Kurven und Flächen

Übungsblatt 13

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister

HWS 2009/10
30.11.2009

Aufgabe 42 (*Levi-Civita-Ableitung*)

Sei (G,g) ein Riemannsches Gebiet und ∇ dessen Levi-Civita-Ableitung. *Zeige*, dass für jede C^1-Abbildung $f : M \to G$, $X \in \mathfrak{X}^1(G)$, $p \in M$ und $v \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\nabla_{(p,v)}(X \circ f) = \nabla_{(f(p),d_p f(v))} X \ .$$

(Siehe auch Beispiel (b) aus Abschnitt 7.2.) Insbesondere gilt für jede C^1-Kurve $\alpha : I \to G$

$$\forall t \in I \ : \ \nabla_{\partial_t}(X \circ \alpha) = \nabla_{(\alpha(t),\alpha'(t))} X \ .$$

(6 Punkte)

Aufgabe 43 (*Parallele Vektorfelder*)

Sei (G,g) ein Riemannsches Gebiet mit Christoffel-Symbol Γ und Levi-Civita-Ableitung ∇. Außerdem sei $\alpha : I \to G$ eine C^1-Kurve. *Zeige:*

a) Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}^1_\alpha(G)$ ist genau dann parallel, wenn es die lineare Differentialgleichung

$$\forall\, t \in I \ : \ X'(t) = -\Gamma_{\alpha(t)}(\alpha'(t), X(t))$$

erfüllt. (3 Punkte)

b) Sind $X, Y \in \mathfrak{X}^1_\alpha(G)$ Parallelfelder, so gilt $g(X,Y) \equiv \text{const.}$, also insbesondere $\|X\| := \sqrt{g(X,X)} \equiv \text{const.}$ (6 Punkte)

c) Zu jedem $t_0 \in I$ und jedem Anfangswert $v \in \mathbb{R}^n$ gibt es genau ein Parallelfeld $X \in \mathfrak{X}^1_\alpha(G)$ mit $X(t_0) = v$. [Man verwende die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen.] (3 Punkte)

Aufgabe 44 (*Geodätische auf Riemannschen Gebieten*)

Sei (G, g) ein Riemannsches Gebiet, $\alpha : I \to G$ eine Geodätische von (G, g), und seien $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\widetilde{I} := \{\, t \in \mathbb{R} \,|\, at + b \in I \,\} \neq \varnothing$$

gilt. *Zeige:*

a) $\beta : \widetilde{I} \to G,\ t \mapsto \alpha(at + b)$ ist ebenfalls eine Geodätische. (6 Punkte)

Insbesondere gilt für $p \in G$ und $v \in \mathbb{R}^n$:

b) Ist $a \in \mathbb{R}_+$, so ist $I_{(p,a\cdot v)} = \frac{1}{a} \cdot I_{(p,v)}$ und $\alpha_{(p,a\cdot v)}(t) = \alpha_{(p,v)}(a \cdot t)$ für $t \in I_{(p,a\cdot v)}$. (3 Punkte)

c) Ist $s \in I_{(p,v)}$ und setzen wir $q := \alpha_{(p,v)}(s)$ und $w := \alpha'_{(p,v)}(s)$, so gilt $I_{(q,w)} = I_{(p,v)} - s$ und $\alpha_{(q,w)}(t) = \alpha_{(p,v)}(t + s)$ für $t \in I_{(q,w)}$. (3 Punkte)

Aufgabe 45 (*Klassifikation der minimalen Rotationsflächen, Bonnet 1860*)

In dieser Aufgabe soll bewiesen werden, dass eine Parametrisierung einer singularitätenfreien Rotationsfläche genau dann minimal ist, wenn sie einen Teil einer Ebene oder eines Katenoids parametrisiert. Sei also

$$F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3\,,\ (t, s) \mapsto \big(r(t) \cdot \cos(s)\,,\ r(t) \cdot \sin(s)\,,\ b(t)\big)$$

eine Parametrisierung einer singualritätenfreien minimalen C^2-Rotationsfläche in $\mathbb{E}^3$. Man *zeige:*

a) Gilt $b' \equiv 0$, so ist F eben. (3 Punkte)

b) Gilt $b'(t) \neq 0$ überall, so ist $F(I \times \mathbb{R})$ in einem Katenoid von $\mathbb{E}^3$ enthalten; siehe Aufgabe 30 auf Blatt 9. (9 Punkte)

[Tipp: Œ(?) darf man $b(t) = t$ für alle $t \in I$ annehmen. Zur Behandlung der Differentialgleichung $y\,y'' = 1 + (y')^2$ vgl. z.B. die Vorlesung *Differentialgleichungen* von letztem Semester, oder man löse sie mit Maple.]

c) Gilt $b'(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in I$, so hat b' keine Nullstellen. (6 Punkte)

[Tipp: Œ $b'|\,]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\, > 0$; dann beachte man (b).]

Abgabe: 7.12.2009 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Kurven und Flächen