Kurven und Flächen

Übungsblatt 4

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister

HWS 2009/10
28.9.2009

Aufgabe 11 (Bogenlänge):

a) Seien $\mathbb{E}$ ein euklidischer Raum der Dimension 2, $p_0 \in \mathbb{E}$, $r : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ und $\vartheta : [a,b] \to \mathbb{R}$ C^r-Funktionen ($r \geq 1$) und $a \in \mathbb{E}_L$ mit $\|a\| = 1$. Zeige, dass für die Kurve

$$\alpha(t) = p_0 + r(t)((\cos \circ \vartheta(t))\, a + (\sin \circ \vartheta(t))\, Ja)$$

die Bogenlänge gegeben ist durch

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2\, \vartheta'(t)^2} dt.$$

(3 Punkte)

b) Sei $\mathbb{E}$ ein euklidischer Raum der Dimension 3 und $(p_0; a_1, a_2, a_3)$ ein KKS. Die Kurve $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ sei gegeben durch

$$\beta(t) = p_0 + (e^t \cos(t))\, a_1 + (e^t \sin(t))\, a_2 + e^t\, a_3.$$

Gib eine Parametrisierung von β nach der Bogenlänge an. (6 Punkte)

c) Sei $\mathbb{E}$ ein euklidischer Raum der Dimension 2, $p_0 \in \mathbb{E}$, $a \in \mathbb{E}_L$ mit $\|a\| = 1$ und die Kurve $\gamma : [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}] \to \mathbb{E}$ gegeben durch

$$\gamma(t) = p_0 + (3t^2 - 1)\, a + (3t^3 - t)\, Ja.$$

Berechne die Bogenlänge von γ. (3 Punkte)

Aufgabe 12: Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{E}$ ein rektifizierbarer Weg.

a) Zeige: Für $t \in [a,b]$ gilt

$$L(\alpha) = L(\alpha|[a,t]) + L(\alpha|[t,b]).$$

Folgere daraus, dass die Funktion

$$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R},\ t \mapsto L(\alpha|[a,t])$$

monoton wachsend ist. (6 Punkte)

b) Zeige, dass die Funktion φ stetig ist. (9 Punkte)

[Tipp für den Stetigkeitsbeweis in einem Parameter $t^* \in]a,b[$: Man überlege sich, dass es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ Parameter $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = b$ gibt, so dass einerseits der Streckenzug β mit den Eckpunkten $\alpha(t_i)$ $(0 \leq i \leq m)$ länger als

$L(\alpha) - \varepsilon/3$ ist und dass andererseits für ein geeignetes $k \in \{1, \dots, m-1\}$ gilt: $t^* = t_k$ und $d(\alpha(t_{k-1}), \alpha(t_k))$, $d(\alpha(t_k), \alpha(t_{k+1})) < \varepsilon/3$. In dieser Situation zeige man $L(\alpha|[t_{k-1}, t_{k+1}]) < \varepsilon$ und schließe daraus $|\varphi(t) - \varphi(t^*)| < \varepsilon$ für alle $t \in [t_{k-1}, t_{k+1}]$ mit der Monotonie von φ.]

Aufgabe 13 (Der SCHWARZsche Stiefel):

HERMANN ARMANDUS SCHWARZ — lange ist es her (1843 - 1921) — sitzt am Fenster und überlegt, ob man den Inhalt einer Fläche per Approximation durch viele Dreiecke bestimmen kann, analog zur Bestimmung der Länge rektifizierbarer Wege per Approximation durch Strecken.

Draußen geht ein Soldat vorbei und Schwarzens Blick fällt auf dessen verknautschten Stiefel. Und da hat er ihn, den „SCHWARZschen Stiefel“:

Wir betrachten einen Kreiszylinder vom Radius r und mit Höhe h, zerlegen die Mantelfläche durch $m-1$ Kreise, die alle zum Grundkreis parallel sind und voneinander den Abstand h/m haben. Dann wählen wir auf jedem dieser Kreis n äquidistante Punkte, und zwar so, dass bei jedem Kreis die Punkte mitten zwischen die des darüber liegenden Nachbarkreises zu liegen kommen. Wir betrachten die Menge der Dreiecke, die diese Punkte als Ecken haben. Beachte, dass so die Dreiecksflächen im Innern des Zylinders liegen.

a) Man überlege, dass die Anzahl dieser Dreiecke $2mn$ ist. (3 Punkte)

b) Zeige: Der Gesamtflächeninhalt aller Dreiecke beträgt

$$F_{(m,n)} := 2 \cdot m \cdot n \cdot r \cdot \sin(\pi/n) \cdot \sqrt{r^2(1-\cos(\pi/n))^2 + h^2/m^2}$$

(6 Punkte)

c) Man bestimme $\lim_{n\to\infty} F_{(n,n)}$, $\lim_{n\to\infty} F_{(n^2,n)}$ und $\lim_{n\to\infty} F_{(n^3,n)}$. Kann man das geometrisch verstehen?

Schwarzens Erkenntnis: Bestimmung des Inhalts einer Fläche per Approximation durch Dreiecke liefert keinen „vernünftigen“ Flächeninhaltsbegriff. Man begründe dies! (3 Punkte)

Abgabe: 5.10.2009 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Kurven und Flächen