Seminararbeit
Euler-Lagrange Gleichung

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsmathematik
Lehrstuhl für Mathematik III
Prof. Dr. Martin Schmidt

Dennis Christian Nierychlo

11.09.2017

Contents

1 Einleitung

Im vorherigen Thema der **Einführung der Variationsrechung** wurde die Differenzierbarkeit von Funktionalen erklärt. Diese sogenannten Funktionen von Funktionen bilden dabei das zentrale Werkzeug der Variationsrechung. Wie darin erwähnt besteht das Interesse in diesem Bereich für sogenannte *sationäre Funktionen* welche für ein Funktional Extremstellen annehmen können. Die Untersuchung der Extremstellen von Funktionalen und ihren stationären Punkten wird erfolgt mittels des weit bekannten Schlüsseltheorems der Variationsrechung. Der **Euler-Lagrange Gleichung**.Dies wird das Thema dieser Arbeit sein. Es wird sich dabei herausstellen, das die Erfüllung jener Gleichung eine notwendige Bedingung an die stationäre Funktion ist. Dabei wird die Betrachtung von Wirkungsfunktionalen fortgesetzt, deren Funktionen, auch $Variationen$ genannt werden, Randbedingungen erfüllen müssen, wie bei einem Anfangswertproblem nach Definition üblich ist. Das Problem, solche stationären Variationen mit Anfangswerten zu finden, welche eine Extremstelle bilden wird in der Variationsrechnung (Endfixpunkt) Variationsproblem genannt. Dieses Problem tritt meist in der Volkswirtschaft, aber auch in der Physik -vor allem in der klassischen Mechanik (Hamilton-Prinzip)- auf, weshalb die Euler-Lagrange Gleichung dort ihre Anwendung findet.
Im Folgenden sei also $(Y, \|\cdot\|)$ ein Funktionenraum mit $S \subseteq Y$ und $H \subseteq Y$ein normierter Untervektorraum. Die Abbildung

$$J : Y \to \mathbb{R}$$

$$y \mapsto J(y)$$

wird dabei unser Wikrungsfunktional/-integral sein, wobei $J(y)$ vom Funktionenraum Y abhängt. Zudem wird gezeigt, dass unser Wirkungsfunktional Frèchet-differenzierbar ist. Wie bereits im vorherigen Thema bewiesen wurde.
Im Folgen wird nun zunächst die Euler-Lagrange Gleichung als notwendige Bedingung für die Existenz einer Extremstelle gezeigt und hergeleitet.

2 Euler-Lagrange Gleichung im einfachen Fall

Zunächst gilt es einige weitere Objekte zu definieren. Sei im Folgenden $\hat{y} \in S : \hat{y} = y + \epsilon\eta$ eine zu $y\,benachbarte\,Funktion$ und $\eta \in H$ eine $angemessene\,Veränderung$ zu y mit $\epsilon \geq 0$ als $Variationsparameter$ bezeichnet und $\{y + \eta \in S | y \in S, \eta \in H, \| \ \eta \ \| < \epsilon\}$ offen in S. Die Mengen S und H werden bei der Definition unseres Wirkungsfunkitonals definiert, wobei nach anschließendem Satz notwendige Bedingungen an H, also auch η immer erfüllt sein müssen.

Definition (Maximum und Minimum)
Sei ein Funktional J gegeben mit einer offenen Teilmenge S . Dann gilt,

$$i) \quad J\ hat\ ein\ lokales\ Maximum\ in\ y \in S\ \exists \epsilon \geq 0 : J(\hat{y}) - J(y) \leq 0\ \forall \hat{y} \in S : \|\hat{y} - y\| \leq 0$$

$$ii) \quad J\ hat\ ein\ lokales\ Minimum\ in\ y \in S\ \exists \epsilon \geq 0 : J(\hat{y}) - J(y) \geq 0\ \forall \hat{y} \in S : \|\hat{y} - y\| \leq 0$$

$$Alternativ: \quad J\ hat\ ein\ lokales\ Minimum\ in\ y \in S,\ falls\ -J\ dort\ ein\ Maximum\ hat.$$

Es gilt also, dass $\eta \in H \subseteq X$ derart sein muss, dass $\hat{y} \in S$ in einer ϵ-Umgebung gilt. Da jedoch ϵ beliebig klein sein kann, also es gilt $\exists \hat{\epsilon} \geq 0 : 0 \leq \hat{\epsilon} \leq \epsilon$, dass $H = \{\eta \in X : \hat{y} \in S\}$. Nun definieren wir das meist verwendete Wirkungsfunktional mit $Y = C^2([t_0; t_1], \mathbb{R})$. Also

$$\begin{aligned} J : Y &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \int_{t_0}^{t_1} f(t, y, \dot{y}) dt \end{aligned}$$

, wobei f mindestens zweimal partiell differenzierbar stetig ist bzgl. t,y und $\dot{y}$. Bpsw. wird in der VWL $f(t, y, \dot{y})$ als diskontierter Gewinn, t als Zeit, y als Kapitalstock und $\dot{y}$ als Investitionsrate bezeichnet. Dabei sind die Randwerte $y(t_0) = y_0, y(t_1) = y_1$. Also gilt für die Menge $S := \{y \in Y : y(t_0) = y_0\ und\ y(t_1) = y_1\}$. Da gleiche Randwerte auch für alle $\hat{y} \in S$ gelten müssen, gilt für beliebige $\epsilon \geq 0$, dass $H := \{\eta \in Y : \eta(t_0) = \eta(t_1) = 0\}$. Nun gilt es die Ableitung von J zu bestimmen. Nach vorherigem Vortrag gilt das Wirkungsintegral Frèchet-differenzierbar. Dies soll jedoch im folgenden Satz festgehalten und bewiesen werden.

Satz
Das Funkitonal $\int_{t_0}^{t_1} f(t,y,\dot{y})dt$ *ist Frèchet − differenzierbar mit der Frèchet − Ableitung*

$$\delta J(\eta, y) = \int_{t_0}^{t_1} (\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \dot{\eta}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}})dt$$

und wird als **erste Variation** *bezeichnet.*
Beweis:
Es gilt nach Definition, dass ein Funktional Frèchet-diffbar ist wenn gilt

$$\forall c \geq 0 \exists \delta \geq 0 : \|J(\hat{y}) - J(y) - \epsilon\delta J(y,\eta)\| \leq c\|\epsilon\| \forall \epsilon \; und \; \|\epsilon\| \leq \delta$$

Zuvor aber eine Vereinfachung :
Nach dem Satz von Taylor gilt,

$$f(t,\hat{y},\dot{\hat{y}}) = f(t, y+\epsilon\eta, \dot{y}+\epsilon\dot{\eta}) = f(t,y,\dot{y}) + \nabla f(t,y,\dot{y}) * \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon\eta \\ \epsilon\dot{\eta} \end{pmatrix} + O(\epsilon^2) = f(t,y,\dot{y}) + \epsilon(\eta\frac{\partial f}{\partial y} + \dot{\eta}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}) + O(\epsilon^2)$$

Nun zur Definition :

$$\|J(\hat{y}) - J(y) - \epsilon\delta J(\epsilon,\eta)\| =^{lin} \| \int_{t_0}^{t_1} (f(t,\hat{y},\dot{\hat{y}}) - f(t,y,\dot{y}))dt - \epsilon\delta J(\epsilon,\eta)\|$$

$$=^{Taylor} \| \int_{t_0}^{t_1} \epsilon(\eta\frac{\partial f}{\partial y} + \dot{\eta}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}) + O(\epsilon^2)dt - \epsilon\delta J(\epsilon,\eta)\| \leq^{\Delta} \epsilon\| \int_{t_0}^{t_1} (\eta\frac{\partial f}{\partial y} + \dot{\eta}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}})dt - \delta J(\epsilon,\eta)\| + \|O(\epsilon^2)\|$$

$$\leq \epsilon\| \int_{t_0}^{t_1} (\eta\frac{\partial f}{\partial y} + \dot{\eta}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}})dt - \delta J(\epsilon,\eta)\| + \overbrace{\|o(\epsilon)\|}^{\leq c\|\epsilon\|}$$

$$\Rightarrow Ungleichung \; gilt, \; wenn \; \int_{t_0}^{t_1} (\eta\frac{\partial f}{\partial y} + \dot{\eta}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}})dt = \delta J(\eta, y) \; die \; Frèchet{-}Ableitung \; ist. \Rightarrow Beh. \square$$

Bem: Nach einem Satz aus dem vorherigen Vortrag gilt, dass ein Funktional Geautaux-differenzierbar ist, falls es Frèchet-differenzierbar ist und damit die Ableitungen gleich sind. Also gilt, $\delta J(\eta, y) = \frac{d}{d\epsilon} J(\hat{y})|_{\epsilon=0}$ ist.
Nun besitzt die erste Variation einige Eigenschaften, welche wir in folgendem Lemma festhalten möchten.

Lemma
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ *und* $S \in C^{\inf}([t_0; t_1])$. *Auerdem* $J : S \to \Omega; y \mapsto \int_{t_0}^{t_1} f(t,y,\dot{y})dt$, $K : S \to \Omega; y \mapsto \int_{t_0}^{t_1} f(t,y,\dot{y})dt$ *Wirkingsfunktionale.*
i) $\forall a, b \in \mathbb{R} :$ *a)* $\delta(aJ + bK)(\eta, y) = a\delta J(\eta, y) + b\delta K(\eta, y)$
b) $\delta(JK)(\eta, y) = K(y)\delta J(\eta, y) + J(y)\delta K(\eta, y)$
ii) Fr $G : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ *auf* $\Omega \times \Omega$ *diffbar gilt* $\delta G(J, K)(\eta, y) = \frac{\partial G}{\partial J}\delta J(\eta, y) + \frac{\partial G}{\partial K}\delta K(\eta, y)$

Beweis:
i)a)*Seinen nun* $a, b \in \mathbb{R}$ *beliebig. Danngilt,*

$$a\delta J(\eta,y) + b\delta K(\eta,y) = a\int_{t_0}^{t_1}(\eta\frac{\partial f}{\partial y} + \dot{\eta}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}})dt + b\int_{t_0}^{t_1}(\eta\frac{\partial g}{\partial y} + \dot{\eta}\frac{\partial g}{\partial \dot{y}})dt$$

$$=^{linear}\int_{t_0}^{t_1}(a(\eta\frac{\partial f}{\partial y} + \dot{\eta}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}) + b(\eta\frac{\partial g}{\partial y} + \dot{\eta}\frac{\partial g}{\partial \dot{y}}))dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}(\eta(a\frac{\partial f}{\partial y} + b\frac{\partial g}{\partial y}) + \dot{\eta}(a\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} + b\frac{\partial g}{\partial \dot{y}}))dt = \delta(aJ + bK)(\eta,y)\square$$

b)*Es gilt* ,

$$J(\eta,y)K(\eta,y) = (JK)(\eta,y) =^{Fubini}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} f(t,y,\dot{y})g(t,y,\dot{y})dtdt$$

$$\Rightarrow^{Geautaux}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{d\epsilon}(f(t,y,\dot{y})g(t,y,\dot{y}))|_{\epsilon=0}dtdt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}(g(t,y,\dot{y})\frac{d}{d\epsilon}(f(t,y,\dot{y}))|_{\epsilon=0} + f(t,y,\dot{y})\frac{d}{d\epsilon}g(t,y,\dot{y})|_{\epsilon=0})dtdt$$

$$=^{Fubini}\int_{t_0}^{t_1} g(t,y,\dot{y})dt\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{d\epsilon}(f(t,y,\dot{y}))|_{\epsilon=0}dt + \int_{t_0}^{t_1} f(t,y,\dot{y})dt\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{d\epsilon}g(t,y,\dot{y})|_{\epsilon=0}dt$$

$$= K(y)\delta J(y,\eta) + J(y)\delta K(y,\eta)\square$$

ii)*Sei nun* ,

$$G : \Omega\times\Omega \to \mathbb{R}\ auf\ \Omega\times\Omega\ diffbar.$$

$$Dann\ gilt,\ \delta G(J,K)(\eta,y) =^{Geautaux-diffbar}\frac{d}{d\epsilon}G(J,K)(\hat{y})|_{\epsilon=0}$$

$$=^{Kettenregel}\frac{\partial G}{\partial J}\frac{dJ}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} + \frac{\partial G}{\partial K}\frac{dK}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} = \frac{\partial G}{\partial J}\delta J(\eta,y) + \frac{\partial G}{\partial K}\delta K(\eta,y)\square$$

Dabei zeigt i) a) die Linearität der ersten Variation, b) die Produktregel und ii) die Kettenregel.
Im Folgenden wird nun angenommen, dass $y \in S$ ein lokales Maximum für unser Wirkungsintegral definiert. Die Herleitung der Euler-Lagrange Gleichung erfolgt analog mit einem lokalen Minimum. D.h $y \in S$ erfüllt die Definition eines lokalen Max. Nach dem Beweis über die Frechet-Differenzierbarkeit gilt, dass $J(\hat{y}) - J(y) = \epsilon\delta J(\eta,y) + O(\epsilon^2)$ gilt und $\delta J(\eta,y)$ die erste Variation ist. Nun ist nach Definition klar, dass $J(\hat{y}) - J(y)\forall\hat{y} \in S$: $\|\hat{y} - y\| \leq \epsilon$ das Vorzeichen(VZ) nicht verändert. Also auch für sehr kleine ϵ. Da jedoch gilt, wenn $\eta \in H \Rightarrow -\eta \in H$, dass dann $\delta J(\eta,y) = -\delta J(-\eta,y)$, also $\delta J(\eta,y) \neq \delta J(-\eta,y)$ negatives VZ haben kann und nach Definition $\forall\eta \in H$ gelten muss, dass dies erfüllt ist,

wenn $\delta J(\eta, y) = 0 \forall \eta \in H$. Also gilt dies als notwendige Bedingung.
Zu erwähnen ist, dass auch wenn ein Extremal die erste Variation Null setzt i.A nicht ein lokales Maximum oder Minimum vorliegen muss, wie sich in einem noch auftretenden Beispiel herausstellen wird.
Nun lässt sich die erste Variation wie im Folgenden vereinfachen,

$$Es\ gilt\ \delta J(\eta, y) = \int_{t_0}^{t_1} (\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \dot{\eta} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}) dt =^{lin} \int_{t_0}^{t_1} \eta \frac{\partial f}{\partial y} dt + \int_{t_0}^{t_1} \dot{\eta} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} dt$$

$$=^{part.Int} \int_{t_0}^{t_1} \eta \frac{\partial f}{\partial y} dt + [\eta \frac{\partial f}{\partial y}]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \eta \frac{d}{dt} (\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}) dt =^{\eta(t_0)=\eta(t_1)=0} \int_{t_0}^{t_1} \eta \frac{\partial f}{\partial y} dt - \int_{t_0}^{t_1} \eta \frac{d}{dt} (\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \eta (\frac{\partial f}{\partial y} dt - \frac{d}{dt} (\frac{\partial f}{\partial \dot{y}})) dt$$

Damit definiert sich nun eine neue stetige Funktion

$$E : [t_0; t_1] \to \mathbb{R}; t \mapsto \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} (\frac{\partial f}{\partial \dot{y}})$$

mit festen $y \in C^2([t_0; t_1])$. Weil ebenfalls $\eta \in H \subseteq C^2([t_0; t_1])$ gilt, dass $E \in C^2([t_0; t_1])$.
Außerdem gilt nach der Definition des Skalarproduktes in $C^2([t_0; t_1])$, dass

$$\int_{t_0}^{t_1} \eta (\frac{\partial f}{\partial y} dt - \frac{d}{dt} (\frac{\partial f}{\partial \dot{y}})) dt = \langle \eta; E \rangle$$

mit einer Gewichtsfunktion $w(t) \equiv 1$. Also gilt nach der vorherigen Herleitung, dass also folgende notwendige Bedingun für ein Extremal $y \in S$ gelten muss,

$$\delta J(\eta, y) = \langle \eta; E \rangle = 0$$

Nun wird die hergeleitete notwendige Bedingung mithilfe einer vereinfachte Form des Satzes von Du-Bois-Reymond weiter vereinfacht. Dieser Satz wird unter anderem auch als der **"Fundamentalsatz der Variationsrechnung"** bezeichnet.

Lemma(Du-Bois-Reymond)
Sei $G \in C([a; b])$ *und* $\int_a^b G(t) h(t) dt = 0\ \forall h \in C^2([a; b])$. *Dann gilt, dass* $G(t) = 0\ \forall t \in [a; b]$.
Beweis:(Beweis per Widerspruch)
Annahme:$\exists c \in [a; b] : G(c) \neq 0$
Dann gilt $\exists \alpha, \beta \in [a; b] : c \in (\alpha; \beta) \subset [a; b]$. Dann kann $\langle G; h \rangle$ mit G auf einer Umgebung von$c \in (\alpha; \beta)$ entweder positiv oder negativ, auf $(\alpha; \beta)$ eingeschränkt und damit beliebige $h||(\alpha; \beta)$ betrachtet werden.
Weil nun $\alpha, \beta \in [a; b] \subset \mathbb{R}$ gilt, dass es ein $h \in C^2([a; b])$ ex., sodass nach einem Lemma folgendes gilt,
i)

$$h(x) = \begin{cases} h(t) > 0, & t \in (\alpha; \beta),\ wenn\ \alpha < \beta \\ 0, & t \in [a; b] \setminus (\alpha; \beta) \end{cases}.$$

oder
ii)

$$h(x) = \begin{cases} h(t) < 0, & t \in (\alpha; \beta),\ wenn\ \alpha > \beta \\ 0, & t \in [a; b] \setminus (\alpha; \beta) \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ Mit i),ii) zusammen gilt also

$$|\langle G; h\rangle| = |\int_a^b G(t)h(t)de| =^{|(\alpha;\beta)} |\int_\alpha^\beta \overbrace{G(t)}^{\neq 0}\overbrace{h(t)}^{\neq 0}dt|$$

$$\geq 0 \textbf{ Widerspruch!}$$

da $G(t) \neq 0$ *und* $h(t) \neq 0$ gilt und damit nicht für beliebige $h \in C^2([a; b])$ erfüllt ist.
$\Rightarrow G(t) = 0 \forall t \in [a; b]$ und das ist gerade die Behauptung.$\square$

Nun gilt also nach dem Fundamentalsatz der Variationsrechnung, dass $\langle \eta; E\rangle = 0\ \forall \eta \in H$ und ein $y \in S$ -wobei y ein Extremal ist- wenn $E(t) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}) = 0$ für $y \in S$.
Nun eine *Bemerkung*: Es gilt da f mindestens zweimal stetig partiell differenzierbar ist bzgl. $t, y, \dot{y}$,

$$E(t) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}) =^{Kettenregel} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{y}\partial t}\frac{dt}{dt} - \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{y}}\frac{dy}{dt} - \frac{\partial^2 f}{\partial^2 \dot{y}}\frac{d\dot{y}}{t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{y}\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{y}}\dot{y} - \frac{\partial^2 f}{\partial^2 \dot{y}}\ddot{y}$$

Also ist E eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. D.h das Extremal $y \in S$ erfüllt als Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung die Randwerte des Randwertproblems mit $y(t_0) = y_0\ und\ y(t_1) = y_1$. Diese Differentialgleichung wird **Euler-Lagrange Gelichung** genannt.
Also gilt als notwendige Bedingung für ein Extremal (Max oder Min des Variationsproblems), dass $y \in S$ die Euler-Lagrange Gleichung löst.

Satz: Euler-Lagrange Gleichung
Sei $J : C^2([t_0; t_1]) \to \mathbb{R}$ *ein Wirkungsfunktional mit*

$$J(y) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y, \dot{y})dt$$

Dabei ist f *mindestens zweimal partiell differenzierbar bzgl.* $t, y, \dot{y}$ *und* $t_0 < t_1$. *Sei auerdem* $S \subset C^2([t_0; t_1] : S := y \in C^2([t_0; t_1])|y(t_0) = y_0,\ y(t_1) = y_1$ *und* $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.
Dann gilt, wenn $y \in S$ *ein Extremal fr* J *ist, dann löst* y *die Euler−Lagrange Gleichung*

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}) = 0 \forall t \in [t_0; t_1]$$

mit den Randwerten $y(t_0) = y_0,\ y(t_1) = y_1$

Aus diesem Satz ist folgt also, dass y drei Bedingungen erfüllen muss.
$i)\ y \in C^2([t_0; t_1])$
$ii)\ y\ erfüllt\ E - L\ Gl.\ \forall t \in [t_0; t_1]$
$iii)\ y\ erfüllt\ die\ Randwerte$
Beispiel Sein nun$J = \int_0^1 (\dot{y}^2 - y^2 + 2ty)dt$ und $y(0) = 0, y(1) = 1$.
Dann gilt,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 2t\ und\ \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 2\dot{y}\ \Rightarrow E - L\ Gl.\ ist\ (t - y) = \dot{y}$$

Wie man erkennen kann ex. mehrere Lösungen für die E-L Gl.. D.h nur weil ein Extremal $y \in S$ die E-L Gl. löst, heißt dies nicht, dass folglich ein lokales Maximum/Minimum vorliegt.

3 Fall: Keine Abhängigkeit von t

Sei also nun ein Wirkungsfunktional $J(y) = \int_{t_0}^{t_1} f(y, \dot{y})dt$ gegeben. Dann ist das folgende Theorem eine Vereinfachung des Variationsproblems.

Theorem
Sei $J(y) = \int_{t_0}^{t_1} f(y, \dot{y})dt$ ein Wirkungsfunktional und eine Funktion $H(y, \dot{y}) = \dot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} - f$ gegeben. Dann gilt, dass $H(y, \dot{y}) = const$ entlang jedem Extremal y.

Beweis:
Es gilt, dass eine Funktion konstant ist, falls die Ableitung der entsprechenden Funktion gleich Null ist. Also,

$$\frac{d}{dt}H(y, \dot{y}) = \frac{d}{dt}(\dot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} - f) =^{lin} \frac{d}{dt}(\dot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}) - \frac{df}{dt}$$

$$=^{Produktregel} \ddot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} + \dot{y}\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} - \dot{y}\frac{\partial f}{\partial y} - \ddot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \dot{y}(\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y})$$

$\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}H(y, \dot{y}) = 0$, wenn y die E-l Gleichung erfüllt.
$\Rightarrow$ $H(y, \dot{y}) = const$ entlang eines Extremals $y \in S_\square$.

Also gilt, dass$y \in S$ die E-L. Gleichung erfüllt und damit ein Extremal ist, wenn $H(y, \dot{y}) = \dot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} - f = const$ ist.

4 Literaturverzeichnis

- van Brunt, Bruce: The Calculus of Variation (2006)
- https://www.uni-marburg.de>calcvar