Die Transversalitätsbedingung

Benedikt Schmidt

18.09.2017

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **3**

2 Natürliche Randbedingungen **3**

2.1 Herleitung der natürlichen Randbedingung 4

2.2 Beispiel: Kettenlinie 5

3 Der allgemeine Fall **5**

4 Transversalitätsbedingungen **9**

4.1 Herleitung der Transversalitätsbedingung 9

4.2 Beispiel 10

5 Quellen **14**

1 Einführung

Ziel der Variationsrechnung ist es, Maxima bzw. Minima von Funktionalen zu finden. Diese Extrema (Extremale genannt) sind dann wiederum optimale Funktionen für bestimmte Probleme mit gewissen Bedingungen. In den vorangegangenen Vorträgen wurden bereits das Gateaux und das Frechet Differential eingeführt, um Funktionale auf den jeweiligen Funktionenräumen differenzieren zu können. Denn wie auch in der Analysis im $\mathbb{R}^n$ ist die Bedingung, dass die erste Ableitung an einem Extremum gleich 0 sein muss, eine notwendige Bedingung. Außerdem wurde die Euler-Lagrange Gleichung motiviert und hergeleitet. Diese stellt eine weitere notwendige Bedingung an die infrage kommende Funktion dar, damit ein Extremal vorliegt. Wir betrachten im Rahmen dieser Seminarreihe Funktionale der folgenden Form:

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t)), dt$$

und wollen zum Beispiel folgendes lösen:

$$\min_x J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t)), dt$$

Die Funktion F soll hierbei mindestens zweimal stetig partiell nach t, x(t) und $\dot{x}(t)$ differenzierbar sein. Die Funktion x(t), die die obige Gleichung minimiert, erfüllt außerdem die Euler-Lagrange Gleichung:

$$F_x(t, x_0(t), \dot{x_0}(t)) - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(t, x_0(t)), \dot{x_0}(t)) = 0 \tag{1}$$

Die aus den vorherigen Vorträgen bekannten Variationsprobleme hatten gemeinsam, dass jeweils immer feste Randbedingungen gegeben waren (also immer $\hat{x}(t_0) = x(t_0)$ und $\hat{x}(t_1) = x(t_1)$ galt). Ziel dieses Vortrags ist es nun, Fälle zu betrachten, in denen andere oder gar keine Randbedingungen vorgegeben sind.

2 Natürliche Randbedingungen

Im Kontext eines Variationsrechnungsproblems sind nicht immer explizite Randbedingungen gegeben. Sei also $\hat{x}(t) = x(t) + \epsilon\eta(t)$ wieder eine Variation von x. Dann kann der Fall eintreten, dass $\hat{x}(t_0) \neq x(t_0)$ und $\hat{x}(t_1) \neq x(t_1)$. Es kann also vorkommen, dass Randbedingungen $\eta(t_1) = 0$ und $\eta(t_0) = 0$ nicht erfüllt sind. In solchen Fällen werden in diesem Kapitel Randbedingungen, die implizit in solchen Problemen versteckt liegen, herausgearbeitet. Da diese

Bedingungen auf natürliche Weise aus der funktionalen Form hervorgehen, bezeichnet man sie als Natürliche Randbedingungen.

2.1 Herleitung der natürlichen Randbedingung

Seien also die Randbedingungen $\eta(t_1) = 0$ und $\eta(t_0) = 0$ nicht erfüllt. Aus der Einführung wissen wir bereits, dass für das Funktional J die Euler-Lagrange Gleichung erfüllt sein muss. Wir wählen wie üblich den Ansatz $\hat{x}(t) = x(t) + \epsilon\eta(t)$ und

$$J[\hat{x}(t)] = \overline{J[\epsilon]} = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t) + \epsilon\eta(t), \dot{x}(t) + \epsilon\dot{\eta}(t))\, dt.$$

J ist gerade für ein $x \in C^2[t_0, t_1]$ extremal, wenn folgendes gilt:

$$\left.\frac{\partial \overline{J[\epsilon]}}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0$$

Wie in Vortrag 2 können wir $J(\hat{x}) - J(x)$ umformen zu:

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} (F_x(t, x(t), \dot{x}(t))\eta(t) + F_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{\eta}(t))\, dt \\ \overset{\text{p.I.}}{=} &\int_{t_0}^{t_1} [F_x(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))]\eta(t)\, dt + \eta \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t_0}^{t_1} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Für die Extremalität muss nun die Euler-Lagrange Gleichung (1) gelten. Dadurch verschwindet schon einmal der Integralausdruck. Allerdings fällt $\eta\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\big|_{t_0}^{t_1}$ nicht ohne weiteres weg, weil nun $\eta(t)$ an $t = t_1$ und/oder $t = t_0$ im Allgemeinen nicht verschwindet. Durch Wegfallen des Integrals muss aber trotzdem gelten: $\eta\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\big|_{t_0}^{t_1} = 0$, weil $\eta(t_1) \neq 0$ und/oder $\eta(t_0) \neq 0$ ergibt sich also folgende Bedingung:

$$\eta \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t_1} - \eta \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t_0} = 0 \tag{3}$$

Diese Bedingung muss für alle $\eta \in C^2[t_0, t_1]$ gelten, deshalb kann es sehr wohl auch Fälle geben an denen entweder $\eta(t_1)$ oder $\eta(t_0)$ verschwindet. Deshalb müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t_1} = 0 \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t_0} = 0 \tag{5}$$

Diese Bedingungen (3) und (4) nennt man die natürlichen Randbedingungen.

2.2 Beispiel: Kettenlinie

Die Kettenlinie ist mathematisch die Form, die ein Seil annimmt, wenn man es an zwei festen Punkten befestigt. Von ihrem eigenen Gewicht nach unten gezogen hat die Kurve typischerweise eine U-Form. Wir wollen uns nun die Lösung des Kettenlinien-Problems bei nur einer gegebenen Randbedingung ansehen. Wir suchen also wieder nach einer Lösung der Funktionalgleichung:

$$J(x) = \int_0^1 x(t)\sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}dt$$

Wie wir bereits aus den vorherigen Vorträgen wissen, löst gerade

$$x(t) = \kappa_1 cosh(\frac{t}{\kappa_1} + \kappa 2)$$

dieses Problem. $\kappa_{1,2}$ sind Konstanten. Wir geben uns die Randbedingung $x(0) = h$ vor, sodass folgt

$$h = \kappa_1 cosh(\kappa_2).$$

Für $x = 1$ wurden keine Bedingungen festgelegt. Also muss hier die natürliche Randbedingung gelten:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{t=1} = \frac{x(1)\dot{x}(1)}{\sqrt{1 + \dot{x}(1)^2}} = 0$$

Weil $h > 0$, $\kappa_1 \neq 0$ und natürlich auch $x(1) \neq 0$, muss also gelten $\dot{x}(1) = 0$, damit folgt:

$$sinh(\frac{1}{\kappa_1} + \kappa_2) = 0$$

$$\Rightarrow \kappa_2 = \frac{-1}{\kappa_1}$$

$$\Rightarrow x(t) = \kappa_1 cosh(\frac{x-1}{\kappa_1})$$

$$\overset{x(0)=0}{\Rightarrow} h\xi = cosh(\xi)$$

Wobei $\xi = 1/\kappa_1$ ist. Das Problem hat also zwei Lösungen.

3 Der allgemeine Fall

Im vorherigen Kapitel haben wir den Fall ohne vorgegebene Randbedingungen untersucht. Allerdings blieben die Randpunkte bezüglich t fest. Ziel ist es nun, die Theorie auf Probleme mit variablen Randpunkten auszuweiten. Hierfür sei $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, die eine Kurve γ mit den Endpunkten $P_0 = (t_0, x_0)$ und $P_1 = (t_1, x_1)$ beschreibt. Außerdem sei $\hat{x}$ ebenso eine Funktion, die eine Kurve $\hat{\gamma}$ mit den Endpunkten $\hat{P}_0 = (\hat{t}_0, \hat{x}_0)$ und $\hat{P}_1 = (\hat{t}_1, \hat{x}_1)$. Wir möchten nun Kurven untersuchen, die „nah" beieinander liegen. Allerdings müssen x und $\hat{x}$ nicht unbedingt auf den gleichen Intervallen definiert sein. Deshalb muss zu dieser Analyse eine neue passende Norm eingeführt werden. Zuerst erweitern wir die Funktionen allerdings so, dass sie auf dem gleichen Intervall definiert sind. Hierfür definieren wir zuerst das gemeinsame Intervall. Sei $\tilde{t}_0 := min\{t_0, \hat{t}_0\}$ und $\tilde{t}_1 := max\{t_1, \hat{t}_1\}$. Wir sind an kleinen Variationen von x interessiert, deshalb können wir x und $\hat{x}$ mittels Taylor Reihe auf dem gemeinsamen intervall $[\tilde{t}_0,\tilde{t}_1]$ approximieren. Damit ergibt sich zum Beispiel für $\tilde{t_0} = t_0$ und $t_1 < \tilde{t}_1$:

$$x^*(t) = \begin{cases} x, & \text{wenn } t \in [t_0, t_1] \\ x(t_1) + (t - t_1)\dot{x}(t_1) + \frac{(t-t_1)^2}{2}\ddot{x}(t_1), & \text{wenn } t \in (t_1, \tilde{t}_1] \end{cases}$$

Damit ist $x^* \in C^2[\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]$. Seien nun x und $\dot{x}$ bereits so angepasst worden. Dann definieren wir eine Abstandsfunktion und auch eine Norm. Der Abstand zwischen zwei Funktionen x und $\hat{x}$ soll wie folgt bestimmt sein:

$$d(x, \hat{x}) := \|x - \hat{x}\| + |P_0 - \hat{P}_0| + |P_1 - \hat{P}_1|$$

Wobei $|P_k - \hat{P}_k| := \sqrt{(t_k - \hat{t}_k)^2 + (x_k - \hat{x}_k)^2}$ ist und die Norm $\|\cdot\|$ entsprechend dem Problem entweder

$$\|x\| = \sup_{t\in[\tilde{t}_0,\tilde{t}_1]} |x(t)|$$

oder

$$\|x\| = \sup_{t\in[\tilde{t}_0,\tilde{t}_1]} |x(t)| + \sup_{t\in[\tilde{t}_0,\tilde{t}_1]} |\dot{x}(t)|.$$

Sei J nun ein Funktional der bekannten Form:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

Die Integrationsgrenzen hängen dabei von der gewählten Funktion ab, so ist z.B.

$$J(\hat{x}) = \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} F(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))dt.$$

J habe nun einen stationären Punkt bei x (also $J(\hat{x}) - J(x) = O(\epsilon^2)$), falls $d(\hat{x}, x) = O(\epsilon)$ mit $\epsilon \to 0$) Sein nun $\hat{x} = x + \epsilon\eta$ mit $\eta \in C^2[\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]$, dann müssen $\hat{t}_k - t_k$ und $\hat{x}_k - x_k$ wegen $d(\hat{x}, x) = O(\epsilon)$ auch von ϵ abhängen. Deshalb seien $\hat{t}_k = t_k + \epsilon T_k$ und $\hat{x}_k = x_k + \epsilon X_k$ für $k \in \{0, 1\}$. Damit folgt nun:

$$\begin{aligned}
J(\hat{x}) - J(x) &= \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} F(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))dt - \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt \\
&= \int_{t_0+\epsilon T_0}^{t_1+\epsilon T_1} F(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))dt - \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} (F(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - F(t, x(t), \dot{x}(t)))dt + \int_{t_1}^{t_1+\epsilon T_1} F(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))dt \\
&- \int_{t_0}^{t_0+\epsilon T_0} F(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))dt
\end{aligned}$$

Mit den gleichen Umformungen wie in Kapitel 2 erhalten wir nun:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1} (F(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - F(t, x(t), \dot{x}(t)))dt \overset{\text{p.I.}}{=} \epsilon \Bigg\{ \eta \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{t_0}^{x_1} \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} [F_x(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))]\eta(t)\, dt \Bigg\} + O(\epsilon^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_1+\epsilon T_1} F(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))dt &\overset{\text{Taylor}}{=} \epsilon T_1 F(t, x(t), \dot{x}(t))\Big|_{t_1} + O(\epsilon^2) \\
\int_{t_0}^{t_0+\epsilon T_0} F(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))dt &\overset{\text{Taylor}}{=} \epsilon T_0 F(t, x(t), \dot{x}(t))\Big|_{t_0} + O(\epsilon^2)
\end{aligned}$$

Damit folgt (um Platz zu sparen wird $x(t)$ fortan mit x bezeichnet, für $\dot{x}(t)$ wird nur noch $\dot{x}$ und für $\eta(t)$ wird η geschrieben):

$$\begin{aligned}
J(\hat{x}) - J(x) = \epsilon \Bigg\{ &\eta \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{t_0}^{x_1} + \int_{t_0}^{t_1} [F_x(t, x, \dot{x}) - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})]\eta\, dt \\
&+ T_1 F(t, x(t), \dot{x}(t))\Big|_{t_1} - T_0 F(t, x(t), \dot{x}(t))\Big|_{t_0} \Bigg\} \\
&+ O(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{6}$$

Die Variation an den Endpunkten (t_0, x_0) muss der Kompatibilitätsbedingung

$$\begin{aligned}
\hat{x}_0 = \hat{x}(\hat{t}_0) &= x(t_0 + \epsilon T_0) + \epsilon\eta(t_0 + \epsilon T_0) \\
&= x_0 + \epsilon X_0
\end{aligned}$$

genügen. Weil auch

$$x(t_0 + \epsilon T_0) + \epsilon\eta(t_0 + \epsilon T_0) = x(t_0) + \epsilon T_0 \dot{x}_{t_o} + \epsilon\eta(t_0) + O(\epsilon^2)$$

gilt

$$x_0 + \epsilon X_0 = x(t_0) + \epsilon T_0 \dot{x}_{t_o} + \epsilon\eta(t_0) + O(\epsilon^2).$$

Umgeformt ergibt sich:

$$\eta(t_0) = X_0 - T_0 \dot{x}(t_0) + O(\epsilon) \tag{7}$$

Gleichsam gilt am anderen Endpunkt:

$$\eta(t_1) = X_1 - T_1 \dot{x}(t_1) + O(\epsilon) \tag{8}$$

Setzen wir nun die Gleichungen 6 und 7 in Gleichung 5 ein erhalten wir:

$$\begin{aligned} J(\hat{x}) - J(x) = \epsilon \Bigg\{ & \int_{t_0}^{t_1} [F_x(t, x, \dot{x}) - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})] \eta \, dt \\ & + X_1 \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{t_1} - X_0 \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{t_0} \\ & + T_1 \left(F - \dot{x} \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{t_1} \right) - T_0 \left(F - \dot{x} \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{t_0} \right) \Bigg\} \\ & + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Das Funktional hat einen stationären Punkt bei x, deshalb müssen alle Terme mit ϵ in allen Variationen verschwinden. Es ist immer möglich Variationen mit $X_k = T_k = 0$ zu wählen (wie z.B. die Variationen mit festen Endpunkten). Deshalb muss x folgende Gleichung erfüllen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{9}$$

Zusätzlich muss x die Randbedingung:

$$\begin{aligned} & X_1 F(t, x(t), \dot{x}(t)) \Big|_{t_1} - X_0 F(t, x(t), \dot{x}(t)) \Big|_{t_0} \\ & + T_1 \left(F - \dot{x} \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{t_1} \right) - T_0 \left(F - \dot{x} \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{t_0} \right) \\ & = 0 \end{aligned}$$

erfüllen. Mit der Notation

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}, \\ H &= \dot{x} p - F \end{aligned}$$

hat die Bedingung die kompaktere Schreibweise:

$$p\delta x - H\delta t\Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \tag{10}$$

Wobei wir δ für $k = 0, 1$ wie folgt definiert haben

$$\delta x(t_k) = X_k,$$
$$\delta t(t_k) = T_k.$$

Mit Gleichung 9 können speziellere Probleme behandelt werden. Diese Probleme betrachten Variationen, bei denen die Endpunkte Bedingungen der Art $g_k(t_0, x_0, t_1, x_1)$ erfüllen. Die maximale Anzahl solcher Bedingungen ist offenbar vier. Typischerweise haben Variationsprobleme aber die Form $g_k(t_j, x_j)$ für $j = 0, 1$, sodass die Bedingungen für $j = 1$ nicht mit denen für $j = 0$ verbunden sind. Deshalb können wir in solchen Fällen immer Variationen in Betracht ziehen, die einen Endpunkt fest lassen. Dadurch erhalten wir zwei Bedingungen:

$$p\delta x - H\delta t\Big|_{t_0} = 0 \tag{11}$$

$$p\delta x - H\delta t\Big|_{t_1} = 0 \tag{12}$$

Im nächsten Kapitel betrachten wir nun Endpunkte, die auf einer Kurve liegen. Diese Kurve soll implizit durch Gleichungen der Art $g(t_j, x_j)$ für $j = 0, 1$ beschrieben sein.

4 Transversalitätsbedingungen

4.1 Herleitung der Transversalitätsbedingung

Sei zunächst J das bekannte Funktional der Form:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

Dann möchten wir nun für dieses J eine glatte Funktion x finden, sodass

1. J bei x einen stationären Punkt hat.
2. Für die Funktion x am einen Ende gilt $x(t_0) = x_0$.
3. Die Funktion x am anderen Ende gilt, dass sie auf einer Kurve Γ liegt.

Γ sei parametrisiert durch

$$r(\xi) = (t_\Gamma(\xi), x_\Gamma(\xi)), \tag{13}$$

mit $\xi \in \mathbb{R}$. Durch das vorherige Kapitel wissen wir schon, welche Bedingungen eine solche Lösung des Problems erfüllen muss. Dies sind die folgenden:

1. Die Euler-Lagrange Gleichung (Gleichung 8)
2. Gleichung 11

Wir können die infinitisemale Änderung δx in $t = t_1$ mit $dx_\Gamma / d\xi$ und die infinitisemale Änderung δt mit $dt_\Gamma / d\xi$ ausdrücken. Dadurch wird Gleichung 11 zu:

$$\frac{dx_\Gamma}{d\xi} p - \frac{dt_\Gamma}{d\xi} H = 0 \tag{14}$$

Wobei p ($= \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$) und H ($= \dot{x}p - F$) an der Stelle $t = t_1$ ausgewertet werden. Bei diesem Vorgehen ist zu Beginn nicht klar, welchen Wert man t_1 zuweisen soll, allerdings weiß man, dass $(t_1, x(t_1))$ auf der Kurve Γ liegen soll. Falls entweder t_1 oder $x(t_1)$ bekannt sind wissen wir ebenso an welchem Wert ξ wir die Ableitungen in Gleichung 13 auswerten müssen. Geometrisch gesehen ist der Vektor $(\frac{dt_\Gamma}{d\xi}, \frac{dx_\Gamma}{d\xi})$ ein Tangentenvektor von Γ. Gleichung 13 ist außerdem gleichbedeutend damit, dass $\mathbf{v} = (p, -H)$ orthogonal zu diesem Tangentenvektor ist. Gleichung 13 ist also gerade die Transversalitätsbedingung. Mit der gleichen Vorgehensweise kann man diese Bedingungen nun auch auf das Problem ausweiten, bei dem ein Endpunkt auf der Kurve Γ_0 und der andere auf der Kurve Γ_1 liegt. Hierfür sei die Kurve Γ_0 durch $(t_{\Gamma_0}(\sigma), x_{\Gamma_1}(\sigma))$, $\sigma \in [\sigma_0, \sigma_1]$ beschrieben und die Kurve Γ_1 durch $(t_{\Gamma_1}(\xi), x_{\Gamma_1}(\xi))$, $\xi \in [\xi_0, \xi_1]$. Dann ergeben sich die Transversalitätsbedingungen:

$$\frac{dx_{\Gamma 0}}{d\sigma} p - \frac{dt_{\Gamma 0}}{d\sigma} H = 0 \tag{15}$$

$$\frac{dx_{\Gamma 1}}{d\xi} p - \frac{dt_{\Gamma 1}}{d\xi} H = 0 \tag{16}$$

4.2 Beispiel

Sei

$$J(x) = \int_0^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2},$$

mit den Randbedingungen 1. $x(0) = 0$ und 2. $(t_1, x(t_1))$ liegt auf der Kurve Γ, die durch $r(\xi) = (t_\Gamma(\xi), x_\Gamma(\xi))$ parametrisiert ist. Ziel ist es nun, die Minimale Verbindungsstrecke vom Nullpunkt und der Kurve Γ zu finden. Hier sind

$$p = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}},$$

und

$$
\begin{aligned}
H &= \dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} - F \\
&= \frac{\dot{x}^2}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} - \sqrt{1+\dot{x}^2} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}.
\end{aligned}
$$

Mit der Transversalitätsbedingung (Gleichung 15) ergibt sich:

$$\frac{dx_\Gamma}{d\xi}\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} + \frac{dt_\Gamma}{d\xi}\frac{1}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = 0$$

Geometrisch gesehen suchen wir einen Ursprungsvektor, der orthogonal ist zur Tangente von Γ. Das ist gleichbedeutend damit, dass das Skalarprodukt beider Vektoren null ist. Also

$$<Tangente_\Gamma, v> = <(\frac{\partial t_\Gamma}{d\xi}, \frac{\partial x_\Gamma}{d\xi}), (1, \frac{dx}{dt})> = (\frac{\partial t_\Gamma}{d\xi}, \frac{\partial x_\Gamma}{d\xi}) \cdot (1, \frac{dx}{dt}) = 0$$

Beispiel a):
Sei Γ parametrisiert durch $r(\xi) = (\cos(\xi), \sin(\xi))$ wir suchen also Ursprungsvektoren, die orthogonal zum Einheitskreis sind. Die sind offensichtlich alle Vektoren ausgehend von (0,0) mit Länge 1. Besonders deutlich wird dies grafisch (Abbildung 1):

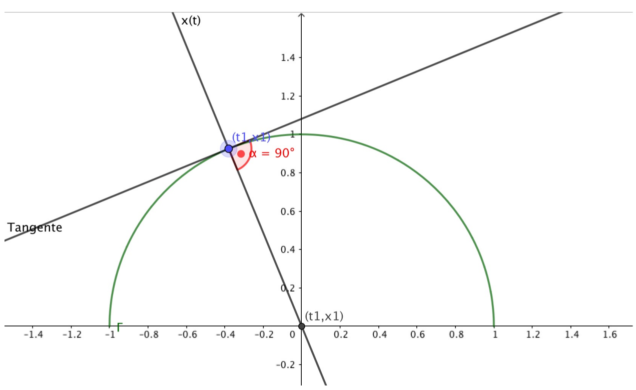

Abbildung 1: kürzeste Verbindung zwischen Einheitskreis und Nullpunkt

Beispiel b):
Sei Γ parametrisiert durch

$$r(\xi) = (\xi - 1, \xi^2 + \frac{1}{2}), \xi \in \mathbb{R}$$

Aus den vorherigen Vorträgen wissen wir, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten im $\mathbb{R}^2$ eine Gerade ist. Deshalb hat x die Form $x(t) = m * t + b$ wobei b durch $x(0) = 0$ direkt $b = 0$ festlegt. Dann muss gelten:

$$(\frac{\partial t_\Gamma}{d\xi}, \frac{\partial x_\Gamma}{d\xi}) \cdot (1, \frac{dx}{dt}) = (1, 2\xi) \cdot (1, m) = 0,$$

daher

$$\begin{aligned} & 1 + 2\xi m = 0 \\ \Leftrightarrow & 2\xi m = -1 \\ \Leftrightarrow & \xi = \frac{-1}{2m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & r(\xi) = (\frac{-1}{2m} - 1, \frac{1}{4m^2} + \frac{1}{2}) = (t_1, mt_1) \\ \Leftrightarrow & I.\ \tfrac{-1}{2m} - 1 = t_1 \\ & II.\ \tfrac{1}{4m^2} + \tfrac{1}{2} = mt_1 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{4m^2} + \frac{1}{2} = m(\frac{-1}{2m} - 1) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{4m^2} + \frac{1}{2} = \frac{-1}{2} - m \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{4} + \frac{1}{2}m^2 = \frac{-1}{2}m^2 - m^3 \\ \Leftrightarrow & 1 + 2m^2 = -2m^2 - 4m^3 \\ \Leftrightarrow & 4m^3 + 4m^2 + 1 = 0 \\ \Rightarrow & m \approx -1,17965 \end{aligned}$$

x ist also gerade $x(t) = -1,1797t$. Grafisch sieht das Ganze so aus:

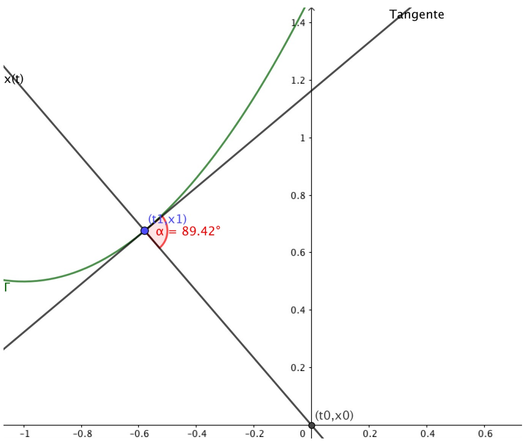

Abbildung 2: Grafik zu Beispiel b)

5 Quellen

Literatur

[1] Bruce van Brunt *The Calculus of Variations*. Springer, 2003

[2] Eberhard Klingbeil *Variationsrechnung*. (German) BI Wissenschaftsverlag