ). Sei  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit Werten in  $Z$ . Definiere die entsprechende Zahlenfolge  $(\sum x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n = \frac{z_n}{p^n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $(\sum x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach dem Majorantenkriterium absolut konvergent, weil  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{p-1}{p^n}} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p-1} \right) \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p}$ . Also definiert  $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$  eine reelle Zahl. Sei jetzt  $M$  die Menge aller Folgen  $M = \{(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert nicht gegen } p-1\}$ . Dann ist die Abbildung  $M \rightarrow [0, 1), (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{p^n}$  surjektiv und injektiv.

**Bemerkung 4.14.** Wir können auch fordern, dass  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht gegen Null konvergiert. Reellen Zahlen, deren Ziffernfolge gegen 0 konvergiert haben auch eine Dezimalbruchdarstellung, deren Ziffernfolge gegen 9 konvergiert, z.B.  $\frac{1}{2} = 0,500\dots = 0,499\dots$

**Surjektiv:** Sei  $x \in [0, 1)$ . Dann definieren wir  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  induktiv, so dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{z_n}{p^n} \leq x - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{z_m}{p^m} < \frac{z_n + 1}{p^n} \iff x \in \left[ \frac{z_n}{p^n} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{z_m}{p^m}, \frac{z_n + 1}{p^n} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{z_m}{p^m} \right)$$

gilt. Dann folgt aber auch  $0 \leq x - \sum_{m=1}^n \frac{z_m}{p^m} < \frac{1}{p^n}$ . Also gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{p^n} = x$ . Weil

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^m} = \frac{p-1}{p^{n+1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)} = \frac{1}{p^n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt, gilt auch } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq p-1.$$

**Injektiv:** Seien  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei Ziffernfolgen, mit  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{p^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{p^n}$ . Sei also  $n \in \mathbb{N}$  der kleinste Index, so dass  $z_n \neq w_n$ . Aus

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{|z_m - w_m|}{p^m} \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^m} = \frac{p-1}{p^{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p^m} = \frac{p-1}{p^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{p^n},$$

folgt  $|z_n - w_n| \leq 1$ . Sei also  $z_n = w_n + 1$ . Für alle  $m > n$  gilt dann  $w_m - z_m = p-1 \implies z_m = 0$  und  $w_m = p-1 \implies \lim_{m \rightarrow \infty} w_m = p-1$  und  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \notin M$ . **q.e.d.**

## 4.3 Addition, Multiplikation, Umordnung

Aus dem Satz 3.5 folgt

**Satz 4.15.** (Rechenregeln für Reihen) Die Reihen  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  seien konvergent, dann konvergieren auch die Reihen

$$\left(\sum (a_n + b_n)\right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad \left(\sum \lambda a_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{K}. \quad \text{q.e.d.}$$

**Definition 4.16.** Für gegebene Reihen  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  heißt die Reihe  $(\sum c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  das (Cauchy-)Produkt der beiden Reihen.

Diese Definition kommt von den Potenzreihen, die wir später kennenlernen werden. Das Produkt der beiden Potenzreihen  $(\sum a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(\sum b_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  ist dann die Potenzreihe  $(\sum c_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , d.h. wir haben alle Summanden des Produktes mit gleichen Potenzen zusammengefasst.

**Satz 4.17.** (Konvergenz des Produktes) Wenn die Reihe  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  absolut konvergiert und die Reihe  $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  konvergiert, dann konvergiert das Produkt  $(\sum c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  der beiden Reihen. Wenn auch  $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  absolut konvergiert, dann auch  $(\sum c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

**Beweis:** Mit  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ ,  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ ,  $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$  und  $C_n = \sum_{k=0}^n c_k$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \dots + (a_0 b_n + \dots + a_n b_0) \\ &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \dots + a_n B_0 \\ &= a_0 (B - \beta_n) + a_1 (B - \beta_{n-1}) + \dots + a_n (B - \beta_0) \end{aligned}$$

Hierbei ist  $B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  und  $\beta_n = B - B_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$ . Daraus ergibt sich

$$C_n = A_n \cdot B - (a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \dots + a_n \beta_0).$$

Also gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n B$ , wenn  $a_0 \beta_n + \dots + a_n \beta_0$  im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert. Aufgrund der Voraussetzungen gibt es  $\alpha, \beta > 0$ , so dass

$$|\beta_n| \leq \beta \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^n |a_k| \leq \alpha$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt. Für alle  $\epsilon > 0$  gibt es natürliche Zahlen  $N, M$ , so dass  $|\beta_n| < \frac{\epsilon}{2\alpha}$  für alle  $n \geq N$  gilt und  $|a_n| < \frac{\epsilon}{2N\beta}$  für alle  $n \geq M$ . Dann gilt für alle  $n \geq N + M - 1$ :

$$\begin{aligned} |a_0 \beta_n + \dots + a_n \beta_0| &\leq |a_0 \beta_n + \dots + a_{n-N} \beta_N| + |a_{n-N+1} \beta_{N-1} + \dots + a_n \beta_0| \\ &< \frac{\epsilon}{2\alpha} \sum_{k=0}^{n-N} |a_k| + N\beta \cdot \frac{\epsilon}{2N\beta} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Also konvergiert  $(\sum c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  gegen das Produkt der Grenzwerte von  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  wenn beide konvergieren und eine absolut konvergiert. Wenn beide Reihen absolut konvergieren, dann gilt für alle  $N \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{n=0}^N |c_n| \leq \left( \sum_{n=0}^N |a_n| \right) \left( \sum_{n=0}^N |b_n| \right) \leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \right).$$

Also ist dann das Produkt absolut konvergent.

**q.e.d.**

**Beispiel 4.18.** Das Quadrat der Reihe  $\left( \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right)$  ist nicht konvergent, obwohl die Reihe als Beispiel einer alternierenden Reihe nach Leibniz konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Die Koeffizienten des Quadrates sind gegeben durch:

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (-1)^{n-k}}{\sqrt{k+1} \sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} \sqrt{n-k+1}}$$

Es gilt aber  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} \sqrt{n-k+1}} \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n+1} \sqrt{n+1}} = 1$ . Also ist das Quadrat der Reihe keine Cauchyfolge.

**q.e.d.**

**Satz 4.19.** (Eigenschaften der Exponentialfunktion)

- (i) für alle  $x, y \in \mathbb{K}$  gilt  $\exp(x+y) = \exp(x) \exp(y)$ .
- (ii) Für alle  $x \in \mathbb{K}$  ist  $\exp(x) \neq 0$  und für alle  $x \in \mathbb{R}$  sogar  $\exp(x) > 0$ .
- (iii) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  und alle  $r \in \mathbb{Q}$  ist  $\exp(rx) = (\exp(x))^r$ .
- (iv) Für alle  $x \in \mathbb{C}$  ist  $\exp(\bar{x}) = \overline{\exp(x)}$ .
- (v) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist  $|\exp(ix)| = 1$ .

Die Zahl  $\exp(1)$  wird Eulersche Zahl genannt und mit  $e$  bezeichnet. Wegen (iii) gilt dann für alle  $r \in \mathbb{Q}$ :  $\exp(r) = \exp(r \cdot 1) = e^r$ . Deshalb schreiben wir auch  $e^x$  für  $\exp(x)$ .

**Beweis:** (i) Wir hatten schon gesehen, dass die Reihe  $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  für alle  $x \in \mathbb{K}$  absolut konvergiert. Dann ist das Produkt von  $\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!}$ . Wegen der Binomischen Formel gilt

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Dann folgt  $\exp(x)\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$ .

(ii) Wegen (i) gilt  $\exp(x)\exp(-x) = 1$ . Also besitzt  $\exp(x)$  für alle  $x \in \mathbb{K}$  ein Inverses und ist ungleich Null. Wegen (i) gilt  $\exp(x) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

(iii) Offenbar ist für alle  $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$   $(\exp(\frac{x \cdot m}{n}))^n = \exp(x \cdot m) = (\exp(x))^m$ . Also gilt auch wegen (ii)  $\exp(\frac{x \cdot m}{n}) = (\exp(x))^{\frac{m}{n}}$ .

(iv)  $\exp(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{x}^n}{n!} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} = \overline{\exp(x)}$  wegen Satz 4.15.

(v) Für  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\exp(ix)\overline{\exp(ix)} = \exp(ix)\exp(-ix) = 1$ . q.e.d.

Wir können jetzt für jede Zahl  $y > 0$ , für die es ein  $x \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $y = \exp(x)$  gilt, und für jedes  $z \in \mathbb{R}$  die Zahl  $y^z = \exp(zx)$  definieren. Wir werden später sehen, dass wir so für alle  $y > 0$  und alle  $z \in \mathbb{R}$   $y^z$  definieren können.

**Definition 4.20.** (Umordnen von Reihen) Sei  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine bijektive Abbildung von den natürlichen Zahlen auf sich selber. Dann heißt die Reihe  $(\sum a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Umordnung der Reihe  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Analog könnten wir auch die Umordnung von Folgen bilden. Letztere sind aber weniger interessant, weil jede Umordnung einer konvergenten Folge wieder gegen den gleichen Grenzwert konvergiert (Übungsaufgabe). Dagegen gilt dies bei Reihen nicht.

**Satz 4.21.** Konvergiert eine Reihe  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  absolut, so konvergiert auch jede Umordnung  $(\sum a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  absolut. In diesem Fall gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ .

**Beweis:** Sei also  $\tau$  eine gegebene bijektive Abbildung  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Wenn  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  absolut konvergent, dann gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $N \leq n \leq m$  gilt:  $\sum_{k=n}^m |a_k| < \epsilon$ . Dann gibt es auch ein  $M = \max \tau^{-1}[\{1, \dots, N\}] \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq M$  gilt  $\tau(n) \geq N$ . Dann folgt für alle  $m \geq n \geq M$

$$\sum_{k=n}^m |a_{\tau(k)}| \leq \sum_{k=\min \tau[\{n, n+1, \dots, m\}]}^{\max \tau[\{n, n+1, \dots, m\}]} |a_k| < \epsilon.$$

Also ist  $(\sum |a_{\tau(n)}|)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge und die Umordnung konvergiert sogar absolut. Mit denselben  $N$  und  $M$  in Abhängigkeit von  $\epsilon > 0$  gilt für alle  $n \geq N$  und  $m \geq M$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^m a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^n a_k \right| &\leq \sum_{k \in \tau[\{1, \dots, m\}] \setminus \{1, \dots, N\}} |a_k| + \sum_{k=N+1}^n |a_k| \\ &\leq \sum_{k=\max \tau[\{1, \dots, m\}] \setminus \{1, \dots, N\}}^{\max \tau[\{1, \dots, m\}] \setminus \{1, \dots, N\}} |a_k| + \sum_{k=N+1}^n |a_k| < 2\epsilon. \end{aligned}$$



Also konvergiert  $(\sum a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen den gleichen Grenzwert wie  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . **q.e.d.**

**Satz 4.22.** (Riemann) Sei  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente reelle Reihe, die nicht absolut konvergiert, und  $\alpha \leq \beta$  zwei reelle Zahlen. Dann gibt es eine Umordnung  $(\sum a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ , die als Reihe beschränkt ist und für die  $\alpha$  der Limes inferior der Reihe ist und  $\beta$  der Limes superior. Wenn  $\alpha \neq \beta$  konvergiert die Reihe also nicht.

**Beweis:** Weil  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge. Wir betrachten im Folgenden die beiden Teilfolgen aller nichtnegativen Elemente  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und aller negativen Elemente  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Weil  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht absolut konvergiert, und  $(\sum 2b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  genau dann konvergiert, wenn  $(\sum a_n + |a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, bzw.  $(\sum 2c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  genau dann konvergiert, wenn  $(\sum a_n - |a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, konvergieren die beiden monotonen Reihen  $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\sum c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht und sind auch nicht beschränkt.

Wir setzen die umgeordnete Folge  $(a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  abwechselnd jeweils der Reihe nach aus den Folgen  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zusammen. Wenn die Summe aller bisherigen Folgenglieder größer ist als  $\beta$ , dann fahren wir solange mit Folgengliedern aus  $c_n$  fort, bis die Summe kleiner als  $\alpha$  ist. Wenn die Summe aller bisherigen Folgenglieder kleiner als  $\alpha$  ist, dann fahren wir solange mit Folgengliedern aus  $b_n$  fort, bis die Summe größer als  $\beta$  ist. Wenn  $0 \in [\alpha, \beta]$  starten wir mit Folgengliedern aus  $b_n$ , bis die Summe größer als  $\beta$  ist. Für jedes  $\epsilon > 0$  gibt es nur endlich viele Glieder von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , deren Absolutbetrag nicht kleiner als  $\epsilon$  ist. Deshalb gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass die Summen  $\sum_{k=1}^n a_{\tau(k)}$  für alle  $n \geq N$  in  $(\alpha - \epsilon, \beta + \epsilon)$  liegen. Es gibt unendlich viele Glieder von  $(\sum a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  die kleiner als  $\alpha$  sind und unendlich viele, die größer als  $\beta$  sind. Die umgeordnete Reihe  $(\sum a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  hat also als Limes inferior  $\alpha$  und als Limes superior  $\beta$ . **q.e.d.**

Weil für jedes  $\epsilon > 0$  und  $x \in [\alpha, \beta]$  unendlich viele Glieder von  $(\sum a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  in  $(x - \epsilon, x + \epsilon)$  liegen, ist die Menge der Häufungspunkte dieser Reihe gleich  $[\alpha, \beta]$ .

**Definition 4.23.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge, dann heißt  $(\sum a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  die entsprechende Potenzreihe mit Koeffizienten  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

Aus dem Wurzeltest folgt sofort

**Satz 4.24.** (Konvergenzradius von Potenzreihen) Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  die Koeffizienten der Potenzreihe  $(\sum a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und sei  $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$  und  $R = \frac{1}{\alpha}$  ( $R = 0$  für  $\alpha = \infty$  und  $R = \infty$  für  $\alpha = 0$ ).

(i) Für  $|x| < R$  konvergiert  $(\sum a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  absolut.

(ii) Für  $|x| > R$  divergiert  $(\sum a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

Wenn  $\alpha < \infty$  definiert folgende Reihe also eine Potenzreihenfunktion

$$f: \{x \in \mathbb{K} \mid |x| < R\} \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

**Beispiel 4.25.** (i)  $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ,  $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}} = 0 \implies R = \infty$ .

(ii)  $\left(\sum x^n\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$  also  $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{1} = 1 \implies R = 1$ . Für  $|x| < 1$  gilt  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ .

(iii)  $\left(\sum \frac{x^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  also  $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} = 1 \implies R = 1$ .

Für  $|x| < 1$  ist die Potenzreihe also konvergent, aber für  $x = 1$  divergent und für  $x = -1$  konvergent (alternierende Reihe von Leibniz).

(iv)  $\left(\sum \frac{x^n}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  also  $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1 \implies R = 1$ .

Für  $|x| \leq 1$  also konvergent und für  $|x| > 1$  divergent.

**Satz 4.26.** (Eigenschaften von Potenzreihenfunktionen)

(i) Seien  $(\sum a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(\sum b_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  Potenzreihen mit Konvergenzradius  $R_1$  bzw.  $R_2$ . Dann konvergieren für  $|x| < \min\{R_1, R_2\}$  die Summe  $(\sum (a_n + b_n)x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und das Cauchy-Produkt  $(\sum c_n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  der beiden Potenzreihen und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right).$$

(ii) Für  $r < R_1$  gibt es ein  $M(r) \in \mathbb{R}^+$ , so dass  $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| \leq M(r)$  für alle  $|x| \leq r$  gilt.

(iii) Für  $r < R_1$  und für alle  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $|x| \leq r$  gilt

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^N a_n x^n\right| < \epsilon.$$

(iv) Für  $r < R_1$  gibt es ein  $L(r) \in \mathbb{R}^+$ , so dass für alle  $x, y$  mit  $|x| \leq r$  und  $|y| \leq r$  gilt

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n\right| \leq L(r)|x - y|.$$

**Beweis:** (i) Folgt aus den Rechenregeln für Reihen und der Konvergenz des Cauchy Produktes.

(ii) Für  $|x| \leq r$  gilt  $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = M(r) < \infty$ .

(iii) Weil die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$  absolut konvergiert gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| r^n < \epsilon$  gilt. Dann folgt für  $|x| \leq r$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| r^n < \epsilon.$$

(iv)  $(x^n - y^n) = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ . Für  $|x| \leq r$  und  $|y| \leq r$  folgt also  $|x^n - y^n| \leq |x - y| n r^{n-1}$ . Weil aber gilt

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right) \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|},$$

haben die Reihen  $(\sum a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(\sum n \cdot a_n x^{n-1})_{n \in \mathbb{N}_0}$  den gleichen Konvergenzradius. Also gilt für  $|x| \leq r$  und  $|y| \leq r$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x^n - y^n| \leq |x - y| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot n r^{n-1}.$$

Wähle also  $L(r) = \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} < \infty$ .

**q.e.d.**

**Satz 4.27.** (Identitätssatz für Potenzreihenfunktionen)

- (i) Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > 0$ , die nicht identisch verschwindet, dann gibt es ein  $0 < r < R$ , so dass die Potenzreihenfunktion in  $\{x \in \mathbb{K} \mid |x| < r\}$  höchstens endlich viele Nullstellen  $x_1, \dots, x_N$  hat.
- (ii) Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihenfunktion mit Konvergenzradius  $R > 0$ . Für alle  $x_0$  mit  $|x_0| < R$  und alle  $n \in \mathbb{N}_0$  konvergiert  $b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} a_{n+k} x_0^k$ . Außerdem ist der Konvergenzradius der Potenzreihenfunktion  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  nicht kleiner als  $R - |x_0|$  und für alle  $|x| < R - |x_0|$  gilt auch  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x + x_0)^n$ .
- (iii) Seien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  zwei Potenzreihenfunktionen, deren Konvergenzradien größer sind als  $r > 0$ . Falls  $\{x \in \mathbb{K} \mid |x| \leq r\}$  unendliche viele verschiedene Elemente enthält, an denen die beiden Potenzreihenfunktionen übereinstimmen, dann gilt  $a_n = b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ , d.h. sie stimmen als Potenzreihen überein.

**Beweis:** (i) Sei  $N \in \mathbb{N}_0$  der kleinste Index, so dass  $a_N \neq 0$ . Wenn alle anderen Koeffizienten  $(a_n)_{n > N}$  verschwinden, hat die Potenzreihe nur Nullstellen bei  $x = 0$ . Andernfalls gilt für ein  $0 < r < R$  und alle  $|x| \leq r$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_N x^N \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n \leq |x|^{N+1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}| r^n \right).$$

Also gilt für alle Nullstellen  $x_m$  der Potenzreihenfunktionen

$$|a_N| \cdot |x_m|^N \leq |x_m|^{N+1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}| r^n \right).$$

Wenn  $|x_m| \neq 0$  ist folgt daraus  $0 < |a_N| \leq |x_m| \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}| r^n \right)$ . Also hat die Potenzreihenfunktion keine Nullstelle in

$$\left\{ x \in \mathbb{K} \mid 0 < |x| < \min \left\{ r, |a_N| \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}| r^n \right)^{-1} \right\} \right\}.$$

(ii) Für  $x_0 = 0$  trivial. Sei  $0 < |x_0| = r < R$ . Dann ist für alle  $0 < s < R - r$  die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+s)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_n \binom{n}{k} r^k s^{n-k} < \infty$$

absolut summierbar. Dann gilt für alle  $m = n - k \in \mathbb{N}_0$  auch:

$$s^m \sum_{k=0}^{\infty} |a_{m+k}| \binom{m+k}{k} r^k \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n |a_n| \binom{n}{k} r^k s^{n-k} < \infty.$$

Für alle  $m = n - k \in \mathbb{N}_0$  konvergiert also  $b_m = \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} \binom{m+k}{k} x_0^k$ . Und es gilt

$$\sum_{m=0}^M s^m \sum_{k=0}^{\infty} |a_{m+k}| \binom{m+k}{k} r^k \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n |a_n| \binom{n}{k} r^{n-k} s^k < \infty$$

für alle  $M \in \mathbb{N}_0$ . Also ist auch  $\sum_{m=0}^{\infty} |b_m| s^m \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (r+s)^n < \infty$ .

Also ist  $\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$  für alle  $|x| < R - r$  konvergent, und der Konvergenzradius nicht kleiner als  $R - r = R - |x_0|$ . Für  $|x| < R - |x_0|$  und alle  $M, K \in \mathbb{N}_0$  gilt dann

$$\left| \sum_{m=0}^M x^m \sum_{k=0}^K a_{m+k} \binom{m+k}{k} x_0^k - \sum_{n=0}^{M+K} a_n (x+x_0)^n \right| \leq \sum_{n=\min\{M,K\}}^{M+K} |a_n| (|x| + |x_0|)^n.$$

Also folgt im Grenzwert  $K \rightarrow \infty$

$$\left| \sum_{m=0}^M b_m x^m - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+x_0)^n \right| \leq \sum_{n=M}^{\infty} |a_n| (|x| + |x_0|)^n < \infty.$$

und im Grenzwert  $M \rightarrow \infty$  auch  $\sum_{n=0}^{\infty} b_m x^m - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+x_0)^n = 0$ .

(iii) Sei  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  eine Folge von paarweise verschiedenen Nullstellen der Potenzreihenfunktion  $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)x^n$  in  $\{x \in \mathbb{K} \mid |x| \leq r\}$ . Dann hat die Folge  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  einen Häufungspunkt  $x_0$  mit  $|x_0| \leq r$ , und in jeder  $\epsilon$ -Umgebung von  $x_0$  gibt es unendlich viele verschiedene Folgenglieder. Sei  $R$  das Minimum der Konvergenzradien von  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ . Dann hat aufgrund der Voraussetzung und wegen (ii) die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)(y + x_0)^n$ , als Potenzreihe in  $y$  mindestens den Konvergenzradius  $R - r > 0$ , und für alle  $0 < \epsilon \leq R - r$  unendlich viele Nullstellen auf  $\{y \in \mathbb{C} \mid |y| < \epsilon\}$ . Also verschwindet wegen (i) diese Potenzreihe in  $y$  identisch. Dann stimmen wegen (ii) die beiden Potenzreihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  auf dem Gebiet  $\{x \in \mathbb{K} \mid |x - x_0| < R - r\}$  überein. Also gibt es eine Folge  $(\tilde{x}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  von paarweise verschiedenen Nullstellen von  $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)x^n$ , die gegen ein  $\tilde{x}_0$  mit  $|\tilde{x}_0| = \max\{r - (R - r), 0\} < r$  konvergiert. Dabei ist  $R - |\tilde{x}_0| > R - r$ . Sei  $\frac{R}{R-r} < N \in \mathbb{N}$ . Indem wir die beiden Potenzreihe immer wieder an einer Stelle mit minimalem Radius in dem Bereich entwickeln, in dem wir schon die Gleichheit beider Potenzreihen gezeigt haben, erhalten wir nach höchstens  $N$  Schritten, dass beide Potenzreihen auf einer Nullfolge übereinstimmen. Wegen (i) sind dann die beiden Potenzreihen  $(\sum a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(\sum b_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  identisch. **q.e.d.**

## 4.4 Sinus und Cosinus

**Definition 4.28.** Für alle  $x \in \mathbb{K}$  sei

$$\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} \quad \sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$$

Also gilt für reelle  $x$   $\cos(x) = \Re(\exp(ix))$   $\sin(x) = \Im(\exp(ix))$   
und für alle  $x \in \mathbb{K}$  die **Eulersche Formel**:  $\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$ .  
Außerdem gilt für alle  $x \in \mathbb{K}$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = \frac{\exp(2ix) + 2 + \exp(-2ix)}{4} - \frac{\exp(2ix) - 2 + \exp(-2ix)}{4} = 1,$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(-x) = -\sin(x).$$

**Satz 4.29.** (Additionstheorem) Für alle  $x, y \in \mathbb{K}$  gilt:

$$\begin{aligned} \cos(x + y) &= \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y) \\ \sin(x + y) &= \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y) \end{aligned}$$

**Beweis:**  $\exp(i(x + y)) = \exp(ix) \exp(iy)$ .

$$\begin{aligned} \cos(x + y) + i \sin(x + y) &= (\cos(x) + i \sin(x))(\cos(y) + i \sin(y)) \\ &= \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y) + i(\sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)). \end{aligned}$$

Ersetzen wir  $x$  und  $y$  durch  $-x$  und  $-y$  und benutzen  $\cos(-x) = \cos(x)$  und  $\sin(-x) = -\sin(x)$ , dann erhalten wir

$$\cos(x+y) - \imath \sin(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin y - \imath(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)).$$

Die Summe und die Differenz dieser beiden Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).\end{aligned}\quad \text{q.e.d.}$$

Durch Einsetzen von  $(x, y)$  und  $(x, -y)$  erhalten wir für alle  $x, y \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + \cos(x-y) &= 2\cos(x)\cos(y) \\ \cos(x-y) - \cos(x+y) &= 2\sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) + \sin(x-y) &= 2\sin(x)\cos(y)\end{aligned}$$

**Satz 4.30.** (*Potenzreihen von Sinus und Cosinus*)

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

**Beweis:** Weil  $\imath^2 = -1$  gilt für alle  $k \in \mathbb{N}_0$   $\imath^{2k} = (-1)^k$  und  $\imath^{2k+1} = \imath(-1)^k$ . Also gilt auch für alle  $x \in \mathbb{K}$ :

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \frac{\exp(\imath x) + \exp(-\imath x)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{(\imath x)^n}{n!} + \frac{(-\imath x)^n}{n!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ \sin(x) &= \frac{\exp(\imath x) - \exp(-\imath x)}{2\imath} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\imath} \left( \frac{(\imath x)^n}{n!} - \frac{(-\imath x)^n}{n!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\end{aligned}$$

q.e.d.