Kurven und Flächen

Übungsblatt 3

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister

HWS 2009/10
21.9.2009

Aufgabe 8: Sei $\mathbb{V}$ ein euklidischer orientierter Vektorraum der Dimension 3 und

$$\times : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$$

das Kreuzprodukt. Zeige:

a) Für $u, v \in \mathbb{V}$ gilt $u \times v = 0$ genau dann, wenn u und v linear abhängig sind. (6 Punkte)

b) Für $u, v, w \in \mathbb{V}$ gilt die **Jacobi-Identität**

$$(u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v = 0.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 9: Sei $\mathbb{E}$ ein affiner Raum. Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{E}$ ein rektifizierbarer Weg und $f \in I(\mathbb{E})$ eine Isometrie. Dann gilt $L(f \circ \alpha) = L(\alpha)$, insbesondere ist der Weg $f \circ \alpha$ ebenfalls rektifizierbar. (6 Punkte)

Aufgabe 10: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall.

a) Seien $\mathbb{V}$ ein 2-dimensionaler orientierter euklidischer Vektorraum, $a \in \mathbb{V}$ mit $\|a\| = 1$ und $X : I \to \mathbb{V}$ eine Abbildung mit $\|X\| = 1$.

Zeige: Ist X stetig, so gibt es eine stetige Funktion $\vartheta : I \to \mathbb{R}$, so dass

$$X = (\cos \circ \vartheta)a + (\sin \circ \vartheta)Ja.$$

(15 Punkte)

[Anleitung:

Definiere $S^1 := \{v \in \mathbb{V} \mid \|v\| = 1\}$, dann gilt $X(t) \in S^1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Mit der Vierteldrehung J ist (a, Ja) eine positiv orientierte ONB von $\mathbb{V}$. Ohne Beweis darf verwendet werden, dass die Abbildung

$$\Psi : \mathbb{R} \to S^1, \qquad t \mapsto (\cos(t))a + (\sin(t))Ja$$

ein lokaler Homöomorphismus ist, d.h. für alle $t_1 \in \mathbb{R}$ existiert eine Umgebung U von t_1 so dass

$$\Psi|_U : U \to \Psi(U)$$

ein Homöomorphismus ist. Definiere nun eine Funktion $\vartheta : J \to \mathbb{R}$ wie folgt:

Für ein festes $t_0 \in I$ sei $\varphi_{t_0} \in \Psi^{-1}(X(t_0))$. Sei $\vartheta : J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\vartheta(t_0) = \varphi_{t_0} \qquad (1)$$

$$\forall t \in J: \ \Psi(\vartheta(t)) = X(t) \qquad (2)$$

auf einem Intervall $J \subset I$ so dass es kein weiteres Intervall $J' \subset I$ mit $J \subsetneq J'$ und eine stetige Funktion $\tilde{\vartheta} : J' \to \mathbb{R}$ gibt, die (1) und (2) erfüllt und $\tilde{\vartheta}|_J = \vartheta$. J ist in diesem Sinne ein "maximales" Intervall, auf dem eine solche Funktion definiert werden kann.

Zeige $J = I$ in folgenden Schritten:

(i) $J \neq \emptyset$.

(ii) J ist abgeschlossen.

(iii) $\sup J = \sup I$ und analog $\inf J = \inf I$.

Benutze dabei jeweils, dass Ψ ein lokaler Homöomorphismus ist.]

b) Ist $\mathbb{E}$ ein 2-dimensionaler euklidischer Raum, $p_0 \in \mathbb{E}$, $a \in \mathbb{E}_L$ mit $\|a\| = 1$ und $\alpha : I \to \mathbb{E}$ ein C^r-Weg ($r \geq 0$) mit $p_0 \notin \alpha(I)$, so gibt es C^r-Funktionen $r : I \to \mathbb{R}_+$ und $\vartheta : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\alpha = p_0 + r\,\left((\cos \circ \vartheta)\, a + (\sin \circ \vartheta)\, Ja\right).$$

(6 Punkte)

Abgabe: 28.9.2009 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Kurven und Flächen