Kurven und Flächen

Übungsblatt 9

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister

HWS 2009/10
2.11.2009

Aufgabe 29

Seien $(\widetilde{G}, \widetilde{g})$ und (G, g) zwei Riemannsche Gebiete. *Zeige:* Ein Diffeomorphismus $\varphi : (\widetilde{G}, \widetilde{g}) \to (G, g)$ ist genau dann eine Isometrie, wenn für jede C^1-Kurve $\alpha : [a, b] \to \widetilde{G}$ gilt: $L(\varphi \circ \alpha) = L(\alpha)$. (9 Punkte)

Aufgabe 30 (*Eine isometrische Deformation der Wendelfläche in das Katenoid*)

Es sei $(p_0; \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3))$ ein KKS von $\mathbb{E}^3$ und

$$\begin{aligned} F \; : \; [0, \tfrac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{E}^3 \,, \; (\tau, t, s) \mapsto p_0 &+ \cos(\tau) \cdot \sinh(s) \cdot \Gamma_{\boldsymbol{a}}(t) + \sin(\tau) \cdot \cosh(s) \cdot \Gamma'_{\boldsymbol{a}}(t) \\ &+ (t \cdot \cos(\tau) + s \cdot \sin(\tau)\,) \cdot a_3 \;. \end{aligned}$$

Man zeige:

a) Für jedes $\tau \in [0, \pi/2]$ ist die Abbildung $F_\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{E}^3, (t, s) \mapsto F(\tau, t, s)$ eine Parametrisierung einer singularitätenfreien Fläche. (6 Punkte)

b) Man bestimme die „Koeffizienten“ g^τ_{ik} des Maßtensors der Parametrisierung F_τ.
(6 Punkte)

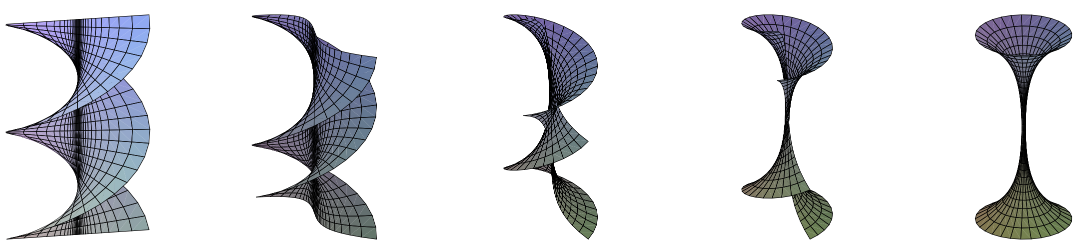
c) F_0 ist eine Parametrisierung der Wendelfläche, wie sie im Weiteren Beispiel (a) aus Abschnitt 5.3 beschrieben ist, und zwar mit $b = 1$. (6 Punkte)

d) $F_{\pi/2}$ ist eine Parametrisierung des Katenoids. Die Standardparametrisierung des *Katenoids* ist die Rotationsflächenparametrisierung mit der *Kettenlinie*

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \,, \; t \mapsto (\cosh(t), t)$$

als Profilkurve. (6 Punkte)

e) Alle durch die F_τ beschriebenen Flächen sind zueinander isometrisch. Man sagt auch, dass durch die Abbildung F eine *isometrische Deformation* der Wendelfläche $[F_0]$ in das Katenoid $[F_{\pi/2}]$ beschrieben wird. (3 Punkte)



Aufgabe 31 (*Papiermodelle für Tangentenflächen.*)

Es seien $\varkappa : I \to \mathbb{R}_+$ eine C^1-Funktion und $\Omega(\varkappa)$ die Menge aller nach Bogenlänge parametrisierter C^3-Kurven $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ mit der Krümmung $\varkappa_\alpha = \varkappa$. *Zeige*, dass dann die Tangentenflächen von je zwei Kurven $\alpha, \beta \in \Omega(\varkappa)$ zueinander isometrisch sind. (Streng genommen muss man die Betrachtung auf die singularitätenfreien „Blätter“ der Tangentenflächen beschränken.)

(12 Punkte)

Insbesondere kann man daher Tangentenflächen aus Papier zusammenkleben, welches man „verbiegt“, aber nirgends „verzerrt“ (Diskussion in der Übung).

Abgabe: 9.11.2009 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Kurven und Flächen