Kurven und Flächen

Übungsblatt 2

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister

HWS 2009/10
14.9.2009

Aufgabe 4: Sei $\mathbb{E}$ ein 3-dimensionaler affiner Raum und $(p_0; a_1, a_2, a_3)$ ein AKS von $\mathbb{E}$ mit affiner Karte $x : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^3$, d.h. jeder Punkt $p \in \mathbb{E}$ besitzt die Koordinatendarstellung

$$p = p_0 + \sum_{k=1}^{3} x_k(p) a_k.$$

Seien q_0, q_1, q_2, q_3 gegeben durch

$$x(q_0) = (1, 2, 4),\ x(q_1) = (0, 1, 3),\ x(q_2) = (-2, 0, 4),\ x(q_3) = (5, 6, -2).$$

Zeige, dass $(q_0; q_1 - q_0, q_2 - q_0, q_3 - q_0)$ ein weiteres AKS von $\mathbb{E}$ ist. Wir bezeichnen mit $y : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^3$ die zu letzterem AKS gehörende Karte.

Seien die Punkte $p, q \in \mathbb{E}$ gegeben durch

$$x(p) = (1, 2, -4), \quad x(q) = (0, 5, -2).$$

Berechne die Koordinaten von p und q in der affinen Karte y. (6 Punkte)

Aufgabe 5: a) Sei $\mathbb{E}$ ein affiner Raum. Ist $\alpha : I \to \mathbb{E}$ eine Abbildung und sind $x_1, \ldots, x_n$ die Koordinatenfunktionen eines AKS $(p_0; a_1, \ldots, a_n)$ von $\mathbb{E}$, so ist α in $t_0 \in I$ differenzierbar genau dann, wenn $x_k \circ \alpha$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ in t_0 differenzierbar ist. In diesem Fall gilt für die Ableitung von α:

$$\alpha'(t_0) = \sum_{k=1}^{n} (x_k \circ \alpha)'(t_0) \cdot a_k\ .$$

(6 Punkte)

b) Sei $\mathbb{E}$ nun 3-dimensional und $(p_0; a_1, a_2, a_3)$ ein AKS von $\mathbb{E}$. Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ die durch

$$\alpha(t) = p_0 + \cos(t) a_1 + \sin(t) a_2 + t a_3$$

gegebene Abbildung. Zeige, dass α differenzierbar ist und berechne $\alpha'(t)$ für $t \in \mathbb{R}$. (3 Punkte)

Aufgabe 6 (semidirekte Produkte): Sei $(\mathbb{E}, \mathbb{V})$ ein affiner Raum. Zeige:

a) ist $p_0 \in \mathbb{E}$ fest gewählt, so ist

$$\Psi : GA(\mathbb{E}) \to GL(\mathbb{V}) \times \mathbb{V},\ f \mapsto (f_L, f(p_0) - p_0)$$

eine Bijektion. Daher existiert auf $GL(\mathbb{V}) \times \mathbb{V}$ genau eine Gruppenstruktur, bezüglich welcher Ψ zu einem Gruppenisomorphismus wird. Diese Gruppenstruktur ist von p_0 unabhängig. Die so entstehende Gruppe heißt das *semidirekte Produkt* von $GL(\mathbb{V})$ mit $\mathbb{V}$. Berechne den "Wert" des Produktes $(A,v)\cdot(B,w)$ für zwei Elemente $(A,v),(B,w)\in GL(\mathbb{V})\times\mathbb{V}$.

[Tipp: Für zwei Elemente $(A,v),(B,w)\in GL(\mathbb{V})\times\mathbb{V}$ definiere die Gruppenoperation

$$(A,v)\cdot(B,w) := \Psi\left(\Psi^{-1}(A,v)\ \cdot\ \Psi^{-1}(B,w)\right),$$

wobei auf der rechten Seite die Gruppenoperation in $GA(\mathbb{E})$ gemeint ist, und zeige die nötigen Eigenschaften.] (9 Punkte)

b) Bekanntlich kann $GL(\mathbb{R}^n)$ aufgefasst werden als die Gruppe der reellen invertierbaren $n\times n$-Matrizen. Wie in Teil a) konstruiert man das semidirekte Produkt $GL(\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$.

Zeige: Die Teilmenge $G := \left\{\begin{pmatrix} A & b\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mid A\in GL(\mathbb{R}^n),\ b\in\mathbb{R}^n\right\}$ ist eine Untergruppe von $GL(\mathbb{R}^{n+1})$ und die Abbildung

$$GL(\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n\to G,\quad (A,b)\mapsto\begin{pmatrix} A & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

ist ein Gruppenisomorphismus. (6 Punkte)

Aufgabe 7 (Isometrien des euklidischen Raumes): Sei $\mathbb{E}$ ein euklidischer Raum. Zeige, dass dann für die Gruppe $I(\mathbb{E})$ der Isometrien von $\mathbb{E}$ gilt:

$$I(\mathbb{E}) = \{\, f:\mathbb{E}\to\mathbb{E} \text{ affin } \mid f_L \text{ ist orthogonale Abbildung in } \mathbb{E}_L \,\}.$$

Insbesondere sind Isometrien affine Abbildungen. (Vergleiche das Theorem aus 1.6)

Zeige zunächst die Inklusion $\supset$. (3 Punkte)

Für die Inklusion $\subset$ gehe in folgenden Schritten vor:

(i) Sei $\mathbb{V}$ ein euklidischer Vektorraum. Zeige die Polarisationsformel für das Skalarprodukt:

$$\forall v,w\in\mathbb{V}\ :\ \langle v,w\rangle = \pm\tfrac{1}{2}\left(\|v\pm w\|^2-\|v\|^2-\|w\|^2\right)$$

(3 Punkte)

(ii) Für eine Isometrie $f:\mathbb{E}\to\mathbb{E}$ fixiere $p_0\in\mathbb{E}$ und betrachte die Abbildung

$$g:\mathbb{E}_L\to\mathbb{E}_L,\ v\mapsto f(p_0+v)-f(p_0).$$

Zeige $\langle g(v),g(w)\rangle = \langle v,w\rangle$ (d.h.: g ist skalarprodukttreu). (9 Punkte)

(iii) g ist eine orthogonale, insbesondere lineare Abbildung. Dazu betrachte man ein KKS $(p_0;a_1,\ldots,a_n)$, beachte, dass wegen (ii) $(p_0;g(a_1),\ldots,g(a_n))$ ebenfalls ein KKS ist, und stelle $g(v)$ bezüglich der ONB $(g(a_1),\ldots,g(a_n))$ dar, wobei $v\in\mathbb{E}_L$ variabel ist. (9 Punkte)

(iv) f ist affin mit $f_L = g$. (3 Punkte)

Abgabe: 21.9.2009 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Kurven und Flächen