Kurven und Flächen

Übungsblatt 6

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister

HWS 2009/10
12.10.2009

Aufgabe 18 (*Evolute*):

Sei $\alpha : I \to \mathbb{E}^2$ eine reguläre C^2-Kurve. Hat die Krümmung $\varkappa_\alpha$ keine Nullstellen, so heißt die Kurve $\beta := \alpha + (1/\varkappa_\alpha) \cdot N_\alpha$ die *Evolute* von α. Man zeige:

a) $\beta(I)$ ist die Menge der Mittelpunkte der Krümmungskreise von α. (3 Punkte)

b) $\beta = \alpha + \dfrac{\langle \alpha', \alpha' \rangle}{\det(\alpha', \alpha'')} \cdot J\alpha'$. (3 Punkte)

c) Ist $\varkappa_\alpha$ differenzierbar, so gilt $\beta' = -(\varkappa'_\alpha / \varkappa^2_\alpha) \cdot N_\alpha$. (3 Punkte)

d) Ist $\varkappa_\alpha$ differenzierbar, so ist β genau dann in $t \in I$ nicht regulär, wenn α in t einen *Scheitel* hat (d.h. wenn $\varkappa'_\alpha(t) = 0$ gilt). (3 Punkte)

e) *Huygens'sche Konstruktion der Evolute.* β ist die Enveloppe (siehe Aufgabe 14) der Geradenschar, die aus den Normalen $\alpha(t) + \mathbb{R} \cdot N(t)$ von α besteht.
(3 Punkte)

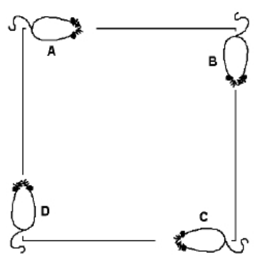
f) Man erinnere sich an die Definition der Parallelkurve α_s zu α aus Aufgabe 15. Zeige für $s \in \mathbb{R}$: Falls α_s in $t \in I$ *nicht* regulär ist, so liegt $\alpha_s(t)$ auf der Evolute von α. (3 Punkte)

Aufgabe 19

Vier Mäuse - A,B,C und D - befinden sich in den Ecken eines quadratischen Zimmers mit Seitenlänge a und werden dort gleichzeitig losgelassen. Weil jede Maus einen Würfel Käse auf den Rücken gebunden hat, läuft jede Maus ab dem Zeitpunkt des Loslassens mit einer festen, für alle Mäuse gleichen, Geschwindigkeit v_0 in die jeweilige Richtung der im Uhrzeigersinn benachbarten Maus (siehe die Abbildung).

a) Bestimme die Kurve, entlang derer die Mäuse laufen und den Punkt, in dem sich die Mäuse schließlich treffen. (9 Punkte)

b) Berechne die Länge des Weges, den eine Maus bis zum Treffpunkt zurücklegt. (3 Punkte)



Aufgabe 20 (*Krümmung und Torsion*):

Sei $\mathbb{E}$ ein euklidischer Raum der Dimension 3 und $(p_0; a_1, a_2, a_3)$ ein KKS von $\mathbb{E}$. Berechne Krümmung und Torsion der Kurve

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{E}, \quad t \mapsto p_0 + r(3t - t^3)a_1 + 3rt^2 a_2 + r(3t + t^3)a_3 \quad \text{mit } r \in \mathbb{R}_+ .$$

(6 Punkte)

Aufgabe 21 (*Eine Interpretation der Torsion*):

Sei $\mathbb{E}$ ein euklidischer Raum der Dimension 3 und $\alpha : I \to \mathbb{E}$ eine reguläre C^k-Kurve mit $k \geq 3$ und $\varkappa_\alpha > 0$. Mit der Kurve $\alpha : I \to \mathbb{E}$ ist ein weiterer Differentialoperator $\nabla^\perp_\partial$, die *Normalendifferentiation*, verbunden, die jedem C^1-Normalenfeld $X : I \to \mathbb{R}^3$ das Normalenfeld

$$\nabla^\perp_\partial X \;:=\; X' - \langle X', T_\alpha \rangle \cdot T_\alpha \;=\; \text{normale Komponente von } X'$$

zuordnet. Ist $\nabla^\perp_\partial X \equiv 0$, so heißt X ein *paralleles* Normalenfeld von α.

Zeige, dass gilt:

a) X ist genau dann parallel, wenn $X' = -v_\alpha \varkappa_\alpha \langle X, N_\alpha \rangle \cdot T_\alpha$ ist. (3 Punkte)

b) Zu jedem „Anfangswert" $v \perp \alpha'(t_0)$ $(t_0 \in I)$ existiert genau ein paralleles Normalenfeld X von α mit $X(t_0) = v$. (3 Punkte)

c) Sind X_1, X_2 parallele Normalenfelder von α, so ist $\langle X_1, X_2 \rangle \equiv \text{const}$. (3 Punkte)

d) Ist E ein paralleles Einheitsnormalenfeld von α, so ist auch $T_\alpha \times E$ ein paralleles Einheitsnormalenfeld von α, und zwar ist dieses orthogonal zu E, es existiert eine C^1-Funktion $\vartheta : I \to \mathbb{R}$, so dass

$$N_\alpha \;=\; (\cos \circ \vartheta) \cdot E + (\sin \circ \vartheta) \cdot (T_\alpha \times E)$$

ist, es gilt

$$B_\alpha \;=\; -(\sin \circ \vartheta) \cdot E + (\cos \circ \vartheta) \cdot (T_\alpha \times E)$$

und

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}s} \;=\; \tau_\alpha \, .$$

(6 Punkte)

[Tipp: Man verwende die grundlegenden Sätze über gewöhnliche Differentialgleichungen, die Frenetschen Gleichungen und für die Existenz von ϑ den Satz aus 1.8, den man auf das Einheitsvektorfeld $\big(\langle N_\alpha, E \rangle, \langle N_\alpha, T_\alpha \times E \rangle\big) : I \to \mathbb{R}^2$ anwendet.]

Abgabe: 19.10.2009 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Kurven und Flächen