Kurven und Flächen

Übungsblatt 7

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister

HWS 2009/10
19.10.2009

Aufgabe 22 (*Böschungslinien*)

Eine reguläre C^3-Kurve $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ heißt eine *Böschungslinie* (oder *Helix*), wenn $\varkappa_\alpha > 0$ ist, und wenn ein Einheitsvektor $a \in \mathbb{E}_L$ existiert, so dass der Winkel zwischen a und T_α konstant ist.

Zeige: α ist genau dann eine Böschungslinie, wenn $\varkappa_\alpha > 0$ gilt und $\tau_\alpha \,/\, \varkappa_\alpha$ konstant ist. (Lancret, 1802) (12 Punkte)

Man überlege sich, wie man Papiermodelle für Böschungslinien im anschaulichen Raum konstruieren kann. Für die Anfertigung und Abgabe eines solchen Papiermodells erhält man 10 Zusatzpunkte.

Aufgabe 23 (*Eine Charakterisierung von Kurven auf Sphären*)

Für jede nach der Bogenlänge parametrisierte C^3-Kurve $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) α verläuft auf einer Sphäre.

ii) Es existiert ein Punkt $p_0 \in \mathbb{E}^3$, so dass $\alpha - p_0$ ein paralleles Normalenfeld von α ist.

iii) Es existiert ein paralleles Normalenfeld X von α, so dass $\langle T'_\alpha, X\rangle \equiv \text{const.} \neq 0$ ist.

(12 Punkte)

Aufgabe 24 (*Kurven auf Sphären*)

Sei $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eine reguläre C^4-Kurve mit $\varkappa_\alpha \cdot \tau_\alpha^2 \cdot (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varkappa_\alpha)^2 > 0$. Weiterhin gelte für ein $R \in \mathbb{R}_+$ die Beziehung

$$\varrho^2 + (\tilde{\varrho} \cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varrho)^2 = R^2 \quad \text{mit} \quad \varrho := 1/\varkappa_\alpha \ \text{ und } \ \tilde{\varrho} := 1/\tau_\alpha.$$

Zeige, dass α auf einer Sphäre vom Radius R verläuft.

[Tipp: Man zeige, dass $\alpha + \varrho \cdot N_\alpha + \tilde{\varrho} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varrho \cdot B_\alpha$ konstant ist.] (12 Punkte)

Abgabe: 26.10.2009 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Kurven und Flächen