Kurven und Flächen

Übungsblatt 10

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister

HWS 2009/10
9.11.2009

Aufgabe 32 (*Stereographische Projektion*)

Sei $\mathbb{E}^3$ ein dreidimensionaler euklidischer Raum und $(p_0; a_1, a_2, a_3)$ ein KKS von $\mathbb{E}^3$. Die Sphäre vom Radius $R > 0$ um p_0 ist gegeben durch

$$S_R(p_0) := \{\, p \in \mathbb{E}^3 \mid \langle p - p_0, p - p_0 \rangle = R^2 \}.$$

Wir betrachten den *Nordpol* $p_N = p_0 + R \cdot a_3$ und die Hyperebene

$$H := p_0 + \mathbb{R} \cdot a_1 + \mathbb{R} \cdot a_2$$

in $\mathbb{E}^3$. Benutze ohne Beweis: Für $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ schneidet die Gerade durch die Punkte $p = p_0 + t \cdot a_1 + s \cdot a_2 \in H$ und p_N die punktierte Sphäre $S_R(p_0) \setminus \{p_N\}$ in genau einem Punkt, welchen wir mit $F(t, s)$ bezeichnen. Hierdurch wird eine bijektive Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to S_R(p_0) \setminus \{p_N\}$ definiert, deren Umkehrabbildung $F^{-1} : S_R(p_0) \setminus \{p_N\} \to \mathbb{R}^2$ man als *stereographische Projektion* bezeichnet.

Zeige:

a) Die Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to S_R(p_0) \setminus \{p_N\}$ ist gegeben durch

$$(t, s) \mapsto p_0 + \frac{R}{t^2 + s^2 + R^2} \cdot (2Rt \cdot a_1 + 2Rs \cdot a_2 + (t^2 + s^2 - R^2) \cdot a_3).$$

Daher ist F eine C^∞-mS-Flächenparametrisierung. (8 Punkte)

b) Tatsächlich ist F eine *konforme*, insbesondere singularitätenfreie, Parametrisierung der punktierten Sphäre $S_R(p_0) \setminus \{p_N\}$. (6 Punkte)

Aufgabe 33 (*Formoperator*)

a) Seien $F : G \to \mathbb{E}^3$ und $\widetilde{F} : \widetilde{G} \to \mathbb{E}^3$ zwei C^r-Flächenparametrisierungen, die sich längs einer C^r-Kurve $\alpha : I \to G$ berühren, d.h.

$$F \circ \alpha = \widetilde{F} \circ \alpha \quad \text{und} \quad d_{\alpha(t)} F = d_{\alpha(t)} \widetilde{F} \quad \text{für alle } t \in I\,.$$

Dann gilt für die Formoperatoren A und $\widetilde{A}$ der beiden Parametrisierungen

$$\widetilde{A}_{\alpha(t)} \alpha'(t) = A_{\alpha(t)} \alpha'(t)\,.$$

(8 Punkte)

b) Sei $F_\tau : [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{E}^3$ die in Aufgabe 30 auf Blatt 9 definierte Familie von Abbildungen. $F_0(t,s)$ ist eine Parametrisierung der Wendelfläche und $F_{\frac{\pi}{2}}(t,s)$ eine Parametrisierung des Katenoids, welche aus F_0 durch eine *isometrische Deformation* hervorgeht.

Berechne für $\tau \in [0, \frac{\pi}{2}]$ die Formoperatoren A_τ der entsprechenden Flächen und *zeige*, dass $\det(A_\tau)$ unabhänig von τ ist. (12 Punkte)

Aufgabe 34 (*Zweite Fundamentalform bei Parametertransformation*)

Seien $F : G \to \mathbb{E}^3$ und $\widetilde{F} : \widetilde{G} \to \mathbb{E}^3$ zwei Parametrisierungen derselben Fläche $[F]$ und $\varphi : \widetilde{G} \to G$ eine entsprechende Parametertransformation. Sei h die zweite Fundamentalform von F und $\tilde{h}$ die zweite Fundamentalform von $\widetilde{F}$. *Zeige:*

$$\tilde{h}_p(u,v) = \epsilon \cdot h_{\varphi(p)}(d_p\varphi(u), d_p\varphi(v)) \quad \text{für alle} \quad p \in \widetilde{G} \quad \text{und } u, v \in \mathbb{R}^2,$$

wobei $\epsilon = 1$ oder $\epsilon = -1$ gilt, je nachdem, ob φ orientierungserhaltend oder orientierungswechselnd ist. (6 Punkte)

Aufgabe 35 (*Zweite Fundamentalform einer Rotationsfläche*)

Es sei $\alpha(t) = (r(t), b(t)) : I \to \mathbb{R}^2$ eine C^2-Kurve mit $r(t) > 0$ und

$$F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3, \ (t,s) \mapsto p_0 + r(t) \cdot \Gamma_a(s) + b(t) \cdot a_3$$

die Rotationsflächenparametrisierung zur Profilkurve α. Es bezeichne v_α die Bahngeschwindigkeit und $\varkappa_\alpha$ die orientierte Krümmung von α. *Zeige*, dass für die Komponenten h_{ik} der zweiten Fundamentalform von F gilt:

$$h_{11}(t,s) = (\varkappa_\alpha \cdot v_\alpha^2)(t) \quad , \quad h_{12} = 0 \quad \text{und} \quad h_{22}(t,s) = \frac{r \cdot b'}{v_\alpha}(t)\,.$$

(10 Punkte)

Abgabe: 16.11.2009 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Kurven und Flächen