Einführung in die Variationsrechnung

Hanna Daubaris

Seminarvortrag 11. September 2017

1 Einleitung

Die Variationsrechnung fand ihren Ursprung durch die Mathematiker Leonhard Euler und Joseph-Louis Lagrange. Anwendung findet diese bei mathematischen und physikalischen Problemlösungen. Das bekanntes Beispiel ist die Brachistochrone. Diese beschäftigt sich mit dem Finden der Verbindung zweier Punkte in einer Ebene, auf der eine Kugel am schnellsten hinabrollt. Die möglichen Kurven beschreibt ein Funktional. Das Ziel ist es nun, die Kurve zu finden, auf der die Rolldauer minimal wird.
Dies ist auch das Hauptthema der Variationsrechnung:
Die Minimierung von Funktionalen.
Zum Einstieg werde ich Funktionale definieren:

Definition 1. *Ein* ***Funktional*** *ist eine Abbildung $J : V \to K$ mit V K-Vektorraum.*

Manchmal wird diese Definition auf Funktionenräume als Vektorraum beschränkt. Dies werde ich auch tun und als Vektorraum den Funktionenraum der stetigen Funktionen betrachten(V:=C([a,b],$\mathbb{R}$)). Der Funktionenraum V ist mit der Supremumsnorm ($\|x\| = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$), ein normierter Vektorraum.
Um die Minimierungsprobleme lösen zu können, muss man also in normierten Vektorräumen differenzieren können.
Wie dies funktioniert, werde ich im Folgenden darstellen. Dazu werde ich zwei Differentiale definieren, das Fréchet-Differential und das Gateaux-Differential. Außerdem werden wir uns damit beschäftigen, wann ein Funktional Fréchet-differenzerbar ist. Zum Schluss werde ich noch den Zusammenhang beider Differentiale aufzeigen.

2 Differenzieren in normierten Vektorräumen

Wie definiert man nun Differenzierbarkeit in normierten Vektorräumen? Am einfachsten wäre es, wenn man die bekannte Definition für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

übernehmen könnte. Das Problem dieser Definition aber ist, dass h nun ein Vektor ist und die Division mit Vektoren nicht definiert ist. Also muss die Definition so umgeformt werden, dass diese auf Funtkionale übertragen werden kann:

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| \quad \leq \quad \epsilon \qquad \text{für} \quad |h| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \left| f(x_0 + h) - f(x_0) - h \cdot f'(x_0) \right| \quad \leq \quad \epsilon\, |h| \quad \text{für} \quad |h| < \delta$$

Dies entspricht schon der einfachsten Form, des Fréchet-Differentials. Jetzt kann man diese für normierte Vektorräume verallgemeinern:

Definition 2. *(Fréchet-Differenzierbarkeit) Das Funktional $J : U \to W$ mit $U \subset V$ offen, U, W normierte Vektorräume, ist in $x_0 \in U$ Fréchet-differenzierbar , wenn es ein stetiges $J'(x_0) \in L(V, W)$ gibt, so dass $\forall \epsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0$:*

$$\frac{\|J(x_0 + h) - J(x_0) - J'(x_0) \cdot h\|}{\|h\|} < \epsilon \qquad \text{für } h \in V \text{ mit } \|h\| < \delta.$$

*$J'(x_0)$ heißt **Fréchet-Differential**.*

Wichtig an dieser Definition ist, falls ein stetiges $J'(x)$ existiert, die Linearität bezüglich h.
Wann ein Funktional Fréchet-differenzierbar ist und wie dessen Ableitung aussieht sagt uns der nächste Satz.

Satz 1. *Sei V=C([a,b], $\mathbb{R}$), $x \in V, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*
Das Funktional $J(x) = \int_a^b f(x(t))dt$ ist Fréchet-Differenzierbar, wenn $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $J'(x)(h) = \int_a^b (f'(x(t))h(t))dt$.

Bemerkung: An sich reicht es wenn $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, das heißt das Funktional ist nur einmal stetig differenzierbar. Jedoch würde dies den folgenden Beweis erschweren.

Beweis.

Hier entspricht die Norm dem Betrag,da das Funktional eine Abbildung nach $\mathbb{R}$ ist. Ziel des Beweises wird es sein den Differenzenquotienten so abzuschätzen, dass die Definiton des Fréchet-Differentials erfüllt ist.

$$= \left| \int_a^b f(x(t) + h(t))dt - \int_a^b f(x(t))dt - \int_a^b [f'(x(t))h(t)]dt \right|$$

$$= \left| \int_a^b [f(x(t) + h(t)) - f(x(t)) - f'(x(t))h(t)]dt \right|$$

$$\leq \int_a^b \left| f(x(t) + h(t)) - f(x(t)) - f'(x(t))h(t) \right| dt \ (*)$$

Dies entspricht dem Satz von Taylor, den wir aus der Analysis kennen.
Also bekommt man mit Taylor:

$f(x + h) - f(x) - f'(x)h = \dfrac{f''(\xi) \cdot h^2}{2}$

für $\xi \in [x(t), x(t) + h(t)]$ bzw. $[x(t) + h(t), x(t)]$ mit $t \in [a, b]$

Für $|h| < 1$ (können diese betrachten, da $|h|$ beliebig klein wird) ist auch $|x + h|$ beschränkt $\Rightarrow$ da f'' nach Vorraussetzung stetig ist, ist f'' in $[x(t), x(t) + h(t)]$ bzw. $[x(t) + h(t), x(t)]$ mit t $\in [a, b]$ beschränkt,

dh. $\exists\, c > 0$ mit $\left|f''\right| \leq c$ für $\xi \in [x(t), x(t) + h(t)]$ bzw. $[x(t) + h(t), x(t)]$ mit t $\in [a, b]$

Mit dem Ergebnis schätzt man nun die obige Gleichung $(*)$ ab,

$$\Rightarrow \left| f(x(t)) + h(t)) - f(x(t)) - f'(x(t))h(t)) \right| \leq \frac{c \cdot h^2}{2} \leq \frac{c \cdot \|h(t)\|_\infty^2}{2}$$

$$\Rightarrow \left| J(x + h) - J(x) - J'(x)(h) \right| \leq \int_a^b \frac{c \cdot \|h\|_\infty^2}{2} dt = \frac{c \cdot \|h\|_\infty^2}{2}(b - a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|J(x + h) - J(x) - J'(x)(h)|}{\|h\|} \leq \frac{c}{2} \|h\| (b - a)$$

□

Bemerkung: analog gilt für x,y,z $\in C([a,b],\mathbb{R})$

$$J(x,y,z) = \int_b^a f(x(t),y(t),z(t))dt$$

ist Fréchetdifferenzierbar, wenn f 2-mal differenzierbar ist mit

$$J'(x,y,z)(u,v,w)$$
$$= \int_a^b [\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t),z(t))u(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t),z(t))v(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t),y(t),z(t))w(t)]dt$$

Mit diesem Satz können nun die Ableitungen von Funktionalen relativ einfach berechnet werden.

Beispiele:

$$(1)\ J(x) = \int_0^1 (x^2 + x^3)dt$$
$$\to J'(x)(h) = \int_0^1 (2(x(t)h(t) + 3(x(t))^2 h(t))dt$$
$$(2)\ J(x,y,z) = \int_0^1 [2 \cdot x(t)^3 + y(t) - z(t)^4]dt$$
$$\to J'(x,y,z)(u,v,w) = \int_0^1 [6 \cdot x(t)^2 u(t) + v(t) - 4 \cdot z(t)^3 w(t)]dt$$

Für die Variationsrechnung ist nicht nur die Fréchetdifferenzierbarkeit wichtig, sondern auch die Gateaux-Differenzierbarkeit.

Definition 3. *(Gateaux-differenzierbar)*
$J : U \to W, U \subset V$, U, W normierte Vektorräume. Das Funktional J ist an der Stelle x_0 Gateaux-differenzierbar, wenn $\xi \mapsto J(x_0 + \xi h)$ bei $\xi = 0$ differenzierbar ist.

Das Gateaux-Differential ist die Richtungsableitung, denn die Ableitung wird nur in die Richtung eines bestimmten $h_0 \in V$ betrachtet.

Nun möchten wir die Definition des Gateaux-Differentials von

$J'(x_0)(h) = \frac{d}{d\xi} J(x_0 + \xi h)|_{\xi=0}$ in eine günstigere Form überführen.

Dazu wird zuerst das Gateaux-Differential an der Stelle $x_0 + \eta h$ bestimmt für $\eta \in \mathbb{R}$

$J'(x_0 + \eta h)(h) = \frac{d}{d\xi} J(x_0 + \xi h)|_{\xi=\eta}$

da unser Funktional nur noch von ξ abhängt, kann man $J(x_0 + \xi h) =: \bar{J}(\xi)$ definieren und nun die bekannte Definition der Ableitung anwenden

$$\Rightarrow \ \frac{d}{d\xi} J(x_0 + \xi h) = \bar{J}'(\xi) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\bar{J}(\xi + \lambda) - \bar{J}(\xi)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{J(x_0 + (\xi + \lambda)h) - J(x_0 + \xi h)}{\lambda}$$

Das sind nun zwei äquivalente Gleichungen für das Gateaux-Differential.
Um nun das Differential an der Stelle x_0 zu bilden, setzt man $\eta = 0$
und erhält :

$$\boxed{J'(x_0)(h) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{J(x_0 + \lambda h) - J(x_0)}{\lambda}}$$

Wie in der Einleitung erwähnt gibt es einen Zusammenhang zwischen den beiden Differentialen. Man wird erwarten, dass unser Fréchet-Differenital existiert, wenn für jedes $h \in V$ die Richtungsableitung existiert. Genau das wird mit dem nächsten Satz gezeigt, man bekommt sogar dass die beiden Ableitungen gleich sind.

Satz 2. *Ist das Funktional J in $x_0 \in U \subset V$ Fréchetdifferenzierbar, so ist dieses auch Gateaux-differenzierbar und die beiden Ableitungen sind einander gleich.*

Für den Beweis dieses Satzes muss noch ein Hilfsatz eingeführt werden.

Hilfssatz. *Das Gateaux-Differential ist homogen 1. Grades in h,*
dh. $J'(x)(\lambda h) = \lambda J'(x)(h)$

Den Beweis dieses Satzes erhält man einfach durch verwenden der neuen Definition des Gateaux-Differentials und setzen von $\lambda\epsilon = \eta$. Mit diesem Hilfssatz kann nun Satz 2. bewiesen werden.

Beweis.

Nach Definition 2 gilt:

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass $\forall h \in V$ mit $\|h\| < \delta \, gilt: \dfrac{|J(x_0+h) - J(x_0) - J'(x_0) \cdot h|}{\|h\|} < \epsilon$

Dann gilt für ein festes, jedoch beliebiges h $\in V$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\|\lambda h\| < \delta$:

$$
\begin{aligned}
\frac{|J(x_0+\lambda h) - J(x_0) - J'(x_0)\lambda h|}{\|\lambda h\|} &< \epsilon \\
\Rightarrow \frac{|J(x_0+\lambda h) - J(x_0) - \lambda J'(x_0) h|}{|\lambda|} &< \epsilon \, \|h\| \\
\xRightarrow{\text{Hilfssatz}} \left| J(x_0+\lambda h) - J(x_0) - \lambda J'(x_0) h \right| &< \epsilon \, \|h\| \\
\Rightarrow \left| \lim_{\lambda \to 0} \frac{J(x_0+\lambda h) - J(x_0)}{\lambda} - J'(x_0) h \right| &< \epsilon \, \|h\| \text{ mit } |\lambda| < \frac{\delta}{\|h\|} \\
\Rightarrow \underbrace{\lim_{\lambda \to 0} \frac{J(x_0+\lambda h) - J(x_0)}{\lambda}}_{\text{Fréchet-Differential}} &= \underbrace{J'(x_0)h}_{\text{Gateaux-Differential}}
\end{aligned}
$$

□

<u>Bemerkung:</u> Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht ohne Weiteres, sondern nur wenn das Gateaux-Differential stetig in x und gleichmäßig stetig in h ist.

3 Literaturverzeichnis

- Arnold, W.: "Mathematische Methoden der klassischen Mechanik", Springer Verlag, 2013.
- Dieudonne, J.: "Grundzüge der modernen Analysis", Springer Verlag, 1979.
- Klingbeil, E.: "Variationsrechnung", Spektrum Verlag, 1988.