# Kapitel 3

# Stabilität von dynamischen Systemen

Es ist das Hauptziel dieses Kapitels, ein möglichst gutes Verständnis des qualitativen Verhaltens des von einer gewöhnlichen Differentialgleichung erzeugten Flusses in der Nähe eines kritischen Punktes zu gewinnen. Diese Fragestellung steht in engem Zusammenhang mit dem Langzeitverhalten, der sog. Stabilitätstheorie.

Zuerst beweisen wir das "Prinzip der linearisierten Stabilität", welches es erlaubt, aus dem Spektrum des in einem kritischen Punkt linearisierten Vektorfeldes Aufschluß über die Ljapunovstabilität dieses kritischen Punktes zu bekommen. Im letzten Paragraphen dieses Kapitels betrachten wir, in Analogie zur Klassifizierung linearer Flüsse, hyperbolische kritische Punkte eines differenzierbaren Vektorfeldes. Wir beweisen den Linearisierungssatz von Grobmann und Hartmann sowie den Satz über die lokalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten.

## 3.1 Die Klassifikation linearer Flüsse

In diesem Abschnitt untersuchen wir zunächst die Stabilität von dynamischen Systemen, die dem Fluss lineare Vektorfelder auf einem endlichdimensionalen Vektorraum $E$ entsprechen. Solche dynamischen Systeme haben immer die Null als Fixpunkt. Wir werden später sehen, dass in einer Umgebung von Fixpunkten, das Verhalten von allgemeineren dynamischen Systemen durch solche Systeme beschrieben werden kann. Deshalb ist es sinnvoll sich zunächst auf solche Systeme einzuschränken. Die entsprechenden dynamischen Systeme sind dann durch einen linearen Fluss gegeben:

$$\Phi(t, x) = e^{tA}x, \quad A \in \mathcal{L}(E)$$

Wir betrachten zuerst zweidimensionale reelle Systeme

$$\dot{x} = Ax \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2).$$

Aus dem ersten Kapitel wissen wir, daß die Lösungen durch das Spektrum $\sigma(A)$ und die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte charakterisiert sind und daß wir sinnvollerweise $A$ diagonalisieren bzw. auf Jordansche Normalform bringen:

$$\dot{y} = By \quad \text{mit} y = Px \quad \text{und} \quad B = P^{-1}AP$$

und einem geeigneten invertierbaren $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ betrachten. Dazu müssen wir verschiedene Fälle unterscheiden:
**1. Fall:** $A$ hat reelle nichtverschwindende Eigenwerte verschiedenen Vorzeichens. In diesem Fall ist $A$ halbeinfach und es existiert ein invertierbares $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ mit

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda < 0 < \mu.$$

Also wird der von $B$ erzeugte Fluß $e^{tB}y$ (in $y$-Koordinaten!) durch

$$t \to (e^{\lambda t}y^1, e^{\mu t}y^2)$$

gegeben. In diesem Fall sagt man, der Nullpunkt sei ein Sattel.
**2.Fall:** Alle Eigenwerte haben negative Realteile. Dann benutzen wir das Folgende Stabilitätskriterium. In diesem Fall sagt man, der Nullpunkt sei eine Senke oder er sei asymptotisch stabil.

**Satz 3.1** (Stabilitätskriterium)**.** *Für $A \in \mathcal{L}(E)$ auf einem endlichdimensionalen Banachraum $E$ konvergiert* $\exp(tA)$ *in $\mathcal{L}(E)$ im Grenzwert $t \to \infty$ genau dann gegen Null, wenn alle Eigenwerte (komplexen Nullstellen des charakteristischen Polynoms) von $A$ negativen Realteil haben.*

**Beweis:** Wir bringen $A$ auf Jordansche Normalform. Weil alle Normen eines endlichdimensionalen Vektorraumes äquivalent sind, genügt es die Aussage für die Jordansche Normalform von $A$ zu beweisen. Wegen Übungsaufgabe1.60 sind dann alle Lösungen von $\dot{x} = Ax$ Linearkombinationen von $x(t) = t^n \exp(t\lambda)x$, wobei $\lambda$ ein Eigenwert von $A$ ist. Weil $|\exp(t\lambda)| = \exp(t\Re(\lambda))$ gilt, konvergieren diese Lösungen für $t \to \infty$ genau dann gegen Null, wenn die Realteile von allen Eigenwerten negativ sind. **q.e.d.**

Wir betrachten nun verschiedene Unterfälle:
**(a) Die Eigenwerte sind reell:** $\lambda \leq \mu < 0$. Wenn $A$ diagonalisierbar ist, dann folgt

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Dann erhält man $y(t) = (e^{\lambda t}y^1, e^{\mu t}y^2)$. Ist $A$ nicht diagonalisierbar, dann muß notwendigerweise $\lambda = \mu$ sein. So hat $A$ die Jordansche Normalform

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda < 0.$$

Die Matrix $P$ ist dabei reell $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, da $\lambda$ reell ist. Dann hat die transformierte Gleichung $\dot{y} = By$ die Lösungen $y(t) = y_1(t), y_2(t))$ mit

$$y_1(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta t e^{\lambda t} \qquad\qquad y_2(t) = \beta e^{\lambda t}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Man kann beispielweise (bei geeigneten Konstanten $\alpha$ und $\beta$) $y_1 = \xi$ als Funktion von $y_2 = \eta$ ausdrücken. Dann erhalten wir

$$\xi = (\alpha/\beta)\eta + (1/\lambda)\eta \log(\eta/\beta) \quad \text{mit} \quad \lambda < 0.$$

In allen diesen Fällen sagt man, 0 sei ein (stabiler) Knoten, wobei man im letzten Fall oft von einem uneigentlichen Knoten und im Fall von $B = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda)$ von einem Focus spricht.

**(b) Die Eigenwerte sind komplex:** also konjugiert komplex, wie wir bereits wissen. Ist $A_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ die Komplexifizierung von $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, so folgt aus $A_{\mathbb{C}}z = \lambda z$ durch Konjugation $A_{\mathbb{C}}\bar{z} = \bar{\lambda}\bar{z}$, d.h. $A_{\mathbb{C}}z = \lambda z \Leftrightarrow A_{\mathbb{C}}\bar{z} - \bar{\lambda}\bar{z}$. Ist also $z$ ein Eigenvektor von $A_{\mathbb{C}}$ zum Eigenwert $\lambda$ so besitzt $\mathbb{C}^2$ die Basis

$$\{z, \bar{z}\} = \{x + iy, x - iy\} \quad \text{mit} \quad x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Wegen $\lambda \notin \mathbb{R}$ ist dann $\{x, y\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Ferner gilt mit $\lambda = a + i\omega$:

$$Ax + iAy = A_{\mathbb{C}}(x + iy) = (\alpha + i\omega)(x + iy) = \alpha x - \omega x + i(\alpha y + \omega x),$$

$$Ax = \alpha x - \omega y \qquad\qquad Ay = \omega x + \alpha y.$$

Wir sehen: hat $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ einen nichtreellen Eigenwert $\lambda = \alpha + i\omega$, mit $\omega \neq 0$, so ist auch $\bar{\lambda} = \alpha - i\omega$ ein Eigenwert und es existiert ein invertierbares $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ mit

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix}, \quad \omega > 0.$$

Um $e^{tB}$ zu berechnen, identifizieren wir $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ durch $(\xi, \eta) \leftrightarrow \xi + i\eta$. Wegen

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\xi & - & \omega\eta \\ \omega\xi & + & \alpha\eta \end{pmatrix} \leftrightarrow (\alpha + i\omega)(\xi + i\eta),$$

entspricht bei dieser Identifikation $B$ der Multiplikation mit $\lambda = \alpha + i\omega$. Wenn wir $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ mit $\mathbb{C}$ wie üblich durch $M \in \mathcal{L}(\mathbb{C}) \leftrightarrow m = M1 \in \mathbb{C}$ identifizieren, erhalten wir einen $\mathbb{R}$-Algebraisomorphismus $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \leftrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Folglich entspricht $B^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ der Matrix zu $\lambda^n$ und somit $e^{tB}$ der Matrix zu $e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))$, also

$$e^{tB} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}.$$

Geometrisch bewirkt also $e^{tB}$ eine Streckung mit dem Faktor $e^{\lambda t}$ und eine Drehung im mathematisch positiven Sinn um den Winkel $\omega$. In diesem Fall sagt man, der Ursprung sei ein stabiler Strudel oder eine stabile Spirale.

**3.Fall: Alle Eigenwerte haben positive Realteile.** Durch die Zeitumkehr können wir diesen Fall in den zweiten transformieren. Es folgt für jede nichttriviale Lösung

$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = \infty \text{ und } \lim_{t\to-\infty} u(t) = 0$$

Man sagt, der Ursprung sei eine Quelle. Wegen $e^{tA} = e^{-t(-A)}$ erhält man die Phasenporträts von Fall 2 durch Umkehren der Pfeile. Man spricht dann von instabilen Foci, Knoten und Strudeln.

**4.Fall: Die Eigenwerte sind rein imaginär.** In diesem Fall kann $A$ auf die Form

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega > 0,$$

transformiert werden. Folglich gilt

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix},$$

und alle Lösungen sind periodisch mit der Periode $2\pi/\omega$. In den $y$-Koordinaten sind die Orbits Kreise mit 0 als Mittelpunkt, in den $x$-Koordinaten Ellipsen. In diesem Fall sagt man, 0 sei ein Zentrum oder ein Wirbel.

Die Information über die Eigenwerte von $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ ist in dem charakteristischen Polynom

$$\det(A - \lambda) = \lambda^2 - \operatorname{Spur}(A)\lambda + \det(A)$$

enthalten. Mit der Diskriminante $D = \operatorname{Spur}^2(A) - 4\det(A)$ werden die Eigenwerte durch $\frac{1}{2}(\operatorname{Spur}(A) \pm \sqrt{D})$ gegeben. Folglich sind die Eigenwerte reell, wenn $D \geq 0$ gilt, und sie sind komplex mit negativem Realteil für $\operatorname{Spur}(A) < 0$ und $D < 0$, usw.. Also kann man die geometrische Information über die Phasenporträts von $\dot{x} = Ax$, die vom charakteristischen Polynom abgeleitet werden kann, zusammenfassen:

**Sattel:** $\det(A) < 0$.

**Senken:** $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) < 0$.

> **Knoten:** $\mathrm{Spur}^2(A) > 4\det(A)$.
> **Wirbel:** $\mathrm{Spur}^2(A) < 4\det(A)$.

**Zentren:** $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) = 0$.

**Quellen:** $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) > 0$.

> **Knoten:** $\mathrm{Spur}^2(A) > 4\det(A)$.
> **Wirbel:** $\mathrm{Spur}^2(A) < 4\det(A)$.

## 3.2 Hyperbolische lineare Flüsse

Im Folgenden wollen wir die sogenannten hyperbolischen linearen Flüsse einführen. Sie sind im Wesentlichen dadurch charakterisiert, dass sie keine Grenzfälle enthalten die durch sehr kleine Störungen ihr Verhalten dramatisch verändern können. Wir betrachten dafür den allgemeinen Fall eines beliebigen $\mathbb{K}$- Vektorraums $E$ der Dimension $m < \infty$. Für $A \in \mathcal{L}(E)$ nennen wir dann kurz $e^{tA}$ den von $A$ erzeugten linearen Fluß auf $E$ (statt der präziseren Bezeichnung

$$\Phi : \mathbb{R} \times E \to E, \quad (t, x) \mapsto e^{tA}x,$$

die wir früher verwendeten). Der Nullpunkt von $E$, der ein kritischer Punkt von $e^{tA}$ ist (der einzige, wenn $A$ injektiv ist), heißt eine Senke (bzw. Quelle), wenn

$$\lim_{t\to\infty} e^{tA}x = 0 \qquad \text{bzw.} \lim_{t\to-\infty} e^{tA}x = 0 \qquad \text{für alle } x \in E \setminus \{0\}.$$

Wegen dem Stabilitätskriterium ist 0 genau dann eine Senke (bzw. Quelle), wenn gilt

$$\Re(\lambda) < 0 \quad \text{bzw. } \Re(\lambda) > 0 \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \sigma(A).$$

Ist 0 eine Senke (bzw. Quelle), so sagt man auch, der lineare Fluß $e^{tA}$ sei eine Kontraktion (bzw. Expansion). Wir wollen nun zeigen, daß bei einer Kontraktion (bzw. Expansion) jede Flußlinie $\varphi_x(t) = e^{tA}x$ mit $x \neq 0$ für $t \to \infty$ exponentiell gegen 0 (bzw. "gegen $\infty$") konvergiert. Dazu benötigen wir das folgende wichtige Lemma.

Ist $M \subset \mathbb{C}$ nicht leer und ist $\beta \in \mathbb{R}$, so schreiben wir im folgenden

$$\Re(M) < \beta,$$

wenn $\Re(m) < \beta$ für alle $m \in M$ gilt. Analog sind verwandte Ungleichungen zu interpretieren. Ferner verstehen wir unter einer Hilbertnorm $\|\cdot\|$ eine aus einem Skalarprodukt abgeleitete Norm, d.h. für ein geeignetes Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $E$ gilt $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

**Lemma 3.2.** *Für $A \in \mathcal{L}(E)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelte $\Re(\sigma(A)) < \alpha$. Dann existiert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf $E$ mit* $\|e^{tA}\| \leq e^{\alpha t}$ *für alle* $t \in \mathbb{R}_+$.

**Beweis:** Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann wissen wir, daß $A$ bzgl. einer geeigneten Basis die Form

$$A = D + N \quad \text{mit} \quad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_k) = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_m)$$

und $N^m = 0$ sowie $DN = ND$. Außerdem können wir die Basis $\{e_1, \ldots, e_m\}$ von $E$ so wählen, daß gilt: $Ne_j = e_{j-1}$ oder 0. Ersetzen wir $e_j$ durch $a_j = \delta^j e_j$ mit $\delta > 0$, so bleibt $D$ unverändert, und für $N$ gilt: $Na_j = \delta a_{j-1}$ oder 0. Also hat die Matrix von $N$ bezüglich der Basis $\{a_1, \ldots, a_m\}$ höchstens in der oberen Nebendiagonalen von Null verschiedene Elemente, und zwar die Zahlen $\delta$. Wenn wir nun die zu dieser Basis gehörige euklidische Norm verwenden, erhalten wir zu jedem $\epsilon > 0$ eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf $E$ mit $\|N\| \leq \epsilon$. Für $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ und $e^{tD}$ gilt offensichtlich

$$\|D\| = \max_{1\leq j\leq m} |\mu_j| \quad \|e^{tD}\| = \max_{1\leq j\leq m} |e^{t\mu_j}| = \max_{1\leq j\leq m} e^{t\Re(\mu_j)} \leq e^{t(a-\epsilon)},$$

wenn wir $\epsilon > 0$ so wählen, daß $\Re(\lambda) \leq \alpha - \epsilon$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$ ist. Also gilt für $t > 0$

$$\|e^{tA}\| = \|e^{tD+tN}\| = \|e^{tD}e^{tN}\| \leq \|e^{tD}\| \cdot \|e^{tN}\| \leq e^{t(a-\epsilon)}e^{t\|N\|} \leq e^{t(a-\epsilon)}e^{t\epsilon} = e^{\alpha t}$$

Da der Realteil eines komplexen Skalarproduktes ein reelles Skalarprodukt ist, induziert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_{E_\mathbb{C}}$, die auf der Komplexifizierung $E_\mathbb{C}$ eines reellen Vektorraumes $E$ definiert ist, auf dem reellen Untervektorraum $E$ eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_E$. Da für $A \in \mathcal{L}(E)$ und $x \in E$ offensichtlich $\|Ax\|_E = \|A_\mathbb{C}x\|_{E_\mathbb{C}}$ gilt, folgt $\|A\|_E = \|A\|_{E_\mathbb{C}}$. Also erhalten wir die Behauptung im reellen Fall ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) durch Anwenden der obigen Resultate auf die Komplexifizierung. **q.e.d.**

**Korollar 3.3.** **(i)** *Gilt $\Re(\sigma(A)) < \alpha$, so existiert eine Konstante $\beta \geq 0$ mit*

$$\|e^{tA}\| \leq \beta e^{\alpha t} \quad \textit{für alle} \quad t \geq 0.$$

**(ii)** *Gilt $\Re(\sigma(A)) > \alpha$, so existiert eine Konstante $\gamma > 0$ mit*

$$\|e^{tA}x\| \geq \gamma e^{\alpha t}\|x\| \quad \textit{für} \quad x \in E \textit{ und } t \geq 0.$$

**Beweis:** (i) folgt aus der Äquivalenz aller Normen auf dem endlichdimensionalen Raum $\mathcal{L}(E)$ und dem vorangehenden Lemma. In (ii) folgt aus dem vorangehenden Lemma wegen $\sigma(-A) = -\sigma(A)$ für eine geeignete Hilbertnorm $\|\cdot\|$

$$\|e^{-tA}\| = \|e^{t(-A)}\| \leq e^{-\alpha t} \quad \text{für} \quad t \geq 0.$$

$$\|x\| = \|e^{-tA}e^{tA}x\| \leq \|e^{-tA}\|\|e^{tA}x\| \leq e^{-\alpha t}\|e^{tA}x\| \quad \text{für} \quad x \in E \text{ und } t \geq 0.$$

Daraus folgt (ii) wieder wegen der Äquivalenz der Normen. **q.e.d.**

Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir das folgende Theorem über das exponentielle Abklingen bzw. Anwachsen der Flußlinien im Falle einer Senke bzw. Quelle.

**Satz 3.4.** *Es Sei $A \in \mathcal{L}(E)$. Dann sind äquivalent:*

**(i)** *Der Nullpunkt einer Senke.*

**(ii)** *Es existieren $\alpha > 0$ und $\beta \geq 0$ mit $\|e^{tA}x\| \leq \beta e^{-\alpha t}\|x\|$ für alle $t \geq 0$ und $x \in E$.*

**(iii)** *Es existieren eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf $E$ und $\alpha > 0$ mit $\|e^{tA}\| \leq e^{-\alpha t}$ für $t \geq 0$.*

*Ebenso sind äquivalent:*

**(i')** *Der Nullpunkt ist eine Quelle.*

**(ii')** *Es existieren $\alpha > 0$ und $\beta \geq 0$ mit $\|e^{tA}x\| \geq \beta e^{\alpha t}\|x\|$ für alle $t \geq 0$ und $x \in E$.*

**(iii')** *Es existieren eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ und $\alpha > 0$ mit $\|e^{tA}x\| \geq e^{-\alpha t}\|x\|$ für $t \geq 0$.*

**Beweis:** Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem vorangehenden Korollar. **q.e.d.**

Im folgenden bezeichnen wir mit $m(\lambda)$ die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda$ von $A \in \mathcal{L}(E)$. Außerdem zerlegen wir das Spektrum $\sigma(A)$ disjunkt,

$$\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_n(A) \cup \sigma_u(A),$$

$$\begin{aligned} \text{in das “stabile Spektrum”:} \quad & \sigma_s(A) = \{\lambda \in \sigma(A) | \Re(\lambda) < 0\}, \\ \text{das “neutrale Spektrum”:} \quad & \sigma_n(A) = \{\lambda \in \sigma(A) | \Re(\lambda) = 0\}, \\ \text{und das “instabile Spektrum”:} \quad & \sigma_u(A) = \{\lambda \in \sigma(A) | \Re(\lambda) > 0\}. \end{aligned}$$

**Definition 3.5.** *Der von $A$ erzeugte Fluß $e^{tA}$ heißt hyperbolisch, wenn $\sigma_n(A) = \emptyset$, also*

$$\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_u(A).$$

Das folgende Theorem liefert die mehrdimensionale Verallgemeinerung des zweidimensionalen Sattels.

**Satz 3.6.** *Sei $e^{tA}$ ein hyperbolischer linearer Fluß. Dann gibt es eine Zerlegung*

$$E = E_s \oplus E_u \qquad \text{mit} \quad A = A_s \oplus A_u \qquad \text{und} \quad e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u},$$

*derart, daß $e^{tA_s}$ eine Kontraktion und $e^{tA_u}$ eine Expansion sind. Sie ist eindeutig mit*

$$dim(E_s) = \sum_{\lambda \in \sigma_s(A)} m(\lambda) \qquad dim(E_u) = \sum_{\lambda \in \sigma_u(A)} m(\lambda).$$

**Beweis:** Wir betrachten zuerst den komplexen Fall: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir setzen

$$E_s = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_s(A)} E_\lambda \qquad E_u = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_u(A)} E_\lambda \qquad \text{mit } E_\lambda = \{x \in E \mid (A - \lambda)^{m(\lambda)} x = 0\}.$$

Dann ist $E = E_s \oplus E_u$, und diese Zerlegung zerlegt $A = A_s \oplus A_u$. Offenbar gilt

$$\sigma(A_s) = \sigma_s(A) \quad \text{und} \quad \sigma(A_u) = \sigma_u(A).$$

Nun folgt aus dem Stabilitätskriterium, daß $e^{tA_s}$ eine Kontraktion bzw. $e^{tA_u}$ eine Expansion ist. Offenbar gelten die Formeln für die Dimensionen. Es bleibt noch, die Eindeutigkeit zu zeigen. Aus dem Satz über die Jordansche Normalform wissen wir, dass ein Unterraum von $E$ genau dann invariant unter $A$ ist, wenn er eine direkte Summe von invarianten Unterräumen folgender Zerlegung ist:

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} E_\lambda.$$

Die Eigenwerte der Einschränkung von $A$ auf einen invarianten Unterraum von $E$ bestehen aus den Eigenwerten $\lambda \in \sigma(A)$, für die der entsprechende invariante Unterraum von $E_\lambda$ nicht trivial ist. Insbesondere besitzt jeder invariante Unterraum von $E$ eine Zerlegung in eine direkte Summe von invarianten Unterräumen von $E_s$ und von $E_u$. Wegen dem Stabilitätskriterium ist jeder invariante Unterraum von $E$, auf dem die Einschränkung von $A$ eine Kontraktion ist, ein invarianter Unterraum von $E_s$, und jeder invariante Unterraum von $E$, auf dem die Einschränkung von $A$ eine Expansion ist, ein Unterraum von $E_u$. Daraus folgt die Eindeutigkeit der Zerlegung.

Es sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann können wir das bereits Bewiesene auf die Komplexifizierung $E_\mathbb{C} = E + iE$ und $A_\mathbb{C} \in \mathcal{L}(E_\mathbb{C})$ anwenden. Also gilt

$$E_\mathbb{C} = (E_\mathbb{C})_s \oplus (E_\mathbb{C})_u \text{ und } A_\mathbb{C} = (A_\mathbb{C})_s \oplus (A_\mathbb{C})_u,$$

derart, daß $e^{t(A_\mathbb{C})_s}$ eine Kontraktion und $e_u^{t(A_\mathbb{C})}$ eine Expansion sind. Wir setzen

$$E_s = (E_\mathbb{C})_s \cap E \text{ und } E_u = (E_\mathbb{C})_u \cap E.$$

Ein komplexer Unterraum von $E_{\mathbb{C}}$ ist die Komplexifizierung von der Schnittmenge $E_{\mathbb{C}} \cap E$, wenn er invariant unter der komplexen Konjugation ist. Die komplexe Konjugation bildet $E_\lambda$ auf $\{x \in E \mid (A - \bar{\lambda})^{m(\lambda)} x = 0\}$ ab. Deshalb ist eine direkte Summe von solchen Unterräumen genau dann invariant unter der komplexen Konjugation, wenn die entsprechende Teilmenge von $\sigma(A)$ invariant unter der komplexen Konjugation ist. Also sind $(E_{\mathbb{C}})_s$ und $(E_{\mathbb{C}})_u$ invariant unter der komplexen Konjugation und damit die Komplexifizierungen von $E_s$ und $E_u$. Die Behauptung folgt aus der entsprechenden Behauptung im komplexen Fall. **q.e.d.**

Die invarianten Untervektorräume $E_s$ bzw. $E_u$ des hyperbolischen linearen Flusses $e^{tA}$ heißen stabile bzw. instabile Untervektorräume des Flusses. Ein hyperbolischer linearer Fluß kann eine Kontraktion ($E_u = \{0\}$) oder eine Expansion ($E_s = \{0\}$) sein.

Es erhebt sich die Frage, was an den Phasenporträts dieses Abschnitts charakteristisch ist. Ist es möglich, durch Einführen geeigneter nichtlinearer Koordinaten einen Sattel in einen Knoten oder einen stabilen Knoten in eine instabile Spirale zu verwandeln? Wir werden zeigen, daß dies nicht der Fall ist, daß es aber wohl möglich ist, einen stabilen Knoten in einen stabilen Strudel zu transformieren. Dazu müssen wir zuerst den Begriff äquivalenter Flüsse präzisieren.

**Definition 3.7.** *Seinen $\Phi$ und $\tilde{\Phi}$ zwei lokale Flüsse auf den topologischen Räumen $\Omega$ und $\tilde{\Omega}$, mit den Definitionsbereichen $W \subset \mathbb{R} \times \Omega$ und $\tilde{W} \subset \mathbb{R} \times \tilde{\Omega}$. Die Lokalen Flüsse $\Phi$ und $\tilde{\Phi}$ heißen flußäquivalent, wenn es einen orientierungserhaltenden Automorphismus $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und einen Homöomorphismus $\Psi$ von $\Omega$ auf $\tilde{\Omega}$ gibt, so dass $\alpha \times \Psi$ ein Hoöomorphismus von $W$ auf $\tilde{W}$ ist, und $\Psi \circ \Phi = \tilde{\Phi} \circ (\alpha \times \Psi)$ auf $W$ gilt.*

Jedes Paar $(\alpha, \Psi)$ mit diesen Eigenschaften heißt eine (topologische) Flußäquivalenz. Folglich ist $(\alpha, \Psi)$ genau dann eine topologische Flußäquivalenz, wenn das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \Omega \subset W & \xrightarrow{\Phi} & \Omega \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha \times \Psi} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi} \\ \mathbb{R} \times \tilde{\Omega} \subset \tilde{W} & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & \tilde{\Omega}. \end{array}$$

Hierbei ist $\alpha \times \Psi$ durch $\alpha \times \Psi : W \to \mathbb{R} \times \Omega$, mit $(\alpha \times \Psi)(t, x) = (\alpha(t), \Psi(x))$ definiert.

Sind $\Omega$ und $\tilde{\Omega}$ offene Teilmengen vom $\mathbb{R}^n$, und $\Psi$ stetig differenzierbar mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung, so heißen $\Phi$ und $\tilde{\Phi}$ stetig differenzierbar äquivalent und $(\alpha, \Psi)$ ist eine $C^1$-Flußäquivalenz. Sind $\Omega$ und $\tilde{\Omega}$ Banachräume und $\Psi$ linear, so heißen $\Phi$ und $\tilde{\Phi}$ linear äquivalent und $(\alpha, \Psi)$ ist eine lineare Flußäquivalenz.

**Bemerkung 3.8.** *Ein orientierungserhaltender Automorphismus von $\mathbb{R}$ ist von der Form*

$$\alpha(t) = \alpha \cdot t \quad \textit{für alle} \quad t \in \mathbb{R}$$

*mit einer eindeutig bestimmten positiven Zahl $\alpha$. Und jedes $\alpha > 0$ definiert dadurch einen orientierungserhaltenden Automorphismus definiert. Wir im folgenden den Automorphismus $\alpha$ stets mit der durch ihn bestimmten positiven Zahl identifizieren.*

*Offenbar sind (topologische) Flußäquivalenz bzw. $C^1$-Flußäquivalenz bzw. lineare Flußäquivalenz Äquivalenzrelationen.*

*Außerdem bildet eine Flussäquivalenz $\Psi$ die Orbits von $\Phi$ auf die Orbits von $\tilde{\Phi}$ ab, und zwar unter Erhaltung der Orientierung.*

Es ist nun leicht, lineare Flüsse linear zu klassifizieren, d.h. die Äquivalenzklassen der linearen Flußäquivalenz zu bestimmen.

**Satz 3.9.** *Seien $A$ und $B$ lineare Abbildungen auf endlichdimensionalen Vektorräumen. Dann sind $e^{tA}$ und $e^{tB}$ genau dann linear flußäquivalent, wenn für ein $\alpha > 0$ die beiden linearen Abbildungen $A$ und $\alpha B$ die gleiche Jordansche Normalform haben.*

**Beweis:** Ist $(\alpha, \Psi)$ eine lineare Flußäquivalenz zwischen $e^{tA}$ und $e^{tB}$, so gilt

$$\Psi \circ e^{tA} = e^{\alpha t B} \circ \Psi \quad \iff \quad \Psi \circ e^{tA} = e^{\alpha t B} \circ \Psi \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Da der Generator des Flusses eindeutig bestimmt ist, ist das zu $A = \Psi^{-1} \circ \alpha B \circ \Psi$ äquivalent. Also haben $A$ und $\alpha B$ die gleiche Jordansche Normalform.

Umgekehrt folgt daraus, dass $A$ und $\alpha B$ für ein $\alpha > 0$ die gleiche Jordansche Normalform haben, dass es ein invertierbares $\Psi$ gibt mit $A = \Psi^{-1} \alpha B \Psi$. **q.e.d.**

Der nächste Satz zeigt, daß die differenzierbare Klassifizierung nichts Neues ergibt.

**Satz 3.10.** *Für lineare Abbildungen $A$ und $B$ auf endlichdimensionalen Vektorräumen sind $e^{tA}$ und $e^{tB}$ genau dann $C^1$-flußäquivalent, wenn sie linear flußäquivalent sind.*

**Beweis:** Es sei $(\alpha, \Psi)$ eine $C^1$-Flußäquivalenz zwischen $e^{tA}$ und $e^{tB}$. Damm führt der stetig differenzierbare Homöomorphismus $\Psi \in C^1$ dem kritischen Punkt $x = 0$ des Flusses $e^{tA}$ in einen kritischen Punkt $y$ des Flusses $e^{tB}$ über, also in ein $y$ mit $e^{sB} y = y$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Bezeichnen wir mit $T$ die Translation $x \to x - y$, so stellt $(\alpha, T \circ \Psi)$ eine Flußäquivalenz zwischen $e^{tA}$ und $e^{tB}$ dar wegen

$$\begin{aligned} T \circ \Psi \circ e^{tA} x &= \Psi \circ e^{tA} x - y = e^{\alpha t B} \Psi(x) - y \\ &= e^{\alpha t B} \Psi(x) - e^{\alpha t B} y = e^{\alpha t B} (T \circ \Psi)(x) \quad \text{für alle } x \in E, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Außerdem ist $T \circ \Psi(0) = 0$ und $C = (T \circ \Psi)'(0)$ eine invertierbare lineare Abbildung. Durch Differenzieren der Beziehung in $x = 0$ folgt aus

$$(T \circ \Psi) \circ e^{tA} x = e^{\alpha t B} (T \circ \Psi)(x) \quad \Longrightarrow \quad C e^{tA} = e^{\alpha t B} C \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Also ist $(\alpha, C)$ eine lineare Flußäquivalenz zwischen $e^{tA}$ und $e^{tB}$. Die Umkehrung ist offensichtlich. **q.e.d.**

Für die wesentlich schwierigere topologische Klassifizierung linearer Flüsse benötigen wir das folgende

**Lemma 3.11.** *Die Realteile aller Eigenwerte von $A \in \mathcal{L}(E)$ auf einem endlichdimensionalen Vektorraum $E$ seien negativ, und $\Phi$ sei der von $A$ erzeugte lineare Fluß auf $E$, d.h. $\Phi(t, \cdot) = e^{tA}$ für $t \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf $E$, derart, daß*

$$\bar{\Phi} : \mathbb{R} \times \mathbb{S} \to E \setminus \{0\}, \quad (t, x) \mapsto \Phi(t, x)$$

*auf $\mathbb{R} \times \mathbb{S} = \mathbb{R} \times \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ ein Homöomorphismus ist.*

**Beweis:** Wähle $\alpha > 0$ so, dass die Realteile aller Eigenwerte von $A$ kleiner als $-\alpha$ sind. Dann existiert nach Lemma 3.2 eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf $E$ mit

$$\|e^{tA}\| \leq e^{-\alpha t} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Es sei $y \in E \setminus \{0\}$ beliebig. Dann ist $\Phi(t, y) = e^{tA} y \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ wegen $y = \Phi(-t, \Phi(t, y))$ und wegen Satz 3.4

$$\|y\| = \|\Phi(t, \cdot) \circ \Phi(-t, y)\| \leq e^{-\alpha t} \|\Phi(-t, y)\|, \quad \text{also} \quad \|\Phi(-t, y)\| \geq e^{\alpha t} \|y\|$$

für alle $t \geq 0$. Daraus ergibt sich unmittelbar, daß jeder nichtkritische Orbit die Sphäre $\mathbb{S}$ in genau einem Punkt schneidet. Also ist

$$\bar{\Phi} : \mathbb{R} \times \mathbb{S} \to E \setminus \{0\}$$

eine stetige Bijektion. Es bleibt zu zeigen, daß die Umkehrabbildung stetig ist.

Es sei also $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $E \setminus \{0\}$, die gegen $y \in E \setminus \{0\}$ konvergiert. Dann existieren eine Folge $(t_k)$ in $\mathbb{R}$ und eine Folge $(x_k)$ in $\mathbb{S}$ mit $y_k = \Phi(t_k, x_k)$. Da $\mathbb{S}$ kompakt ist können wir durch Übergang zu einer geeigneten Teilfolge annehmen, daß $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen $x \in \mathbb{S}$ konvergiert. Durch Auswahl einer weiteren Teilfolge können wir auch annehmen, daß $(t_k)$ gegen $t \in \bar{\mathbb{R}}$ konvergiert. Gilt $t \in (0, \infty]$, so folgt für große $k$

$$\|y_k\| = \|\Phi(t_k, x_k)\| \leq e^{-\alpha t_k} \|x_k\| = e^{-\alpha t_k},$$

also $\|y\| \leq e^{-\alpha t}$, woraus wegen $y \neq 0$ folgt, daß $t$ endlich ist. Ist $t \in [-\infty, 0)$, so folgt für große $k$

$$\|y_k\| = \|\Phi(t_k, x_k)\| \leq e^{-\alpha t_k} \|x_k\| = e^{-\alpha t_k},$$

also $\|y\| \geq e^{-\alpha t} = e^{\alpha |t|}$, woraus sich $t > -\infty$ ergibt. Somit ist $t \in \mathbb{R}$, und aus der Stetigkeit von $\Phi$ folgt $y = \Phi(t, x) = \bar{\Phi}(t, x)$. Da dies für jede konvergente Teilfolge gilt, sehen wir, daß die Umkehrabbildung $\bar{\Phi}^{-1}$ (d.h. die "Projektion" von $y \in E \setminus \{0\}$ längs des Orbits $\gamma(y)$ auf $\mathbb{S}$) stetig ist. **q.e.d.**

Das obige Lemma besagt geometrisch, daß jeder nichtkritische Orbit die Einheitssphäre $\mathbb{S}$ einer geeigneten Hilbertnorm transversal schneidet. Das folgende Lemma besagt anschaulich, daß die Orbits einer Kontraktion "geradegebogen" werden können.

**Lemma 3.12.** *Die Realteile aller Eigenwerte von $A \in \mathcal{L}(E)$ auf einem endlichdimensionalen Vektorraum $E$ seien negativ. Dann ist $e^{tA}$ flußäquivalent zu $e^{-t}\mathbb{1}_E$ mit einer Flußäquivalenz der Form $(1, \Psi)$.*

**Beweis:** Wegen dem vorangehenden Lemma existiert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf $E$, derart, daß für die zugehörige Einheitssphäre $\mathbb{S}$ gilt:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{S} \to E \setminus \{0\}, \quad (t, x) \mapsto e^{tA}x = \Phi(t, x)$$

ist ein Homöomorphismus. Es sei nun $S$ die Einheitssphäre bzgl. der ursprünglichen Norm $\|\cdot\|_E$ von $E$. Dann definieren wir eine Bijektion $\Psi : E \to E$ durch $\Psi(0) = 0$ und

$$\Psi(x) = e^t \frac{\Phi(t, x)}{\|\Phi(t, x)\|_E}, \quad x \in E \setminus \{0\},$$

wobei $t$ die nach dem vorangehenden Lemma eindeutig bestimmte reelle Zahl ist mit $\Phi(t, x) \in \mathbb{S}$. Da die Abbildung

$$\bar{\Psi} : \mathbb{S} \to S, \quad y \mapsto \frac{y}{\|y\|_E}$$

offensichtlich ein Homöomorphismus ist und da $\Psi(x) = e^t \bar{\Psi} \circ \Phi(t, x)$ gilt, ist aufgrund von dem vorangehenden Lemma $\Psi$ ein Homöomorphismus von $E \setminus \{0\}$ auf sich. Um zu zeigen, daß $\Psi$ stetig ist in $0 \in E$, sei $V$ eine beschränkte Umgebung von 0. Dann existiert ein $t_0 > 0$ mit $e^{-t}S \subset V$ für alle $t \geq t_0$. Es sei nun

$$U = \left\{ x \in E \mid \|x\| < \tfrac{1}{\|e^{-t_0 A}\|} \right\}.$$

Dann gilt für $x \in U$

$$\|\Phi(-t_0, x)\| = \|e^{t_0 A}x\| \leq \|e^{-t_0 A}\| \cdot \|x\| < 1.$$

Wegen dem vorangehenden Lemma gilt für $t \geq 0$ mit dem entsprechenden $\alpha$

$$\|\Phi(t - t_0, x)\| = \|\Phi(t, \Phi(-t_0, x))\| \leq e^{-\alpha t}\|\Phi(-t_0, x)\| < e^{-\alpha t} \leq 1.$$

Wir sehen, daß $t < -t_0$ für das eindeutig bestimmte $t = t(x)$ mit $\Phi(t,x) \in \mathbb{S}$ gilt. Also folgt $\Psi(U) \subset V$ aus der Definition von $\Psi$. Somit ist $\Psi$ stetig in 0. Analog zeigt man, daß $\Psi^{-1}$ in 0 stetig ist. Folglich ist $\Psi$ ein Homöomorphismus von $E$ auf sich.

Damit $(1,\Psi)$ eine Flußäquivalenz ist, muß gezeigt werden, daß

$$\Psi \circ \Phi(t,x) = e^{-t}\Psi(x) \quad \text{für alle } x \in E \text{ und alle } t \in \mathbb{R}$$

gilt. Für $x = 0$ ist dies trivialerweise richtig. Für $x \neq 0$ ist $x = \Phi(s,y)$ für ein geeignetes Paar $(s,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}$. Hieraus folgt aufgrund der Definition von $\Psi$ für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\Psi \circ \Phi(t,x) = \Psi \circ \Phi(t,\Phi(s,y)) = \Psi \circ \Phi(t+s,y) \quad &= e^{-(t+s)}\frac{y}{\|y\|_E} = e^{-t}\left(e^{-s}\frac{y}{\|y\|_E}\right) \\ = e^{-t}\left(e^{-s}\frac{\Phi(-s,x)}{\|\Phi(-s,x)\|_E}\right) = e^{-t}\Psi(x). \quad &\textbf{q.e.d.}\end{aligned}$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir den zentralen Klassifikationssatz für hyperbolische Flüsse beweisen. Dabei definieren wir für eine lineare Abbildung $A \in \mathcal{L}(E)$

$$m_-(A) = \sum_{\lambda \in \sigma_s(A)} m(\lambda) \qquad\qquad m_+(A) = \sum_{\lambda \in \sigma_u(A)} m(\lambda).$$

**Satz 3.13.** *Zwei hyperbolische lineare Flüsse $e^{tA}$ und $e^{tB}$ sind genau dann flußäquivalent, wenn $m_\pm(A) = m_\pm(B)$ gilt. Die Dimensionen der stabilen und instabilen Unterräume sind die einzigen Invarianten der Flußäquivalenz solcher Flüsse.*

**Beweis:** $\Leftarrow$: Wegen Satz 3.6 existiert eine direkte Summenzerlegung

$$E = E_s \oplus E_u, \quad e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u}$$

mit $\dim(E_s) = m_-(A)$, derart, daß $e^{tA_s}$ eine Kontraktion und $e^{tA_u}$ eine Expansion sind. Aufgrund des Stabilitätskriteriums und dem vorangehenden Lemma existiert eine Flußäquivalenz $(1,\Psi_s)$ zwischen $e^{tA_s}$ und $e^{-t}\mathbb{1}_{E_s}$. Analog erhalten wir wegen $e^{tA_u} = e^{-t(-A_u)}$ eine Flußäquivalenz $(1,\Psi_u)$ zwischen $e^{tA_u}$ und $e^{t}\mathbb{1}_{E_u}$. Nun verifiziert man unmittelbar, daß $(1,\Psi_s \oplus \Psi_u)$ mit

$$\Psi_s \oplus \Psi_u : E_s \oplus E_u \to E_s \oplus E_u, \quad x + y \mapsto \Psi_s(x) + \Psi_u(y)$$

eine Flußäquivalenz zwischen $e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u}$ und $e^{-t}\mathbb{1}_{E_s} \oplus e^{t}\mathbb{1}_{E_u}$ ist.

Analog existieren eine direkte Summenzerlegung

$$F = F_s \oplus F_u, e^{tB_s} \oplus e^{tB_u}$$

und eine Flußäquivalenz $(1, \tilde{\Psi}_s \oplus \tilde{\Psi}_u)$ zwischen $e^{-t}\mathbb{1}_{F_s} \oplus e^t\mathbb{1}_{F_u}$. Wegen $\dim E_s = \dim F_s$ existieren ein Isomorphismus $T_s : E_s \to F_s$ und ein Isomorphismus $T_u : E_u \to F_u$. Dann ist $(1, T_s \oplus T_u)$ eine Flußäquivalenz zwischen den Flüssen $e^{-t}\mathbb{1}_{E_s} \oplus e^t\mathbb{1}_{E_u}$ und $e^{-t}\mathbb{1}_{F_s} \oplus e^t\mathbb{1}_{F_u}$. Also folgt die Flußäquivalenz von $e^{tA}$ und $e^{tB}$ aus der Transitivität.

$\Rightarrow$: Ist $(\alpha, \Psi)$ eine Flußäquivalenz zwischen $e^{tA}$ und $e^{tB}$, so folgt aus

$$\Psi(e^{tA}x) = e^{\alpha t B}\Psi(x) \quad \text{für alle } (t,x) \in \mathbb{R} \times E$$

daß $\Psi[E_s] \subset F_s$ und somit, aus Symmetriegründen, auch $\Psi^{-1}[F_s] \subset E_s$ gilt (weil der Homöomorphismus $\Psi$ die Konvergenz gegen 0 für $t \to \infty$ erhält). Also bildet $\Psi$ den Vektorraum $E_s$ homöomorph auf den Vektorraum $F_s$ ab. Nun folgt aus dem Gebietsvarianzsatz der Topologie (z.B. Dugundji), daß $\dim(F_s) = \dim(E_s)$ ist. Also erhalten wir $m_\pm(A) = m_\pm(B)$ aus der Eindeutigkeit der Zerlegung in Satz 3.6. **q.e.d.**

**Bemerkung 3.14. (i)** *Die topologische Klassifizierung linearer Flüsse $e^{tA}$ mit $\sigma(A) \subset i\mathbb{R}$, d.h. mit $\sigma(A) = \sigma_n(A)$ ist ein ungelöstes Problem.*

**(ii)** *Es ist nicht schwer zu sehen, daß die Menge der $A \in \mathcal{L}(E)$ mit $\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_u(A)$ offen und dicht in $\mathcal{L}(E)$ ist, d.h. die Eigenschaft, einen hyperbolischen Fluß zu erzeugen, ist eine generische Eigenschaft, sie kommt fast allen $A \in \mathcal{L}(E)$ zu. Folglich können wir mit dem vorangehenden Satz fast alle linearen Flüsse klassifizieren (was allerdings nichts nützt, wenn wir uns speziell für solche Flüsse interessieren, die nicht hyperbolisch sind).*

**(iii)** *Ist $e^{tA}$ ein hyperbolischer linearer Fluß, so ist er insbesondere flußäquivalent zu dem einfachen "mehrdimensionalen Sattel".*

**Übungsaufgabe 3.15. (i)** *Beschreiben Sie die Phasenporträts eines ebenen linearen Flusses in den im Text nicht behandelten Fällen, d.h. wenn mindestens ein Eigenwert Null ist.*

**(ii)** *Beschreiben Sie die Phasenporträts des linearen Flusses $e^{tA}$ mit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, d.h. des dreidimensionalen linearen Flusses, unter den verschiedenen möglichen Verteilungen der Eigenwerte von $A$ in .*

**(iii)** *Veranschaulichen Sie sich das Phasenporträt des linearen Flusses $e^{tA}$ mit $A = \mathrm{diag}(\omega_1, -\omega_1, \omega_2, -\omega_2) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.*

**(iv)** *Beweisen Sie, daß $\{A \in \mathcal{L}(E) | \sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset\}$ offen und dicht in $\mathcal{L}(E)$ ist.*

## 3.3 Stabilität linearer Flüsse

Zunächst verallgemeinern wir die Definition 1.10 auf nicht autonome gewöhnliche Differentialgleichungen.

**Definition 3.16.** *Sei $\Omega \subset E$ eine offene Umgebung der Null eines endlichdimensionalen Banachraums und $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f$ eine lokal Lipschitzstetige Funktion auf $J \times \Omega$. Für alle $(\tau, \xi) \in J \times \Omega$ besitzt dann das folgende Anfangswertproblem eine eindeutige maximale Lösung $t \mapsto u(t, \tau, \xi)$ auf einem Intervall $[\tau, t^+(\tau, \xi))$:*

$$\dot{x}(t) = f(t, x) \quad \textit{mit} \quad x(\tau) = \xi.$$

*Für alle $t \in J$ sei $f(t, 0) = 0$, und damit die konstante Funktion $0$ eine Lösung der entsprechenden Anfangswertprobleme.*

**(i)** *Die Lösung $0$ heißt (Ljapunov-)stabil, wenn für jede Umgebung $U \subset \Omega$ von $0$ und jedes $\tau \in J$ eine (kleinere) Umgebung $V$ von $0$ existiert, so dass $u(t, \tau, \xi) \in U$ für alle $\xi \in V$ und alle $t \geq \tau$ gilt. Andernfalls heißt sie instabil.*

**ii)** *Die Lösung $0$ heißt attraktiv, wenn für jedes $\tau \in J$ eine Umgebung $V$ von $0$ existiert, so dass die Lösungen $t \mapsto u(t, \tau, \xi)$ auf $[\tau, \infty)$ definiert ist, und im Grenzwert $t \to \infty$ gegen $0$ konvergiert.*

**(iii)** *Die Lösung $0$ heißt asymptotische stabil, wenn sie stabil und attraktiv ist.*

Schließlich sagt man, die Nulllösung sei gleichmäßig stabil bzw. gleichmäßig attraktiv, wenn die Umgebung $V$ bzw. $W$ unabhängig von $\tau \in J$ gewählt werden können und wenn der Grenzwert gleichmäßig bzgl. $(\tau, \xi) \in J \times W$ existiert. Die letzte Forderung bedeutet, daß zu jeder Umgebung $\tilde{U}$ von $0$ ein $T > 0$ existiert mit $u(t, \tau, \xi) \in \tilde{U}$ für $t > \tau + T$ und alle $(\tau, \xi) \in J \times W$. Die Nulllösung ist gleichmäßig asymptotisch stabil, wenn sie gleichmäßig stabil und gleichmäßig attraktiv ist.

**Bemerkung 3.17. (i)** *Wenn wir für $U$ eine Umgebung von $0$ mit $dist(U, \partial\Omega) > 0$ wählen, impliziert Satz 1.26, daß $t^+(\tau, \xi) = \infty$ für alle $\xi \in V$ gilt. Folglich ist die Nulllösung genau dann stabil, wenn zu jeder Umgebung $U$ von $0$ und jedem $\tau \in J$ eine Umgebung $V$ von $0$ existiert mit*

$$t^+(\tau, \xi) = \infty \textit{ und } u(t, \tau, \xi) \in U \quad \textit{für alle } (t, \xi) \in [\tau, \infty) \times V.$$

*Wenn die Nulllösung instabil ist, kann es, bei festem $\tau \in J$, beliebig nahe bei $0$ Anfangswerte $\xi$ mit $t^+(\tau, \xi) < \infty$ geben.*

**(ii)** *Der Begriff der Stabilität ist eine Verschärfung der "stetigen Abhängigkeit von den Anfangswerten". Sie bedeutet, daß* $\lim_{\xi\to 0} u(t,\tau,\xi) = 0$ *für jedes* $\tau \in J$ *gleichmäßig auf kompakten Teilintervallen von* $J$ *gilt.*

**(iii)** *Die Begriffe der Stabilität und Attraktivität sind unabhängig von* $\tau \in J$ *in folgendem Sinn: wenn* $x = 0$ *stabil bzw. attraktiv bzgl.* $\tau \in J$ *ist, so auch bzgl.* $\sigma \in J$*. In der Tat, wenn* $x = 0$ *stabil bzgl.* $\tau \in J$ *ist, existiert zu jeder Umgebung* $U$ *von* $0$ *eine Umgebung* $V$ *von* $0$ *mit* $x(t,\tau,\xi) \in U$ *für* $(t,\xi) \in [\tau,\infty) \times V$*. Ist* $\sigma < t$*, so existiert eine Umgebung* $\tilde{V}$ *von* $0$ *mit* $u(t,\sigma,\eta) \in V$ *für* $(t,\eta) \in [\sigma,\tau] \times \tilde{V}$*. Dies folgt leicht aus der Stetigkeit von* $u$ *und der Kompaktheit des Intervalls* $[\sigma,\tau]$*. Also gilt* $u(t,\sigma,\eta) \in U$ *für* $(t,\eta) \in [\sigma,\infty) \times \tilde{V}$*.*

*Für* $\tau < \sigma$ *ist* $\tilde{V} = u(\sigma,\tau,V)$ *eine Umgebung von* $0$*, da* $u(\sigma,\tau,.)$ *ein Homöomorphismus ist. Also gilt auch in diesem Fall* $u(t,\sigma,\eta) \in U$ *für* $(t,\eta) \in [\sigma,\infty) \times \tilde{V}$*.*

**(iv)** *Stabilität und Attraktivität sind unabhängige Begriffe. Z.B. ist ein Zentrum stabil, aber nicht attraktiv. Umgekehrt kann man zeigen, daß es ein autonomes in* $\mathbb{R}^2$ *gibt, dessen Nulllösung attraktiv und instabil ist.*

**(v)** *Ist* $f$ *entweder unabhängig von* $t$ *oder periodisch in* $t$*, so impliziert die Stabilität bzw. die asymptotische Stabilität die Gleichmäßigkeit der entsprechenden Eigenschaften. Der einfache Beweis ist dem Leser überlassen.*

**(vi)** *Ist* $\bar{u} = u(.,\tau_0.\xi_0)$ *eine globale Lösung von* $\dot{x} = f(t,x)$*, so besitzt die Differentialgleichung*

$$\dot{y} = f(t, y + \bar{u}(t)) - f(t, \bar{u}(t))$$

*die globale Nulllösung und* $y$ *mißt die Abweichung von* $\bar{u}$*. Deshalb heißt die Lösung* $\bar{u}$ *stabil bzw. attraktiv etc., wenn die triviale Lösung die entsprechenden Eigenschaften besitzt. Ist insbesondere* $f$ *unabhängig von* $t$ *und gilt* $f(x_0) = 0$*, d.h. ist* $x_0$ *ein kritischer Punkt, so heißt* $x_0$ *stabil bzw. attraktiv etc., wenn die konstante Lösung* $\bar{u}(t) = x_0, t \in \mathbb{R}$ *die entsprechenden Eigenschaften hat.*

**(vii)** *Die obigen Bemerkungen gelten auch im unendlichdimensionalen Fall.*

Wir studieren zuerst die Stabilität autonomer linearer Differentialgleichungen.

**Satz 3.18.** *Es sei* $A \in \mathcal{L}(E)$*. Dann ist die Nulllösung der linearen Differentialgleichung* $\dot{x} = Ax$ *genau dann stabil, wenn* $\sigma_u(A) = \emptyset$ *und für* $\lambda \in \sigma_n(A)$ *die Einschränkung von* $A$ *auf den Eigenraum* $\{x \in E \mid A - \lambda)^{m(\lambda)}x = 0\}$ *diagonalisierbar ist.*

*Die Nulllösung ist genau dann asymptotisch stabil, wenn* $\Re\sigma(A) < 0$ *gilt.*

**Beweis:** Es genügt den Fall $\tau = 0$, d.h. den Fluß $e^{tA}\xi, \xi \in E$, zu betrachten Es sei $\alpha = \sup\{\|e^{tA}\| \mid t \in \mathbb{R}_+\} < \infty$. Dann folgt für $\epsilon > 0$

$$\|e^{tA}\xi\| \leq \|e^{tA}\| \cdot \|\xi\| < \epsilon \quad \text{für alle } (t,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times B(0, \tfrac{\epsilon}{\alpha}),$$

d.h. die Stabilität der Nulllösung. Ist $x_1, \ldots, x_m$ eine Basis von $E$, so folgt mit $\xi = \sum \xi^i x_i$ aus $e^{tA}\xi = \sum \xi^i e^{tA} x_i$, der Äquivalenz der Normen und der Definition der Operatornorm, daß $a < \infty$ genau dann gilt, wenn jede der Lösungen $e^{tA}x_i, i = 1, \ldots, m$, beschränkt ist. Dies ist genau denn der Fall, wenn jede Lösung von $\dot{x} = Ax$ beschränkt ist, also beide Bedingungen erfüllt sind. Ist eine Bedingung verletzt, so folgt die Existenz eines $x \in E$ mit $\|e^{tA}x\| \to \infty$ für $t \to \infty$. Da dann auch $\|e^{tA}(\epsilon x)\|$ für jedes $\epsilon > 0$ unbeschränkt wächst, ist die Nulllösung instabil. Der zweite Teil der Behauptung folgt unmittelbar aus dem bereits Bewiesenen und dem Stabilitätskriterium. **q.e.d.**

Als nächstes betrachten wir "gestörte Systeme" der Gestalt

$$\dot{x} = Ax + g(t,x),$$

wobei $g$ eine in einem geeigneten Sinne kleine Störung ist. Genauer soll im folgenden gezeigt werden, daß unter der Voraussetzung

$$g(t,x) = \mathrm{o}(\|x\|) \quad \text{für} \quad x \to 0,$$

gleichmäßig bzgl. $t \in J$, das gestörte System nahezu dasselbe asymptotische Stabilitätsverhalten wie die ungestörte "Linearisierung" $\dot{x} = Ax$ besitzt.

Wir beginnen mit einer einfachen aber wichtigen Bemerkung. Ist $g \in C(J \times \Omega, E)$ in der zweiten Variablen lokal Lipschitz stetig und $u(t) = u(t,\tau,\xi)$ die maximale Lösung der Differentialgleichung auf $t \in J(\tau,\xi)$, so besitzt die inhomogene lineare Gleichung

$$\dot{x} = Ax + g(t, u(t)) \qquad \text{für } t \in J(\tau,\xi),$$

die eindeutig bestimmte Lösung $u$ auf $J(\tau,\xi)$ mit $u(\tau) = \xi$. Also folgt aus der Variation der Konstanten, daß $u$ folgender nichtlinearen Integralgleichung genügt:

$$u(t) = e^{(t-\tau)A}\xi + \int_{\tau}^{t} e^{(t-s)A} g(s, u(s))ds, \qquad \text{für } t \in J(\tau,\xi).$$

Diese Integralgleichung ist die Grundlage für den folgenden - im wesentlichen auf Ljapunov zurückgehenden - Stabilitätssatz (sowie für zahlreiche Existenzbeweise im analogen Fall unendlichdimensionaler Evolutionsgleichungen, z.B. bei parabolischen Systemen).

**Satz 3.19** (Asymptotische Stabilität)**.** *Für* $A \in \mathcal{L}(E)$ *gelte* $\Re\sigma(A) < 0$. *Ferner sei* $g \in C(J \times \Omega, E)$ *in der zweiten Variablen lokal Lipschitz stetig mit*

$$g(t,x) = \mathrm{o}(\|x\|) \quad \text{für } x \to 0 \text{ gleichmäßig bzgl. } t \in J.$$

*Dann ist die Nulllösung der gestörten Gleichung gleichmäßig asymptotisch stabil:*

$$\dot{x} = Ax + g(t,x).$$

**Beweis:** Es existieren positive Konstanten $\alpha$ und $\beta$ mit $\|e^{tA}\| \leq \beta e^{-at}$ für alle $t \geq 0$, wobei wir $\beta > 1$ annehmen dürfen. Also folgt die Abschätzung

$$\|u(t)\| \leq \beta e^{-\alpha(t-\tau)}\|\xi\| + \beta \int_\tau^t e^{-\alpha(t-s)}\|g(s,u(s))\|ds \quad \text{für } \tau \leq t < t^+(\tau,\xi).$$

Es sei nun $\epsilon \in (0,\alpha)$ beliebig. Es existiert ein $\delta \in (0,\epsilon)$ mit

$$\|g(t,x)\| \leq \frac{\epsilon}{\beta}\|x\| \quad \text{für } \|x\| \leq \delta \text{ und } t \geq \tau.$$

Für $\|\xi\| < \frac{\delta}{\beta}$ und $t \in [\tau, t^+(\tau,\xi))$ gilt dann $\|u(t)\| < \delta < \epsilon$ und die Nulllösung ist gleichmäßig stabil. Andernfalls gibt es $\xi \in B(0,\frac{\delta}{\beta})$ und $\bar{t} \in (\tau, t^+(\tau,\xi))$ mit

$$\bar{t} = \inf\{t \in [\tau, t^+(\tau,\xi))\|u(t)| = \delta\}.$$

Dann folgt für $\tau \leq t \leq \bar{t}$

$$\|u(t)\| \leq \delta e^{-\alpha(t-\tau)} + \epsilon \int_\tau^t e^{-\alpha(t-s)}\|u(s)\|ds \quad \Leftrightarrow \quad e^{\alpha t}\|u(t)\| \leq \delta e^{\alpha\tau} + \epsilon \int_\tau^t e^{\alpha s}\|u(s)\|ds$$

Mithilfe von Lemma 1.62 erhalten wir die Abschätzung

$$\|u(t)\| \leq \delta e^{-(\alpha-\epsilon)(t-\tau)} \text{ für } \tau \leq t \leq \bar{t}, \quad \text{also insbesondere } \delta = |u(\bar{t})| \leq \delta e^{-(\alpha-\epsilon)(\bar{t}-\tau)} < \delta,$$

was unmöglich ist. Dann ist die Nulllösung gleichmäßig attraktiv ist. **q.e.d.**

Zum Beweis des entsprechenden Instabilitätssatzes benötigen wir das folgende

**Lemma 3.20.** *Für* $A \in \mathcal{L}(E)$ *gelte* $\alpha < \Re\sigma(A) < \beta$. *Dann existiert eine Hilbertnorm* $\|\cdot\|$ *auf* $E$, *so daß für das zugehörige innere Produkt* $\langle\cdot,\cdot\rangle$

$$\alpha\|x\|^2 \leq \Re\langle Ax, x\rangle \leq \beta\|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in E \text{ gilt.}$$

**Beweis:** Wir betrachten zuerst den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wie in dem Beweis von Lemma 3.2 gezeigt hat $A$ die Form $A = D + N$ mit $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_m)$, wobei $\mu_1, \ldots, \mu_m$ die mit Vielfachheit gezählten Eigenwerte von $A$ sind. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es außerdem eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf $E$ gibt mit $\|N\| \leq \epsilon$. Wir wählen $\epsilon > 0$ und $\|\cdot\|$ mit

$$\epsilon \leq \min\{\beta - \max(\Re\sigma(A)), \min(\Re\sigma(A)) - \alpha\}.$$

Wegen $\langle Dx, x\rangle = \sum \mu_j |x^j|^2$, wobei $x^1, \ldots, x^m$ die Koordinaten von $x$ bzgl. der (zur Konstruktion der Norm) verwendeten Orthonormalbasis sind, gilt

$$\min[\Re\sigma(A)]\|x\|^2 \leq \Re\langle Dx, x\rangle \leq \max[\Re\sigma(A)]\|x\|^2.$$

Da ferner $\Re\langle Ax, x\rangle = \Re\langle Dx, x\rangle + \Re\langle Nx, x\rangle$ und $|\Re\langle Nx, x\rangle| \leq \|N\| \cdot \|x\|^2 \leq \epsilon\|x\|^2$ ist, folgt die Behauptung aus der Wahl von $\epsilon$ und aus

$$\Re\langle Dx, x\rangle - \epsilon\|x\|^2 \leq \Re\langle Ax, x\rangle \leq \Re\langle Dx, x\rangle + \epsilon\|x\|^2.$$

Es sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann können wir das eben Bewiesene auf die Komplexifizierung $A_{\mathbb{C}}$ in $E_{\mathbb{C}}$ anwenden. Die Hilbertnorm $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ auf $E_{\mathbb{C}}$ induziert (durch Restriktion auf $E \subset E_{\mathbb{C}}$) eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf $E$ (vgl. den Beweis von Lemma 3.2). Für die zugehörigen Skalarprodukte erhalten wir

$$\Re(\xi|\eta)_{\mathbb{C}} = \frac{\|\xi + \eta\|_{\mathbb{C}}^2 - \|\xi - \eta\|_{\mathbb{C}}^2}{4} \quad \text{für alle } \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}} \quad \text{bzw.}$$

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} \quad \text{für alle } x, y \in E. \quad \text{Hieraus folgt}$$

$$\alpha\|x\|^2 = \alpha\|x\|_{\mathbb{C}}^2 \leq \Re\langle A_{\mathbb{C}}x, x\rangle_{\mathbb{C}} = \langle Ax, x\rangle \leq \beta\|x\|_{\mathbb{C}}^2 = \beta\|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in E.$$ **q.e.d.**

**Satz 3.21** (Instabilität)**.** *Der Operator $A \in \mathcal{L}(E)$ besitze mindestens einen Eigenwert mit positivem Realteil und $g \in C(J \times \Omega, E)$ sei lokal Lipschitzstetig, so dass*

$$g(t, x) = o(\|x\|) \text{ für } x \to 0 \quad \text{gleichmäßig für } t \in J \text{ gilt.}$$

*Dann ist die Nulllösung der gestörten Gleichung $\dot{x} = Ax + g(t, x)$ instabil.*

**Beweis:** Nach Voraussetzung ist das instabile Spektrum $\sigma_u(A)$ nicht leer. Folglich existiert ein $\gamma$ mit $0 < \gamma < \Re\sigma_u(A)$. Wegen $\sigma(A - \gamma) = \sigma(A) - \gamma$ ist das neutrale Spektrum $\sigma_n(A_\gamma)$ von $A_\gamma = A - \gamma$ leer und $A_\gamma$ erzeugt einen hyperbolischen linearen Fluß $e^{tA_\gamma}$. Wegen Satz 3.6 gibt es eine direkte Summenzerlegung $E = E_- \oplus E_+$, welche $A_\gamma$ in $A_\gamma = (A_\gamma)_- \otimes (A_\gamma)_+$ zerlegt, so daß $\sigma_s(A_\gamma) = \sigma((A_\gamma)_-)$ und $\sigma_u(A_\gamma) = \sigma((A_\gamma)_+)$ gelten. Offensichtlich zerlegt diese Zerlegung auch den Operator $A$, $A = A_- \oplus A_+$, und $\sigma(A_+) = \sigma_u(A)$ sowie $\sigma(A_-) = \sigma_s(A) \cup \sigma_n(A)$. Es gilt also $\Re\sigma(A_-) \leq 0$ und

$\Re\sigma(A_+) > \alpha > 0$ für ein geeignetes $\alpha > 0$. Wir wählen nun $\beta \in (0, \alpha)$ fest. Dann existieren nach Lemma 3.2 Hilbertnormen $\|\cdot\|_+$ auf $E_+$ und $\| - \|_-$ auf $E_-$ so daß

$$\begin{aligned} \Re(A_- x_- | x_-)_- &\le \beta \|x_-\|_-^2 \quad \text{für alle } x_- \in E_- \quad \text{und} \\ \Re(A_+ x_+ | x_+)_+ &\ge \alpha \|x_+\|_+^2 \quad \text{für alle } x_+ \in E_+ \end{aligned}$$

gilt. Offensichtlich wird durch

$$\langle x_- + x_+, y_- + y_+ \rangle = \langle x_-, y_- \rangle_- + \langle x_+, y_+ \rangle_+$$

ein inneres Produkt auf $E = E_- \oplus E_+$ definiert und somit eine Norm $\|\cdot\|$ mit

$$\|x\|^2 = \|x_- + x_+\|^2 = \|x_-\|_-^2 + \|x_+\|_+^2 \quad \text{für alle } x = x_- + x_+ \in E.$$

Schließlich setzen wir

$$\Psi(x) = \frac{\|x_+\|^2 - \|x_-\|^2}{2} = \frac{\|Px\|^2 - \|Qx\|^2}{2} \quad \text{für alle } x \in E,$$

wobei $P : E \to E_+$ und $Q : E \to E_-$ die natürlichen Projektionen sind, und $\gamma = \frac{\alpha - \beta}{4}$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\|g(t,x)\| \le \gamma \|x\| \quad \text{für} \quad \|x\| \le \delta.$$

Es sei $u$ eine Lösung mit $\|u(0)\| < \delta$ und $\Psi(u(0)) > 0$. Dann erfüllt $\varphi(t) = \Psi(u(t))$

$$\begin{aligned} \dot\varphi(t) &= \Re\langle Pu(t), P\dot u(t)\rangle - \Re\langle Qu(t), Q\dot u(t)\rangle \\ &= \Re\langle A_+ u_+(t), u_+(t)\rangle - \Re\langle A_- u_-(t), u_-(t)\rangle \\ &\quad + \Re\langle Pu(t), Pg(t,u(t))\rangle - \Re\langle Qu(t), Qg(t,u(t))\rangle \\ &\ge \alpha\|Pu(t)\|^2 - \beta\|Qu(t)\|^2 - \gamma\|P\|\cdot\|Pu(t)\|\cdot\|u(t)\| - \gamma\|Q\|\cdot\|Qu(t)\|\cdot\|u(t)\| \end{aligned}$$

für $t \ge 0$ mit $\|u(t)\| \le \delta$. Weil für alle $x \in E$

$$\|Px\| \le \|x\| \qquad \|Qx\| \le \|x\| \qquad \text{gilt, folgt } \|P\| \le 1 \qquad \|Q\| \le 1, \qquad \text{und}$$

$$\dot\varphi(t) \ge \alpha\|Pu(t)\|^2 - \beta\|Qu(t)\|^2 - \gamma(\|Pu(t)\| + \|Qu(t)\|)\|u(t)\|.$$

Für kleine $t \ge 0$ folgt $\varphi(t) = \Psi(u(t)) \ge 0$ aus $\varphi(0) > 0$ und damit auch

$$\|Qu(t)\| \le \|Pu(t)\| \qquad\qquad \|u(t)\| \le 2\|Pu(t)\|.$$

Also erhalten wir

$$\dot\varphi(t) \ge (\alpha - 4\gamma)\|Pu(t)\|^2 - \beta\|Qu(t)\|^2 = 2\beta\varphi(t)$$

für alle $t \geq 0$ mit $\|u(t)\| \leq \delta$ und $\varphi(t) \geq 0$. Durch Integration folgt

$$\varphi(t) \geq \varphi(0)e^{2\beta t}$$

für die obigen Werte von $t$. Hieraus liest man insbesondere ab, daß $\varphi(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ mit $\|u(t)\| \leq \delta$ gilt. Mit anderen Worten: keine Lösung mit Anfangswert in $B(0,\delta) \cap \Psi^{-1}[0,\infty)$ verläßt den "Doppelkegel" $\Psi^{-1}[0,\infty)$, bevor sie den Ball $\bar{B}(0,\delta)$ verläßt. Also erreicht jede Lösung mit von Null verschiedenem Anfangswert in $B(0,\delta) \cap \Psi^{-1}[0,\infty)$ den Rand von $B(0,\delta)$, was die Instabilität der Nulllösung beweist. **q.e.d.**

Als Korollar der beiden vorangehenden Sätze erhalten wir das folgende Prinzip der linearisierten Stabilität für kritische Punkte autonomer Differentialgleichungen. Dieses fundamentale Prinzip ist eines der bekanntesten Stabilitäts- bzw. Instabilitätskriterien, das besonders in den angewandten Naturwissenschaften unzählige Anwendungen hat.

**Korollar 3.22.** *Es sei $f \in C^1(\Omega, E)$ mit $f(x_0) = 0$. Gilt dann $\Re\sigma(f'(x_0)) < 0$, so ist der kritische Punkt $x_0$ der autonomen Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ asymptotisch stabil. Hat $f'(x_0)$ einen Eigenwert $\lambda$ mit $\Re\lambda > 0$, so ist $x_0$ instabil.*

**Beweis:** Mit $A = f'(x_0) \in \mathcal{L}(E)$ und $g(y) = f(y + x_0) - f'(x_0)y$ gilt $g(y) = \mathrm{o}(\|y\|)$ für $y \to 0$ und $\dot{y} = f(y + x_0) = Ay + g(y)$. Also folgt die Behauptung unmittelbar aus den beiden vorangehenden Sätzen. **q.e.d.**

**Beispiel 3.23.** **(i)** *Wir betrachten das Räuber-Beute-Modell*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\alpha - \beta y - \lambda x)x \\ \dot{y} &= (\delta x - \gamma - \mu y)y \end{aligned}$$

*mit beschränktem Wachstum und positiven Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$. Dieses System besitzt die kritischen Punkte $(0,0), (0, -\frac{\gamma}{\mu}), (\frac{\alpha}{\lambda}, 0)$ und $\left(\frac{\alpha\mu+\beta\gamma}{\lambda\mu+\beta\delta}, \frac{\alpha\delta-\lambda\gamma}{\lambda\mu+\beta\delta}\right)$, wobei der letzte Punkt der Schnittpunkt $z$ der beiden Geraden $L$ und $M$ ist. Mit den offensichtlichen Identifikationen gilt*

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} a - \beta y - 2\lambda x & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma - 2\mu y \end{bmatrix}, \quad \textit{also}$$

$$f'(0,0) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix} \quad f'\left(0, -\frac{\gamma}{\mu}\right) = \begin{bmatrix} \alpha + \beta\frac{\gamma}{\mu} & 0 \\ * & \gamma \end{bmatrix} \quad f'\left(\frac{\alpha}{\lambda}, 0\right) = \begin{bmatrix} -\alpha & * \\ 0 & a\frac{\delta}{\lambda} - \gamma \end{bmatrix}$$

$$f'(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} -\lambda\xi & -\beta\xi \\ \delta\eta & -\mu\eta \end{bmatrix}$$

*mit $z = (\xi, \eta)$. Hieraus und aus dem Satz liest man ab, daß die kritischen Punkte $(0,0)$ und $(0, -\frac{\gamma}{\mu})$ stets instabil sind. Der kritische Punkt $(\frac{\alpha}{\lambda}, 0)$ ist asymptotisch* *stabil für* $\frac{\alpha}{\lambda} < \frac{\gamma}{\delta}$ *und instabil für* $\frac{\alpha}{\lambda} > \frac{\gamma}{\delta}$. *Für die Eigenwerte* $\lambda_{\frac{1}{2}}$ *von* $f'(\xi, \eta)$ *errechnet man leicht*

$$\lambda_{\frac{1}{2}} = \frac{-(\lambda\xi + \mu\eta) \pm \sqrt{(\lambda\xi + \mu\eta)^2 - 4\xi\eta + \delta\beta)}}{2}.$$

*Für den für die Anwendungen interessanten Fall, daß die Geraden L und M sich im positiven Quadranten schneiden, also* $\xi > 0$ *und* $\eta > 0$ *sind, liest man aus dieser Formel ab, daß* $\Re\sigma(f'(\xi, \eta)) < 0$ *gilt. Aus der expliziten Formel für* $(\xi, \eta)$ *folgt somit, daß für* $\frac{\alpha}{\lambda} > \frac{\gamma}{\delta}$ *der kritische Punkt* $z$ *asymptotisch stabil ist.*

**(ii)** *Setzen wir in (2=)* $\lambda = \mu = 0$, *so erhalten wir die Volterra- Lotka-Gleichungen von 1:*

$$\dot{x} = (\alpha - \beta y)x$$
$$\dot{y} = (\delta x - \gamma)y$$

*Dieses System besitzt die kritischen Punkte* $(0, 0)$ *und* $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$. *Aus den obigen Berechnungen (mit* $\lambda = \mu = 0$*) folgt wieder, daß* $(0, 0)$ *instabil ist. Ferner gilt*

$$f'\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \alpha\delta & 0 \end{bmatrix}.$$

*also* $\lambda_{\frac{1}{]2}} 0 \pm i\sqrt{\alpha\gamma}$. *In diesem Fall ist der kritische Punkt* $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ *ein Zentrum für die linearisierte Gleichung, aber für das nichtlineare System ist mit dem Satz keine Aussage möglich.*

**Bemerkung 3.24. (i)** *Der Satz macht keine Aussagen über das Stabilitätsverhalten im Fall* $\sigma(f'(x_0)) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$. *In diesem Fall hängt das Stabiltätsverhalten von den Termen höherer Ordnung ab. Um dies zu sehen, betrachten wir das System*

$$\dot{x} = -y + x^3$$
$$\dot{y} = x + y^3$$

*mit* $(0, 0)$ *als einzigen kritischen Punkt, der ein Zentrum für die Linearisierung ist. Für* $r^2 = x^2 + y^2$ *folgt* $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = -xy + x^4 + xy + y^4 = x^4 + y^4$, *also*

$$\dot{r} = \frac{x^4 + y^4}{r} \text{ für } r > 0.$$

*Folglich ist* $\dot{r} > 0$ *und die Orbits laufen von* $(0.0)$ *weg, d.h.* $(0, 0)$ *ist instabil.*

*Das System*

$$\dot{x} = -y - x^3$$
$$\dot{y} = x - y^3$$

*hat dieselbe Linearisierung im kritischen Punkt* $(0,0)$. *Nun folgt* $\dot{r} = -\frac{x^4+y^4}{r} < 0$ *für* $r > 0$. *Folglich "laufen die Orbits in* $(0,0)$ *hinein", d.h.* $(0,0)$ *ist stabil. Es ist leicht zu sehen, daß das Phasenporträt bei allgemeineren Störungen höherer Ordnung wesentlich komplizierte aussehen kann.*

**(ii)** *Das zentrale in dem Satz enthaltene Stabilitätsresultat ist eine lokale Aussage. Es enthält keine Angaben über den Einzugsbereich eines asymptotisch stabilen kritischen Punktes. Einige Aussagen in dieser Richtung werden wir in den folgenden Paragraphen kennenlernen.*

**(iii)** *Offensichtlich bleibt der Satz richtig, wenn* $f \in C(\Omega, E)$ *lokal Lipschitz stetig und in* $x_0$ *differenzierbar ist.*

**(iv)** *Unter geeigneten Voraussetzungen an den Evolutionsoperator* $U$ *der nichtautonomen linearen Gleichung* $\dot{x} = A(t)x$ *lassen sich verwandte Resultate auch für gestörte nichtautonome Gleichungen*

$$\dot{x} = A(t) + g(t,x)$$

*beweisen. Da solche Voraussetzungen in praktischen Fällen jedoch kaum zu verifizieren sind, werden wir uns im folgenden in erster Linie mit dem besonders wichtigen Fall autonomer Gleichungen befassen.*

**(v)** *Wenn wir in Beispiel nur die in den kritischen Punkten linearisierten Gleichungen betrachten, so liegen im Fall* $(0,0)$ *ein Sattel, im Fall* $(0, -\frac{\gamma}{\mu})$ *eine Quelle, im Fall* $(\frac{\alpha}{\lambda}, 0)$ *eine Senke für* $\frac{\alpha}{\lambda} < \gamma\delta$ *und ein Sattel für* $\frac{\alpha}{\lambda} > \frac{\gamma}{\delta}$, *sowie im Fall* $(\xi, \eta) \in (0,\infty)^2$ *eine Senke vor. Die Abbildungen von 1 zeigen, daß - anschaulich gesprochen - diese qualitativen Strukturen der Phasenporträts auch im nichtlinearen Fall in der Nähe der kritischen Punkte erhalten bleiben. Aus diesem Grund sagt man auch, der kritische Punkt* $x_0$ *des autonomen System* $\dot{x} = f(x)$ *sei eine Senke bzw. eine Quelle bzw. ein Sattelpunkt, wenn der Nullpunkt eine Senke bzw. eine Quelle bzw. ein Sattelpunkt für die linearisierte Gleichung*

$$\dot{y} = f'(x_0)y$$

*ist. Im letzten Abschnitt werden wir diese Ausdrucksweise mittels eines wichtigen allgemeinen "Linearisierungssatzes" rechtfertigen.*

**(vi)** *Um die obigen Stabilitätssätze praktisch anwenden zu können, benötigt man Kriterien, welche es erlauben festzustellen, ob* $\Re\sigma(A) < 0$ *gilt. Da die Eigenwerte die Wurzeln des charakteristischen Polynoms*

$$det(\lambda - A) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + a_2\lambda^{m-2} + \ldots + a_{m-1}\lambda + a_m$$

*sind (im Fall* $dim(E) = m$*)), möchte man möglichst aus den Koeffizienten eines Polynoms ablesen, ob alle Wurzeln in der negativen Halbebene liegen.*

*Es gibt eine Reihe von Kriterien dieser Art. Das bekannteste dürfte das folgende Routh-Hurwitz-Kriterium sein. Es sei*

$$p_m(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1}z + a_m$$

*ein Polynom mit reellen Koeffizienten, und für* $k = 1, \ldots, m$ *sei*

$$D_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & \ldots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \ldots & \ldots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & \ldots & a_{2k-3} \\ & 1 & a_2 & a_4 & \ldots & a_{2k-4} \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bigcirc & & & & \vdots & \end{bmatrix}$$

*mit* $a_j = 0$ *für* $j > m$*. Dann haben alle Wurzeln von* $p_m$ *genau dann negative Realteile, wenn folgende Ungleichungen erfüllt sind:*

$$a_k > 0 \text{ und } D_k > 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots, m.$$

**Übungsaufgabe 3.25. (i)** *Zeigen sie, daß das Phasenporträt des gestörten linearen Systems*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + xr^2 sin\frac{\pi}{r} \\ r^2 &= x^2 + y^2 \\ \dot{y} &= x + yr^2 sin\frac{\pi}{r} \end{aligned}$$

*folgende Eigenschaft hat: Es gibt eine Folge von konzentrischen Kreisen um* $(0,0)$ *mit Radien* $\frac{1}{n}$*, so daß sich "die Orbits abwechselnd im mathematisch positiven Sinn zu diesen Kreisen hin- bzw. von ihnen wegdrehen".*

*Hinweis: Leiten Sie ein Differentialgleichung für die Polarkoordinaten* $(r, \varphi)$ *her.*

**(ii)** *Das folgende, von Field und Noyes aufgestellte System*

$$(F-N)\qquad \begin{aligned} \epsilon\dot{x} &= x + y - xy - qx^2 \\ \dot{y} &= 2fz - y - xy \\ p\dot{z} &= x - z \end{aligned}$$

*ist ein mathematisches Modell zur Beschreibung einer chemischen Oszillation, der sog. Belousov-Zhabotinsky-Reaktion (vgl. z.B. Spektrum der Wissenschaften, 5(1980), 131-137, für eine Beschreibung dieser Reaktion, insbesondere die dortigen Bilder!). Hierbei sind $f, p, q$ und $\epsilon$ positive Konstanten (mit $\epsilon < 1$) und die Gleichungen sind bereits dimensionslos geschrieben. Die Größen $x, y$ und $z$ entsprechen chemischen Konzentrationen. Folglich sind nur "nichtnegative Lösungen". d.h. Lösungen im positiven Oktanden $\mathbb{R}^3_+$ von Interesse.*

## 3.4 Linearisierungen

In diesem Abschnitt sind $(E, \|\cdot\|)$ ein endlichdimensionaler Banachraum, $\Omega \subset E$ eine offene Teilmenge und $f \in C^1(\Omega, E)$. Wir wollen den von $f$ erzeugten Fluß $\Phi$ in der Nähe eines kritischen Punktes $x_0$ in Situationen studieren, in denen das Prinzip der linearisierten Stabilität Korollar 3.22 nicht anwendbar ist. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß $f'(x_0)$ einen hyperbolischen linearen Fluß erzeugt. Wir zeigen, daß lokal d.h. in der Nähe von $x_0$, der Fluß $\Phi$ flußäquivalent zum linearen Fluß $e^{tf'(x_0)}$ ist, d.h., daß die Sattelpunktstruktur qualitativ erhalten bleibt. Außerdem werden wir präzise Aussagen über die "stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten" $W_s$ und $W_u$ herleiten.

Sind $X$ und $Y$ metrische Räume und $\Phi : W \to X$ sowie $\tilde{\Phi} : \tilde{W} \to Y$ Flüsse auf $X$ bzw. $Y$, so sagen wir, $\Phi$ ist in $x_0 \in X$ zu $\tilde{\Phi}$ in $y_0 \in Y$ (lokal) $C^k$-flußäquivalent, oder kurz: $\Phi|x_0$ ist zu $\tilde{\Phi}|y_0$ $C^k$-flußäquivalent, $0 \le k \le \infty$, wenn es Umgebungen $U$ von $x_0$ und $V$ von $y_0$ gibt, derart, daß der von $\Phi$ auf $U$ (durch Restriktion) induzierte lokale Flußzu dem von $\tilde{\Phi}$ auf $V$ induzierten lokalen Fluß $C^k$-flußäquivalent ist.

Im folgenden sei $\Phi : W \to \Omega$ stets der von $f$ auf $\Omega$ erzeugte Fluß, und wir schreiben wieder $t \cdot x$ für $\Phi(t, x)$. Wir wollen den Flusses in der Nähe eines hyperbolischen kritischen Punktes $x_0$ studieren. Hierbei heißt der kritische Punkt $x_0$ des von $f$ erzeugten Flusses hyperbolisch, wenn $\sigma_n(f'(x_0)) = \emptyset$ ist, d.h. wenn der lineare Fluß $e^{tf'(x_0)}$ ist.

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen Flüssen und Homöomorphismen. Nach Lemma1.34 ist nämlich $\Phi(t, \cdot)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein lokaler Homöomorphismus. Insbesondere ist für den linearen Fluß $e^{tA}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein Automorphismus von $E$. Aus diesen Gründen ist es sinnvoll (und für Anwendungen auf andere Probleme nützlich), zuerst den Fall von Homöomorphismen zu betrachten. Zur Motivierung der folgenden Definition beweisen wir zuerst den folgenden Spezialfall des Spektralabbildungssatzes.

**Lemma 3.26.** *Für* $A \in \mathcal{L}(E)$ *gilt* $\sigma(e^A) = e^{\sigma(A)} = \{e^\lambda | \lambda \in \sigma(A)\}$.

**Beweis:** Wegen $\sigma(A) = \sigma(A)_{\mathbb{C}})$ können wir - durch Übergang zur Komplexifizierung - annehmen, daß $E$ ein komplexer Banachraum ist. Sind dann $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die paareweise verschiedenen Eigenwerte von $A$, so besitzt $E$ die direkte Summenzerlegung $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_k$ besitzt, die sowohl $A$ als auch $e^A$ reduziert. Es genügt also, $\sigma(e^{A_j}) = e^{\sigma(A_j)}$ mit $A_j = A|E_j$ für $j = 1, \ldots, k$ zu beweisen. Wir können somit annehmen, daß $\sigma(A) = \{\lambda\}$ und $A = \lambda + N$ mit einem nilpotenten Operator $N \in \mathcal{L}(E)$ gilt. Es gibt folglich ein $x \in E \setminus \{0\}$ mit $Ax = \lambda x$, d.h. $Nx = 0$. Hieraus folgt

$$e^A x = e^\lambda e^N x = e^\lambda x,$$

d.h. $\sigma(e^A) \supset e^{\sigma(A)}$. Gilt umgekehrt $e^A y = \mu y$ für ein $\mu \in \mathbb{C}$ und $y \in E \setminus \{0\}$, so folgt

$$\mu y = e^\lambda e^N y = e^\lambda \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} N^k y.$$

Dann gibt es einen kleinsten Index $l$ mit $0 \leq l \leq m$ und $N^{l+1} y = 0$. Durch Anwenden von $N^l$ auf (2) erhalten wir

$$\mu N^l y = e^\lambda N^l y,$$

also $\mu = e^\lambda$ wegen $N^l y \neq 0$, was $\sigma(e^a) \subset e^{\sigma(A)}$ impliziert. **q.e.d.**

Es sei nun $A \in \mathcal{L}(E)$, und $A$ erzeuge einen hyperbolischen linearen Fluß $e^{tA}$, d.h. $\sigma_n(A) = \sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Dann folgt aus dem vorangehenden Lemma, daß $\sigma(e^A) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$ gilt, wobei $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ die Einheitskreislinie der komplexen Ebene ist. Mit anderen Worten $e^A \in \mathcal{L}(E)$ besitzt keine Eigenwerte vom Betrag 1. Allgemein heißt nun ein Automorphismus $T \in \mathcal{L}(E)$ hyperbolisch, wenn $T$ keine Eigenwerte vom Betrag 1 besitzt, d.h. wenn $\sigma(T) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$ gilt. Ist $T \in \mathcal{GL}(E)$ hyperbolisch, so gilt

$$\begin{array}{ll} \sigma(T) = \sigma_0(T) \cup \sigma_\infty(T) & \text{mit} \\ \sigma_0(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \mid |\lambda| < 1\} & \sigma_\infty(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \mid |\lambda| > 1\}. \end{array}$$

Bezeichnen wir wieder mit $m(\lambda)$ die algebraische Multiplizität des Eigenwertes $\lambda \in \sigma(T)$, dann sind für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$E_0 = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_0(T)} \{x \in E \mid (\lambda - T)^{m(\lambda)} x = 0\} \quad E_\infty = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_\infty(T)} \{x \in E \mid (\lambda - T)^{m(\lambda)} x = 0\}.$$

invariante Untervektorräume von $E$, die $T$ reduzieren, d.h.

$$E = E_0 \oplus E_\infty \quad \text{und } T = T_0 \oplus T_\infty \quad \text{und } \sigma(T_0) = \sigma_0(T) \quad \text{und } \sigma(T_\infty) = \sigma_\infty(T).$$

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so wenden wir diese Zerlegung auf die Komplexifizierung an und restringieren anschließend auf die reellen Teilräume, d.h.

$$E_0 = (E_\mathbb{C})_0 \cap E \quad \text{und } E_\infty = (E_\mathbb{C})_\infty \cap E \quad \text{sowie } T_0 = (T)_0 | E_0 \quad \text{und } T_\infty = (T_\mathbb{C})\infty | E_\infty.$$

Dann verifiziert man leicht, daß die Relationen auch im reellen Fall gelten.

Das folgende Lemma stellt ein Analogon zu Lemma 3.2 dar. Zur einfacheren Formulierung verwenden wir die anschauliche Schreibweise

$$|\sigma(A)| < \alpha \Leftrightarrow |\lambda| < \alpha \quad \text{für alle } \lambda \in \sigma(A).$$

Andere Ungleichungen sind analog zu interpretieren.

**Satz 3.27.** *Es sei $T \in \mathcal{L}(E)$ invertierbar und hyperbolisch, und für $\alpha \in \mathbb{R}_+$ gelte*

$$|\sigma(T_0)| < \alpha \text{ und } |\sigma((T_\infty)^{-1})| < \alpha.$$

*Dann gibt es eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf $E$ so daß $E_0$ und $E_\infty$ orthogonal sind und mit*

$$\max\{\|T_0\|, \|(T_\infty)^{-1}\|\} \leq \alpha.$$

**Beweis:** Wegen $\|A_\mathbb{C}\| = \|A\|$ (vgl. den Beweis von Lemma 3.2 können wir o.B.A. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ annehmen. Nach dem Beweis von Lemma 3.2 wissen wir dann, daß $T_0 = D + N$ ist, mit einem nilpotenten Operator $N \in \mathcal{L}(E_0)$ und einem Diagonaloperator (bzgl. einer geeigneten Basis) $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_k)$, wobei $\mu_1, \ldots, \mu_k$ die gemäß ihrer Vielfachheit gezählten Eigenwerte von $T_0$ sind. Außerdem wissen wir, daß wir die Basis so wählen können, daß für die zugehörige euklidische Norm $\|\cdot\|_0$ auf $E_0$ gilt

$$\|N\|_0 \leq \alpha - \max\{|\mu_j| \mid j = 1, \ldots, k\}.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$\|T_0\|_0 \leq \|D\|_0 + \|N\|_0 \leq \max\{|\mu_j| \mid 1 \leq j \leq k\} + \|N\|_0 \leq \alpha.$$

Analog finden wir eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf $E_\infty$, so daß für die zugehörige Operatornorm gilt: $\|T_\infty^{-1}\|_\infty \leq \alpha$. Dann wird durch

$$\|x\|^2 = \|x_0\|_0^2 + \|x_\infty\|_\infty^2 \quad \text{für alle } x = x_0 + x_\infty \in E_0 \oplus E_\infty = E$$

die gewünschte Hilbertnorm auf $E$ definiert. **q.e.d.**

**Bemerkung 3.28.** *Ist $T \in \mathcal{L}(E)$ invertierbar und hyperbolisch, so ist*

$$|\sigma_0(T)| < 1 < |\sigma_\infty(T)|.$$

*Da für jedes invertierbare $B \in \mathcal{L}(E)$ trivialerweise*

$$\sigma(B^{-1}) = (\sigma(B))^{-1} = \left\{ \frac{1}{\lambda} \middle| \lambda \in \sigma(B) \right\}$$

*gilt, folgt $|\sigma(T_\infty^{-1})| < 1$. Also existieren ein $\alpha < 1$ und eine Norm $\| \cdot \|$ auf $E$ mit*

$$T_0\| \leq \alpha < 1 \text{ und } \|T_\infty^{-1}\| \leq \alpha < 1.$$

*Für $x \in E_0$ folgt hieraus*

$$T^k x = (T_0)^k x \to 0 \text{ für } k \to \infty,$$

*und für $y \in E_\infty$ ergibt sich*

$$T^{-k} y = (T_\infty)^{-k} y \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

*In Analogie zu linearen Flüssen nennt man deshalb $E_0$ den stabilen und $E_0$ den instabilen Untervektorraum von $T$ (oder genauer: des von $T$ erzeugten diskreten Flusses).*

Für einen topologischen Raum sei $C_b(X, E)$ der Banachraum der beschränkten stetigen Funktionen von $X$ nach $E$ mit der Supremumsnorm. Ist $X$ kompakt, so ist natürlich $C_b(X, E) = C(X, E)$ und

$$\|u\|_\infty = \max_{x \in X} |u(x)| = \|u\|_C.$$

Außerdem ist es klar, daß wir eine äquivalente Norm auf $C_b(X, E)$ erhalten, wenn wir die Norm in $E$ durch eine äquivalente Norm ersetzen. Es sei nun $E = E_1 \oplus E_2$ eine direkte Summenzerlegung von $E$, und für die zugehörigen Projektionen $P_i : E \to E_i$ gelte $\|P_i\| \leq 1$. Dann läßt sich jedes Element $u \in E$ als $u = P_1 u + P_2 u$ schreiben, mit $P_i u \in C_b(X, E_i)$. Außerdem gilt trivialerweise

$$\|P_i u\|_{C_b(X, E_i)} = \sup_{x \in X} \|P_i u(x)\| \leq \|P_i\| \cdot \|u\|_\infty \leq \|u\|_\infty$$

für $i = 1, 2$. Folglich werden durch $(P_i u)(x) = P_i u(x)$ für alle $x \in X$ stetige Projektionen $P_i : C_b(X, E) \to C_b(X, E_i)$, mit $P_1 + P_2 = \mathbb{1}_B$ definiert, d.h. es gilt $C_b(X, E) = C_b(X, E_1) \oplus C_b(X, E_2)$, und $P_i : C_b(X, E) \to C_b(X, E_i)$ sind die zugehörigen Projektionen. Setzen wir

$$\|u\|_{C_b(X, E)} = \max\{\|P_i u\|_{C_b(X, E_1)}, \|P_2 u\|_{C_b(X, E_2)}\},$$

so folgt aus

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u\|_\infty &= \frac{1}{2}\|P_1u + P_2u\|_\infty \le \frac{1}{2}(\|P_1u\|_\infty + \|P_2u\|_\infty)\\ &= \frac{]1}{2}\{\|P_1u\|_{C_b(X,E_1)} + \|P_2u\|_{C_b(X,E_2)}\} \le \|u\|_{C_b(X,E)} \le \|u\|_\infty,\end{aligned}$$

daß $\|\cdot\|_{C_b(X,E)}$ eine äquivalente Norm auf $C_b(X,E)$ ist.

Schließlich benötigen wir noch das Analogon zum Begriff der “Flußäquivalenz” für den Fall topologischer Abbildungen. Sind $X$ und $Y$ topologische Räume und $A : X \to X$ sowie $B : Y \to Y$ Homöomorphismen, so heißt ein Homöomorphismus $\Psi : X \to Y$ eine topologische Konjugation von $A$ nach $B$, falls $\Psi \circ A = B \circ \Psi$ gilt. Sind $X$ und $Y$ offene Teilmengen von Banachräumen und sind $A, B$ und $\Psi$ $C^k$-Diffeomorphismen, $1 \le k \le \infty$, so heißt $\Psi$ eine $C^k$-Konjugation. Schließlich heißen $A$ und $B$ topologisch (bzw. $C^k$-)konjugiert, falls eine topologische (bzw. $C^k$-)Konjugation von $A$ nach $B$ existiert. Hierdurch wird trivialerweise eine Äquivalenzrelation in der Klasse der Homöomorphismen (bzw. der $C^k$-Diffeomorphismen) definiert. Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den globalen Hartmannschen Linearisierungssatz beweisen.

**Satz 3.29.** *Für ein invertierbares und hyperbolisches $T \in \mathcal{L}(E)$, und für jede Lipschitz stetige Funktion $g \in C_b(E,E)$ mit genügend kleiner Lipschitzkonstanten, sind die Abbildungen $T$ und $T + g$ topologisch konjugiert.*

**Beweis:** Wegen dem vorangehenden Lemma und der Bemerkung danach gibt es eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf $E$ mit

$$\max\{\|T_0\|, \|T_\infty^{-1}\|\} \le \alpha < 1.$$

Da beim Übergang zu einer äquivalenten Norm auf $E$ die Lipschitzkonstante von $g$ mit einem positiven Faktor multipliziert wird, können wir die Norm $\|\cdot\|$ auf $E$ verwenden und annehmen, daß für Folgendes für ein $2\lambda < \min\{1-\alpha, \|T^{-1}\|^{-1}\}$ gilt:

$$\|g(x) - g(y)\| \le \lambda\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in E.$$

**(i)** Wir zeigen zuerst, daß $T + g \in C(E,E)$ ein Homöomorphismus ist. Da, für jedes $z \in E$, die Gleichung $Tx + g(x) = z$ äquivalent zur Fixpunktgleichung

$$x = T^{-1}(z - g(x)) = f_z(x)$$

ist, ist $T + g$ bijektiv, falls $f_z : E \to E$ genau einen Fixpunkt $x(z)$ hat. Wegen

$$\begin{aligned}\|f_z(x) - f_z(y)\| &\le \|T^{-1}\| \cdot \|g(y) - g(x)\| && \le \lambda\|T^{-1}\| \cdot \|x - y\|\\ &\le \frac{1}{2}\|x - y\| && \text{für alle } x, y \in E\end{aligned}$$

folgt dies aus dem Banachschen Fixpunktsatz. Wir erhalten für $z, \tilde{z} \in E$

$$\begin{aligned}
\|x(z) - x(\tilde{z})\| &= \|f_z(x(z)) - f_{\tilde{z}}(x(\tilde{z}))\| \\
&\leq \|f_z(x(z)) - f_z(x(\tilde{z}))\| + \|f_z(x(\tilde{z})) - f_{\tilde{z}}(x(\tilde{z}))\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|x(z) - x(\tilde{z})\| + \|T^{-1}\| \cdot \|z - \tilde{z}\|,
\end{aligned}$$

also $\|x(z)-x(\tilde{z})\| \leq 2\|T^{-1}\|\|z-\tilde{z}\|$. Also ist $x(\cdot) = (T+g)^{-1} : E \to E$ Lipschitz stetig.
**(ii)** Es sei nun $h \in C_b(E, E)$ eine zweite Lipschitz stetige Funktion mit der Lipschitzkonstanten $\lambda$. Ferner nehmen wir an, daß es zu jedem Paar $(g, h)$ solcher Funktionen genau ein $H = H(g, h) \in C(E, E)$ gibt mit

$$H - \mathbb{1}_E \in C_b(E, E) \qquad \text{und } (T + g) \circ H = H \circ (T + h).$$

Dann gilt für $a = H(g, 0)$

$$(T + g) \circ a = a \circ T,$$

und für $b = H(0, g)$

$$T \circ b = b \circ (T + g).$$

Es folgt

$$(T + g) \circ a \circ b = a \circ T \circ b = a \circ b \circ (T + g).$$

Wegen $a = \mathbb{1}_E + u$ und $b = \mathbb{1}_E + v$ mit $u, v \in C_b(E, E)$ folgt $a \circ b = \mathbb{1}_E + w$ mit $w = v + u \circ b \in C_b(E, E)$. Wegen der Eindeutigkeit von $H$ ist $a \circ b = H(g, g) = \mathbb{1}_E$ ist. Analog folgt $b \circ a = \mathbb{1}_E$. Folglich ist $a$ ein Homömorphismus von $E$ auf sich, also eine topologische Konjugation von $T + g$ nach $T$.
**(iii)** Mit $H = \mathbb{1}_E + u$ bleibt zu zeigen, daß es genau ein $u \in C_b(E, E)$ gibt mit

$$(T + g) \circ (\mathbb{1}_E + u) = (\mathbb{1}_E + u) \circ (T + h).$$

Da nach (i) $T + h$ ein Homöomorphismus ist, ist das äquivalent zu

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_E + u &= (T + g) \circ (\mathbb{1}_E + u) \circ (T + h)^{-1} \\
&= g \circ (\mathbb{1}_E + u) \circ (T + h)^{-1} + T \circ (T + h)^{-1} + T \circ u \circ (T + h)^{-1}.
\end{aligned}$$

Wegen $\mathbb{1}_E = (T + h) \circ (T + h)^{-1}$ ist die letzte Gleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned}
u = \tilde{F}(u) &= T \circ u \circ (T + h)^{-1} + G(u) \quad \text{mit} \\
G(u) &= g \circ (\mathbb{1}_E + u) \circ (T + h)^{-1} - h \circ (T + h)^{-1}.
\end{aligned}$$

Offensichtlich bildet $\tilde{F}$ den Banachraum $C_b(E, E)$ in sich ab. Es bleibt zu zeigen, daß $\tilde{F}$ genau einen Fixpunkt in $C_b(E, E)$ hat.

Wegen $E = E_0 \oplus E_\infty$ und da $E_0$ und $E_\infty$ orthogonal sind, folgt $\|P_0\|, \|P_\infty\| \leq 1$ für die zugehörigen Projektionen (vgl. den Beweis von Theorem). Die Fixpunktgleichung für $\tilde{F}$ ist somit äquivalent zu dem Paar von Gleichungen

$$\begin{aligned} P_0 \circ u = F_0(u) &= T_0 \circ P_0 \circ u \circ (T+h)^{-1} + P_0 \circ G(u) \\ P_\infty \circ u &= T_\infty \circ P_\infty \circ u \circ (T+h)^{-1} + P_\infty \circ G(u). \end{aligned}$$

Da die letzte Gleichung durch Multiplikation von links mit $T_\infty^{-1}$ und von rechts mit $T+h$ in die äquivalente Gleichung

$$P_\infty \circ u = F_\infty(u) = T_\infty^{-1} \circ P_\infty \circ u \circ (T+h) - T_\infty^{-1} \circ P_\infty \circ G(u) \circ (T+h)$$

übergeht, ist die Fixpunktgleichung für $\tilde{F}$ äquivalent zu der letzten und der vorvorletzten Gleichung. Nach den den vorangehenden Betrachtungen induziert die Zerlegung $E = E_0 \oplus E_\infty$ die Zerlegung $C_b(E,E) = C_b(E,E_0) \oplus C_b(E,E_\infty)$ mit

$$\begin{aligned} \|u\|_{C_b(E,E)} &= \max\{\|P_0 u\|_\infty, \|P_\infty u\|_\infty\} \\ \frac{1}{2}\|u\|_\infty &\leq \|u\|_{C_b(E,E)} \leq \|u\|_\infty \quad \text{für alle } u \in B. \end{aligned}$$

Also wird durch $F = F_0 + F_\infty$ eine Abbildung von $C_b(E,E)$ in sich definiert, derart, daß die Fixpunktgleichung $u = F(u)$ zur Fixpunktgleichung $u = \tilde{F}(u)$ äquivalent ist. Für $u, v \in B$ und $x \in E$ erhalten wir mit $y = (T+h)^{-1}(x)$ und $z = (T+h)(x)$ und unter Verwendung von der Abschätzung an die Normen von $T_0$ und $T_\infty$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} &\|F_0(u)(x) - F_0(v)(x)\| \\ &\qquad \leq \alpha\|P_0 u(y) - P_0 v(y)\| + \|g(y+u(y)) - g(y+v(y))\| \\ &\qquad \leq \alpha\|P_0(u-v)\|_\infty + \lambda\|u-v\|_\infty \quad \text{und} \\ &\|F_\infty(u)(x) = F_\infty(v)(x)\| \\ &\qquad \leq \alpha\|P_\infty u(z) - P_\infty v(z)\| + \|g(x+u(x)) - g(x+v(x))\| \\ &\qquad \leq \alpha\|P_\infty(u-v)\|_\infty + \lambda\|u-v\|_\infty, \quad \text{also} \\ \|F_0(u) - F_0(v)\|_\infty &\leq \alpha\|P_0(u-v)\|_\infty + 2\lambda\|u-v\|_{C_b(E,E)} \\ &\leq (\alpha+2\lambda)\|u-v\|_{C_b(E,E)} \quad \text{und} \\ \|F_\infty(u) - F_\infty(v)\|_\infty &\leq (\alpha+2\lambda)\|u-v\|_{C_b(E,E)}, \end{aligned}$$

woraus wegen $F_0(C_b(E,E)) \subset C_b(E,E_0)$ und $F_\infty(C_b(E,E)) \subset C_B(E,E_\infty)$

$$\|F(U) - F(v)\|_{C_b(E,E)} \leq (\alpha+2\lambda)\|u-v\|_{C_b(E,E)} \quad \text{für alle } u,v \in C_b(E,E)$$

folgt. Wegen $\alpha + 2\lambda < 1$ folgt die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes von $F$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz. **q.e.d.**

**Bemerkung 3.30. (i)** *Der obige Beweis zeigt, daß es genau eine topologische Konjugation $h$ von $T$ nach $T+g$ gibt, welche $h - \mathbb{1}_E \in C_b(E,E)$ erfüllt (falls natürlich die Lipschitzkonstante von $g$ hinreichend klein ist).*

**(ii)** *Wenn es $g \in C^k(E,E), 1 \leq k \leq \infty$, so gilt, ist es natürlich zu erwarten, daß die topologische Konjugation von $T+g$ nach $g$ auch die entsprechenden Differenzierbarkeitseigenschaften hat, d.h. daß $T+g$ und $T$ $C^k$-konjugiert sind. Dies ist jedoch im allgemeinen nicht richtig. Für weitere Untersuchungen in dieser Richtung sei auf Hartmann verwiesen.*

Zur Lokalisierung des obigen Linearisierungssatzes benötigen wir das folgende

**Lemma 3.31.** *Es sei $F$ ein beliebiger normierter Vektorraum, und $r_\alpha : F \to \bar{B}(0,\alpha)$ sei die radiale Retraktion:*

$$r_\alpha(x) = \begin{cases} x & \textit{für } \|x\| \leq \alpha \\ \alpha \frac{x}{\|x\|} & \textit{für } \|x\| \leq \alpha \end{cases}.$$

*Dann ist $r_\alpha$ gleichmsig Lipschitz stetig mit der Lipschitzkonstanten 2.*

**Beweis:** Für $\|x\| > \alpha \geq \|y\|$ gilt

$$\begin{aligned} \|r_\alpha(x) - r_\alpha(y)\| &= \left\|\alpha\|x\|^{-1}x - y\right\| \leq \alpha\|x\|^{-1}\|x-y\| + \left\|\alpha\|x\|^{-1}y - x\right\| \\ &=\leq \|x-y\| + \|x\|^{-1}\|y\|(\|x\| - \alpha) \\ &=\leq \|x-y\| + \|x\| - \|y\| \leq 2\|x-y\|. \end{aligned}$$

Sind $\|x\| > \alpha$ und $\|y\| > \alpha$, erhalten wir

$$\begin{aligned} \|r_\alpha\|x\| - r_\alpha(y)\| &= \left\|\alpha\|x\|^{-1}x - \alpha\|y\|^{-1}y\right\| \\ &\leq \alpha\|x\|^{-1}\|x-y\| + \alpha\|y\| \cdot \left|\|x\|^{-1} - \|y\|^{-1}\right| \\ &\leq \|x-y\| + |\|x\| - \|y\|| \leq 2\|x-y\|. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. **q.e.d.**

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun das Hauptresultat dieses Abschnittes beweisen. Dazu erinnern wir daran, daß $E$ ein endlichdimensionaler Banachraum ist, daß $\Omega$ offen ist in $E$ und daß $f \in C^1(\Omega, E)$ gilt.

**Satz 3.32** (Grobman, Hartmann)**.** *Es sei $x_0$ ein hyperbolischer kritischer Punkt von $\Phi_f$. Dann sind $\Phi_f|_{x_0}$ und $e^{tf'(x_0)}|_0$ isochron flußäquivalent.*

**Beweis: (i)** Da die Translation offensichtlich eine isochrone Flußäquivalenz darstellt, können wir o.B.d.A. $x_0 = 0$ annehmen. Für alle $\lambda > 0$ existiert ein $\alpha > 0$ mit $\|f'(x) - f'(0)\| \leq \frac{\lambda}{2}$ für alle $x \in \bar{B}(0,\alpha)$. Aufgrund des Mittelwertsatzes ist die Funktion $x \mapsto f(x) - f'(0)x$ auf $\bar{B}(0,\alpha)$ Lipschitz stetig mit der Lipschitzkonstanten $\frac{\lambda}{2}$. Wir definieren $g \in C_b(E,E)$ mittels der radialen Retraktion $r_\alpha : E \to \bar{B}(0,\alpha)$ durch

$$g = (f - f'(0)) \circ r_\alpha.$$

Wegen dem vorangehenden Lemma ist $g$ Lipschitz stetig ist mit der Lipschitzkonstanten $\lambda$. Mit $A = f'(0) \in \mathcal{L}(E)$ gilt

$$(A+g)|_{B(0,\alpha)} = f|_{B(0,\alpha)}.$$

Ist $\Phi_{A+g}$ der von $A+g$ auf $E$ erzeugte Fluß, so stimmt $\Phi_{A+g}$ auf $B(0,\alpha)$ also mit $\Phi_f$ überein. Es genügt also zu zeigen, daß $\Phi_{A+g}$ und $e^{tA}$ isochron flußäquivalent sind.
**(ii)** Mit $g$ ist auch $A+g$ Lipschitz stetig ist. Also ist $\Phi_{A+g}$ nach Satz 1.40 (v) ein globaler Fluß. Wegen $\dot{x} = Ax + g(x)$ folgt aus der Variation der Konstanten

$$\Phi_{A+g}(t,x) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-\tau)} g(\Phi_{A+g}(\tau,x))d\tau \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\|\Phi_{A+g}(t,x) - \Phi_{A+g}(t,y)\| \leq e^{t\|A\|}\|x-y\| + \int_0^t e^{(t-\tau)\|A\|}\lambda\,\|\Phi_{A+g}(\tau,x) - \Phi_{A+g}(\tau,y)\|\,d\tau$$

für $t \geq 0$ und $x,y \in E$. Nach Multiplikation dieser Ungleichung mit $e^{-t|A|}$ erhalten wir mithilfe von Lemma 1.62 die Ungleichung

$$\|\Phi_{A+g}(t,x) - \Phi_{A+g}(t,y)\| \leq \|x-y\|e^{(\lambda+\|A\|)t} \quad \text{für alle } x,y \in E \text{ und } t \geq 0.$$

Wegen $g \in C_b(E,E)$ erhalten wir $\quad \|\Phi_{A+g}(t,x) - e^{tA}x\| \leq \|g\|_\infty \left|\int_0^t e^{|t-\tau|\|A\|}d\tau\right|$

für $t \in \mathbb{R}$ und $x \in E$, also $\quad \Phi_{A+g}(t,\cdot) - e^{tA} \in C_b(E,E) \quad$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
Schließlich folgt

$$\|(\Phi^1_{A+g} - e^{tA}(x) - (\Phi_{A+g}(t,\cdot) - e^{tA})(y)\| \leq \int_0^t e^{t-\tau\|A\|}\lambda\|\Phi_{A+g}(\tau,x) - \Phi_{A+g}(\tau,y)\|d\tau$$

$$\leq \lambda\|x-y\|e^{t\|A\|}\int_0^t e^{\lambda\tau}d\tau = \|x-y\|e^{t\|A\|}(e^{\lambda t}-1) \quad \text{für } t \geq 0 \text{ und } x,y \in E.$$

**(iii)** Da 0 nach Voraussetzung ein hyperbolischer kritischer Punkt ist, ist $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Also folgt aus Lemma 3.26, daß $T = e^A$ ein hyperbolischer Automorphismus von $E$ ist. Da wir $\lambda$ beliebig klein wählen können, folgt, daß die Lipschitzkonstante von $\tilde{g} = \Phi^1_{A+g} - T$ beliebig klein gemacht werden kann. Da $\tilde{g} \in C_b(E, E)$ gilt, können wir nach dem Hartmannschen Linearisierungssatz annehmen, daß $T$ und $\Phi_{A+g}(1, \cdot) = T + \tilde{g}$ topologisch konjugiert sind. Wir wissen außerdem, daß es genau eine topologische Konjugation $\Psi$ von $T$ nach $\Phi_{A+g}(1, \cdot)$ gibt mit $\Psi - \mathbb{1}_E \in C_b(E, E)$.

Aus $\Psi \circ T = \Phi_{A+g}(1, \cdot) \circ \Psi$ folgt für jedes $t \in \mathbb{R}$ (mit $T^t = e^{tA}$)

$$\begin{aligned}
\Phi_{A+g}(1, \cdot) \circ (\Phi_{A+g}(t, \cdot) \circ \Psi \circ T^{-t}) &= \Phi_{A+g}(t, \cdot) \circ \Phi_{A+g}(1, \cdot) \circ \Psi \circ T^{-t} \\
&= \Phi_{A+g}(t, \cdot) \circ \Psi \circ T \circ T^{-t} \\
&= (\Phi_{A+g}(t, \cdot) \circ \Psi \circ T^{-t}) \circ T.
\end{aligned}$$

Also ist $\Phi_{A+g}(t, \cdot) \circ \Psi \circ T^{-t}$ eine topologische Konjugation von $T$ nach $\Phi_{A+g}(1, \cdot)$. Wegen

$$\Phi_{A+g}(1, \cdot) \circ \Psi \circ T^{-t} - \mathbb{1}_E = (\Phi_{A+g}(t, \cdot) - T^t) \circ \Psi \circ T^{-t} + T^t \circ (\Psi - \mathbb{1}_E) \circ T^{-t}$$

folgt wegen $\Phi_{A+g}(t, \cdot) - e^{tA} \in C_b(E, E)$, daß $\Phi_{A+g}(t, \cdot) \circ \Psi \circ T^{-t} - \mathbb{1}_E \in C_b(E, E)$ gilt. Also ist $\Phi_{A+g}(t, \cdot) \circ \Psi \circ T^{-t} = \Psi$ und somit $\Phi_{A+g}(t, \cdot) \circ \Psi = \Psi \circ e^{tA}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$, d.h. $\Phi_{A+g}$ und $e^{tA}$ sind isochron flußäquivalent. **q.e.d.**

## 3.5 Stabile Mannigfaltigkeiten

Der obige Satz besagt, daß in der Nähe eines hyperbolischen kritischen Punktes $x_0$ das Phasenporträt des Flusses $\Phi_f$ die gleiche topologische Struktur wie das Phasenporträt der Linearisierung in der Nähe von 0 hat. In Analogie zum stabilen Untervektorraum $E_s$ bzw. instabilen Untervektorraum $E_u$ eines linearen Flusses definiert man die stabile Mannigfaltigkeit $W_s(x_0)$ bzw. die instabile Mannigfaltigkeit $W_u(x_0)$ von $\Phi_f$ in $x_0$ als

$$\begin{aligned}
W_s(x_0) &= \{x \in E \mid t \mapsto \Phi_f(t, x) \text{ existiert für } t \in [0, \infty) \text{ und } \lim_{t \to \infty} \Phi_f(t, x) = x_0\} \\
W_u(x_0) &= \{x \in E \mid t \mapsto \Phi_f(t, x) \text{ existiert für } t \in (-\infty, 0] \text{ und } \lim_{t \to -\infty} \Phi_f(t, x) = x_0\}.
\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $x_0 \in W_s(x_0) \cap W_u(x_0)$. Wir wollen nun zeigen, daß, in der Nähe von $x_0$, die Mengen $W_s(x_0)$ und $W_u(x_0)$ tatsächlich differenzierbare Untermannigfaltigkeiten von $E$ sind, die sich in $x_0$ transversal schneiden, und daß die Tangentialräume an $W_s(x_0)$ bzw. $W_u(x_0)$ parallel zu $E_s$ bzw. $E_u$ sind:

$$T_{x_0} W_s(x_0) = x_0 + E_s \qquad\qquad T_{x_0} W_u(x_0) = x_0 + E_u.$$

Zum Beweis dieses Sachverhaltes betrachten wir wieder Homöomorphismen von $E$ auf sich. Ist $h : E \to E$ ein Homöomorphismus mit $h(0) = 0$, so nennen wir die Menge

$$W_0 := \{x \in E \mid h^n(x) \to 0 \text{ für } n \to \infty\}$$

die stabile Menge von $h$ in 0, wobei $h^n$ die $n$-fache Iterierte von $h$ bezeichnet. Analog definiert man die instabile Menge von $h$ in 0 durch

$$W_\infty := \{x \in E \mid h^{-n}(x) \to 0 \text{ für } n \to \infty\},$$

wobei $h^{-n} := (h^{-1})^n$ gesetzt ist. Offensichtlich gehen $W_0$ und $W_\infty$ ineinander über, wenn wir $h$ durch $h^{-1}$ ersetzen. Folglich genügt es, $W_0$ zu betrachten.

Sei $T \in \mathcal{L}(E)$ invertierbar und hyperbolisch, und $E = E_0 \oplus E_\infty, T = T_0 \oplus T_\infty$ sei die oben eingeführte Zerlegung in den stabilen und den instabilen Untervektorraum.

**Satz 3.33.** *Sei $g : E \to E$ Lipschitz stetig mit $g(0) = 0$. Besitzt $g$ eine genügend kleine Lipschitzkonstante, so existiert eine eindeutig bestimmte gleichmäßig Lipschitz stetige Funktion $h : E_0 \to E_\infty$, so daß der Graph von $h$ die stabile Menge $W_0$ von $T + g$ in 0 ist. Gehört $g$ in einer Umgebung von 0 zur Klasse $C^k, 1 \leq k \leq \infty$, so auch die Funktion $h$. In diesem Fall gibt es eine Umgebung $V$ von 0 in $E_0$, derart, daß*

$$W_0^V = \{(x, h(x)) \mid x \in V\}$$

*eine $C^k$-Mannigfaltigkeit ist. Gilt außerdem $g'(0) = 0$, so ist $T_0 W_0^v = E_0$.*

**Beweis:** Es sei

$$B_0 = \{u : \mathbb{N} \to E \mid u(k) \to 0 \text{ für } k \to \infty\}.$$

Offenbar ist $B_0$ ein abgeschlossener Untervektorraum des Banachraums $B(\mathbb{N}, E)$ aller beschränkten Folgen in $E$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Also ist $B_0$ selbst ein Banachraum mit der Supremumsnorm. Es sei

$$\mathbb{W}_0 = \{u \in B_0 \mid u(k) = (T + g)^k x \text{ für ein } x \in E \text{ und alle } k \in \mathbb{N}\}.$$

Dann gilt offensichtlich $W_0 = \{u(0) \mid u \in \mathbb{W}_0\}$. Ferner ist

$$u \in \mathbb{W}_0 \Leftrightarrow u(k+1) = (T + g)(u(k)) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Mit den Projektionen $P_0 : E \to E_0$ und $P_\infty : E \to E_\infty$ ist das äquivalent zu

$$P_0 u(k+1) = T_0 P_0 u(k) + P_0 g(u(k)) \quad P_\infty u(k+1) = T_\infty P_\infty u(k) + P_\infty g(u(k)), \text{ und}$$

$$P_0 u(k+1) = T_0 P_0 u(k) + P_0 g(u(k)) \quad P_\infty u(k) = T_\infty^{-1} P_\infty u(k+1) - T_\infty^{-1} P_\infty g(u(k))$$

für $k \in \mathbb{N}$. Setzen wir für $x \in E$ und $u \in B_0$:

$$F(x,u)(k) = \begin{cases} T_0 P_0 u(k-1) + T_\infty^{-1} P_\infty u(k+1) + P_0 g(u(k-1)) - T_\infty^{-1} P_\infty g(u(k)) \\ P_0 x + T_\infty^{-1}(P_\infty u(1) - P_\infty g(u(0))) \text{ für } k = 0, \end{cases}$$

so sehen wir, daß $x \in E_0$ genau dann zu $W_0$ gehört, wenn $u$ ein Fixpunkt von $F(x,\cdot)$ in $B_0$ ist. Wie im Beweis des Hartmannschen Linearisierungssatzes sei für ein $2\lambda < 1-\alpha$

$$\max\{\|T_0\|, \|T_\infty^{-1}\|\} \leq \alpha < 1 \quad \max\{\|P_0\|, \|P_\infty\|\} \leq 1 \quad \|g(x) - g(y)\| \leq \lambda \|x-y\|$$

für alle $x, y \in E$. Außerdem benutzen wir in $B_0$ die äquivalente Norm

$$\|u\|_B = \max\{\|P_0 u\|_\infty, \|P_\infty u\|_\infty\} \qquad \text{mit } \frac{1}{2}\|u\|_\infty \leq \|u\|_B \leq \|u\|_\infty$$

für alle $u \in B_0$. Für $x \in E$ und $u, v \in B_0$ erhalten wir die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|F(x,u) - F(x,v)\|_B &\leq (\alpha + 2\lambda)\|u - v\|_B \\ \|F(x,u)(k)\| &\leq (\alpha+\lambda)\|u(k-1)\| + \alpha\lambda\|u(k)\| + \alpha\|u(k+1)\| \quad \text{für } k \geq 1. \end{aligned}$$

Es folgt, daß $F(x,\cdot)$ den Banachraum $B_0$ in sich abbildet, und $F(x,\cdot) : B_0 \to B_0$ eine Kontraktion mit der von $x \in E$ unabhängigen Kontraktionskonstanten $\alpha + 2\lambda < 1$ ist. Der Banachsche Fixpunktsatz impliziert die Existenz eines eindeutig bestimmten Fixpunktes $U(x)$ von $F(x,\cdot)$ in $B_0$. Aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} \|U(x) - U(y)\|_B &= \|F(x,U(x)) - F(y,U(y))\|_B \\ &\leq \|F(x,U(x)) - F(x,U(y))\|_B + F(x,U(y)) - F(y,U(y))\|_B \\ &\leq (\alpha+2\lambda)\|U(x) - U(y)\|_B + \|P_0 x - P_0 y\| \quad \text{folgt} \\ \|U(x) - U(y)\|_B &\leq \frac{\|P_0 x - P_0 y\|}{1 - \alpha - 2\lambda} \quad \text{für alle } x, y \in E \quad \text{Wir setzen nun} \\ h(x) &= P_\infty U(x)(0) \quad \text{für alle } x \in E_0. \end{aligned}$$

Dann bildet $h$ den Raum $E_0$ Lipschitz stetig in $E_\infty$ ab, und

$$W_0 = \{x, h(x)) \mid x \in E_0\} = \operatorname{graph}(h).$$

Wir bezeichnen mit $S_1, S_{-1} : B_0 \to B_0$ die "Verschiebungsoperatoren"

$$(S_{-1}u)(k) = u(k+1) \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \quad (S_1 u)(k) = \begin{cases} u(k-1) & \text{für alle } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } k = 0. \end{cases}$$

Offensichtlich sind $S_{-1}$ und $S_1$ stetig mit $\max\{\|S_{-1}\|_B, \|S_1\|_B\} \le 1$.
Schließlich definieren wir $G : B_0 \to B_0$ durch

$$G(u)(k) = g(u(k)) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Gilt dann $g \in C^k(B_E(0,\beta), E)$ für ein $\beta > 0$ und ein $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, so folgt $G \in C^k(B_{B_0}(0,\beta), B_0)$ und für $g'(0) = 0$ auch $G'(0) = 0$. Mit dem "Einheitsvektor" $e_0 = (1, 0, \dots) \in B_0$ kann $F(x, \cdot)$ in folgender Form geschrieben werden:

$$F(x,\cdot) = (P_0 x)e_0 + T_0 P_0 (S_1 + G \circ S_1) + T_\infty^{-1} P_\infty (S_{-1} - G)$$

$$\text{Mit } H(x,u) = u - F(x,u) \quad \text{erhalten wir} \quad H \in C^k(E \times B_{B_0}(0,\beta), B_0)$$

$$K = \mathbb{1}_{B_0} - \frac{\partial H}{\partial u}(0,0) = T_0 P_0 S_1 + T_\infty^{-1} P_\infty S_{-1}.$$

Mithilfe von $\max\{\|S_{-1}\|_B, \|S_1\|_B\} \le 1$ folgt die Abschätzung

$$\|K\|_{\mathcal{L}(B_0)} \le \alpha < 1.$$

Dann ist $\frac{\partial H}{\partial u}(0,0) \in \mathcal{L}(B_0)$ invertierbar. Wegen $H(0,0) = 0$, und da für jedes $x \in E_0$ das Element $U(x) \in B_0$ eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung

$$H(x,u) = 0$$

ist, folgt aus dem Satz über implizite Funktionen daß in einer Umgebung von $x = 0$ die Funktion

$$E_0 \to B_0, \quad x \mapsto U(x)$$

zur Klasse $C^k$ gehört. Da die "Evaluationsabbildung" $B_0 \to E, u \mapsto u(0)$ offensichtlich linear und stetig ist, ist die Funktion $h : E_0 \to E_\infty$ in einer Umgebung $V$ von 0 in der Klasse $C^k$. Folglich ist $W_0^V$ als Graph einer $C^k$-Funktion eine $C^k$-Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim_{\mathbb{R}} E_0$. Da durch

$$V \ni x \mapsto (x, h(x)) \in E$$

eine Parametrisierung von $W_0^V$ gegeben wird, ist der Tangentialraum $T_0 W_0^V$ das Bild von $E_0$ unter $(\mathbb{1}_{E_0} \times h'(0)$ in $E_0 \times E_\infty$, wobei wir o.B.d.A. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ annehmen können. Durch Differenzieren der Identität $H(x, U(x)) = 0$ im Punkt $x = 0$ folgt

$$\frac{\partial H}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial H}{\partial u}(0,0)U'(0) = 0 \qquad \text{mit}$$

$$U'(0) \in \mathcal{L}(E_0, B_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial x}(0,0)\xi = -(P_0\xi)e_0 \quad \text{für alle } \xi \in E.$$

Wir erhalten $P_\infty \frac{\partial H}{\partial x}(0,0)\xi = 0$ und mit der Definition von $K$ und Anwenden von $P_\infty$

$$P_\infty U'(0) - T_\infty^{-1} S_{-1} U'(0) = 0, \text{ d.h.} \qquad P_\infty(U'(0)x)(k) = T_\infty^{-1}(U'(0)x)(k+1)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x \in E_0$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \|P_\infty(U'(0)x)(k)\| &\leq \alpha \|P_\infty U'(0)\|_{\mathcal{L}(E_0,B_0)} \|x\|_E \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \\ \|P_\infty U'(0)\|_{\mathcal{L}(E_0,B_0)} &\leq \alpha \|P_\infty U'(0)\|_{\mathcal{L}(E_0,B_0)}, \end{aligned}$$

d.h. $P_\infty U'(0) = 0$, da $\alpha < 1$ ist. Wegen $h'(0)\xi = P_\infty(U'(0)\xi)(0)$ für alle $\xi \in E_0$ erhalten wir $h'(0) = 0$ und somit die Behauptung. **q.e.d.**

Ist $V$ eine Umgebung eines kritischen Punktes $x_0$ des Flusses $\Phi_f$, so definieren wir die lokalen stabilen bzw. instabilen Mannigfaltigkeiten von $\Phi_f$ in $x_0$ bzgl. $V$ durch

$$\begin{aligned} W_s^V(x_0) &= \{x \in W_s(x_0) \mid \Phi_f(t,x) \in V \text{ für } t \geq 0\} \\ W_u^V(x_0) &= \{x \in W_u(x_0) \mid \Phi_f(t,x) \in V \text{ für } t \leq 0\}. \end{aligned}$$

I.a. gilt $W_s^V(x_0) \neq W_s(x_0) \cap V$ und $W_u^V(x_0) \neq W_u(x_0) \cap V$. Nach diesen Vorbereitungen können wir den angekündigten Satz über die lokalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten beweisen, der im Wesentlichen auf Hadamard und Perron zurückgeht.

**Satz 3.34.** *Es sei $\Omega \subset E$ eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Banachraums und $f \in C^k(\Omega, E)$ für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ferner sei $x_0$ ein hyperbolischer kritischer Punkt des von $f$ erzeugten Flusses $\Phi_f$. Dann gibt es eine Umgebung $V$ von $x_0$, derart, daß $W_u^V(x_0)$ $C^k$-Mannigfaltigkeiten sind. Außerdem gilt*

$$T_{x_0} W_s^V(x_0) = x_0 + E_s \text{ und } T_{x_0} W_u^V(x_0) = x_0 + E_u,$$

*Wobei $E_s$ und $E_u$ die stabilen und instabilen Untervektorräume von $e^{tf'(x_0)}$ sind.*

**Beweis:** O.B.d.A. können wir $x_0 = 0$ annehmen. Wir setzen wieder

$$g = (f - f'(0)) \circ r_\alpha,$$

wobei $r_\alpha : E \to \bar{B}(0,\alpha)$ die radiale Retraktion bezeichnet. Dann ist $g$ gleichmäßig Lipschitz stetig, $g(0) = 0$, und $g \in C^k(B(0,\alpha), E)$ mit $g'(0) = 0$. Durch geeignete Wahl von $\alpha > 0$ wird die Lipschitzkonstante von $g$ beliebig klein. Mit $A = f'(0) \in \mathcal{L}(E)$ gilt

$$(A + g)|_{B(0,\alpha)} = f|_{B(0,\alpha)},$$

Also stimmt auf $B(0,\alpha)$ der von $A + g$ erzeugte globale Fluß $\Phi_{A+g}$ mit dem von $f$ erzeugten Fluß $\Phi_f$ überein. Wir setzen nun $T = e$. Dann ist $T$ ein hyperbolischer

Automorphismus, und wie im Beweis vom Satz von Grobman und Hartmann folgt, daß $\tilde{g} = \Phi_{A+g}(1, \cdot) - T$ global Lipschitz stetig ist, wobei die Lipschitzkonstante von $\tilde{g}$ durch geeignete Wahl von $\alpha$ beliebig klein wird. Außerdem gehört $\tilde{g}$ in einer Umgebung von 0 zur Klasse $C^k$. Offensichtlich ist $\tilde{g}(0) = 0$, und da $\frac{\partial}{\partial x}\Phi_{A+g}(\cdot, 0)$ die Lösung des Anfangswertproblems für die linearisierte Gleichung

$$\dot{z} = (A + g'(\Phi_{A+g}(t, 0)))z, \quad z(0) = \mathbb{1}_E$$

ist, folgt aus $\Phi_{A+g}(t, 0) = 0$ und $g'(0) = 0$, daß $\frac{\partial}{\partial x}\Phi_{A+g}(t, 0) = e^{tA}$, also $\tilde{g}'(0) = 0$, gilt. Folglich erfüllen $T$ und $\tilde{g}$ die Voraussetzungen des vorangehenden Satzes. Somit ist die stabile Menge $W_0$ von $\Phi_{A+g}(1, \cdot) = T + \tilde{g}$ als Graph einer global Lipschitz stetigen Abbildung $h : E_0 \to E_\infty$ darstellbar. Außerdem gibt es eine Umgebung $V_0$ von 0 in $E_0$ mit $h \in C^k(V_0, E_\infty)$, derart, daß

$$W_0^{V_0} = \{(x, h(x)) \in E | x \in V_0\}$$

eine $C^k$-Mannigfaltigkeit mit $T_0 W_0^{V_0} = E_0 = E_s$ ist. Wir behaupten nun, daß $W_0 = \tilde{W}_s(0)$ gilt, wobei $\tilde{W}_s(0)$ die stabile Mannigfaltigkeit von $\Phi_{A+g}$ im Punkt 0 ist. Da aus $\lim\limits_{t-\infty} \Phi_{A+g}(t, x) = 0$ stets $\Phi_{A+g}(k, x) \to 0$ für $k \to \infty$ folgt, ist $\tilde{W}_s(0) \subset W_0$. Zum Beweis der umgekehrten Inklusion bemerken wir, daß zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\|\Phi_{A+g}(t, x)\| \leq \epsilon \text{ für } |t| \leq 1 \text{ und } |x| \leq \delta.$$

Andernfalls gäbe es für ein $\epsilon > 0$ eine Folge $(t_k, x_k)$ in $[-1, 1] \times E$ mit $x_k \to 0$ und $\|\Phi_{A+g}(t_k, x_k)\| \geq \epsilon$. Durch Übergang zu einer geeigneten Teilfolge könnten wir $t_k \to \bar{t} \in [-1, 1]$ annehmen, was $\|\Phi_{A+g}(\bar{t}, 0)\| \geq \epsilon$ implizierte, im Widerspruch zu $\Phi_{A+g}(\cdot, 0) = 0$.

Es sei $\epsilon > 0$ beliebig und es gelte $\lim_{k\to\infty} \Phi_f(k, x) = 0$. Dann existiert ein $k(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\|\Phi_{A+g}(k, x)\| \leq \beta$ für $k \geq k(\epsilon)$, wobei $\delta > 0$ wie oben gewählt ist. Also folgt

$$\|\Phi_{A+g}(t, x)\| = \|\Phi_{A+g}(t - k, \Phi_{A+g}(k, x))\| \leq \epsilon \quad \text{für } t \geq k(\epsilon) \text{ und } t \in [k, k + 1),$$

d.h. $\Phi_{A+g}(t, x) \to 0$ für $t \to \infty$, und somit $W_0 \subset \tilde{W}_s(0)$.

Nach dem Beweis von dem vorangehenden Satz ist $h(x) = P_\infty U(x)(0)$ für $x \in E_0$, wobei die Funktion

$$E \to B_0, \quad y \mapsto U(y)$$

stetig ist, in $y = 0$ verschwindet und $U(y)(k) = (T + \tilde{g})^k(y) = \Phi_{A+g}(k, y)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt. Also existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\{(x, h(x)) \mid \|x\| \leq \delta\} \subset \{y \in W_0 \mid \|\Phi_{A+g}(k, y)\| \leq \epsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}\}.$$

Aus $\|\Phi_{A+g}(t,x)\| \leq \epsilon$ für $|t| \leq 1$ und $|x| \leq \delta$ folgt wie im Beweis der Inklusion $W_0 \subset \tilde{W}_s(0)$, daß wir zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ die Zahl $\delta > 0$ so wählen können, daß

$$\{(x, h(x)) \mid \|x\| \leq \delta\} \subset \{y \in W_0 \mid \|\Phi_{A+g}(t,y)\| \leq \epsilon \quad \text{für alle } t \in \mathbb{N}\}.$$

gilt. Wegen $W_0 = \tilde{W}_s(0)$ existieren also Nullumgebungen $V$ in $E$ und $\hat{V} \subset V_0$ in $E_0$ mit $W_0^{\hat{V}} \subset \tilde{W}_s^V(0)$. Da in der Nähe von 0 die Flüsse übereinstimmen, können wir $V$ so klein wählen, daß $\tilde{W}_s^V(0) = W_s^V(0)$ gilt. Insbesondere ist $W_s^V(0) \subset W_0$, und da $W_0$ der Graph einer auf $E_0$ definierten Funktion ist, gilt $W_s^V(0) \subset W_0^{V_0}$ für eine genügend kleine Umgebung $V$ von 0. Also ist $W_s^V(0)$ eine $C^k$-Mannigfaltigkeit mit $T_{x_0}W_s^V(0) = E_s$. Die Behauptung für $W_u^V(0)$ folgt nun durch “Zeitumkehr”. **q.e.d.**