Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Einführung

Definition 1.1. *Ein dynamisches System ist eine Halbgruppe G zusammen mit einer stetigen Abbildung*

$$\Phi : G \times M \to M$$

mit einem topologischen (metrischen) Raum M die folgendes erfüllt:

(i) $\Phi(0, x) = x$ *für alle* $x \in M$

(ii) $\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x)$ *für alle* $x \in M, s, t \in G$

Dabei ist G im zeitkontinuierlichen Fall entweder $G = \mathbb{R}$ oder $G = \mathbb{R}_0^+$ und im im zeitdiskreten Fall $G = \mathbb{Z}$ oder $G = \mathbb{N}_0$. M heißt Phasenraum.

Der Parameter aus G ist dabei typischerweise die Zeit. Im zeitdiskreten Fall betrachten wir nur den Verlauf zu einer Folge von Zeitpunkten, die voneinander durch gleichlange Zeitabstände getrennt sind. Die beiden Bedingungen (i) und (ii) bedeuten, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} G \to \; & \text{stetige Abbildungen von } M \text{ auf sich selber} \\ t \mapsto \Phi(t, \cdot) : \quad & M \to M, \quad x \mapsto \Phi(t, x). \end{aligned}$$

ein (Halb-)Gruppenhomomorphismus ist. Weil die Halbgruppe $\mathbb{N}_0$ und die Gruppe $\mathbb{Z}$ frei von 1 erzeugt werden, haben wir folgende einfach Charakterisierung von zeitdiskreten dynamischen Systemen.

Übungsaufgabe 1.2. *Ein dynamisches System Φ mit $G = \mathbb{Z}$ oder $G = \mathbb{N}_0$ erfüllt $\Phi(n, x) = A^n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $A : M \to M, \quad x \mapsto A(x) = \Phi(1, x)$. Wenn*

$G = \mathbb{Z}$, dann ist A ein Homöomorphismus und es gilt $\Phi(n, x) = A^n(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Umgekehrt definiert jede stetige Abbildung $A : M \to M$ ein dynamisches System mit $G = \mathbb{N}_0$ und jeder Homöomorphismus $A : M \to M$ ein dynamisches System mit $G = \mathbb{Z}$.

Übungsaufgabe 1.3. *Sei Φ ein zeitkontinuierliches dynamisches System auf einem reellen Vektorraum M dessen Abbildung Φ partiell nach t differenzierbar ist. Dann ist für alle $x \in M$ die Bahn $t \mapsto \Phi(t, x)$ eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, x) = F(\Phi(t, x)) \quad \textit{mit} \quad F(x) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(0, x).$$

Wir werden später sehen, dass diese zeitkontinuierlichen dynamischen Systeme eindeutig durch eine gewöhnliche Differentialgleichung bestimmt sind und umgekehrt fast jede gewöhnliche Differentialgleichung ein zeitkontinuierliches System definiert. Deshalb steht die Theorie der zeitkontinuierlichen dynamischen Systeme in sehr enger Verbindung zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Um einen gegebenen zeitlichen Verlauf zu einem dynamischen System zu machen, müssen wir zu allererst den Phasenraum richtig wählen. Von der richtigen Wahl des Phasenraumes hängt es nämlich oft ab, ob ein zeitlicher Verlauf überhaupt als dynamisches System beschrieben werden kann. Ein Beispiel, das die Entwicklung der Theorie der dynamischen Systeme ganz wesentlich angestoßen hat, sind die Newtonschen Gleichungen. In einem Kraftfeld F wird die Beschleunigung eines Punktteilchens beschrieben durch die Gleichung

$$\frac{d}{dt}m\dot{x} = m\ddot{x} = F$$

Hier ist in die Masse der Punkteteilchen und $t \mapsto x(t)$ die Funktion der Koordinaten in Abhängigkeit von der Zeit. Die zeitliche Ableitung bezeichnen wir immer durch einen Punkt. Wenn nun F von x und $\dot{x}$ und t abhängt, erhalten wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}).$$

Es zeigt sich nun, dass die entsprechenden zeitlichen Verläufe der Koordinaten nur dann durch ein dynamisches System beschrieben werden kann, wenn wir den Phasenraum so wählen, dass er neben den Koordinaten x auch die Geschwindigkeit des Punktteilchens enthält. Wenn die Kraft auch noch von der Zeit t abhängt, müssen wir sogar auch noch die Zeit zu den Freiheitsgraden des Phasenraums hinzufügen.

Ein anderes Beispiel für die Wichtigkeit der richtigen Wahl des Phasenraums sind Fibonaccis Kaninchen, oder allgemeinere Rekursionsformeln.

Fibonaccis Kaninchen 1.4. *Leonardo von Pisa hat schon 1202 ein Populationsmodell mit diskreter Zeit $n = 0, 1, 2, ...$ untersucht. Ein neugeborenes Hasenpaar wird in einen* *umzäunten Garten gesetzt. Jedes Hasenpaar erzeugt während seines Lebens jeden Monat ein weiteres Paar. Ein neugeborenes Paar wird nach einem Monat fruchtbar und bekommt somit nach zwei Monaten seine ersten Nachkommen. Es soll angenommen werden, dass die Hasen nie sterben. Bezeichnen wir mit k_n die Anzahl Kaninchenpaare nach n Monaten, dann ist $k_0 = k_1 = 1$ (das erste Paar) und $k_2 = 2$, da das erste Paar seine ersten Nachkommen nach zwei Monaten bekommt. Auch im dritten Monat bekommt nur das erste Paar neue Nachkommen, es ist also $k_3 = 3$. Im vierten Monat leben noch alle Kaninchen aus dem dritten Monat und die Paare, die nach zwei Monaten schon das waren, bekommen Nachwuchs. Es ist also $k_4 = k_3 + k_2$. Allgemein erhält man die Rekursionsformel*

$$k_{n+1} = k_n + k_{n-1} \quad \textit{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dabei steht der 1. Term k_n für die Anzahl der Kaninchen, die schon da sind, während der 2. Term k_{n-1} die Anzahl der im $(n+1)$-ten Monat neu geborenen Kaninchenpaare angibt. Um aus dieser Rekursionsformel ein zeitdiskretes dynamisches System zu machen, muss man den Phasenraum als die Menge aller Paare (k_n, k_{n-1}), das heißt man muß zu der Anzahl der Kaninchenpaare im jeweiligen Jahr die Anzahl im vorherigen Jahr hinzufügen. Das entsprechende dynamische System lässt sich dann einfach lösen.

Man kann dieses dynamische System mithilfe eines generierenden Funktionals lösen. Sei also

$$K(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{n!} t^n.$$

Dann ist die Ableitung von $K(t)$ das generierende Funktional von

$$\dot{K}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{n!} n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_{n+1}}{n!} t^n.$$

Also folgt aus der Rekursionsgleichung

$$\ddot{K}(t) = \dot{K}(t) + K(t) \quad \text{mit den Anfangswerten} \quad K(0) = 1 = \dot{K}(0).$$

Somit haben wir diese Rekursionsformal also in eine Differentialgleichung übersetzt und die Startswerte in ein sogenanntes Anfangswertproblem dieser Differentialgleichung. Weil in dieser Differentialgleichung Ableitungen bis zur zweiten Ordnung auftauchen, werden wir bei der Integration zweimal integrieren müssen und entsprechend zwei Integrationskonstanten auftauchen. Deshalb müssen wir zwei Anfangswerte vorgeben. Ganz ähnlich wie bei den Newtonschen Gleichungen müssen wir zu der Folge k_n mit generierendem Funktional $K(t)$ die Folge k_{n+1} mit generierendem Funktional $\dot{K}(t)$ hinzufügen, um ein dynamisches System zu erhalten. Im nächsten Abschnitt werden wir lernen, solche Differentialgleichungen zu lösen. Wenn man das entsprechende Anfangswertproblem gelöst hat, und die Lösung im Punkt $t = 0$ auch glatt ist, dann ergibt ihre Taylorreihe eine Lösung von Fibonaccis Kaninchen. Es stellt sich sogar heraus, dass diese Lösung sogar auf ganz $t \in \mathbb{C}$ eine konvergente Potenzreihe definiert.

Diese Erweiterungen des Phasenraums im Fall der Newtonschen Gleichungen und im Fall von Fibonaccis Kaninchen sind also miteinander verwandt. Ganz allgemein müssen wir den Phasenraum groß genug wählen um tatsächlich ein dynamisches System zu erhalten.

Man kann Fibonaccis Kanichen oder allgemeiner Rekursionsgleichungen auch noch durch ein anderes generierendes Funktional lösen. Wir wollen diese andere Methode hier auch vorstellen, weil mit ihr auch viele andere Rekursionsgleichungen gelöst werden können. Sei diesmal

$$K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n z^n.$$

Dann können wir die Rekursionsformel direkt in folgende Gleichung umschreiben

$$\frac{K(z) - k_0 - k_1 z}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} k_{n+1} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (k_n + k_{n-1}) z^n = K(z) - k_0 + zK(z).$$

Wenn wir diese Gleichung nach $K(z)$ auflösen erhalten wir

$$K(z) = \frac{k_0 + (k_1 - k_0)z}{1 - z - z^2}.$$

Mit den Anfangswerten $k_0 = 1 = k_1$ ergibt das

$$K(z) + \frac{1}{1 - z - z^2}.$$

Das ist offenbar eine gebrochen rationale Funktion, die auf dem Komplement der Nullstellen des Nenners analytisch ist und als konvergente Potenzreihe geschrieben werden kann. Durch Partialbruchzerlegung können wir diese Potenzreihe auch einfach ausrechen und damit die Fibonaccis Folge lösen. Seien also $z_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $z_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ die beiden Lösungen von $z^2 + z - 1 = 0$. Dann gibt es zwei eindeutige reelle Zahlen α und β mit

$$\frac{1}{1 - z - z^2} = \frac{\alpha}{z - z_1} + \frac{\beta}{z - z_2}.$$

Durch Multiplikation mit dem Nenner erhalten wir

$$\alpha(z_2 - z_1) = -1 \quad \beta(z_1 - z_2) = -1.$$

Mithilfe der geometrischen Reihe ist die Potenzreihe $K(z)$ gegeben durch

$$K(z) = \frac{1}{(z_2 - z_1)z_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_1}\right)^n + \frac{1}{(z_1 - z_2)z_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_2}\right)^n .$$

Definition 1.5. *$x \in M$ heißt Fixpunkt oder Ruhelage eines dynamischen Systems $\Phi : G \times M \to M$, wenn $\Phi(g, x) = x \quad \forall g \in G$.*

Beispiel 1.6. *Für $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x$ ist $x = 0$ ist der einzige Fixpunkt der iterierten Abbildung.*

Definition 1.7. **(i)** *Für $x \in M$ heißt die Menge $\{\Phi(g, x) \mid g \in G\}$ Orbit oder Trajektorie (durch x), die Abbildung $\Phi(\cdot, x) : G \to M, \quad g \mapsto \Phi(g, x)$ heißt Bahnkurve (durch x).*

(ii) *Ein Orbit durch x heißt periodisch mit Periode $g \in G$, wenn $g > 0$ und $\Phi(g, x) = x$. Eine Periode heißt Minimalperiode, wenn $\Phi(\tilde{g}, x) \neq x$ für $0 < \tilde{g} < g$.*

Proposition 1.8. *Wenn G eine Gruppe ist, dann definiert die Zugehörigkeit zu einem Orbit eine Äquivalenzrelation auf dem Phasenraum.*

Beweis: Wir definieren also für $x_1, x_2 \in M$

$$x_1 \sim x_2, \text{ falls } x_2 \in \Phi(G, x_1).$$

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, denn

(i) Wegen $\Phi_0 = Id$ ist immer $x \sim x$.

(ii) Gilt $x_2 = \Phi(t, x_1)$, dann folgt $x_1 = \Phi(-t, x_2)$ aus $\Phi(t_2, \cdot) \circ \Phi(t_2, \cdot) = \Phi(t_1 + t_2, \cdot)$ und $\Phi_(0\cdot) = \mathbb{1}_M$. Die Relation ist damit symmetrisch ($x_1 \sim x_2 \Rightarrow x_2 \sim x_1$).

(iii) Gilt $x_2 = \Phi(t_1, x_1)$ und $x_3 = \Phi(t_2, x_2)$, dann folgt $x_3 = \Phi(t_1+t_2)(x_1)$. Die Relation ist damit transitiv ($x_1 \sim x_2, x_2 \sim x_3 \Rightarrow x_1 \sim x_3$). **q.e.d.**

Beispiel 1.9. *Sei $M = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ und für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ $\Phi : Z \times M \to M$ gegeben durch die Drehung $\Phi(n, z) = e^{2\pi i\alpha n} \cdot z$. Dann ist genau dann jeder Orbit periodisch, wenn $\alpha \in \mathbb{Q}$, also $a = \frac{q}{p}, q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}, q$ und p teilerfremd. Die Minimalperiode ist dann p.*

Man ist nur an einzelnen Orbits interessiert, sondern auch am Verhalten benachbarter Orbits. Z.B. ist es beruhigend, dass auch bei einer kleinen Veränderung der Geschwindigkeit der Erde, z.B. durch Meteroiteneinschlag, ihre neue Bahn auf Dauer in der Nähe der alten bleibt. Insbesondere können wir Stabilität von Fixpunkten untersuchen.

Definition 1.10. *Sei x_0 ein Fixpunkt von $\Phi : G \times M \to M$.*

(i) *x_0 heißt Liapunov-stabil, wenn für jede Umgebung $U \subset M$ von x_0 eine (kleinere) Umgebung V von x_0 existiert, so dass für alle $t \geq 0$*

$$\Phi(t, V) \equiv \{\Phi(t, x) \mid x \in V\} \subset U.$$

(ii) *x_0 heißt asymptotisch stabil, falls x_0 Liapunov-stabil ist und eine Umgebung $V \subset M$ von x_0 existiert mit $\Phi(t, V) \subset \Phi(s, V)$ für $t > s$ und*

$$\lim_{t \to \infty} \Phi(t, x) = x_0 \quad \text{für} \quad x \in V.$$

Beispiel 1.11. $G = \mathbb{Z}, \quad M = \mathbb{C}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \Phi(t, x)) = \lambda^t \cdot x.$

Für $\mid \lambda \mid < 1$ ist $0 \in M$ asymptotisch stabil.

Für $\mid \lambda \mid \leq 1$ ist $0 \in M$ Liapunov-stabil.

Definition 1.12. *Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt Attraktor des Dynamischen Systems, wenn A abgeschlossen, $\Phi(t, A) = A$ für $t \in G$ und eine offene Umgebung $U_0 \subset M$ von A existiert mit*

(i) *$\Phi(t, U_0) \subset U_0$ für $t \geq 0$*

(ii) *Für jede offene Umgebung V von A, $A \subset V \subset U_0 \subset M$ ein $\tau > 0$ existiert mit $\Phi(t, U_0) \subset V$ für $t \geq \tau$.*

Das Bassin eines Attraktors A ist die Vereinigung aller offenen Umgebungen von A, die (i) und (ii) erfüllen. Damit ist das Bassin B selbst eine offene Umgebung von A, die die Eigenschaft (i) besitzt. Wie das nächste Beispiel zeigt, ist aber die Eigenschaft (ii) für B i.A. nicht erfüllt.

Beispiel 1.13. $M = \mathbb{C}, \quad G = \mathbb{Z}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

$$\Phi(1, x) = \begin{cases} e^{i\lambda} \frac{x}{\sqrt{|x|}} & , \text{für } x \neq 0 \\ 0 & , \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Hier ist $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ ein Attraktor, und sein Bassin ist $\mathbb{C} \setminus 0$.

1.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wenn die Abbildung Φ eines zeitkontinuierlichen dynamischen Systems auf einem Vektorraum $M = V$ partiell nach t differenzierbar ist, dann können wir die Bedingung (ii) bei $s = 0$ nach s differenzieren und erhalten

$$\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial t} = F(\Phi(t,x)) \quad \text{mit} \qquad F : V \to V \qquad x \mapsto F(x) = \frac{\partial\Phi(0,x)}{\partial t}.$$

Also erfüllen alle Trajektorien durch den Anfangspunkt $x_0 \in M$ die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{q}(t) = F(q(t))$ mit dem Anfangswert $q(0) = q_0$. Differentialgleichungen sind Gleichungen, die Funktionen zu ihren Ableitungen in Beziehung setzen. Wenn diese Funktionen von mehreren Variablen abhängen, dann sind die Ableitungen, die in der entsprechenden Differentialgleichung mit der Funktion in Beziehung gebracht werden, partielle Ableitungen. Dann spricht man von partiellen Differentialgleichungen. Typischerweise sind Differentialgleichungen im folgenden Sinne *lokale* Gleichungen, dass sie nur die Werte einer gesuchten Funktion und endlich vieler Ableitungen für *einen* Wert der Variablen miteinender in Beziehung bringen. Mit gewöhnlichen Differentialgleichungen werden also im Allgemeinen Gleichungen von der folgenden Form bezeichnet

$$F(q^{(k)}(t), q^{(k-1)}(t), \ldots, \dot{q}(t), q(t), t) = 0.$$

Hierbei ist $t \mapsto q(t)$ die gesuchte Funktion, die auch vektorwertig sein kann.

Definition 1.14. *Differentialgleichungen von der Form*

$$F(q^{(k)}(t), q^{(k-1)}(t), \ldots, \dot{q}(t), q(t), t) = 0$$

heißen gewöhnliche Differentialgleichungen.

Historisch wurden solche Differentialgleichungen von Newton gleichzeitig mit der Entdeckung der Differentialrechnung eingeführt, um die Bewegung von massiven Teilchen im Gravitationsfeld zu beschreiben. Im einfachsten Fall eines Punktteilchens im Schwerefeld nehmen die Newton'schen Gleichungen folgende Form an:

$$m\frac{d^2q}{dt^2} = F(q, \dot{q}, t),$$

wobei $F(q, \dot{q}, t)$ die auf das Punktteilchen wirkende Kraft darstellt. Im einfachsten Fall $F = -mg$ taucht nur die zweite Ableitung der gesuchten Koordinatenfunktion von q des Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit auf, so dass wir deren Lösung aus der Differential- und Integralrechnung schon kennen:

$$q(t) = q_0 + q_1(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}.$$

Die Lösung können wir aus der Differentialgleichung durch zweimaliges Integrieren der linken und rechten Seite erhalten. Das Ziel unserer Untersuchung einer Differentialgleichung ist dabei möglichst alle Lösungen zu bestimmen und dann solche zusätzlichen Eigenschaften der Lösungen zu finden, die die Lösung eindeutig festlegen.

Definition 1.15. *Eine Lösung ist eine Funktion q, die so oft differenzierbar ist, dass alle in der Differentialgleichung vorkommenden Ableitungen existieren, und die zusammen mit diesen Ableitungen die Differentialgleichung erfüllt.*

In der Differentialgleichung
$$m\frac{d^2q}{dt^2} = -mg$$
hängen m (die Masse des Teilchens) und g (das Schwerefeld) nicht von t ab. Deshalb ist die Differentialgleichung äquivalent zu
$$\frac{d^2q}{dt^2} = -g.$$
Wenn wir die linke und die rechte Seite integrieren erhalten wir nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
$$\dot{q}(t) - \dot{q}(t_0) = -g(t - t_0) \text{ bzw.} \quad \dot{q}(t) = \dot{q}(t_0) - g(t - t_0).$$
Nach nochmaligem Integrieren erhalten wir schließlich
$$q(t) = q(t_0) + \dot{q}(t_0)(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}.$$
Die Funktion $q(t) = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + q_1(t - t_0) + q_0$ ist auf $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und es gilt:
$$\frac{du}{dt}(t) = -g(t - t_0) + q_1 \text{ und } \quad \frac{d^2q}{dt^2}(t) = -g.$$
Also sind alle Lösungen von der Form
$$q(t) = -\frac{g(t - t_0)^2}{2} + q_1(t - t_0) + q_0, \text{ wobei } q(t_0) = q_0 \text{ und } \frac{dq}{dt}(t_0) = q_1.$$
Damit haben wir in diesem einfachen Beispiel unser Ziel erreicht.

Zusammenfassung 1.16. *Die höchste vorkommende Ableitung der Differentialgleichung $m\frac{d^2q}{dt^2} = -gm$ ist die zweite Ableitung. Durch geeignetes zweimaliges Integrieren konnten wir die Differentialgleichung lösen. Dabei entstanden zwei Integrationskonstanten und die Lösungen waren dann eindeutig durch die Wahl dieser Integrationskonstanten bestimmt. Diese Integrationskonstanten konnten wir schließlich als die Werte* *der Lösung und ihrer ersten Ableitung zu dem Zeitpunkt t_0 interpretieren. Deshalb ist der Lösungsraum dieser Differentialgleichung zweidimensional und wird parametrisiert durch $(q(t_0), \frac{dq}{dt}(t_0)) \in \mathbb{R}^2$. Zu jeder solchen Wahl eines Anfangszustandes (q_0, q_1) gibt es dann genau eine Lösung, die gegeben ist durch*

$$q(t) = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + q_1(t - t_0) + q_0.$$

Typischerweise beschreiben solche Differentialgleichungen die zeitliche Entwicklung von veränderlichen Größen in der Natur. Diese Differentialgleichungen geben dann ein kausales Verhalten der veränderlichen Größen vor. Durch das Lösen der Differentialgleichung können wir dann aus der Kenntnis der veränderlichen Größen und genügend vieler Ableitungen von ihnen zu einem (Anfangs-)Zeitpunkt t_0 das Verhalten von ihnen sowohl in der Zukunft, als auch in der Vergangenheit ausrechnen und damit ihr Verhalten in der Zukunft vorhersagen und auf ihr Verhalten in der Vergangenheit zurückschließen. Die Anzahl der Ableitungen, die wir zum Zeitpunkt t_0 kennen müssen, ist dann gegeben durch die Anzahl der Integrationskonstanten, also die Anzahl der Integrale, die wir benötigen, um die Gleichung zu lösen. Da wir uns typischerweise auch die Funktionswerte vorgeben, also die Nullte-Ableitung, sollten wir im Allgemeinen alle Ableitungen bis zu einer Ordnung niedriger als der höchsten vorkommenden Ableitung vorgeben.

Definition 1.17. *Die Ordnung einer Differentialgleichung ist die höchste vorkommende Ordnung aller auftauchenden Ableitungen einer Differentialgleichung.*

Definition 1.18. *(Anfangswertproblem) Die Suche nach einer Lösung q einer gewöhnlichen Differentialgleichung der Ordnung n, die zu einem gegebenen Wert t_0 der Variablen t (nach der abgeleitet wird) zusammen mit den ersten $n - 1$ Ableitungen die Werte*

$$q(t_0) = q_0, \frac{dq}{dt}(t_0) = q_1, \ldots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}(t_0) = q_{n-1}$$

annimmt, heißt Anfangswertproblem.

Aufgrund unserer Vorüberlegungen erwarten wir, dass jedes solches Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung hat. Wir werden später auch Bedingungen angeben, unter denen wir die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen solcher Anfangswertprobleme beweisen können. Es stellt sich heraus, dass manche dieser Anfangswertprobleme viele Lösungen besitzen und andere gar keine.

Beispiel 1.19. **(i)** *Das Anfangswertproblem $\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = 4q$ mit $q(0) = 0$ hat offenbar die*

Lösungen

$$q(t) = \begin{cases} (t-b)^2 & \text{für } b < t \\ 0 & \text{für } -a \leq t \leq b \\ (t+a)^2 & \text{für } t < -a \end{cases}$$

Hier sind a und b zwei beliebige nichtnegative reelle Zahlen, die beide auch ∞ sein können.

(ii) *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die keine Stammfunktion besitzt (z.B. die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen). Dann hat das Anfangswertproblem $\frac{du}{dt} = f$ mit $q(0) = 0$ keine Lösung.*

Die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen besitzt auf keinem offenen Intervall (a, b) eine Stammfunktion. Wenn nämlich F eine solche Stammfunktion wäre, dann wäre $x \mapsto F(x)$ monoton wachsend und $x \mapsto F(x) - x$ monoton fallend. Wegen dem Mittelwertsatz muss für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ entweder gelten

$$F(x_1) - F(x_2) = x_1 - x_2 \text{ oder } F(x_1) - F(x_2) = 0.$$

Im zweiten Fall folgt aus der Monotonie von F, dass F zwischen x_1 und x_2 konstant ist und im ersten Fall folgt aus der Monotonie von $x \mapsto F(x) - x$, dass diese Funktion zwischen x_1 und x_2 konstant ist. Also ist die Ableitung von F zwischen x_1 und x_2 entweder konstant gleich 0 oder konstant gleich 1. Damit ist F keine Stammfunktion der charakteristischen Funktion der rationalen Zahlen.

1.3 Gewöhnliche Differentialgleichungssysteme

Im einfachsten Fall sind die Funktionen, die mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung erfüllen soll, reelle Funktionen. In diesem Fall hat eine gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung n die Form

$$f(t, q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(n)}(t)) = 0,$$

wobei

$$f : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$$

eine reelle Funktion ist. Hierbei haben wir angenommen, dass nur die Werte einer reellen Funktion und aller ihrer Ableitungen bis zur Ordnung n zu einem Zeitpunkt t mit einander in Beziehung gebracht werden. Wenn wir zusätzlich noch annehmen, dass sich die Differentialgleichung nach der höchsten Ableitung auflösen lässt, dann nimmt sie die Form

$$\frac{d^n q}{dt^n} = f(t, q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)})$$

an, mit einer Funktion

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}.$$

Wenn wir jetzt $\mathbb{R}^m$-wertige Funktionen u betrachten, dann nimmt sie die Form

$$\frac{d^n q}{dt^n} = f(t, q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)})$$

an, mit einer Funktion

$$f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^n \to \mathbb{R}^m.$$

Solche Differentialgleichungen heißen Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen oder gewöhnliche Differentialgleichungssysteme. Um die folgende Untersuchung zu vereinfachen, machen wir von folgender Beobachtung Gebrauch.

Satz 1.20. *Jedes gewöhnliche Differentialgleichungssystem von obiger Form lässt sich durch Vergrößerung von m auf $m \cdot n$ in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung verwandeln. Wenn zuletzt noch der Parameter t zu einer zusätzlichen Komponente von q gemacht wird, also m auf $m \cdot n + 1$ erhöht wird, erreicht man, dass f nicht mehr von t abhängt.*

Beweis: Fassen wir die Funktionen $(q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)})$ zu einer $\mathbb{R}^{n \cdot m}$-wertigen Funktion zusammen, so ist die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^n q}{dt^n} = f(t, q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)})$$

offenbar äquivalent zu

$$\frac{d}{dt}(q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)}) = (\dot{q}, \ldots, q^{n-1}, f(t, q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)})).$$

Hierbei geht das entsprechende Anfangswertproblem

$$q(t_0) = q_0, \ldots, q^{(n-1)}(t_0) = q_{n-1}$$

über in

$$(q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)})(t_0) = (q_0, \ldots, q_{n-1}).$$

Wenn wir q auch noch um die Funktion t erweitern, dann ist die ursprüngliche Differentialgleichung offenbar äquivalent zu

$$\frac{d}{dt}(t, q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)}) = (1, \dot{q}, \ldots, q^{n-1}, f(t, q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)})).$$

Hierbei geht das entsprechende Anfangswertproblem

$$q(t_0) = q_0, \dots, q^{(n-1)}(t_0) = q_{n-1}$$

über in

$$(t, q, \dot{q}, \dots, q^{(n-1)})(t_0) = (t_0, q_0, \dots, q_{n-1}).$$ **q.e.d.**

Wir hatten oben gesehen, dass die Ableitung von zeitkontinuierlichen Systemen durch genau solche Differentialgleichungssysteme beschrieben wird. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass unter bestimmten Bedingungen diese Differentialgleichungen auch die Abbildung Φ eindeutig bestimmen.

Beispiel 1.21. *Die Differentialgleichung* $m\frac{d^2q}{dt^2} = -gm$ *ist äquivalent zu dem Differentialgleichungssystem*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

1.4 Existenz und Eindeutigkeit

Das wichtigste mathematische Mittel um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen zu beweisen ist der Banachsche Fixpunktsatz.

Satz 1.22. *(***Banachscher Fixpunktsatz***) Sei X ein vollständiger metrischer Raum und f eine Lipschitz-stetige Abbildung von X nach X mit Lipschitzkonstante $L < 1$, d.h. für alle $x, y \in X$ gilt $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt und für jedes $x_0 \in X$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gegen den Fixpunkt.*

Beweis: Aus der Lipschitz-Stetigkeit von f folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in X$:

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq L^n d(x, y).$$

Hier bezeichnet f^n die n-fache Verknüpfung von f mit sich selber. Also folgt aus der Dreiecksungleichung für alle $m > n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(f^m(x_0), f^n(x_0)) &\leq \sum_{l=n}^{m-1} d(f^{l+1}(x_0)), f^l(x_0)) \\ &\leq \sum_{l=n}^{m-1} L^l d(f(x_0), x_0) \\ &= (1 - L^{m-n})\frac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0) \\ &\leq \frac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0). \end{aligned}$$

Weil $0 < L < 1$ konvergiert $\frac{L^n}{1-L}d(f(x_0), x_0)$ gegen Null und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge. Wegen der Vollständigkeit konvergiert sie. Wegen der Stetigkeit von f gilt

$$f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Also ist der Grenzwert ein Fixpunkt von f. Wegen der Lipschitzstetigkeit von f ist der Abstand von zwei Fixpunkten kleiner oder gleich als L mal dem Abstand. Also ist $(1 - L)$ mal dem Abstand kleiner oder gleich Null. Dann ist wegen $L < 1$ der Abstand nicht positiv, also gleich Null und beide Fixpunkte stimmen überein. **q.e.d.**

In diesem Abschnitt zeigen wir die Existenz und Eindeutigkeit von gewöhnliche Differentialgleichungen. Dabei müssen wir allerdings an die Nichtlinearität gewisse Einschränkungen machen.

Definition 1.23. *Eine Funktion f von einem metrischen Raum X in den metrischen Raum Y heißt lokal Lipschitz-stetig, wenn es für jedes $x_0 \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ von x_0 gibt und eine Lipschitzkonstante $L > 0$, so dass für alle $x, x' \in U$ gilt*

$$d(f(x), f(x')) \leq Ld(x, x').$$

Satz 1.24. *(Lokale Existenz und Eindeutigkeit) Sei I ein offenes Intervall, $U \subset V$ eine offene Teilmenge eines Banachraums V und $f : I \times U \to V$ eine stetige Abbildung, die bezüglich der zweiten Variablen lokal Lipschitzstetig ist, d.h. für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ gibt es ein $\delta > 0$ und ein $L > 0$, so dass für alle $(t, q), (t, \tilde{q}) \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times B(q_0, \delta)$*

$$\|f(t, q) - f(t, \tilde{q})\| \leq L\|q - \tilde{q}\|$$

gilt. Dann gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ ein $\epsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit $q(t_0) = q_0$ auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ genau eine Lösung besitzt.

Beweis: Wegen der lokalen Lipschitzstetigkeit gibt es $\delta > 0$ und $L > 0$, so dass für alle $(t, q), (t, \tilde{q}) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(q_0, \delta)}$ auch $\|f(t, q) - f(t, \tilde{q})\| \leq L\|q - \tilde{q}\|$ gilt. Wegen der Stetigkeit von f ist die Abbildung

$$F : q \mapsto F(q) \quad \text{mit} \quad F(q)(t) = q_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, q(s))ds$$

eine stetige Abbildung von $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(q_0, \delta)})$ nach $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], V)$. Sei

$$\|f(\cdot, q_0)\|_\infty = \sup_{s\in[t_0-\delta,t_0+\delta]} \|f(s, q_0)\|.$$

Wenn $\epsilon \leq \delta$ und $\epsilon\left(\|f(\cdot, q_0)\|_\infty + L\delta\right) \leq \delta$, dann ist für alle $q \in C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], \overline{B(q_0,\delta)})$

$$\|F(q) - q_0\|_\infty \leq \left\| \int\limits_{t_0}^{t} (f(s,q_0) + f(s,q(s)) - f(s,q_0))ds \right\| \leq \epsilon\left(\|f(\cdot, q_0)\|_\infty + L\delta\right) \leq \delta.$$

Also bildet F den vollständigen metrischen Raum $C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], \overline{B(q_0,\delta)})$ auf sich selber ab. Für $q, \tilde{q} \in C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], \overline{B(q_0,\delta)})$ gilt

$$\|F(q) - F(\tilde{q})\|_\infty \leq \int\limits_{t_0}^{t} \|f(s,q(s) - f(s,\tilde{q}(s))\|\, ds \leq \epsilon L \|q - \tilde{q}\|_\infty.$$

Sei also ϵ kleiner als $\epsilon < \min\left\{\delta, \frac{\delta}{\|f(\cdot,q_0)\|_\infty + L\delta}, \frac{1}{L}\right\} = \min\left\{\delta, \frac{\delta}{\|f(\cdot,q_0)\|_\infty + L\delta}\right\}.$

Dann definiert die Abbildung F eine Lipschitzstetige Abbildung mit Lipschitzkonstante $\epsilon \cdot L < 1$ von dem vollständigen metrischen Raum $C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], \overline{B(q_0,\delta)})$ auf sich selber. Jeder Fixpunkt ist wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung stetig differenzierbar und es gilt $\dot{q}(t) = f(t,q)$ für alle $t \in (t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$ mit $q(t_0) = q_0$. Also löst q dieses Anfangswertproblem auf $(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$. Wenn q umgekehrt auf $(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$ dieses Anfangswertproblem löst, dann ist die Ableitung von $F(q) - q$ gleich Null, und beide Funktionen $F(q)$ und q sind bei $t = t_0$ gleich q_0. Also stimmen beide Funktionen überein und jede Lösung des obigen Anfangswertproblems ist ein Fixpunkt von F. Also folgt die Existenz und Eindeutigkeit dieses Anfangswertproblems auf $(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz. **q.e.d.**

Wegen Satz 1.20 können wir annehmen, dass f nicht von t abhängt. Eine solche autonome gewöhnliche Differentialgleichung ist durch ein Vektorfeld $F : U \to V$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset V$ eines Banachraumes gegeben. Wir nennen dann für $x \in U$ die Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\dot{q}(t) = F(q(t)) \quad \text{mit} \qquad\qquad q(0) = x$$

Integralkurven durch x. Wegen Übungsaufgabe 1.3 sind diese Integralkurven Kandidaten für die Bahnen eines dynamischen Systems.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie die Lösungen der Anfangswertprobleme, also die Fixpunkte von F, von t_0, q_0 und f abhängen. Wegen Satz 1.20 können wir das Anfangswertproblem in ein solches verwandeln, in dem f nicht von t abhängt. Weil solche Anfangswertprobleme bezüglich t translationsinvariant sind, können wir dann den Anfangspunkt 0 wählen. Deshalb untersuchen wir im Folgenden nur die Abhängigkeit der Lösung des Anfangswertproblems von q_0 und f.

Jede Lösung q der Differentialgleichung $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit einer differenzierbaren Funktion f erfüllt auch

$$\ddot{q}(t) = \frac{d}{dt} f(t, q(t)) = \frac{\partial f(t, q(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, q(t))}{\partial q} \dot{q}(t) = \frac{\partial f(t, q(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, q(t))}{\partial q} f(t, q(t)).$$

Indem wir immer höhere Ableitungen bilden sehen wir, dass für r mal (stetig) differenzierbare Funktionen f, jede Lösung auch $(r + 1)$ mal (stetig) differenzierbar ist. Wir werden gleich sehen, dass in diesem Fall die Lösung der entsprechenden Anfangswerte auch r mal (stetig) differenzierbar von q_0 abhängt.

Satz 1.25. *Sei I ein offenes Intervall, $U \subset V$ eine offene Teilmenge eines Banachraums V und $f : I \times U \to V$ eine stetige Abbildung, die partiell nach q r mal stetig differenzierbar ist mit $r \in \mathbb{N}$, und deren Ableitung $\frac{\partial f}{\partial q}$ lokal beschränkt ist. Dann gibt es für alle $(t_0, q_0) \in I \times U$ eine offene Umgebung W von q_0 in V, $\epsilon > 0$ und eine r mal stetig differenzierbare Funktion $g : W \to C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V)$, so dass für $q_1 \in W$ die Funktion $g(q_1)$ die eindeutige Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist*

$$\frac{dq}{dt}(t) = f(t, q(t)) \text{ für alle } t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \text{ mit } \quad q(t_0) = q_1.$$

Beweis: Wir benutzen den Satz der impliziten Funktion. Weil $\frac{\partial f}{\partial q}$ lokal beschränkt ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass U den abgeschlossenen Ball $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(q_0, \delta)}$ enthält und $\frac{\partial f}{\partial q}$ auf $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(q_0, \delta)}$ durch L beschränkt ist. Wegen dem Schrankensatz ist dann f auf $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(q_0, \delta)}$ für festes t in q Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L > 0$. Sei also $0 < \epsilon < \min\left\{\delta, \frac{1}{L}\right\}$ ähnlich gewählt wie in dem Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf. Dann definiert

$$F : V \times C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(q_0, \delta)}) \to C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V), \qquad (q_1, q) \mapsto F(q_1, q)$$

$$\text{mit} \quad F(q_1, q)(t) = q_1 + \int_{t_0}^{t} f(s, q(s)) ds$$

eine stetige Abbildung. Die partielle Ableitung $\frac{\partial F(q_1, q)}{\partial q}$ ist gegeben durch

$$\frac{\partial F(q_1, q)}{\partial q} : \qquad C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V) \to C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V), \qquad z \mapsto \frac{\partial F(q_1, q)}{\partial q}(z)$$

$$\text{mit} \qquad \frac{\partial F(q_1, q)}{\partial q}(z)(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f(s, q(s))}{\partial q}(z(s)) ds.$$

Weil die Ableitungen $\frac{\partial f(s,q(s))}{\partial q}$ beschränkt sind durch L, ist die Ableitung $\frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}$ beschränkt durch $L\epsilon < 1$. Also konvergiert für $q_1 \in V$ und $q \in C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], B(q_0,\delta))$ die Neumannsche Reihe

$$\left(\mathbb{1}_{C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],V)} - \frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}\right)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}\right)^{l}$$

in $\mathcal{L}(C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],V))$ gegen den inversen Operator von $\mathbb{1}_{C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],V)} - \frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}$. Offenbar ist für $q_1,q_2 \in V$ die punktweise Differenz der entsprechenden Abbildungen eine konstante Abbildung: $F(q_1,q) - F(q_2,q) = q_1 - q_2$.
Deshalb ist für jedes $q \in C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon], B(q_0,\delta))$ die Abbildung $q_1 \mapsto F(q_1,q)$ eine glatte Abbildung von V nach $C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],V)$. Also ist die Abbildung

$$\begin{aligned} G : V \times C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],B(q_0,\delta)) &\to C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],V), \\ (q_1,q) &\mapsto \big(\mathbb{1}_{C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],B(q_0,\delta))} - F(q_1,q)\big) = q - F(q_1,q) \end{aligned}$$

eine stetig differenzierbare Abbildung und besitzt auf dem gesamten Definitionsbereich eine invertierbare partielle Ableitung nach $q \in C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],B(q_0,\delta))$. Das Urbild der $0 \in C(I,V)$ besteht genau aus den Fixpunkten der Abbildungen $q \mapsto F(q_1,q)$. Aus dem Satz der impliziten Funktion folgt, dass es eine stetig differenzierbare Abbildung g von einer Umgebung W von $q_0 \in V$ auf die entsprechenden Fixpunkte der Abbildungen $q \mapsto F(q_1,q)$ gibt. Diese Abbildung ist außerdem genauso oft stetig differenzierbar, wie G. An der expliziten Formel für die erste partielle Ableitung $\frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}$ erkennt man, dass die partiellen Ableitungen von G bis zur selben Ordnung existieren und stetig sind, bis zu der auch die partiellen Ableitungen von f nach q stetig sind. Also ist G und damit auch die Abbildung g auf die Lösung des entsprechenden Anfangswertproblems r mal stetig differenzierbar. **q.e.d.**

Der Beweis zeigt auch, dass die Lösung des Anfangswertproblems unter den gleichen Voraussetzungen stetig differenzierbar von t_0 und von f abhängt, wenn auf dem Raum der Funktionen $f \in C(I \times U, V)$ die Supremumsnorm von f und von $\frac{\partial f}{\partial q}$ benutzt wird. Wenn in diesem Satz die Funktion f nicht von t abhängt, dann lassen sich die ersten $r+1$ Ableitungen $\dot{q}(t),\ldots,q^{(r+1)}(t)$ der Lösung durch die ersten r Ableitungen der Funktion f nach q bei $q(t)$ ausdrücken. Deshalb sind die entsprechenden Lösungen des Anfangswertproblems sogar $(r+1)$ mal stetig nach t differenzierbar. Insbesondere hängen für glatte f, die nicht von t abhängen, die Lösungen des Anfangswertproblems glatt von q_0 und t ab. Die Abhängigkeit von t_0 ist wenn f nicht von t abhängt trivial. Höhere Ableitungen nach t_0 können wir dann mit dem oben beschriebenen Trick für differenzierbare Funktionen f kontrollieren. Jetzt wollen wir die Lösungen auf möglichst große Intervalle fortsetzen.

Satz 1.26. *(Globale Existenz und Eindeutigkeit) Sei $O \subset \mathbb{R} \times V$ eine offene Teilmenge und $f : O \to V$ eine stetige Abbildung, die wie bei der lokalen Existenz und Eindeutigkeit lokal Lipschitz-stetig ist. Dann gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in O$ genau ein maximales Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$, das t_0 enthält, und auf dem das Anfangswertproblem*

$$\dot{q}(t) = f(t, q) \quad \text{mit} \quad q(t_0) = q_0$$

genau eine Lösung q enthält. Das Intervall ist in dem Sinne maximal, dass an beiden Rändern, also bei a und b, eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) *$a = -\infty$ (bzw. $b = \infty$).*

(ii) *$t \mapsto \|f(t, q(t))\|$ ist für alle $\epsilon > 0$ auf $(a, a + \epsilon)$ (bzw. $(b - \epsilon, b)$) unbeschränkt.*

(iii) *Die Lösung q lässt sich stetig auf $[a, b)$ (bzw. $(a, b]$) fortsetzen, der Graph der Fortsetzung liegt aber nicht in O, d.h. $\lim\limits_{t \downarrow a}(t, q(t)) \notin O$ (bzw. $\lim\limits_{t \uparrow b}(t, q(t)) \notin O$).*

Beweis: Zunächst bemerken wir, dass für jedes Intervall (a, b), das t_0 enthält, und auf dem das Anfangswertproblem

$$\dot{q}(t) = f(t, q(t)) \text{ mit } q(t_0) = q_0$$

eine Lösung $\tilde{q}$ besitzt, so dass sich $\tilde{q}$ auf $[a, b)$ oder $(a, b]$ stetig fortsetzen lässt, und der Graph der Fortsetzung in O liegt, das neue Anfangswertproblem

$$\dot{q}(t) = f(t, q(t)) \text{ mit } q(a) = \lim_{t \to a+} \tilde{q}(t) \text{ bzw. } q(b) = \lim_{t \to b-} \tilde{q}(t)$$

wegen des Satzes von Picard-Lindelöf eine Lösung in einer Umgebung von a bzw. b besitzt. Der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf zeigt auch, dass auf $[a, a + \epsilon)$ bzw. $(b - \epsilon, b]$ dieses Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist und mit $\tilde{q}$ übereinstimmt. Also existiert ein maximales Intervall (a, b), auf dem das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung besitzt. Wenn am linken bzw. rechten Rand die Bedingungen (i) und (ii) nicht erfüllt sind, dann ist die Ableitung der Lösung auf einer offenen Menge $(a, a + \epsilon)$ bzw. $(b - \epsilon, b)$ beschränkt und deshalb ist die Lösung dort Lipschitz-stetig. Dann konvergiert für jede Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen a bzw. b konvergiert auch die Folge $((t_n, q(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \times V$. Der Grenzwert kann dann aber nicht in O liegen, weil sonst die Lösung eine Fortsetzung auf eine Umgebung von a bzw. b hätte. **q.e.d.**

Bemerkung 1.27. **(i)** *Wenn (ii) erfüllt ist, kann $t \mapsto f(t, q(t))$ nicht stetig auf $[a, a + \epsilon)$ bzw. $(b - \epsilon, b]$ fortgesetzt werden. Also können q und f nicht so stetig auf größere Definitionsbereiche fortgesetzt werden, dass a (bzw. b) im Definitionsbereich von q und $(a, q(a))$ (bzw. $(b, q(b))$) im Definitionsbereich von f liegt.*

(ii) *Jede in q stetig differenzierbare Funktion f ist in q lokal Lipschitz-stetig, weil für stetig differenzierbare Funktionen die Ableitungen lokal beschränkt sind und nach dem Schrankensatz lokal Lipschitz-stetig sind. Wegen dem Schrankensatz gilt für $f(t,q) = A(t)q$ auch $|\ln(\|q(t)\|) - \ln(\|q(t_0)\|)| \leq \int_{t_0}^t \|A(s)\| ds$. In diesem Fall kann $f(t,q)$ nur am Rand des Definitionsbereichs von A unbeschränkt sein. Dann ist auch (ii) nur am Rand des Definitionsbereichs von A möglich.*

Wenn $\dim V < \infty$ kann man die Existenz, aber nicht die Eindeutigkeit (wir kennen schon ein Gegenbeispiel), auf stetige Funktionen f verallgemeinern. Anstatt dem Banachschen Fixpunktsatz verwenden wir dann den Satz von Arzela Ascoli.

Satz 1.28. *(Arzela-Ascoli) Sei K ein kompakter metrischer Raum und V ein endlich dimensionaler Banachraum. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(K,V)$ besitzt eine konvergente Teilfolge, wenn*

(i) *für jedes $x \in K$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und*

(ii) *für jedes $x \in K$ die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig ist in x, d.h. für jedes $x \in K$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass aus $x' \in B(x,\delta) \subset K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $f_n(x') \in B(f_n(x),\epsilon) \subset V$.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar auf K gleichgradig stetig ist. Für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $y \in K$ gibt es wegen (ii) ein $\delta_y > 0$, so dass aus $d(x,y) < 2\delta_y$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $d(f_n(x), f_n(y)) < \frac{\epsilon}{2}$. Wegen der Kompaktheit von K hat die Überdeckung $\{B(y,\delta_y) | y \in K\}$ eine endliche Teilüberdeckung $K = B(y_1,\delta_1) \cup \ldots \cup B(y_N,\delta_N)$. Sei δ das Minimum von $\delta_1,\ldots,\delta_N$. Dann enthält für alle Paare $x, x' \in K$ mit $d(x,x') < \delta$ einer der Bälle $B(y_1,\delta_1),\ldots,B(y_N,\delta_N)$ den einen Punkt x. Damit sind beide in einem der Bälle $B(y_1,2\delta_1),\ldots,B(y_N,2\delta_N)$ enthalten. Daraus folgt $d(f_n(x), f_n(x')) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig auf ganz K.

Sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die in K dicht liegt. Wegen (i) ist dann für alle $m \in \mathbb{N}$ der Abschluss A_m der Menge der Folge $(f_n(x_m))_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Teilmenge von V. Wir definieren jetzt induktiv eine Teilfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Folge $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in V, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $n \geq m$ gilt $d(g_n(x_m), a_m) < \frac{1}{n}$. Dafür wählen wir zunächst einen Häufungspunkt a_1 von $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Teilfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $d(g_n(x_1), a_1) \leq \frac{1}{n}$. Induktiv wählen wir danach für jedes $M \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ einen Häufungspunkt a_M von $(g_n(x_M))_{n\in\mathbb{N}}$ und ersetzen alle Folgenglieder von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Indizes größer als $M-1$ durch eine Teilfolge von $(g_n)_{n\geq M}$, so dass für alle $n \geq M$ gilt $d(g_n(x_M), a_M) < \frac{1}{n}$. Dann gilt für alle $m = 1,\ldots,M$ und alle $n \geq m$ auch $d(g_n(x_m), a_m) < \frac{1}{n}$.

Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass aus $x, x' \in K$ mit $d(x, x') < \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $d(g_n(x), g_n(x')) < \frac{\epsilon}{3}$. Die Überdeckung $(B(x_m, \delta))_{m\in\mathbb{N}}$ von K besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Also gibt es ein $M \in \mathbb{N}$, so dass alle $l, n \geq M$ an den Zentren der Bälle der Teilüberdeckung $d(g_l(x_m), g_n(x_m)) < \frac{\epsilon}{3}$ erfüllen. Dann folgt für alle $x \in K$ und alle $l, n \geq M$

$$d(g_l(x), g_n(x)) \leq d(g_l(x), g_l(x_m)) + d(g_l(x_m), g_n(x_m)) + d(g_n(x_m), g_n(x)) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Also ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(K, V)$ eine Cauchyfolge und konvergiert. **q.e.d.**

Satz 1.29. *(Satz von Peano) Sei I ein offenes Intervall und $U \subset V$ eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen Banachraums und f eine stetige Abbildung $f : I \times U \to V$. Dann gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ ein $\epsilon > 0$ und auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset I$ eine Lösung des Anfangswertproblems* $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ *mit* $q(t_0) = q_0$.

Beweis: Für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$, so dass

$$[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times \overline{B(q_0, \delta)} \subset I \times U.$$

Auf dieser kompakten Menge ist dann f beschränkt durch $\|f\|_\infty < \infty$. Verkleinere also gegebenenfalls ϵ, so dass $\|f\|_\infty \cdot \epsilon \leq \delta$ gilt. Für jede Partition P

$$[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] = [t_{-M}, t_{1-M}] \cup \ldots \cup [t_{-1}, t_0] \cup [t_0, t_1] \cup \ldots \cup [t_{N-1}, t_N]$$

mit $t_0 - \epsilon = t_{-M} < t_{1-M} < \ldots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = t_0 + \epsilon$ des Intervalls $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$, die t_0 als den Anfangs- und Endpunkt eines Teilintervalls enthält, definieren wir folgendermaßen eine Näherungslösung q_P der Differentialgleichung. Auf den Intervallen $[t_{-m}, t_{1-m}]$ definieren wir q_p induktiv für $m = 1, \ldots, m = M$ dadurch, dass jeweils der Wert bei t_{1-m} für $m = 1$ gleich q_0 ist und für $m > 1$ gleich dem Wert $q_P(t_{1-m})$ von dem schon konstruierten q_p bei t_{1-m} ist, und die Ableitung jeweils konstant gleich $f(t_{m-1}, q_P(t_{1-m}))$ ist. Entsprechend definieren wir die Lösung auch induklтiv auf den Intervallen $[t_{n-1}, t_n]$ für $n = 1, \ldots, n = N$ dadurch, dass jeweils der Wert bei t_{n-1} für $n = 1$ gleich q_0 ist und für $n > 1$ gleich dem Wert $q_P(t_{n-1})$ von dem schon konstruierten q_P bei t_{n-1} ist, und die Ableitung jeweils konstant gleich $f(t_{n-1}, q_P(t_{n-1}))$ ist. Wegen $\|f\|_\infty \cdot \epsilon \leq \delta$ und weil f auf $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times \overline{B(q_0, \delta)}$ beschränkt ist durch $\|f\|_\infty$, liegen dann alle Werte von q_P in $\overline{B(q_0, \delta)}$.

Sei nun $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Partitionen, deren maximale Intervalllängen eine Nullfolge bilden. Wir zeigen jetzt, dass eine Teilfolge der entsprechenden Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Näherungslösungen gegen eine Lösung des Anfangswertproblems konvergiert. Offenbar erfüllt die Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen des Satzes von Arzela-Ascoli. Deshalb konvergiert eine Teilfolge von $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ gegen eine stetige Funktion

q, die bei t_0 gleich q_0 ist. Weil die stetige Funktion f auf der kompakten Teilmenge $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times \overline{B(q_0, \delta)}$ stetig und damit auch gleichmäßig stetig ist, konvergiert auch die Folge von Funktionen $t \mapsto f(t, q_n(t))$ auf $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ gleichmäßig gegen die stetige Funktion $t \mapsto (f(t, q(t))$, die dann auch Riemann integrabel ist. Indem wir für alle $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ die Endpunkte der Intervalle einer solchen Partition zwischen t_0 und t auswählen definiert jedes P auch eine Partition des Intervalls $[t_0, t]$ bzw. $[t, t_0]$. Dann ist $q_P(t) - q_0$ gerade eine entsprechende Riemannsumme von dem Integral $\int_{t_0}^t f(s, q_P(s))ds$. Offenbar ist die Differenz der Riemannsummen zweier stetiger Funktionen auf $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$, beschränkt durch die Supremumsnorm der Differenz mal 2ϵ. Wegen dem Kriterium von Riemann und der gleichmäßigen Konvergenz von $t \mapsto f(t, q_n(t))$ gegen $t \mapsto f(t, q(t))$ konvergiert $(q_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen

$$q_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, q(s))ds = \lim_{n \to \infty} q_n(t) = q(t) \quad \text{für alle} \quad t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon].$$

Wegen dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist dann q differenzierbar mit $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$. Also löst q das Anfangswertproblem mit $q(t_0) = q_0$. **q.e.d.**

Eine Lösung einer Differentialgleichung auf einem abgeschlossenen Intervall ist eine stetige Funktion, die im Inneren stetig differenzierbar ist, und deren Ableitung sich stetig auf das abgeschlossene Intervall fortsetzen lässt. Weil eine Funktion auf der Vereinigung von zwei Intervallen genau dann stetig ist, wenn sie auf beiden Intervallen stetig ist und auf der Schnittmenge übereinstimmt, können wir solche Lösungen zusammensetzen: Wenn q_1 eine Lösung des Anfangswertproblems $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit $q(t_1) = q_0$ auf $[t_1 - \epsilon, t_1]$ ist und q_2 auf $[t_1, t_1 + \epsilon]$. Dann ist

$$q(t) = \begin{cases} q_1(t) & \text{für } t \in [t_1 - \epsilon, t_1] \\ q_2(t) & \text{für } t \in [t_1, t_1 + \epsilon] \end{cases}$$

eine Lösung auf $[t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon]$. Also können wir Lösungen wieder nach links bzw. rechts fortsetzen. Für jede total geordnete Familie von offenen Intervallen, auf denen jeweils eine Lösung existiert und jeweils auf der Schnittmenge von zwei solchen Intervallen übereinstimmt, ist die Vereinigung auch das Intervall einer Lösung. Wegen dem Zornschen Lemma existiert dann für jede Lösung ein maximales offenes Intervall, auf das wir sie fortsetzen können. Wir erhalten also wie im Satz 1.26:

Satz 1.30. *(Globale Existenz) Sei V ein endlichdimensionaler Banachraum, $O \subset \mathbb{R} \times V$ eine offene Teilmenge und $f : O \to V$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in O$ eine (nicht notwendiger Weise eindeutige) maximale Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{q}(t) = f(t, q(t)) \text{ mit } q(t_0) = q_0$$

auf einem Intervall (a, b), das t_0 enthält. Die Lösung ist in dem Sinne maximal, dass an beiden Rändern, also bei a und b, eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) *$a = -\infty$ (bzw. $b = \infty$)*

(ii) *$t \mapsto \|f(t, q(t))\|$ ist für alle $\epsilon > 0$ auf $(a, a + \epsilon)$ (bzw. $(b - \epsilon, b)$) unbeschränkt.*

(iii) *Die Lösung q lässt sich stetig auf $[a, b)$ (bzw. $(a, b]$) fortsetzen, der Graph der Fortsetzung liegt aber nicht in O.* **q.e.d.**

Jede maximale Lösung kann also nicht als Lösung auf ein größeres Intervall fortgesetzt werden. Aber es kann mehrere solcher maximaler Lösungen geben, und zwei verschiedene maximale Lösungen können auf unterschiedlichen Intervallen definiert sein und auf Teilintervallen übereinstimmen.

Korollar 1.31. *Sei F ein stetiges oder lokal Lipschitz-stetiges und beschränktes Vektorfeld auf einem (endlichdimensionalen) Banachraum V. Dann sind alle Integralkurven auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.*

Beweis: Weil F auf ganz V definiert ist, kann (iii) nicht erfüllt sein. Weil F beschränkt ist, kann (ii) nicht erfüllt sein. Also muss am Rand (i) gelten. **q.e.d.**

Korollar 1.32. *Sei $F : X \to V$ ein stetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge X eines Banachraumes V. Wenn für ein $x \in X$ die Integralkurve durch x nicht für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist, dann ist sie in keiner kompakten Teilmenge von X enthalten.*

Beweis: Auf jeder Integralkurve, die in einer kompakten Teilmenge von X enthalten ist, ist das Vektorfeld F beschränkt. Also kann für solche Integralkurven die Bedingung (ii) im Satz 1.30 nicht gelten. **q.e.d.**

Insbesondere sind alle Integralkurven von stetigen Vektorfeldern auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen Banachraumes, die sich nicht auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen lassen, entweder in keiner beschränkten Teilmenge enthalten, oder sie kommen dem Rand von X beliebig nahe.

1.5 Flüsse und Vektorfelder

In der Übungsaufgabe 1.3 haben wir gesehen, dass ein zeitkontinuierliches partiell nach t differenzierbares dynamisches System ein Vektorfeld F definiert. In diesem Abschnitt konstruieren wir aus dem Vektorfeld F das dazugehörige dynamische System Φ. Zunächst wollen wir alle maximalen Integralkurven aus dem vorangehenden Satz zu Abbildungen von offenen Teilmengen von $\mathbb{R} \times M$ nach M zusammensetzen.

Definition 1.33. *Sei X ein topologischer Raum, $W \subset \mathbb{R} \times X$ eine offene Teilmenge und $\Phi : W \to X$ eine Abbildung, die folgende Bedingungen erfüllen:*

(i) *Für alle $x \in X$ ist $\{t \in \mathbb{R} \mid (t, x) \in W\}$ ein offenes Intervall, das die Null enthält.*

(ii) *Sei $(s, x) \in W$ und $(t, \Phi(s, x)) \in W$, dann ist auch $(t + s, x) \in W$ und es gilt*

$$\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x).$$

(iii) *Für alle $x \in X$ gilt $\Phi(0, x) = x$.*

Dann heißt Φ ein lokaler Fluss auf X.

Lemma 1.34. *Sei $\Phi : W \to X$ ein stetiger lokaler Fluss auf dem topologischen Raum X. Dann gilt:*

(i) *Für alle $t \in \mathbb{R}$ sei $V_t = \{x \in X \mid (t, x) \in W\}$. Dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge V_t offen. Für alle $x \in V_t$ ist auch $\Phi(t, x) \in V_{-t}$ und die Abbildung*

$$\Phi(t, \cdot) : \quad V_t \to V_{-t}, \quad x \mapsto \Phi(t, x)$$

ein Homöomorphismus mit der inversen Abbildung $\Phi(-t, \cdot)$.

(ii) *Für jedes $x \in X$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U \subset X$ von x, so dass W die Menge $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ enthält. Für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ sind insbesondere V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x und $\Phi(t, \cdot)$ ein Homöomorphismus von der offenen Umgebung V_t von x auf die offene Umgebung V_{-t} von x.*

Beweis: Für alle $(t_0, x_0) \in W$ ist W eine offene Umgebung von $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U \subset X$ von x_0, so dass $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times U$ in W enthalten ist. Also sind für alle $t \in \mathbb{R}$ die Mengen V_t offen.

Sei $t \in \mathbb{R}$ und $x \in V_t$. Wir führen den Beweis für $t > 0$. Für $t < 0$ geht er analog. Wegen der Bedingung (i) liegt (s, x) für alle $s \in [0, t]$ in W. Die kompakte Teilmenge $\{(0, \Phi(s, x)) \mid s \in [0, t]\}$ von W besitzt eine endliche Überdeckung von Mengen der Form $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ mit $\epsilon > 0$ und offenen Teilmengen $U \subset X$. Deshalb enthält W für ein $\epsilon > 0$ das kartesische Produkt von $(-\epsilon, \epsilon)$ mit einer offenen Umgebung von $\{\Phi(s, x) \mid s \in [0, t]\}$. Wegen der Bedingung (ii) gilt für alle $s \in [-t, 0]$

$$(r, \Phi(t + s, x)) \in W \quad \text{und} \quad \Phi(r, \Phi(t + s, x)) = \Phi(t + s + r, x) \quad \text{für alle } r \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Wegen der Bedingung (ii) folgt aus $(s, \Phi(t, x)) \in W$ und $(r, \Phi(s, \Phi(t, x)) \in W$ auch $(s + r, \Phi(t, x)) \in W$ und $\Phi(r, \Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + r, \Phi(t, x))$. Für alle $s \in [-t, 0]$ folgt dann induktiv $(s, \Phi(t, x)) \in W$ und $\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(t + s, x)$. Also liegt $\Phi(t, x)$ in V_{-t} und $\Phi(-t, \cdot)$ ist die Umkehrabbildung von $\Phi(t, \cdot)$. Weil Φ stetig ist, sind dann $\Phi(t, \cdot)$ und $\Phi(-t, \cdot)$ Homöomorphismen. Jetzt folgt (ii) aus dem Beweis von (i). **q.e.d.**

Satz 1.35. *Sei X eine offene Teilmenge eines Banachraumes V. Dann definiert für jedes lokal Lipschitz-stetige Vektorfeld $F : X \to V$ die Vereinigung aller maximalen Integralkurven aus dem Satz 1.26 einen stetigen lokalen Fluss Φ_F auf X. Wenn F $r \in \mathbb{N}$ mal stetig differenzierbar ist, dann ist Φ_F ein r mal stetig differenzierbar Fluss mit r mal stetig differenzierbarer partieller Ableitung $\frac{\partial \Phi_F}{\partial t}$.*

Umgekehrt ist jeder partiell nach t differenzierbare lokale Fluss Φ, dessen partielle Ableitung $F(x) = \frac{\partial \Phi(0,x)}{\partial t}$ lokal Lipschitz-stetig ist, die Einschränkung von Φ_F auf eine offene Teilmenge $W \subset W_F$.

Beweis: Sei $F : X \to V$ ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf X. Sei W_F die Vereinigung in $\mathbb{R} \times X$ aller kartesischen Produkte der Definitionsbereiche der eindeutigen maximalen Integralkurven aus Satz 1.26 mit Anfangswert $q(0) = x \in X$ mit den Mengen $\{x\}$. Sei $\Phi_F : W_F \to X$ für jedes $x \in X$ definiert durch die entsprechende Integralkurve durch x. Wenn $(s, x) \in W_F$ und $(t, \Phi_F(s, x)) \in W_F$ liegt, dann stimmen die beiden Integralkurven mit Anfangswert $x(0) = x$ und $x(s) = \Phi_F(s, x)$ wegen der Eindeutigkeit von Integralkurven auf der Schnittmenge der Definitionsbereich überein. Also bilden sie zusammen eine Integralkurve auf einem Intervall das sowohl 0, als auch s und $t + s$ enthält, und $x(0) = x$, $x(s) = \Phi_F(s, x)$ und $x(t + s) = \Phi_F(t, \Phi_F(s, x))$ erfüllt. Also folgt

$$(t + s, x) \in W_F \text{ und } \Phi_F(t + s, x) = \Phi_F(t, \Phi_F(s, x)).$$

Weil im Beweis der Existenz des Anfangswertproblems im Satz von Picard-Lindelöf das Intervall, auf dem die Integralkurve durch $x \in$ definiert ist, nur von einem $\delta > 0$ mit $\overline{B(x, \delta)} \subset X$ und der Lipschitzkonstanten L und dem Supremum von $\|F\|$ auf dieser kompakten Menge $\overline{B(x, \delta)}$ abhängt, enthält W_F für alle $x \in X$ eine offene Umgebung von $(0, x) \in \mathbb{R} \times X$. Dann enthält W_F für alle $(s, x) \in W_F$ mit einer offenen Umgebung um $(0, \Phi_F(s, x))$ auch eine offene Umgebung von (s, x). Also ist W_F offen.

Wenn $F : X \to V$ r mal stetig differenzierbar ist, dann ist wegen Satz 1.25 auch Φ_F r mal stetig differenzierbar ist. Weil in diesem Fall f nicht von t abhängt, lassen sich die ersten $r + 1$ Ableitungen $\dot{q}(t), \ldots, q^{(r+1)}(t)$ der Lösung durch die ersten r Ableitungen der Funktion f nach q bei $q(t)$ ausdrücken. Deshalb sind die entsprechenden Lösungen des Anfangswertproblems sogar $(r + 1)$ mal stetig partiell nach t differenzierbar.

Sei jetzt $\Phi : W \to X$ ein partiell nach t stetig differenzierbarer Fluss auf X, dessen partielle Ableitung nach t lokal Lipschitz-stetig ist. Wegen der Bedingung (ii) gilt für alle $(t, x) \in W$ und $(s, \Phi(t, x)) \in W$

$$\frac{\partial \Phi(t + s, x)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi(t + s, x)}{\partial s} = \frac{\partial \Phi(s, \Phi(t, x))}{\partial s}.$$

Mit $s = 0$ folgt, dass die partielle Ableitung $\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t}$ an der Stelle (t, x) gleich der partiellen Ableitung von $\frac{\partial \Phi(s, \Phi(t,x))}{\partial s}$ an der Stelle $(0, \Phi(t, x))$ ist. Dann ist $t \mapsto \Phi(t, x)$ die eindeutige Integralkurve durch x des lokal Lipschitz-stetigen Vektorfeldes $F : X \to V$ mit $F(x) = \frac{\partial \Phi(0,x)}{\partial t}$. Aus der Eindeutigkeit von Integralkurven folgt, dass für jedes $x \in X$ die Bahn $t \mapsto \Phi(t,x)$ eine Einschränkung der maximalen Integralkurve $t \mapsto \Phi_F(t,x)$ des Vektorfeldes F durch x ist. Also ist W eine offene Teilmenge von W_F und Φ die Einschränkung von Φ_F auf W. **q.e.d.**

Aus Lemma 1.34 und Satz 1.35 folgt

Korollar 1.36. *Sei $F : X \to V$ ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge X eines Banachraumes V. Dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge $V_t = \{x \in X | (t,x) \in W_F\}$ eine offene Teilmenge von X und die Abbildung $x \mapsto \Phi_F(t,x)$ ist ein Homöomorphismus von V_t nach V_{-t} mit Umkehrabbildung $x \mapsto \Phi_F(-t,x)$. Wenn F r mal stetig differenzierbar ist, dann sind dies Abbildungen auch r mal stetig differenzierbar. Außerdem gibt es für alle $x \in X$ ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ die Mengen V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x sind.* **q.e.d.**

Definition 1.37. (i) *Ein lokaler Fluss $\Phi : W \to X$ auf einem topologischen Raum X heißt globaler Fluss, wenn $W = \mathbb{R} \times X$ ist.*

(ii) *Ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld $F : X \to V$ auf einer offene Teilmenge eines Banachraumes V heißt vollständig, wenn der entsprechende Fluss Φ_F ein globaler Fluss ist.*

Offenbar definieren stetige globale Flüsse und vollständige lokal Lipschitz-stetige Vektorfelder zeitkontinuierliche dynamische Systeme. Allerdings definieren nicht alle stetigen Vektorfelder, deren Integralkurven alle auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind, auch ein zeitkontinuierliches dynamisches System mit $G = \mathbb{R}$

Beispiel 1.38. *Sei F folgendes stetige Vektorfeld auf $\mathbb{R}$:*

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(x) = \begin{cases} \frac{2x}{|x|}\sqrt{|x|} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Offenbar ist F auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ lokal Lipschitz-stetig. Die Integralkurven durch $x > 0$ sind für $t \in [-\sqrt{|x|}, \infty)$ gegeben durch $\Phi(t,x) = (\sqrt{|x|} + t)^2$ und für $t > -\sqrt{|x|}$ auch eindeutig. Die Integralkurven durch $x < 0$ sind für $t \in [-\sqrt{|x|}, \infty)$ gegeben durch $\Phi(t,x) = -(\sqrt{|x|} + t)^2$ und für $t > -\sqrt{|x|}$ eindeutig. Für $t > 0$ bildet $\Phi(t,\cdot)$ die Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ also auf die Menge $(-\infty, -t^2) \cup (t^2, \infty)$ ab. Wegen den Bedingungen (i) und (ii) kann $\Phi(-t,\cdot)$ dann alle Punkte in $[-t^2, t^2]$ nur auf 0 abbilden. Dann müsste $\Phi(t,0)$ gleich allen Punkten in $[-t^2, t^2]$ sein. Also gibt es kein dynamisches System zu F.

Satz 1.39. *Auf einem kompakten topologischen Raum X sind alle lokalen Flüsse auch globale Flüsse.*

Beweis: Wegen Lemma 1.34 gibt es für jedes $x \in X$ ein $\epsilon_x > 0$ und eine offene Umgebung U_x von $x \in X$, so dass der Definitionsbereich W die Menge $(-\epsilon_x, \epsilon_x) \times U$ enthält. Die Überdeckung $(U_x)_{x\in X}$ von X, hat eine endliche Teilüberdeckung. Das Minimum der entsprechenden ϵ_x nennen wir wieder $\epsilon > 0$. Dann folgt aus der Bedingung (i) des Flusses, dass für jedes $(t, x) \in W$ die Menge W auch die Menge $\{(t + s, x) \in \mathbb{R} \times X | s \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ enthält. Weil W die Menge $\{(0, x)|x \in X\}$ enthält, folgt induktiv für alle $l \in \mathbb{N}$, dass W auch die Menge

$$(-(l + 1)\epsilon, (l + 1)\epsilon) \times X = \{(t + s, x) \in \mathbb{R} \times X \mid (t, x) \in (-l\epsilon, l\epsilon) \times X, s \in (-\epsilon, \epsilon)\}$$

enthält. Also ist W gleich $\mathbb{R} \times X$. **q.e.d.**

Wir haben in dem Beweis nur benutzt, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass der Definitionsbereich W des Flusses Φ von F die Menge $(-\epsilon, \epsilon) \times X$ enthält, bzw. die Integralkurven von F mit allen Anfangswerten $x(0) \in X$ auf $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert sind.

Korollar 1.40. **(i)** *Ein lokaler Fluss auf einem topologischen Raum X ist genau dann ein globaler Fluss, wenn W eine Menge $(-\epsilon, \epsilon) \times X$ enthält mit $\epsilon > 0$.*

(ii) *Ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld $F : X \to V$ auf einer offenen Menge eines Banachraumes V definiert genau dann einen globalen Fluss, wenn für ein $\epsilon > 0$ die Integralkurven von F durch alle $x \in X$ auf $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert sind.*

(iii) *Ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld $F : X \to V$ auf einer offenen Teilmenge eines Banachraumes, das außerhalb einer kompakten Menge verschwindet, definiert einen globalen Fluss.*

(iv) *Auf einem Banachraum $X = V$ definieren beschränkte und lokal Lipschitz-stetige Vektorfelder einen globalen Fluss.*

(v) *Auf einem Banachraum $X = V$ definieren Lipschitz-stetige Vektorfelder einen globalen Fluss.*

Beweis: (i)-(ii) haben wir schon gezeigt und (iv) folgt aus Korollar 1.31. Weil es für jedes $x \in X$ ein $\epsilon > 0$ und eine Umgebung U von x gibt, so dass der entsprechende lokale Fluss auf $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ definiert ist, und die Integralkurven durch Nullstellen auf ganz $\mathbb{R}$ konstant sind, erfüllt ein Vektorfeld, das (iii) erfüllt, auch (ii).

Sei $F : V \to V$ ein Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf einem Banachraum V mit Lipschitzkonstante L. Im Satz von Picard-Lindelöff haben wir für $x \in X$ gezeigt, dass mit $\delta > 0$ die Integralkurve durch x in dem Ball $B(x, \delta)$ auf dem Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert ist, wenn ϵ folgende Ungleichung erfüllt:

$$\epsilon < \min\left\{\delta, \frac{\delta}{\|F(x)\| + L\delta}\right\}.$$

Mit $\delta = \|F(x)\| + 1$ können wir $\epsilon = \frac{1}{1+L}$ wählen. Also folgt (v) aus (ii). **q.e.d.**

Korollar 1.41. **(i)** *Ein globaler stetiger Fluss auf dem topologischen Raum X definiert durch*

$$\Phi(\cdot,\cdot): \quad \mathbb{R} \to C(X,X), \quad t \mapsto \Phi(t,\cdot)$$

einen Homomorphismus von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der Homöomorphismen von X.

Umgekehrt definieren alle Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der Homöomorphismen von X, die als Abbildungen von $\mathbb{R} \times X$ nach X stetig sind, einen globalen stetigen Fluss.

(ii) *Sei $F : X \to V$ ein vollständiges lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf einer offene Menge X eines Banachraumes V. Dann definiert der entsprechende Fluss $\Phi_F : \mathbb{R} \times X \to X$ einen Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der Homöomorphismen von X.*

Beweis: (i) Offenbar ist $W = \mathbb{R} \times X$ dazu äquivalent, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $V_t = X$. Die Bedingung (ii) besagt genau, dass $t \mapsto \Phi(t,\cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Also folgt die Aussage aus dem Lemma 1.34.

(ii) folgt aus (i) und und Satz 1.35. **q.e.d.**

Übungsaufgabe 1.42. *Sei $F : X \to V$ ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge X eines Banachraumes und $f : X \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.*

(i) *Zeige, dass für $C < f < C^{-1}$ mit $0 < C < 1$ alle maximalen Integralkurven von fF die Verkettung von den entsprechenden Integralkurven von F mit bijektiven Abbildungen von den entsprechenden maximalen Intervallen aufeinander sind.*

(ii) *Zeige dass fF lokal Lipschitz-stetig ist, wenn f lokal Lipschitz-stetig ist.*

(iii) *Es sei $f > C > 0$ lokal Lipschitz-stetig und F und fF vollständig. Zeige, dass dann die beiden entsprechenden dynamischen Systeme die gleichen Trajektorien (als Mengen) haben, aber als dynamische Systeme im Allgemeinen verschieden sind.*

(iv) *Zeige, dass im Fall $X = V$ das Vektorfeld $\frac{F}{1+\|F\|}$ vollständig ist, und die Mengen der Integralkurven mit denen von F übereinstimmen.*

Hinweis zu (i): Nimm an, dass sich die Integralkurven von fF schreiben lassen als die Verkettung einer reellen Funktion mit den Integralkurven von F und leite eine Differentialgleichung für diese reelle Funktion her. Diese Differentialgleichung läßt sich dann einfach lösen.

1.6 Elementare Lösungsverfahren

In diesem Abschnitt wollen wir uns auf gewöhnliche Differentialgleichungen beschränken, in denen die gesuchte Funktion eine reelle Funktion ist. Die Differentialgleichungen erster Ordnung haben also die Form

$$\dot{q}(t) = f(t, q(t)).$$

Wenn es uns gelingt, die Funktion f als einen Quotienten zu schreiben

$$f(t, q) = \frac{g(t)}{h(q)}$$

dann können wir die Differentialgleichung umformen zu

$$\dot{q}(t)h(q(t)) = g(t).$$

Wenn H eine Stammfunktion von h ist und G eine Stammfunktion von G, dann gilt

$$\frac{d}{dt}H(q(t)) = \frac{d}{dt}G(t).$$

Also folgt dann für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t) = \frac{g(t)}{h(q(t))} \text{ mit } q(t_0) = q_0$$

$$H(q(t)) - H(q_0) = G(t) - G(t_0).$$

Wenn wir jetzt noch annehmen, dass H eine Umkehrfunktion besitzt, was natürlich auf allen Intervallen gilt, auf denen h positiv bzw. negativ ist, dann erhalten wir also als Lösung des Anfangswertproblems

$$q(t) = H^{-1}(G(t) - G(t_0) + H(q_0)).$$

Satz 1.43. *(Trennung der Variablen) Seien g und h stetige Funktionen auf einem offenen Intervall I und h sei entweder positiv oder negativ. Dann sind sowohl g als auch h auf allen kompakten Teilintervallen von I Riemann-integrabel. Seien G und H Stammfunktionen von g bzw. h. Dann ist H entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend, besitzt also eine Umkehrabbildung $H^{-1} : I' \to I$ von einem offenen Intervall I' auf I. Dann ist die eindeutige Lösung der Anfangswertprobleme*

$$\dot{q}(t) = \frac{g(t)}{h(q(t))} \textit{ mit } q(t_0) = q_0$$

gegeben durch $$q(t) = H^{-1}(G(t) - G(t_0) + H(q_0)).$$

Sie ist auf dem Intervall definiert, auf dem $G(t) - G(t_0) + H(q_0)$ in I' liegt. **q.e.d.**

Wenn es uns gelingt eine Funktion $F(t,q)$ zu finden, so dass gilt

$$f(t,q) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}(t,q)}{\frac{\partial F}{\partial q}(t,q)},$$

dann können wir die Differentialgleichung umformen zu

$$\frac{d}{dt}F(t,q(t)) = \frac{\partial F(t,q(t))}{\partial t} + \frac{dq(t)}{dt}\frac{\partial F(t,q(t))}{\partial q} = 0.$$

Also gilt dann für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t)\frac{\partial F(t,q(t))}{\partial q} + \frac{\partial F(t,q(t))}{\partial t} = 0 \quad \text{mit} \quad q(t_0) = q_0$$

$$F(t,q(t)) = F(t_0,q_0).$$

Diese Gleichung beschreibt implizit die Lösung des Anfangswertproblems.

Satz 1.44. *(Exakte Differentialgleichungen) Sei $(t,q) \mapsto F(t,q)$ differenzierbar. Dann sind alle Lösungen des Anfangswertproblems*

$$\dot{q}(t)\frac{\partial F(t,q(t))}{\partial q} + \frac{\partial F(t,q(t))}{\partial t} = 0 \quad \textit{mit} \quad q(t_0) = q_0$$

implizit gegeben durch $$F(t,q(t)) = F(t_0,q_0).$$ **q.e.d.**

Für zwei Funktionen $g(t,q)$ und $h(t,q)$ mit $f(t,q) = -\frac{g(t,q)}{h(t,q)}$, gibt es nicht immer eine Funktion $F(t,q)$ mit $\frac{\partial F(t,q)}{\partial t} = g(t,q)$ und $\frac{\partial F(t,q)}{\partial q} = h(t,q)$.

Lemma 1.45. *(Stammfunktion) Seien g und h zwei stetig differenzierbare Funktionen auf einem konvexen offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Dann gibt es auf Ω genau dann eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $F(t,q)$ mit*

$$\frac{\partial F(t,q)}{\partial t} = g(t,q) \textit{ und } \frac{\partial F(t,q)}{\partial q} = h(t,q) \textit{ wenn gilt } \frac{\partial g(t,q)}{\partial q} = \frac{\partial h(t,q)}{\partial t}.$$

Beweis: Sei $(t_0,q_0) \in \Omega$ beliebig. Dann definieren wir die Funktion

$$F(t,q) = (t-t_0)\int_0^1 g(t_s,q_s)ds + (q-q_0)\int_0^1 h(t_s,q_s)ds,$$

mit $t_s = t_0 + s(t - t_0)$ und $q_s = q_0 + s(q - q_0)$. Weil die Funktionen g und h differenzierbar sind, sind sie stetig und damit auch integrierbar. Die Ableitungen von F sind dann

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(t,q)}{\partial t} &= \int_0^1 g(t_s,q_s)ds + (t-t_0)\int_0^1 \frac{\partial g(t_s,q_s)}{\partial t} s ds + (q-q_0)\int_0^1 \frac{\partial h(t_s,q_s)}{\partial t} s ds \\
&= \int_0^1 g(t_s,q_s)ds + \int_0^1 \frac{dg(t_s,q_s)}{ds} s ds = g(t,q) \\
\frac{\partial F(t,q)}{\partial q} &= \int_0^1 h(t_s,q_s)ds + (q-q_0)\int_0^1 \frac{\partial h(t_s,q_s)}{\partial q} s ds + (t-t_0)\int_0^1 \frac{\partial g(t_s,q_s)}{\partial q} s ds \\
&= \int_0^1 h(t_s,q_s)ds + \int_0^1 \frac{dh(t_s,q_s)}{ds} s ds = h(t,q)
\end{aligned}$$

Wenn umgekehrt $\frac{\partial F(t,q)}{\partial t} = g(t,q)$ und $\frac{\partial F(t,q)}{\partial q} = h(t,q)$ gilt, dann folgt aus dem Satz von Schwarz

$$\frac{\partial g(t,q)}{\partial q} = \frac{\partial^2 F(t,q)}{\partial q \partial t} = \frac{\partial^2 F(t,q)}{\partial t \partial q} = \frac{\partial h(t,q)}{\partial t}.$$ **q.e.d.**

Wir können diese Aussage auf Vereinigungen von konvexen Gebieten verallgemeinern, solange nur die Vorschrift, gemäß der wir F fortsetzen, eindeutig ist. Das gilt für alle einfach zusammenhängenden Gebiete Ω, d.h. solche Gebiete, die für jede stetige Abbildung $p : S^1 \to \Omega$ eine Homotopie zu einer konstanten Abbildung besitzen, d.h. also, es gibt zu jedem solchen p eine stetige Abbildung $[0,1] \times S^1 \to \Omega$, die auf $\{0\} \times S^1$ gerade gleich p und die auf $\{1\} \times S^1$ konstant ist. Anschaulich bedeutet das, dass jeder geschlossene Weg in Ω zu einem Punkt zusammengezogen werden kann.

Es gibt auch Fälle, in denen die Differentialgleichung

$$\dot{q}(t)h(t,q(t)) + g(t,q(t)) = 0$$

erst mit einer Funktion erweitert werden muss, bevor sie exakt ist.

Beispiel 1.46. *Die Differentialgleichung* $$2t\dot{q} + q(t) = 0$$

ist nicht exakt, weil gilt $$\frac{\partial q}{\partial q} = 1 \neq 2 = \frac{\partial 2t}{\partial t}.$$

die Differentialgleichung $$2tq(t)\dot{q}(t) + q^2(t) = 0$$

ist aber exakt, weil gilt $$\frac{\partial q^2}{\partial q} = 2q = \frac{\partial}{\partial t} 2qt.$$

Korollar 1.47. *(Eulersche Multiplikator) Wenn eine Differentialgleichung durch Multiplikation mit einer Funktion auf die Form gebracht werden kann*

$$\dot{q}(t)h(t, q(t)) + g(t, q(t)) = 0 \qquad \textit{mit} \qquad \frac{\partial h(t, q)}{\partial t} = \frac{\partial g(t, q)}{\partial q},$$

dann existiert auf einfach zusammenhängenden Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine Funktion F, so dass die Differentialgleichung exakt ist

$$\frac{d}{dt} F(t, q(t)) = \dot{q}(t) \frac{\partial F(t, q(t))}{\partial q} + \frac{\partial F(t, q(t))}{\partial t} = 0.$$

Dann gilt für die Lösungen des entsprechenden Anfangswertproblems mit $q(t_0) = q_0$

$$F(t, q(t)) = F(t_0, q_0).$$ **q.e.d.**

Um für eine Differentialgleichung von der Form

$$\dot{q}(t)h(t, q(t)) + g(t, q(t)) = 0$$

einen Eulerschen Multiplikator $M(t, q(t))$ zu finden, müssen wir die Gleichung

$$\frac{\partial M(t, q)}{\partial t} h(t, q) + M(t, q) \frac{\partial h(t, q)}{\partial t} = \frac{\partial M(t, q)}{\partial q} g(t, q) + M(t, q) \frac{\partial g(t, q)}{\partial q}$$

lösen. Das ist eine partielle Differentialgleichung, die im Allgemeinen nicht leichter zu lösen ist als die ursprüngliche Differentialgleichung. In einigen Fällen können wir Lösungen erraten oder einfache Lösungen berechnen, die nur von t bzw. u abhängen.

Zuletzt bemerken wir, dass einige Differentialgleichungen durch eine Substitution in eine der Differentialgleichungen verwandelt werden können, die wir lösen können.

Beispiel 1.48. (i)

$$\dot{q}(t) = f(at + bq(t) + c) \ \textit{mit} \ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Für $b = 0$ können wir die Differentialgleichung direkt integrieren. Für $b \neq 0$ führt die Substitution $p(t) = at + bq(t) + c$ auf die Differentialgleichung $\dot{p}(t) = a + bf(p(t))$ oder auch $\frac{\dot{p}(t)}{a+bf(p(t))} = 1$. Diese Differentialgleichung können wir mit der Methode der Trennung der Variablen lösen: Sei F eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{a+bf(x)}$. Dann erfüllen die Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t) = f(at + bq(t) + c) \ \textit{mit} \qquad q(t_0) = q_0$$

die Gleichung $$F(at + bq(t) + c) - F(at_0 + bq_0 + c) = t - t_0.$$

(ii) $\dot{q} = f\left(\frac{q(t)}{t}\right)$ *homogene Differentialgleichung. Die Substitution* $p(t) = \frac{q(t)}{t}$ *führt zu*

$$\dot{p}(t) = \frac{f(p(t)) - p(t)}{t}.$$

Diese Differentialgleichung können wir durch Trennung der Variablen lösen:

$$\frac{\dot{p}(t)}{f(p(t)) - p(t)} = \frac{1}{t}.$$

(iii)

$$\dot{q} = f\left(\frac{at + bq(t) + c}{\alpha t + \beta q(t) + \gamma}\right) \quad \text{mit } a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Wenn die Determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$ *ist, dann ist entweder* $\alpha t + \beta q(t)$ *ein Vielfaches von* $at + bq(t)$ *oder umgekehrt. Deshalb haben wir dann ein Beispiel der Art in (i). Wenn diese Determinante* $\neq 0$ *ist, dann hat das lineare Gleichungssystem*

$$at + bu + c = 0 \qquad\qquad \alpha t + \beta u + \gamma = 0$$

genau eine Lösung (t_0, q_0)*. Die Differentialgleichung können wir umformen zu*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(q(t+t_0) - q_0) &= f\left(\frac{a(t+t_0) + bq(t+t_0) + c - (at_0 + bq_0 + c)}{\alpha(t+t_0) + \beta q(t+t_0) + \gamma - (\alpha t_0 + \beta q_0 + \gamma)}\right) \\ &= f\left(\frac{a + b\frac{q(t+t_0)-q_0}{t}}{\alpha + \beta\frac{q(t+t_0)-q_0}{t}}\right). \end{aligned}$$

Also erhalten wir ein Beispiel von der Form (ii).

(iv) *Bernoullische Differentialgleichung:*

$$\dot{q}(t) + g(t)q(t) + h(t)q^{\alpha}(t) = 0 \quad \alpha \neq 1.$$

Die Substitution $p(t) = q^{1-\alpha}(t)$ *führt zu der Differentialgleichung*

$$\dot{p}(t) = (1-\alpha)\dot{q}(t)q^{-\alpha}(t) = (\alpha - 1)g(t)p(t) + (\alpha - 1)h(t).$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung, die wir im Abschnitt 1.7 gelöst haben.

1.7 Lineare Differentialgleichungen

Definition 1.49. *Eine Differentialgleichung von der Form*

$$\dot{q}(t) = A(t)q(t) + b(t)$$

heißt lineare gewöhnliche Differentialgleichung auf einem (offenen) Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Hierbei ist q eine gesuchte Funktion von I mit Werten in einem Vektorraum V (z.B. $\mathbb{K}^n$) und A eine Abbildung von I in die linearen Abbildungen von V auf V (oder im Falle eines normierten Vektorraumes $\mathcal{L}(V)$, die linearen stetigen Abbildungen von V nach V). Im Fall von $V = \mathbb{K}^n$ können wir $\mathcal{L}(V)$ mit den $n \times n$ Matrizen $\mathbb{K}^{n\times n}$ identifizieren und V mit den Spaltenvektoren in $\mathbb{K}^n$. Dann ist $A(t)q(t)$ das Matrix-Produkt der $n \times n$-Matrix $A(t)$ mit dem Spaltenvektor $q(t)$, also wieder ein Spaltenvektor in $\mathbb{K}^n$. Schließlich ist b eine Abbildung von I nach V. Wenn $b(t) = 0$ ist, dann heißt die Differentialgleichung homogen, andernfalls inhomogen. Wenn A nicht von t abhängt, also als Abbildung konstant ist, heißt die Differentialgleichung autonom, andernfalls nicht autonom.

Satz 1.50. *Die Menge aller Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung bildet einen Vektorraum über $\mathbb{K}$. Wenn also q und $\tilde{q}$ Lösungen sind, dann sind auch $q+\tilde{q}$ und λu für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung. Die Menge aller Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung bildet einen affinen Raum. Eine allgemeine Lösung ist die Summe einer speziellen Lösung und einer allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen linearen Differentialgleichung.*

Beweis: Seien q und $\tilde{q}$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $\dot{q}(t) = A(t)q(t) + b(t)$ bzw. $\dot{\tilde{q}}(t) = A(t)\tilde{q}(t) + b(t)$, dann erfüllt $q - \tilde{q}$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}(q(t) - \tilde{q}(t)) = A(t)(q(t)) - \tilde{q}(t)),$$

also die entsprechende homogene Differentialgleichung. Genauso gilt auch für alle $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\frac{d}{dt}\lambda(q(t) - \tilde{q}(t)) = A(t)\lambda(q(t)) - \tilde{q}(t)).$$

Deshalb ist der Raum aller Lösungen eines homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems ein Vektorraum und die allgemeine Lösung eines inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems ist die Summe einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung des entsprechenden homogenen Systems. **q.e.d.**

Satz 1.51. *(Existenz und Eindeutigkeit des linearen Anfangswertproblems). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes (nicht notwendig beschränktes) Teilintervall von $\mathbb{R}$ und $A : I \to \mathcal{L}(V)$*

eine stetige Abbildung von $\mathbb{R}$ in die beschränkten stetigen linearen Abbildungen des Banachraums V. Außerdem sei $b : I \to V$ stetig. Dann besitzt für jedes $q_0 \in V$ und jedes $t_0 \in I$ das Anfangswertproblem $\dot{q}(t) = A(t) \cdot q(t) + b(t)$ mit $q(t_0) = q_0$ genau eine stetig differenzierbare Lösung $q : I \to V$.

Bemerkung 1.52. *Jede Lösung der Differentialgleichung muss differenzierbar sein und damit auch stetig. Dann muss sie sogar stetig differenzierbar sein. Deshalb gibt es also auch nur genau eine Lösung.*

Beweis: Wir benutzen den Satz von Picard-Lindelöff. Wir zeigen die Aussage zunächst auf einem Teilintervall, dessen Abschluss in I enthalten ist. Offenbar ist das Supremum $\|A\|_\infty$ von $\|A\|$ eine Lipschitzkonstante L. Wie im Korollar 1.40 (v) müssen $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$ folgendes erfüllen:

$$\epsilon < \left\{\delta, \frac{\delta}{\|A\|_\infty(\|q_0\| + \delta}\right\}.$$

Weil wir δ beliebig groß wählen können existiert ein solches ϵ. Dann existiert eine eindeutige Lösung auf jedem relativkompakten Teilintervall. Wegen der Eindeutigkeit können wir alle diese Lösungen zu eine globalen Lösung auf I zusammensetzen.**q.e.d.**

Aus den beiden vorangehenden Sätzen folgt sofort:

Korollar 1.53. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, V ein Banachraum, und $A : I \to \mathcal{L}(V)$ und $b : I \to V$ stetige Abbildungen. Dann induziert für jedes $t_0 \in I$ die Abbildung $C(I, V) \to V, u \mapsto q(t_0)$ einen linearen Isomorphismus von der Menge aller Lösungen der Differentialgleichung $\dot{q}(t) = A(t)q(t)$ auf V. Für jede Lösung $\tilde{q}$ der inhomogenen Differentialgleichung $\dot{q}(t) = A(t)q(t) + b(t)$ induziert die Abbildung $C(I, V) \to V, u \mapsto q(t_0) - \tilde{q}(t_0)$ einen affinen Isomorphismus von der Menge aller Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung nach V.* **q.e.d.**

Insbesondere haben also die Lösungsräume der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungssysteme erster Ordnung dieselbe Dimension wie der Vektorraum, in dem die Werte der gesuchten Funktion liegen. Insbesondere stimmt also für reelle gewöhnliche Differentialgleichungen n-ter Ordnung die Dimension des Lösungsraumes mit der Ordnung überein, wie wir das erwartet haben. Nachdem wir jetzt also für eine erste Klasse von Differentialgleichungen die Existenz und Eindeutigkeit des Anfangswertproblems gezeigt haben, wollen wir uns der Frage zuwenden, wie wir diese Lösungen auch ausrechnen können.

Beispiel 1.54. *Wir stellen uns eine Insel vor, die von Störchen, Fröschen und Fliegen bewohnt wird. Dabei stellen wir uns die Nahrungskette so vor, dass die Störche $S(t)$ sich sowohl von den Fröschen als auch von den Fliegen ernähren, die Frösche $F(t)$ nur von den Fliegen und die Fliegen $f(t)$ von dem Aas der Frösche und Störche. Wir nehmen* *jetzt an, dass das Tierwachstum nur von der vorhandenen Nahrungsmenge gesteuert wird:*

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= F(t) + f(t) \quad -2S(t)\\ \dot{F}(t) &= -S(t) + f(t)\\ \dot{f}(t) &= S(t) + F(t) \quad -2f(t)\end{aligned}$$

Beispiel 1.55. *Seien $A : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ stetig. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$\dot{q}(t) = A(t)q(t) + b(t), \quad q(t_0) = q_0$$

eine eindeutige Lösung, die wir jetzt bestimmen wollen. Dazu betrachten wir zunächst das entsprechende homogene Anfangswertproblem mit $b = 0$. Wenn q eine Nullstelle bei einem $t_1 \in \mathbb{R}$ hat, dann stimmt q mit der eindeutigen Lösung $q = 0$ des entsprechenden homogenen Anfangswertproblems mit $q(t_1) = 0$ überein. Andernfalls hat q keine Nullstelle und wir können die Differentialgleichung umformen zu

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{d}{dt}\ln(q(t)) = A(t) \text{ mit } q(t_0) = q_0.$$

Wir erhalten

$$\ln(q(t)) = \int_{t_0}^{t} A(s)ds + \ln(q_0) \text{ bzw.} \qquad q(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) q_0.$$

Sei also q_s für alle $s \in \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung $q_s(t) = \exp\left(\int_s^t A(r)dr\right) b(s)$ des Anfangswertproblems $\dot{q}_s(t) = q_s(t)A(t)$ mit $q_s(s) = b(s)$. Dann folgt

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} q_s(t)ds = q_t(t) + \int_{t_0}^{t} A(t)q_s(t)ds = b(t) + A(t)\int_{t_0}^{t} q_s(t)ds.$$

Also löst $\int_{t_0}^{t} q_s(t)ds$ das Anfangswertproblem

$$\dot{q}(t) = A(t)q(t) + b(t) \text{ mit } \qquad q(t_0) = 0.$$

Wir erhalten also die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems als die Summe

$$q(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) q_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{s}^{t} A(r)dr\right) b(s)ds.$$

des homogenen Anfangswertproblems und dem Integral über alle Anfangswertprobleme des homogenen Problems, wobei wir als Anfangswerte jeweils den inhomogenen Term einsetzen. Dieses Verfahren wollen wir jetzt verallgemeinern.

Satz 1.56. *(Variation der Parameter) Sei $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und V ein Banachraum. Dann ist die Abbildung*

$$C([\alpha,\beta],\mathcal{L}(V)) \times C([\alpha,\beta],V) \times [\alpha,\beta] \times V \to C([\alpha,\beta],V) \qquad (A,b,t_0,q_0) \mapsto u$$

auf die eindeutige Lösung q des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t) = A(t)q(t) + b(t) \text{ mit } \qquad q(t_0) = q_0$$

stetig. Die Einschränkung dieser Abbildung auf ein festes t_0 hängt analytisch von A, b und q_0 ab. Für jedes $(A,b,t_0) \in C([\alpha,\beta],\mathcal{L}(V)) \times C([\alpha,\beta],V) \times [\alpha,\beta]$ ist dann die entsprechende Einschränkung der Abbildung ein affiner Isomorphismus von $q_0 \in V$ auf die Menge der Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{q}(t) = A(t)q(t) + b(t).$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, berechnen wir mit ihm die Lösung eines inhomogenen Anfangswertproblems aus der Lösung des homogenen Anfangswertproblems.

Korollar 1.57. *Sei $A : I \to \mathcal{L}(V)$ eine stetige Abbildung auf einem offenen nicht notwendigerweise beschränkten Intervall und $b : I \to V$ auch. Dann setzt sich wegen der Variation der Parameter die eindeutige Lösung $q_s(t)$ des Anfangswertprobleme*

$$\dot{q}_s(t) = A(t)q_s(t) \text{ mit } \qquad q_s(s) = b(s)$$

zu einer stetigen Abbildung $I \mapsto C(I,V) \quad s \mapsto q_s$ zusammen. Die eindeutige Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t) = A(t)q(t) + b(t) \text{ mit } \qquad q(t_0) = q_0$$

ist dann die Summe des entsprechenden homogenen Anfangswertproblems und des Integrals

$$\int_{t_0}^{t} q_s(t)ds.$$

Beweis: Wegen des vorangehenden Satzes ist die Abbildung $s \mapsto q_s(t)$ auf allen Teilintervallen $[\alpha,\beta] \subset I$ stetig von $[\alpha,\beta]$ nach $C([\alpha,\beta],V)$. Dann existiert für alle $t \in I$ das Integral $\int\limits_{t_0}^{t} q_s(t)ds$. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{t_0}^{t} q_s(t)ds = q_t(t) + A(t)\int\limits_{t_0}^{t} q_s(t)ds = b(t) + A(t)\int\limits_{t_0}^{t} q_s(t)ds \text{ und } \int\limits_{t_0}^{t_0} q_s(t)ds = 0.$$

Diese Funktion löst das inhomogene Anfangswertproblem mit $q_0 = 0$. Wegen Satz 1.50 ist die eindeutige Lösung des allgemeinen Anfangswertproblems die Summe dieser Funktion und der Lösung des entsprechenden homogenen Anfangswertproblems.**q.e.d.**
Beweis von Satz 1.56: Offenbar ist die Abbildung

$$\begin{aligned} C([\alpha,\beta],\mathcal{L}(V)) \times C([\alpha,\beta],V) \times [\alpha,\beta] \times V \times C([\alpha,\beta],V) &\to C([\alpha,\beta],V) \\ (A,b,t_0,q_0,q) \mapsto f_{A,b,t_0,q_0}(q) \text{ mit } f_{A,b,t_0,q_0}(q)(t) &= q_0 + \int\limits_{t_0}^{t}(A(s)q(s)+b(s))ds \end{aligned}$$

stetig und hängt für festes t_0 analytisch von A, b, q_0 und q ab. Weil das Integral linear ist, ist sie sogar eine Summe von linearen Abbildungen und einer bilinearen Abbildung. Damit ist f sogar ein Polynom in A, b, q_0, und q. Die Lipschitzkonstante $\tilde{L}$ der Abbildung $\tilde{f} = f_{\tilde{A},\tilde{b},\tilde{t}_0\tilde{q}_0}$, mit einem Element $(\tilde{A},\tilde{b},\tilde{t}_0,\tilde{q}_0) \in C([\alpha,\beta],\mathcal{L}(V)) \times C([\alpha,\beta],V) \times [\alpha,\beta] \times V$ können wir abschätzen durch

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{f}(q) - \tilde{f}(\tilde{q})\right\|_\infty &= \left\| \int\limits_{\tilde{t}_0}^{t} A(s)(q(s)-\tilde{q}(s))ds + \int\limits_{\tilde{t}_0}^{t}(\tilde{A}(s)-A(s))(q(s)-\tilde{q}(s))ds \right\|_\infty \\ &\le |\beta-\alpha|\|q-\tilde{q}\|_\infty\left(\|A\|_\infty + \|\tilde{A}-A\|_\infty\right). \end{aligned}$$

Wir wählen das Intervall $[\alpha,\beta]$ und $\epsilon > 0$ so klein, dass die den Elementen $(\tilde{A},\tilde{b},\tilde{t}_0,\tilde{q}_0)$ in dem ϵ-Ball von (A,b,t_0,q_0) entsprechenden $\tilde{f}$ Lipschitz-stetig sind mit Lipschitzkonstante $\tilde{L} \le |\beta-\alpha|(\|A\|_\infty + \epsilon) \le L_0 < 1$. Für $n > m \ge N \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{f}^n(q) - \tilde{f}^m(q)\right\|_\infty &\le \left\|\tilde{f}^m(\tilde{f}^{n-m}(q) - \tilde{f}^0(q))\right\|_\infty \\ &\le \tilde{L}^m \left\| \sum_{l=1}^{n-m}(\tilde{f}^l(q) - \tilde{f}^{l-1}(q)) \right\|_\infty \\ &\le \tilde{L}^N \left(\sum_{l=0}^{n-m-1} \tilde{L}^l \|\tilde{f}(q)-q\|_\infty \right) \quad \le \frac{\tilde{L}^N}{1-\tilde{L}}\|\tilde{f}(q)-q\|_\infty. \end{aligned}$$

Wir wählen die Startfunktion q identisch gleich Null. Dann ist $\|\tilde{f}(q) - q\|$ beschränkt durch

$$\|\tilde{f}(0) - 0\|_\infty \leq \|q_0\| + \|\tilde{q}_0 - q_0\| + |\beta - \alpha| \left(\|b\|_\infty + \|\tilde{b} - b\|_\infty\right).$$

Weil auf dem ϵ-Ball um (A, b, t_0, q_0) die Lipschitzkonstante uniform durch $L_0 < 1$ beschränkt ist, konvergiert dann die Folge $(\tilde{f}^n(q))_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Lösung des Anfangswertproblems. Der Grenzwert ist als gleichmäßiger Grenzwert von stetige Abbildung eine stetige Funktion von (A, b, t_0, q_0), die für festes t_0 analytisch von (A, b, q_0) abhängt (also eine konvergente Potenzreihe besitzt).

Wenn die Lipschitzkonstante größer als 1 ist, überdecken wir das Intervall durch hinreichend kleine Teilintervalle und setzen die entsprechenden Lösungen fort. **q.e.d.**

Damit haben wir die Berechnung der Lösung auf das Lösen des homogenen Anfangswertproblems zurückgeführt.

Satz 1.58. *(Exponentialfunktion) Die Potenzreihe* $\exp(A) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ *konvergiert für alle* $A \in \mathcal{L}(V)$*, wenn* V *ein Banachraum ist. Außerdem gilt*

$$\frac{d}{dt}\exp((t-t_0)A) = A\exp((t-t_0)A) = \exp((t-t_0)A)A.$$

Beweis: Wegen $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ folgt $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. Dann folgt die Behauptung aus den entsprechenden Aussagen für die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$. **q.e.d.**

Korollar 1.59. *(Lösung des autonomen Anfangswertproblems) Das inhomogene Anfangswertproblem*

$$\dot{q}(t) = Aq(t) + b(t) \text{ mit } q(t_0) = q_0$$

mit $A \in \mathcal{L}(V)$ *und stetigem* $b : I \to V$ *besitzt die eindeutige Lösung*

$$q(t) = \exp((t-t_0)A)q_0 + \int_{t_0}^{t} \exp((t-s)A)b(s)ds.$$

Beweis: Es genügt wegen der Variation der Parameter zu zeigen, dass das homogene Anfangswertproblem ($b = 0$) durch $q(t) = \exp((t-t_0)A)q_0$ gelöst wird. Das folgt aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion. **q.e.d.**

Damit bleibt noch das Problem der Berechnung der Exponentialfunktion. Dazu benutzen wir die Diagonalisierung bzw. Jordannormalform von Matrizen.

Übungsaufgabe 1.60. (i) *Aus der Analysis wissen wir, dass das Anfangswertproblem der Differentialgleichung*

$$q^{(n)}(t) = 0 \text{ mit } q(0) = q_0, \dot{q}(0) = q_1, \ldots, q^{(n-1)}(0) = q_{n-1}$$

die Lösung

$$q(t) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{q_l t^l}{l!}$$

besitzt. Dieses Anfangswertproblem ist äquivalent zu den Anfangswertproblemen

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \\ \vdots \\ q^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \\ \vdots \\ q^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad \textit{mit} \quad \begin{pmatrix} q(t_0) \\ \dot{q}(t_0) \\ \vdots \\ q^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Deshalb gilt

$$\exp\left(t \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{1} + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{t^l}{l!} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}^l$$

Zeige direkt diese Identität.

(ii) *Zeige, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) gilt*

$$\exp\left(t \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \exp(t\lambda) \cdot \exp\left(t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

(iii) *Die Matrix A lasse sich durch die invertierbare Matrix B diagonalisieren:*

$$A = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} B^{-1}$$

Zeige, dass dann gilt

$$\exp(tA) = B \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(t\lambda_n) \end{pmatrix} B^{-1}.$$

Beispiel 1.61. *Die Matrix*

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

lässt sich diagonalisieren auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Also ist die Lösung des Beispiels der Störche, Frösche und Fliegen gegeben durch

$$\begin{pmatrix} S(t) \\ F(t) \\ f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(0) \\ F(0) \\ f(0) \end{pmatrix}.$$

Lemma 1.62 (Gronwall)**.** *Seien $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$, $A \in L^1([\alpha,\beta])$ eine nichtnegative Lebesgue integrable Funktion und $b, q \in L^\infty([\alpha,\beta])$ beschränkte messbare reelle Funktionen. Gilt die erste der folgenden Ungleichungen für fast alle $t \in [\alpha,\beta]$, dann auch die zweite:*

$$q(t) \le b(t) + \int_\alpha^t A(s)q(s)ds \quad \Longrightarrow \quad q(t) \le b(t) + \int_\alpha^t \exp\left(\int_s^t A(s')ds'\right) A(s)b(s)ds.$$

Beweis: Wir setzen die erste Ungleichung n mal in sich selber ein und erhalten

$$q(t) \le b(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_\alpha^t A(t_1) \int_\alpha^{t_1} A(t_2) \cdots \int_\alpha^{t_{k-1}} A(t_k)b(t_k)dt_k \cdots dt_1 +$$
$$+ \int_\alpha^t A(t_1) \int_\alpha^{t_1} A(t_2) \cdots \int_\alpha^{t_{n-1}} A(t_n)q(t_n)dt_n \cdots dt_1.$$

Weil A nicht negativ ist, folgen diese Ungleichungen induktiv aus der ersten Ungleichung. Durch vertauschen der Indizes und der Integrationen erghalten wir

$$\int_\alpha^t A(t_n) \int_\alpha^{t_n} A(t_{n-1}) \cdots \int_\alpha^{t_2} A(t_1)q(t_1)dt_1 \cdots dt_n = \int_{\alpha<t_1<\cdots<t_n} A(t_n)\cdots A(t_1)q(t_1)dt_n \cdots dt_1$$
$$= \int_\alpha^t \int_{t_1<t_2<\cdots<t_n\le t} A(t_n)\cdots A(t_2)A(t_1)q(t_1)dt_n \cdots dt_1.$$

Alle Permutationen von $t_2, \ldots, t_n$ bilden die offenen Teilmengen

$$\{(t_2, \ldots, t_n) \in [t_1, t]^{n-1} \mid t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq t\}$$

auf disjunkte Mengen ab, die zusammen das gleiche Volumen wir $[t_1, t]^{n-1}$ haben. Weil $A(t_2) \cdots A(t_n)$ sich durch die Permutationen nicht ändert erhalten wir

$$q(t) \leq b(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\left(\int_{t_1}^{t} A(s')ds'\right)^{k-1}}{(k-1)!} A(s)b(s)ds + \int\limits_{\alpha}^{t} \frac{\left(\int_{t_1}^{t} A(s')ds'\right)^{n-1}}{(n-1)!} A(s)q(s)ds.$$

Mit $\int_{t_1}^{t} A(s)ds \leq \|A\|_{L^1([\alpha,\beta])}$ erhalten wir für $n \to \infty$ die zweite Ungleichung. **q.e.d.**

Lemma 1.63. *(Fundamentallösung) Sei $A : I \to \mathcal{L}(V)$ eine stetige Funktion von einem Intervall in die stetigen linearen Abbildungen des Banachraums V. Dann konvergiert*

$$F(t) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{t_0}^{t} A(t_n) \int\limits_{t_0}^{t_n} A(t_{n-1}) \ldots \int\limits_{t_0}^{t_2} A(t_1)dt_1 \ldots dt_n$$

auf $t \in I$ gegen die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{F}(t) = A(t)F(t) \text{ mit } F(t_0) = \mathbb{1}.$$

Beweis: Wegen dem Gronwallschen Lemma läßt sich mit $b = \mathbb{1}$ die Norm $\|F(t)\|$ durch die Reihe von $\exp\left(\int_{t_0}^{t} \|A(s)\|ds\right)$ abschätzen und konvergiert auf kompakten Teilmengen von I gleichmäßig. Aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung folgt

$$\dot{F}(t) = A(t) + \sum_{n=1}^{\infty} A(t) \int\limits_{t_0}^{t} A(t_{n-1}) \int\limits_{t_0}^{t_{n-1}} A(t_{n-2}) \ldots \int\limits_{t_0}^{t_2} A(t_1)dt_1 \ldots dt_{n-1} = A(t)F(t). \textbf{q.e.d.}$$

Diese Lösung $F(t)$ heißt Fundamentallösung des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t) = A(t)q(t) \text{ mit } \qquad q(t_0) = q_0.$$

Offenbar ist dann $F(t)$ die lineare Abbildung, die jedem q_0 den entsprechenden Wert der Lösung an der Stelle t zuordnet. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung der beiden Anfangswertprobleme

$$\dot{q}(t) = A(t)q(t) + b(t) \text{ mit } q(t_0) = q_0 \text{ und } \qquad \dot{q}(t) = A(t)q(t) + b(t) \text{ mit } q(t_1) = q_1$$

ist die Fundamentallösung des ersten Anfangswertproblems an der Stelle t_1 als lineare Abbildung invers zu der Fundamentallösung des zweiten Anfangswertproblems an der Stelle t_0. Deshalb ist die Fundamentallösung eine einmal stetig differenzierbare Abbildung von I in die invertierbaren Elemente von $\mathcal{L}(V)$.

Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t) = A(t)q(t) \text{ mit } \qquad q(s) = b(s)$$

ist dann gegeben durch

$$q_s(t) = F(t)F^{-1}(s)b(s).$$

Wegen der Variation der Parameter ist dann die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t) = A(t)q(t) + b(t) \text{ mit } \qquad q(t_0) = q_0$$

gegeben durch

$$q(t) = F(t)q_0 + \int_{t_0}^{t} F(t)F^{-1}(s)b(s)ds.$$

Deshalb genügt es zum Lösen einer gewöhnlichen, linearen Differentialgleichung, die Fundamentallösung zu bestimmen. Wenn alle $A(t)$ miteinander kommutieren:

$$A(t)A(t') = A(t')A(t) \text{ für alle } t, t' \in I,$$

wie das im Fall $V = \mathbb{R}$ gilt, dann ist $F(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right)$, im Allgemeinen aber nicht. Im endlichdimensionalen Fall, wenn wir A durch $n \times n$ Matrizen darstellen können, ist allerdings folgende Beziehung sehr nützlich.

Satz 1.64. *(Spur und Determinante) Sei $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ eine stetige Abbildung des offenen Intervalls I in die $\mathbb{K}$-wertigen $n \times n$ Matrizen. Dann gilt für die Fundamentallösung*

$$F : I \to \mathbb{K}^{n\times n} \textit{ mit } \quad \dot{F}(t) = A(t)F(t) \textit{ und } \quad F(t_0) = \mathbb{1},$$

$$\frac{d}{dt}\det(F(t)) = \operatorname{Spur}(A(t))\det(F(t)) \textit{ mit } \quad \det(F(t_0)) = 1.$$

Also hat $\det(F(t))$ auf I keine Nullstellen und $F(t)$ ist für alle $t \in I$ invertierbar.

Beweis: Weil die Determinante $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ ein Polynom in den Einträgen der entsprechenden Matrix ist, ist sie eine analytische Funktion. Wir zeigen zunächst, dass die Ableitung dieser Abbildung bei allen invertierbaren Matrizen A gegeben ist durch

$$\frac{d}{dt}\det(A+tB)\mid_{t=0} = \det(A)\,\mathrm{Spur}(A^{-1}B).$$

Es gilt nämlich

$$\det(A+tB) = \det(A)\det(\mathbb{1}+tA^{-1}B).$$

Offenbar ist $\det(\mathbb{1}+tA^{-1}B)$ ein Polynom in t vom Grad n, und die Koeffizienten sind Polynome in den Koeffizienten von $A^{-1}B$. Weil die Unterdeterminanten von $\mathbb{1}$ genau dann nicht verschwinden, wenn die genausovielte Spalte wie Zeile gestrichen wird und dann die Unterdeterminanten gleich Eins sind, gilt

$$\det(\mathbb{1}+tA^{-1}B) = 1 + t\,\mathrm{Spur}(A^{-1}B) + \text{Terme höherer Ordnung}.$$

Damit folgt

$$\left.\frac{d}{dt}\det(A+tB)\right|_{t=0} = \det(A)\,\mathrm{Spur}(A^{-1}B).$$

Wenden wir diese Formel auf $F(t)$ an, so erhalten wir mit der Kettenregel an den Stellen, an denen $F(t)$ invertierbar ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\det(F(t)) &= \mathrm{Spur}(\dot F(t)F^{-1}(t))\det(F(t))\\ &= \mathrm{Spur}(A(t))\det(F(t)).\end{aligned}$$

Dann folgt aus dem Beispiel, dass $\det(F(t))$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot q(t) = \mathrm{Spur}(A(t))q(t) \text{ mit } q(t_0) = 1$$

ist. Also gilt

$$\det(F(t)) = \exp\left(\int_{t_0}^{t}\mathrm{Spur}(A(s))ds\right)$$

q.e.d.