Kurven und Flächen

Übungsblatt 11

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister

HWS 2009/10
16.11.2009

Aufgabe 36 (*Rotationsflächen und geodätische Krümmung*)

Es seien $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ die kanonische Parametrisierung einer singularitätenfreien Rotationsfläche zu einer nach der Bogenlänge parametrisierten C^2-Profilkurve $\alpha = (r, b)$ und $\gamma := F_t$ ein Breitenkreis der Rotationsfläche zu einem festen Parameter $t \in I$; es gilt $\gamma = F \circ \alpha_t$ mit $\alpha_t : s \mapsto (t, s)$.

a) Man *beweise*, dass γ die konstante geodätische Krümmung $\frac{r'(t)}{r(t)}$ hat. (6 Punkte)

b) Man *untersuche*, unter welchen Voraussetzungen γ eine Geodätische ist. (3 Punkte)

c) Man *zeige*, dass es (im Wesentlichen genau) eine singularitätenfreie Rotationsfläche gibt, deren Breitenkreise alle die geodätische Krümmung 1 haben, und bestimme die Profilkurve dieser Fläche. Man nennt diese Profilkurve eine *Traktrix.* (6 Punkte)

Aufgabe 37 (*Parabolische Punkte*)

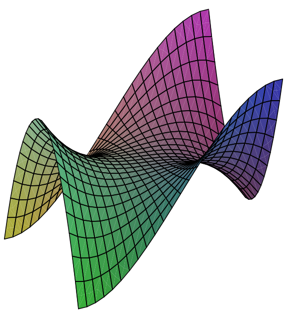
Es sei (G, g) ein Riemannsches Gebiet, $p \in G$, und v ein Einheitsvektor des euklidischen Vektorraumes $(\mathbb{R}^2, g_p)$, der in eine Asymptotenrichtung von F weist. *Zeige:* In diesem Fall ist v genau dann auch eine Hauptkrümmungsrichtung von F, wenn p ein parabolischer Punkt von F ist. (6 Punkte)

Aufgabe 38 (*Affensattel*)

Als *Affensattel* wird die Graphenfläche zu der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (t, s) \mapsto s \cdot (s^2 - 3t^2)$$

bezeichnet:



Man *überlege*, dass in dem Affensattel durch den Punkt $p_0 := (0, 0, 0)$ drei Geraden verlaufen, und *begründe* damit, dass der Punkt p_0 ein planarer Punkt des Affensattels ist. (9 Punkte)

Aufgabe 39 (*Die äußeren Krümmungsgrößen spezieller affiner Bilder von Flächen*)

Ist $\Phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ ein C^r-Diffeomorphismus, so ist unter den Voraussetzungen von Abschnitt 6.5 des Skripts auch $\widetilde{F} := \Phi \circ F$ eine Parametrisierung einer singularitätenfreien C^r-Fläche. In zwei Spezialfällen sollen die äußeren Krümmungsgrößen von $\widetilde{F}$ untersucht werden. Man *zeige:*

a) Ist Φ eine *orientierungstreue Isometrie* von $\mathbb{E}^3$, so haben F und $\widetilde{F}$ dieselben Maßtensoren und Formoperatoren. Daher stimmen auch die zweiten Fundamentalformen, die Gaußschen Krümmungen, die mittleren Krümmungen und die Hauptkrümmungen der beiden Parametrisierungen überein. (7 Punkte)

b) Sei Φ eine *Homothetie* von $\mathbb{E}^3$, d.h.: Es existiert ein Punkt $q_0 \in \mathbb{E}^3$ und ein „Streckungsfaktor" $c \in \mathbb{R}_+$, so dass für alle $q \in \mathbb{E}^3$

$$\Phi(q) = q_0 + c \cdot (q - q_0)$$

gilt. Kennzeichnen wir die zu $\widetilde{F}$ gehörenden Größen durch eine Schlange $\widetilde{\ }$, so gilt:

$$\tilde{g} = c^2 \cdot g \quad , \quad \tilde{\omega} = c^2 \cdot \omega \quad , \quad N_{\widetilde{F}} = N_F \quad , \quad \widetilde{A} = \frac{1}{c} \cdot A \quad , \quad \tilde{h} = c \cdot h \quad ,$$

$$K_{\widetilde{F}} = \frac{1}{c^2} \cdot K_F \quad , \quad H_{\widetilde{F}} = \frac{1}{c} \cdot H_F \quad \text{und} \quad \widetilde{\lambda}_i = \frac{1}{c} \cdot \lambda_i \ \text{ für } i = 1, 2\,.$$

(12 Punkte)

Abgabe: 23.11.2009 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Kurven und Flächen