Kurven und Flächen

Übungsblatt 12

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister

HWS 2009/10
23.11.2009

Aufgabe 40 (*Gaußsche Krümmung von Graphenflächen*)

Sei $F : G \to \mathbb{E}^3$ die Graphenflächenparametrisierung zu einer C^r-Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ ($G \subset \mathbb{R}^2$, $r \geq 2$), und ρ_F das Flächenelement von F. Man *zeige*: F hat die Gaußsche Krümmung

$$K_F \;=\; \frac{1}{\rho_F^4} \cdot \det\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_k}\Big).$$

(6 Punkte)

Aufgabe 41 (*Gaußsche Krümmung von Regelflächen*)

Es sei $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ die Parametrisierung einer Regelfläche, wie sie in Abschnitt 5.3 beschrieben wurde (siehe diesen Abschnitt insbesondere für die Bedeutung von $S(t)$); allerdings seien α und E nun als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt. Im folgenden müssen die Singularitäten von F aus der Betrachtung ausgeschlossen werden. Daher setzen wir $R(t) := \mathbb{R} \setminus S(t)$ und $G_F := \bigcup \big(\{t\} \times R(t)\big)$. Für jedes $t \in I$ sei $K_t : R(t) \to \mathbb{R}$ die Funktion $s \mapsto K_F(t,s)$. Man *zeige*:

a) Für alle $(t,s) \in G_F$ gilt

$$K_F(t,s) \;=\; -\,\frac{\det\big(\alpha'(t), E(t), E'(t)\big)^2}{\rho_F(t,s)^4},$$

insbesondere erkennt man erneut $K_F \leq 0$. (6 Punkte)

b) Tangentenflächen haben verschwindende Krümmung. (3 Punkte)

c) Für jedes $t \in I$ gilt folgende Sequenz von Äquivalenzen:

$$K_F(t,s) = 0 \text{ für ein } s \in R(t) \iff \det\big(\alpha'(t), E(t), E'(t)\big) = 0 \iff K_t \equiv 0\,.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 42 (*Gaußsche Krümmung von Rotationsflächen*)

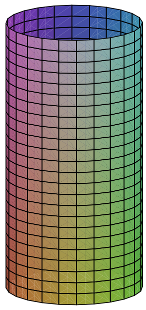
Sei F die kanonische Parametrisierung einer singularitätenfreien C^2-Rotationsfläche, für welche die Profilkurve $\alpha = (r, b)$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist. *Zeige*, dass für deren Gaußsche Krümmung gilt:

$$K_F(t,s) = -\frac{r''(t)}{r(t)}\;.$$

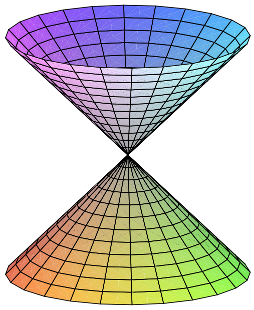
(6 Punkte)

Man *zeige* weiterhin, daß für Rotationsflächen konstanter Gaußscher Krümmung folgende (und keine weiteren) Typen vorkommen, und gebe die Profilkurven dieser Typen so explizit wie möglich an.[*] (15 Punkte)

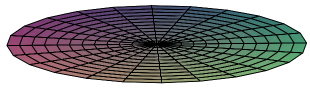
$K_F = 0$



Kreiszylinder

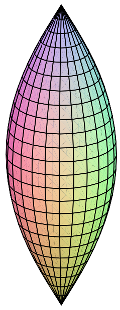


Kreiskegel

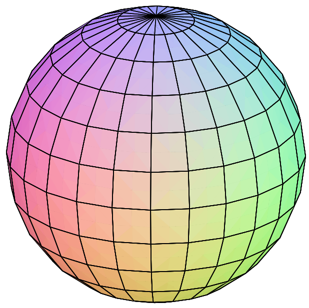


Ebene in Polarkoordinaten

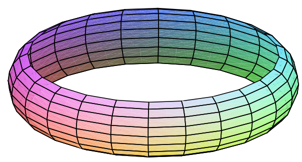
$K_F > 0$



Spindel-Typ

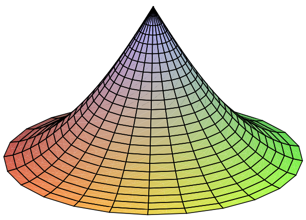


Sphäre

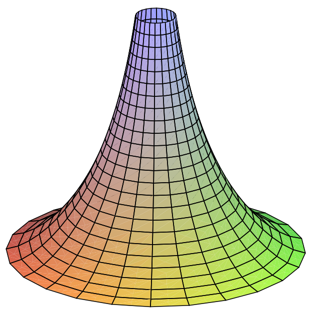


Reif-Typ

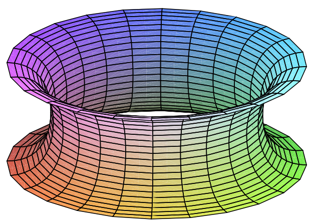
$K_F < 0$



Hut-Typ



Pseudosphäre



Pseudoreif-Typ

Folgt Seite 3

[*] Die Bezeichnungen „Spindel", „Reif", „Hut" und „Pseudoreif" gehören nicht zum allgemeinen mathematischen Sprachgebrauch.

[Tipp: Wegen Aufgabe 39(b) kann man sich hierbei auf die Fälle $K_F \in \{0, 1, -1\}$ beschränken. Die allgemeinen Lösungen r für die Differentialgleichung

$$r'' + K_F \cdot r = 0$$

lautet bekanntlich

$$\begin{array}{lrcl} \text{für } K_F = 0: & r(t) & = & a\,t + c\,, \\ \text{für } K_F = 1: & r(t) & = & a\,\cos(t) + c\,\sin(t)\,, \\ \text{für } K_F = -1: & r(t) & = & a\,\cosh(t) + c\,\sinh(t)\,, \end{array}$$

mit Konstanten a, $c \in \mathbb{R}$. Bei bekanntem r ist dann die Funktion b vermittels

$$(b')^2 \;=\; 1 - (r')^2$$

berechenbar. In fast allen Fällen muss der Definitionsbereich von (r, b) auf ein geeignetes Intervall I eingeschränkt werden, damit die Bedingungen $r(t) > 0$ und $|r'(t)| \le 1$ erfüllt sind.]

Abgabe: 30.11.2009 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Kurven und Flächen