Kurven und Flächen

Übungsblatt 5

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister

HWS 2009/10
5.10.2009

Aufgabe 14 (*Enveloppe*)

Sei $\alpha : I \to \mathbb{E}^2$ eine reguläre C^2-Kurve. Ist $X : I \to \mathbb{E}_L$ ein C^2-Vektorfeld (längs α) mit $\|X\| = 1$ und $\|X'\| > 0$, so existiert zu der Geradenschar $g_t := \alpha(t) + \mathbb{R} \cdot X(t)$ (mit $t \in I$) genau eine C^1-Kurve $\beta : I \to \mathbb{E}$ mit

$$\forall t \in I \; : \left(\; \beta(t) \in g_t \quad \text{und} \quad \beta'(t) \in \mathbb{R} \cdot X(t) \; \right) ,$$

und zwar gilt

$$\beta = \alpha + \lambda \cdot X \quad \text{mit} \quad \lambda := -\frac{\langle \alpha', X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} .$$

Die Kurve β heißt *Enveloppe* (oder *Einhüllende* oder auch *Brennkurve*) der Geradenschar g_t. (Der Name „Brennkurve“ hat den folgenden Hintergrund: Falls die g_t Lichtstrahlen repräsentieren, ist β eine Linie extrem starker Strahlungsintensität.) (12 Punkte)

Aufgabe 15 (*Parallelkurven*)

Sei $\alpha : I \to \mathbb{E}^2$ eine reguläre C^2-Kurve, (T_α, N_α) ihr begleitendes Frenet-2-Bein und $\varkappa_\alpha$ die orientierte Krümmung. Für $s \in \mathbb{R}$ heißt die Kurve $\alpha_s : I \to \mathbb{E}, t \mapsto \alpha(t) + s \cdot N_\alpha(t)$ die *Parallelkurve* von α im orientierten Abstand s. Wir definieren

$$F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}, \; (t, s) \mapsto \alpha_s(t) .$$

Man zeige:

a) $\alpha_s' = (1 - s\varkappa_\alpha) \cdot \alpha'$. Insbesondere ist α_s genau dann in $t \in I$ regulär, wenn $\varkappa_\alpha(t) \cdot s \neq 1$ ist. (3 Punkte)

b) Die partiellen Ableitungen von F nach t und s sind in einem $(t_0, s_0) \in I \times \mathbb{R}$ genau dann linear unabhängig (für die Experten: das bedeutet gerade, dass F in (t_0, s_0) maximalen Rang hat), wenn α_{s_0} in t_0 regulär ist. Insbesondere ist dies in allen $(t_0, 0)$ mit $t_0 \in I$ der Fall. (3 Punkte)

c) Ist α_s in $t \in I$ regulär, so ist $\varkappa_\alpha(t)/|1 - s\,\varkappa_\alpha(t)|$ die orientierte Krümmung von α_s. (3 Punkte)

Aufgabe 16

Es sei $\alpha : I \to \mathbb{E}^2$ eine reguläre C^2-Kurve und $t_0 \in I$.

a) (*Lage einer Kurve relativ zu ihrer Tangente in* t_0) Man betrachte die Höhenfunktion

$$h : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{R} \, , \, p \mapsto \langle \, p - \alpha(t_0), N_\alpha(t_0) \rangle$$

und die Halbebenen

$$H_+ := h^{-1}(\mathbb{R}_+) \quad , \quad \overline{H_+} := h^{-1}(\mathbb{R}_+ \cup \{0\}) \quad , \quad H_- := \mathbb{E} \setminus \overline{H_+} \quad , \quad \overline{H_-} := \mathbb{E} \setminus H_+ \, .$$

(i) Ist $\varkappa_\alpha(t_0) \neq 0$, so gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\alpha(U_\delta(t_0) \cap I \setminus \{t_0\}) \subset \begin{cases} H_+ \, , & \text{falls} \quad \varkappa_\alpha(t_0) > 0 \\ H_- \, , & \text{falls} \quad \varkappa_\alpha(t_0) < 0 \end{cases} \, .$$

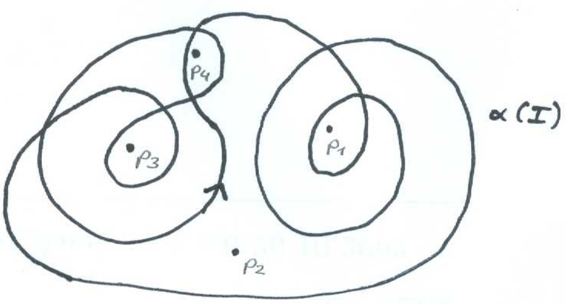
(ii) Gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit $\alpha(U_\delta(t_0) \cap I \setminus \{t_0\}) \subset \overline{H}_+$ (bzw. $\subset \overline{H}_-$), so gilt $\varkappa_\alpha(t_0) \geq 0$ (bzw. ≤ 0).

(6 Punkte)

b) (*Geometrische Bedeutung des Krümmungskreises*) Es sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $p_\lambda := \alpha(t_0) + \lambda \cdot N_\alpha(t_0)$. Gilt $\lambda \cdot \varkappa_\alpha(t_0) > 1$ (bzw. $\lambda \cdot \varkappa_\alpha(t_0) < 1$), so gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_+$, so dass $\alpha(U_\delta(t_0) \cap I \setminus \{t_0\})$ ganz in (bzw. ganz außerhalb) der offenen Kreisscheibe um p_λ mit Radius $|\lambda|$ liegt. Was hat das mit dem Krümmungskreis zu tun? (6 Punkte)

c) Ist $\alpha : I \to \mathbb{E}^2$ glatt geschlossen (das heißt: $I = [a,b]$, $\alpha(a) = \alpha(b)$, $\alpha'(a) = \alpha'(b)$ und $\alpha''(a) = \alpha''(b)$) und verläuft α in einer abgeschlossenen Kreisscheibe mit Radius r, so gibt es ein $t_0 \in I$ mit $|\varkappa_\alpha(t_0)| \geq 1/r$. (6 Punkte)

Aufgabe 17 (*Umlaufzahl*) Sei $\alpha : I \to \mathbb{E}^2$ eine reguläre Kurve, deren Bild durch die folgende Zeichnung gegeben ist. Bestimme die Umlaufzahlen der gegebenen Punkte $p_1, \ldots, p_4$.



(4 Punkte)

Abgabe: 12.10.2009 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Kurven und Flächen