Kapitel 1

Mengen und Abbildungen

1.1 Mengen

Georg Cantor (1845-1918) hat den Begriff der Menge definiert als „eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen“. Diese Objekte werden Elemente der Menge genannt. Um ein Objekt a als Element der Menge A zu kennzeichnen, schreiben wir $a \in A$. Ist a dagegen kein Element der Menge A, so schreiben wir $a \notin A$.

Wir können Mengen dadurch beschreiben, dass wir alle ihre Elemente angeben, also z.B. ist

$$A = \{a\}$$

die Menge, die nur das Element a enthält und B

$$B = \{a, b, c\}$$

die Menge, die drei Elemente a, b und c enthält. Dabei kann auch ein Element einer Menge wieder eine Menge sein:

$$C = \{a, \{a\}\}.$$

$$M = \{x \in X \mid x \text{ hat die Eigenschaft } p\} \quad \text{oder nur} \quad M = \{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } p\}$$

bezeichnet die Menge aller Elemente x (von der Menge X), die die Eigenschaft p haben.[1]

A ist eine Teilmenge von B, wenn alle Elemente von A auch Elemente von B sind. In Symbolen $A \subset B$.

[1] Bei dieser Beschreibung muss man allerdings Vorsicht walten lassen, um die Russellsche Antinomie zu vermeiden. Läßt man nämlich die Menge aller Mengen zu, die sich nicht selbst als Element enthalten, so wird nicht entscheidbar, ob diese Menge sich selbst als Element enthält oder nicht. Als Ausweg wird in der axiomatischen Mengenlehre die Frage, ob eine Menge Element einer Menge ist, nicht in allen Fällen als sinnvoll zugelassen.

1.2 Operationen von Mengen

Die Vereinigung zweier Mengen A und B ist die Menge $A \cup B$ aller Elemente, die in mindestens einer der beiden Mengen A und B enthalten sind. Der Durchschnitt zweier Mengen A und B ist die Menge $A \cap B$ aller Elemente, die sowohl Element von A als auch Element von B sind. Die Differenzmenge $A \setminus B$ ist die Menge aller Elemente von A, die nicht Element von B sind. Das kartesische Produkt der Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) von Elementen von A und B.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M. Dabei ist die leere Menge $\emptyset$ stets ein Element der Potenzmenge.
z.B. $\mathcal{P}(\{a, \{a\}\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}\}$.

Wenn wir nur Teilmengen einer vorgegebenen Menge M betrachten, dann wird für eine solche Menge $A \in \mathcal{P}(M)$ die Menge $M \setminus A$ auch als das Komplement A^c bezeichnet. Diese Operationen erfüllen die folgenden Regeln:

$$\begin{array}{rcc}
\text{(Idempotenz)} & A \cup A = A & A \cap A = A \\
\text{(Kommutativität)} & A \cup B = B \cup A & A \cap B = B \cap A \\
\text{(Assoziativität)} & A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C & A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\
\text{(Distributivität)} & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
\text{(de Morgan)} & (A \cap B)^c = A^c \cup B^c & (A \cup B)^c = A^c \cap B^c
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
A \subset A \cup B & & A \cap B \subset A \\
A \cup \emptyset = A & & A \cap \emptyset = \emptyset \\
A \setminus A = \emptyset & & A \setminus \emptyset = A \\
(A^c)^c = A & & A \subset B \iff B^c \subset A^c \\
(A \subset B \text{ und } B \subset A) & \iff & A = B \\
A \cup B = B & \iff & A \subset B \\
A \cap B = A & \iff & A \subset B \\
(A \subset C \text{ und } B \subset C) & \iff & (A \cup B) \subset C \\
(C \subset A \text{ und } C \subset B) & \iff & C \subset (A \cap B)
\end{array}$$

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$$

$$(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C \qquad (A \times C) \cap (B \times C) = (A \cap B) \times C.$$

1.3 Relationen

Als Relationen auf einer Menge bezeichnet man Aussagen über mehrere Elemente der Menge, die entweder wahr oder falsch sind. Wir wollen hier nur Aussagen über zwei Elemente einer Menge A betrachten. Jede solche Relation beschreiben wir durch eine Teilmenge R aller geordneten Paare in $A \times A$, in der wir alle die Paare zusammenfassen, für die die Aussage der Relation wahr ist. Wir sagen dann, dass $(a, b) \in A \times A$ diese Relation erfüllt, wenn (a, b) zu der Teilmenge R gehört. Andernfalls erfüllt (a, b) die Relation nicht. Wir führen jetzt folgende Eigenschaften einer Relation ein:

Reflexivität:	für alle $a \in A$ erfüllt (a, a) die Relation.
Symmetrie:	falls (a, b) die Relation erfüllt, dann auch (b, a).
Transitivität:	falls (a, b) und (b, c) die Relation erfüllen, dann auch (a, c).

Definition 1.1. *Eine Äquivalenzrelation ist eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.*

Eine Äquivalenzrelation definiert dann sogenannte Äquivalenzklassen. Für jedes $a \in A$ ist die Äquivalenzklasse $[a]$ von a die Teilmengen aller Elemente $b \in A$, so dass (a,b) die Relation erfüllt. Die Transitivität impliziert, dass für jedes Element $b \in [a]$ die entsprechende Äquivalenzklasse $[b]$ eine Teilmenge von $[a]$ ist. Wenn zwei Äquivalenzklassen $[a]$ und $[b]$ beide ein Element $c \in A$ enthalten, dann sind wegen der Symmetrie sowohl a als auch b in $[c]$ enthalten. Also ist $[a] \subset [c] \subset [a]$ und $[b] \subset [c] \subset [b]$. Damit gilt $[a] = [c] = [b]$. Also sind zwei Äquivalenzklassen entweder disjunkt oder gleich. Wegen der Reflexivität ist jedes Element in einer Äquivalenzklasse enthalten. Also zerfällt A in eine disjunkte Vereinigung von Äquivalenzklassen, d.h. jedes Element von A gehört zu genau einer Äquivalenzklasse.

1.4 Abbildungen

Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element x von X genau ein Element $f(x)$ aus Y zuordnet:

$$f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$$

Die Menge X der Argumente wird Definitionsbereich genannt und die Menge Y, in denen die Abbilde liegen, Wertebereich. Das Bild einer Teilmenge $A \subset X$ ist die Teilmenge aller Elemente y des Wertebereichs Y, die Abbild eines Arguments in A sind:

$$\text{Bild } f[A] = \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ mit } f(x) = y\}. \quad \exists \text{ steht für “es gibt (mindestens) ein”}$$

Definition 1.2. *Eine Abbildung* $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ *heißt*

(i) *injektiv, wenn je zwei verschiedene Elemente* $x, x' \in X$ *auch auf verschiedene Elemente von* Y *abgebildet werden:*

$$\forall x, x' \in X \text{ folgt aus } x \neq x' \text{ auch } f(x) \neq f(x'). \quad \forall \text{ steht für "für alle"}$$

(ii) *surjektiv, wenn das Bild* $f[X]$ *der ganze Wertebereich* Y *ist.*

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \text{ mit } f(x) = y.$$

(iii) *bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.*

Für jede Teilmenge $B \subset Y$ ist das Urbild von B unter f die Menge aller Elemente von X, die nach B abgebildet werden:

$$f^{-1}[B] = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Für eine bijektive Abbildung $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ besteht für jedes $y \in Y$ das Urbild $f^{-1}[\{y\}]$ nur aus genau einem Element. Also existiert auch die Umkehrabbildung

$$f^{-1} : Y \to X, \quad y \mapsto f^{-1}(y) \text{ mit } f^{-1}[\{y\}] = \{f^{-1}(y)\}.$$

Offenbar gilt dann $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in X$ und $f(f^{-1}(y)) = y$ für alle $y \in Y$.

1.5 Komposition von Abbildungen

Seien $f : X \to Y,\ x \mapsto f(x)$ und $g : Y \to Z,\ y \mapsto g(y)$ Abbildungen, dann definiert $g \circ f : X \to Z,\ x \mapsto g(f(x))$ die sogenannte Komposition (Verkettung) von f und g.

Satz 1.3. *Die Komposition von Abbildungen ist assoziativ, d.h. für Abbildungen* $f : X \to Y,\ x \mapsto f(x), \quad g : Y \to Z,\ y \mapsto g(y)$ *und* $h : Z \to V,\ z \mapsto h(z)$ *gilt*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Sei $f : X \to Y,\ x \mapsto f(x)$ *eine Abbildung und seien* $\mathbb{1}_X : X \to X,\ x \mapsto x$ *und* $\mathbb{1}_Y : Y \to Y,\ y \mapsto y$ *die identischen Abbildungen von den Mengen* X *und* Y. *Dann gilt*

$$f \circ \mathbb{1}_X = f = \mathbb{1}_Y \circ f = f$$

Ist die Abbildung f *bijektiv, dann gilt auch* $\qquad f \circ f^{-1} = \mathbb{1}_Y$ *und* $f^{-1} \circ f = \mathbb{1}_X$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
(h \circ (g \circ f))(x) &= h(g(f(x))) = (h \circ g) \circ f)(x) && \forall x \in X \\
f \circ \mathbb{1}_X(x) &= f(x) = (\mathbb{1}_Y \circ f)(x) && \forall x \in X \\
f \circ f^{-1}(y) &= f(f^{-1}(y)) = y = \mathbb{1}_Y(y) && \forall y \in Y \\
f^{-1} \circ f(x) &= f^{-1}(f(x)) = x = \mathbb{1}_X(x) && \forall x \in X.
\end{aligned}$$

q.e.d.

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.1 Axiome von angeordneten Körpern

Zunächst charakterisieren wir angeordnete Körper durch folgende Axiome:

A1. Axiome der Addition
A2. Axiome der Multiplikation
A3. Distributivgesetz
A4. Ordnungsaxiome

Die reellen Zahlen werden später als der eindeutige angeordnete Körper charkterisiert, der zusätzlich das **A5.** Vollständigkeitsaxiom erfüllt.

A1. Axiome der Addition 2.1. *Es gibt eine Operation*
$+: \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y$ *mit*

(i) *Kommutativgesetz:* $x + y = y + x$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) *Assoziativgesetz:* $x + (y + z) = (x + y) + z$ *für alle* $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(iii) *Existenz der Null: es gibt eine Zahl* $0 \in \mathbb{R}$ *mit* $x + 0 = x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$

(iv) *Existenz des Negativen: zu jedem* $x \in \mathbb{R}$ *gibt es ein* $-x \in \mathbb{R}$ *mit* $x + (-x) = 0$.

A2. Axiome der Multiplikation 2.2. *Es gibt eine Operation*
$\cdot: \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y$ *mit*

(i) *Kommutativgesetz:* $x \cdot y = y \cdot x$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) *Assoziativgesetz:* $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *für alle* $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(iii) *Existenz der Eins: es gibt eine Zahl* $1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0$ *mit* $x \cdot 1 = x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$

(iv) *Existenz des Inversen: zu jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es ein $x^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot x^{-1} = 1$.*

A3. Distributivgesetz 2.3.

$$x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ für alle } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Definition 2.4. *Allgemein heißt eine Menge $\mathbb{K}$, die die Axiome* **A1**-**A3** *erfüllt Körper. Für Körper gelten daher auch alle Folgerungen aus* **A1**-**A3**. *Es gibt viele Körper.*

Beispiel 2.5. *Der kleinste Körper besteht aus zwei Elementen $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Die Operationen $+$ und $\cdot$ sind dann definiert durch:*

$$0+0=0 \quad 0+1=1 \qquad 0 \cdot 0 = 0 \quad 0 \cdot 1 = 0$$

$$1+0=1 \quad 1+1=0 \qquad 1 \cdot 0 = 0 \quad 1 \cdot 1 = 1$$

Zeige dass diese Definitionen von $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Z}_2$ die Axiome **A1**-**A3** erfüllen und umgekehrt durch **A1**-**A3** eindeutig bestimmt sind. In $\mathbb{R}$ soll aber $1 + 1 = 2 \neq 0$ gelten, so dass wir noch weitere Axiome benötigen um den Körper der reellen Zahlen zu charakterisieren.

Wir benützen folgende Abkürzungen:

$$\begin{array}{llll}
x - y = x + (-y) & xy = x \cdot y & -xy = -(x \cdot y) & \forall x, y \in \mathbb{R} \\
\dfrac{1}{x} = x^{-1} & \dfrac{y}{x} = y \cdot x^{-1} & & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, y \in \mathbb{R} \\
x + y + z = x + (y + z) & xyz = x \cdot (y \cdot z) & xy + z = (x \cdot y) + z & \forall x, y, z \in \mathbb{R}
\end{array}$$

Satz 2.6. *(Folgerungen aus* **A1***)*

(i) *Falls $x + y = x + z$, dann $y = z$*

(ii) *Falls $x + y = x$, dann $y = 0$*

(iii) *Falls $x + y = 0$, dann $y = -x$*

(iv) $-(-x) = x$

Bemerkung 2.7. *(i) heißt Kürzungsregel.*
(ii) zeigt, dass die Null eindeutig durch die Eigenschaft $x + 0 = x$ bestimmt ist.
(iii) zeigt, dass das Negative $(-x)$ eindeutig durch $x + (-x) = 0$ bestimmt ist.

Beweis: **(i)** Sei $x + y = x + z$, dann folgern wir

$$\begin{aligned} y = y + 0 \quad &= 0 + y &&= (x - x) + y \\ = (-x + x) + y) \quad &= -x + (x + y) &&= -x + (x + z) &&= (-x + x) + z \\ = (x - x) + z \quad &= 0 + z &&= z + 0 &&= z. \end{aligned}$$

(ii) Sei $x + y = x$, dann gilt $x + y = x + 0$. Also folgt aus (i) $y = 0$.
(iii) Sei $x + y = 0$, dann gilt $x + y = x + (-x)$. Also folgt aus (i) $y = -x$.
(iv) $-x + x = x + (-x) = 0$. Also folgt aus (iii) $x = -(-x)$. **q.e.d.**

Satz 2.8. *(Folgerungen aus* **A2***)*

(i) *Falls $x \neq 0$ und $xy = xz$, dann $y = z$*

(ii) *Falls $x \neq 0$ und $xy = x$, dann $y = 1$*

(iii) *Falls $x \neq 0$ und $x \cdot y = 1$, dann $y = x^{-1}$*

(iv) *Falls $x \neq 0$ und $x^{-1} \neq 0$, dann $(x^{-1})^{-1} = x$*

Bemerkung 2.9. *Die Folgerungen sind analog zu denen aus* **A1**. *Wieder heißt (i) Kürzungsregel, (ii) impliziert wieder die Eindeutigkeit der Eins und (iii) die Eindeutigkeit des Inversen.*

Beweis: **(i)** Sei $x \neq 0$ und $xy = xz$, dann folgern wir

$$y = 1y = \left(x\frac{1}{x}\right) y = \left(\frac{1}{x}x\right) y = \frac{1}{x}(xy) = \frac{1}{x}(xz) = \left(\frac{1}{x}x\right) z = \left(x\frac{1}{x}\right) z = 1z = z.$$

(ii) Sei $x \neq 0$ und $xy = x$, dann gilt $xy = x \cdot 1$ Also folgt aus (i) $y = 1$.
(iii) Sei $x \neq 0$ und $xy = 1$, dann gilt $xy = x \cdot x^{-1}$. Also folgt aus (i) $y = x^{-1.}$
(iv) Sei $x \neq 0$. Dann ist $x^{-1}x = xx^{-1} = 1$. Also folgt (iv) aus (iii). **q.e.d.**

Satz 2.10. *(Folgerungen aus* **A1**-**A3***)*

(i) $x \cdot 0 = 0$ *für alle x. Insbesondere gilt $x^{-1} \neq 0$ für alle $x \neq 0$.*

(ii) $x \cdot y = 0 \iff x = 0$ *oder* $y = 0$

(iii) $(-x)y = -xy = x(-y)$.

(iv) $(-1) \cdot x = -x$

(v) $(-x)(-y) = xy$

(vi) $x \neq 0, y \neq 0$ *dann* $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Bemerkung 2.11. *Die Null hat kein multiplikatives Inverses, sonst wäre wegen (i)* $0 = 0 \cdot 0^{-1} = 1$. *Daraus und aus (i) würde* $x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$ *für alle* x *folgen.*

Beweis: **(i)** $x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot (0+0) = x \cdot 0$. Aus (ii) von Satz 2.6 folgt dann $x \cdot 0 = 0$
(ii) Sei $x \cdot y = 0$ und $x \neq 0$. Dann gilt wegen (i)

$$y = y \cdot 1 = 1 \cdot y = \left(\frac{1}{x} \cdot x\right) \cdot y = \frac{1}{x} \cdot (x \cdot y) = \frac{1}{x} \cdot 0 = 0.$$

Wegen der Kommutativität folgt aus (i) auch die Umkehrung $0 \cdot y = x \cdot 0 = 0$.
(iii) $0 = 0 \cdot y = (x + (-x))y = xy + (-x)y$. Aus (iii) im Satz 2.6 folgt dann

$$(-x)y = -xy = -yx = (-y)x = x(-y).$$

(iv) Setze in (iii) $x = 1$.
(v) Wegen (iii) und (iv) im Satz 2.6 gilt $(-x)(-y) = -(x \cdot (-y)) = -(-xy) = xy$.
(vi) $1 = xy(xy)^{-1} = (xy)^{-1}xy = ((xy)^{-1}x)y = y((xy)^{-1}x)$. Wegen Satz 2.8 (iii) folgt $y^{-1} = (xy)^{-1}x. \Longrightarrow y^{-1}x^{-1} = ((xy)^{-1}x)x^{-1} = (xy)^{-1}(xx^{-1}) = (xy)^{-1}$. **q.e.d.**

A4. Ordnungsaxiome 2.12. *Es gibt eine Relation* $<$ *in* $\mathbb{R}$ *mit drei Eigenschaften:*

(i) *Totalität der Ordnung: Für je zwei reelle Zahlen* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt genau eine der drei folgenden Relationen* $x < y$ *oder* $x = y$ *oder* $y < x$.

(ii) *Transitivität:* $x < y$ *und* $y < z \Longrightarrow x < z$

(iii) *Monotonie:* $x < y \Longrightarrow \begin{cases} x + c < y + c & \text{für alle } c \in \mathbb{R} \\ x \cdot c < y \cdot c & \text{für alle } 0 < c \in \mathbb{R} \end{cases}$

Definition 2.13. *Ein Körper, der das Axiom* **A4** *erfüllt, heißt angeordneter Körper.*

Die rationalen Zahlen sind ein angeordneter Körper, und jeder angeordnete Körper enthält die rationalen Zahlen als Unterkörper. Wir benutzten folgende Abkürzungen:

$$x > y \Longleftrightarrow y < x \qquad\qquad x \leq y \Longleftrightarrow (x < y \text{ oder } x = y) \Longleftrightarrow y \geq x.$$

Satz 2.14. *(Folgerungen aus* **A1**-**A4***)*

(i) $0 < x \Longrightarrow -x < 0$ *und* $x < 0 \Longrightarrow -x > 0$

(ii) $x < y \Longleftrightarrow 0 < y - x$

(iii) $x < y$ *und* $a < 0 \Longrightarrow ya < xa$

(iv) $x \neq 0 \Longrightarrow x \cdot x = x^2 > 0$

(v) $x > 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} > 0$

(vi) $0 < x < y \Longrightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

Bemerkung 2.15. *Da $1 \cdot 1 = 1$ folgt aus (iv) $1 > 0$. Dann folgt aus (i) $-1 < 0$. Also gilt $-1 < x^2$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Also gibt es keine reelle Zahl x mit $x^2 = -1$.*

Beweis: **(i)** Sei $0 < x$. Dann folgt mit Monotonie $0 + (-x) < x + (-x)$, also $-x < 0$. Sei $x < 0$. Dann folgt mit Monotonie $x + (-x) < -x$ also auch $0 < -x$.
(ii) Sei $x < y$. Dann folgt mit Monotonie $x - x < y - x$, also auch $0 < y - x$.
Sei umgekehrt $0 < y - x$. Dann folgt mit Monotonie $x < y$.
(iii) Sei $x < y$ und $a < 0$. Dann folgt aus (i) $-a > 0$. Also gilt wegen Monotonie $-xa = x \cdot (-a) < y \cdot (-a) = -ya \Longleftrightarrow 0 < xa - ya \Longleftrightarrow ya < xa$.
(iv) Sei $x > 0$. Dann folgt wegen Monotonie $x^2 > 0 \cdot x = 0$.
Sei $x < 0$. Dann folgt aus (i) $-x > 0$ und mit Monotonie $x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0 \cdot (-x) = 0$.
(v) Sei $x > 0$. Dann ist $x \neq 0$ und $\frac{1}{x} \neq 0$. Aus (iv) folgt $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} > 0$. Mit Monotonie folgt dann $\frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} > 0 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = 0$.
(vi) Sei $0 < x < y$. Dann ist $x > 0$ und $y > 0$ also wegen (v) auch $\frac{1}{x} > 0$ und $\frac{1}{y} > 0$. Dann folgt mit Monotonie $\frac{1}{y} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} \cdot x < \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} \cdot y = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot y = \frac{1}{x}$. **q.e.d.**

Satz 2.16. *(Arithmetisches Mittel) Seien $x, y \in \mathbb{R}$, dann gilt*

$$x < y \Longrightarrow x < \frac{x+y}{2} < y$$

Also liegt zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen immer eine weitere.

Beweis: Aus $x < y$ folgt mit Monotonie $x + x < x + y < y + y$. Weil aber $x + x = x(1 + 1) = 2x$ und $2 = 1 + 1 > 0$ folgt dann $2x < x + y < 2y$ und $x < \frac{x+y}{2} < y$ **q.e.d.**

Übungsaufgabe 2.17. *Es gelten auch folgende Regeln:*

(i) $a < b$ *und* $c < d \Longrightarrow a + c < b + d$

(ii) $0 < a < b$ *und* $0 < c < d \Longrightarrow ac < bd$

(iii) $ab > 0 \Longleftrightarrow$ *entweder* $a > 0, b > 0$ *oder* $a < 0, b < 0$

(iv) $ab < 0 \Longleftrightarrow$ *entweder* $a > 0, b < 0$ *oder* $a < 0, b > 0$

Definition 2.18. *(Betrag) Der Betrag einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist die reelle Zahl*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \iff 2x \geq 0 \iff x \geq -x \\ -x & \text{falls } x < 0 \iff 2x < 0 \iff x < -x \end{cases} = \max\{x, -x\}.$$

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{falls } y \leq x \\ y & \text{falls } y > x \end{cases} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Aus der Definition folgt

$$\begin{array}{ccc} |x| \geq 0 & \text{und} & |x| = 0 \iff x = 0. \\ -|x| \leq x \leq |x| & \iff & x \leq |x| \text{ und } -x \leq |x| \\ |-x| = |x| & \text{denn} & |-x| = \max\{-x, x\}. \end{array}$$

Satz 2.19. *(Eigenschaften des Betrags) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) $|x| \geq 0$ *und* $|x| = 0 \iff x = 0$

(ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Beweis: **(i)** haben wir schon gesehen.
(ii) Wegen Satz 2.10 (iii) und (v) ändern sich beide Seiten nicht wenn wir x durch $-x$ bzw. y duch $-y$ ersetzen. Für $x \geq 0$ und $y \geq 0$ ist die Aussage klar.
(iii) Zwei Fälle: $x + y \geq 0$: $|x + y| = x + y \leq |x| + y \leq |x| + |y|$ wegen Monotonie.
$x + y < 0$: $|x + y| = -(x + y) = -x - y \leq |x| - y \leq |x| + |y|$ wegen Monotonie. **q.e.d.**

Korollar 2.20. $$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Beweis: $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Longrightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$.
Vertausche x und $y \Longrightarrow |y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$. Also gilt $||x| - |y|| \leq |x - y|$. **q.e.d.**

Definition 2.21. *(Abstand)*
Der Abstand $d(x, y)$ zweier Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ ist die nicht negative Zahl $d(x, y) = |x - y|$.

Satz 2.22. *(Eigenschaften des Abstands)*
Der Abstand $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto d(x, y)$ hat folgende Eigenschaften:

(i) $d(x, y) \geq 0$ *und* $d(x, y) = 0 \iff x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *für alle* $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Beweis: folgt aus den Folgerungen der Definition und Satz 2.19.
(iii) $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$. **q.e.d.**

Definition 2.23. *Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nicht leere Teilmenge von Zahlen.*

(i) *M heißt nach oben beschränkt, falls es eine Zahl $\beta \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x \leq \beta$ für alle $x \in M$ gilt. Dann heißt β obere Schranke von M.*

(ii) *M heißt nach unten beschränkt, falls es eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\alpha \leq x$ für alle $x \in M$ gilt. Dann heißt α untere Schranke von M.*