Kurven und Flächen

Übungsblatt 8

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister

HWS 2009/10
26.10.2009

Aufgabe 25 (*Flächeninhalt von Rotationsflächen*)

Sei $(p_0; a_1, a_2, a_3)$ ein positiv orientiertes KKS des dreidimensionalen orientierten euklidischen Raumes $\mathbb{E}$. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\alpha = (r, b) : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre, nach der Bogenlänge parametrisierte C^r-Kurve. Eine Parametrisierung der *Rotationsfläche* zur *Profilkurve* α ist dann gegeben durch

$$F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{E},\ (t, s) \mapsto p_0 + r(t) \cdot \Gamma_{\boldsymbol{a}}(s) + b(t) \cdot a_3$$

Zeige: Sind $c, d \in I$ mit $c < d$, so ist der Flächeninhalt des „Ringstückes“ $F|([c, d] \times [0, 2\pi])$ gegeben durch

$$2\,\pi \cdot \int_c^d |r(t)|\, dt.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 26 (*Regelflächen*)

Die Situation sei wie in Abschnitt 5.3, insbesondere gelte die dortige Bedingung (S). Eine Parametrisierung der Regelfläche $[F]$ zu den Daten (α, E) ist gegeben durch

$$F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3,\ (t, s) \mapsto \alpha(t) + s \cdot E(t).$$

Ist $\lambda : I \to \mathbb{R}$ eine C^r-Funktion und $\alpha_\lambda := \alpha + \lambda \cdot E$, so wird die Regelfläche $[F]$ ebenfalls durch die Abbildung

$$I \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3,\ (t, s) \mapsto \alpha_\lambda(t) + s \cdot E(t)$$

parametrisiert.

Zeige: Man kann die Funktion λ stets so wählen, dass α_λ die Erzeugenden der Regelfläche senkrecht schneidet, d.h. $\langle \alpha'_\lambda, E \rangle = 0$. (9 Punkte)

[Tipp: Unter Berücksichtigung von $\|E\| = 1$ stelle man zunächst eine Gleichung für λ' auf.]

Aufgabe 27 (*spezielle Regelflächen*)

Sei $(p_0; a_1, a_2, a_3)$ ein KKS des dreidimensionalen orientierten euklidischen Raumes $\mathbb{E}^3$. Seien (x, y, z) die zugehörigen Koordinatenfunktionen und $\Gamma(t) := \cos(t)a_1 + \sin(t)a_2$. *Man bestimme* für die folgenden Beispiele die Singularitäten und gegebenenfalls die Striktionslinien. Sind letztere auffällige Kurven der jeweiligen mS-Fläche?

a) *Die Wendelfläche* ist die Regelfläche mit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3,\ t \mapsto p_0 + b\,t \cdot a_3$ (wobei $b \neq 0$ ist), und $E = \Gamma$. (6 Punkte)

b) *Die Sattelfläche (oder hyperbolisches Paraboloid)* wird durch die Gleichung $z = x^2 - y^2$ beschrieben, d.h. als Punktmenge ist diese Fläche $\{ p \in \mathbb{E}^3 \,|\, z(p) = x(p)^2 - y(p)^2 \}$. *Zeige zunächst*: Diese Punktmenge ist das Bild der Regelflächenparametrisierung, die durch

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3,\ t \mapsto p_0 + t \cdot (a_1 + a_2) \quad \text{und} \quad E : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3_L,\ t \mapsto (a_1 - a_2 + 4t \cdot a_3)/\sqrt{2 + 16t^2}$$

induziert wird. Dann *bestimme* man die Singularitäten und die Striktionslinie dieser Regelfläche. (9 Punkte)

c) *Die Tangentenfläche* zu einer regulären C^3-Kurve $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ mit $\varkappa_\alpha > 0$ ist die Regelfläche zu α und $E = T_\alpha$. (6 Punkte)

Aufgabe 28 (*Tangentenflächen als Beispiele „singularitätenreicher" Regelflächen.*)

Es sei $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3,\ (t, s) \mapsto \alpha(t) + s \cdot E(t)$ eine Parametrisierung einer nirgends zylindrischen Regelfläche (d.h. $E'(t) \neq 0$), wobei wir $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ bereits als die Striktionslinie dieser Regelfläche voraussetzen. Nun sei jeder Punkt dieser Striktionslinie eine Singularität von F, genauer gesagt, es gelte:

$$\det(\alpha', E, E') \equiv 0\ .$$

Sei α regulär. *Man zeige*, dass dann $[F]$ die Tangentenfläche der nach der Bogenlänge parametrisierten Striktionslinie α ist. (9 Punkte)

Abgabe: 2.11.2009 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Kurven und Flächen