Dynamische Syteme

HSS 09

Martin U. Schmidt

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Einführung

Definition 1.1. *Ein dynamisches System ist eine Halbgruppe G zusammen mit einer stetigen Abbildung*

$$\Phi : G \times M \to M$$

mit einem topologischen (metrischen) Raum M die folgendes erfüllt:

(i) $\Phi(0, x) = x$ *für alle* $x \in M$

(ii) $\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x)$ *für alle* $x \in M, s, t \in G$

Dabei ist G im zeitkontinuierlichen Fall entweder $G = \mathbb{R}$ oder $G = \mathbb{R}_0^+$ und im im zeitdiskreten Fall $G = \mathbb{Z}$ oder $G = \mathbb{N}_0$. M heißt Phasenraum.

Der Parameter aus G ist dabei typischerweise die Zeit. Im zeitdiskreten Fall betrachten wir nur den Verlauf zu einer Folge von Zeitpunkten, die voneinander durch gleichlange Zeitabstände getrennt sind. Die beiden Bedingungen (i) und (ii) bedeuten, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} G \to &\text{ stetige Abbildungen von } M \text{ auf sich selber} \\ t \mapsto \Phi(t, \cdot) : &\quad M \to M, \quad x \mapsto \Phi(t, x). \end{aligned}$$

ein (Halb-)Gruppenhomomorphismus ist. Weil die Halbgruppe $\mathbb{N}_0$ und die Gruppe $\mathbb{Z}$ frei von 1 erzeugt werden, haben wir folgende einfach Charakterisierung von zeitdiskreten dynamischen Systemen.

Übungsaufgabe 1.2. *Ein dynamisches System Φ mit $G = \mathbb{Z}$ oder $G = \mathbb{N}_0$ erfüllt $\Phi(n, x) = A^n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $A : M \to M, \quad x \mapsto A(x) = \Phi(1, x)$. Wenn*

$G = \mathbb{Z}$, dann ist A ein Homöomorphismus und es gilt $\Phi(n,x) = A^n(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Umgekehrt definiert jede stetige Abbildung $A : M \to M$ ein dynamisches System mit $G = \mathbb{N}_0$ und jeder Homöomorphismus $A : M \to M$ ein dynamisches System mit $G = \mathbb{Z}$.

Übungsaufgabe 1.3. *Sei Φ ein zeitkontinuierliches dynamisches System auf einem reellen Vektorraum M dessen Abbildung Φ partiell nach t differenzierbar ist. Dann ist für alle $x \in M$ die Bahn $t \mapsto \Phi(t,x)$ eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,x) = F(\Phi(t,x)) \quad \textit{mit} \quad F(x) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(0,x).$$

Wir werden später sehen, dass diese zeitkontinuierlichen dynamischen Systeme eindeutig durch eine gewöhnliche Differentialgleichung bestimmt sind und umgekehrt fast jede gewöhnliche Differentialgleichung ein zeitkontinuierliches System definiert. Deshalb steht die Theorie der zeitkontinuierlichen dynamischen Systeme in sehr enger Verbindung zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Um einen gegebenen zeitlichen Verlauf zu einem dynamischen System zu machen, müssen wir zu allererst den Phasenraum richtig wählen. Von der richtigen Wahl des Phasenraumes hängt es nämlich oft ab, ob ein zeitlicher Verlauf überhaupt als dynamisches System beschrieben werden kann. Ein Beispiel, das die Entwicklung der Theorie der dynamischen Systeme ganz wesentlich angestoßen hat, sind die Newtonschen Gleichungen. In einem Kraftfeld F wird die Beschleunigung eines Punktteilchens beschrieben durch die Gleichung

$$\frac{d}{dt}m\dot{x} = m\ddot{x} = F$$

Hier ist in die Masse der Punkteteilchen und $t \mapsto x(t)$ die Funktion der Koordinaten in Abhängigkeit von der Zeit. Die zeitliche Ableitung bezeichnen wir immer durch einen Punkt. Wenn nun F von x und $\dot{x}$ und t abhängt, erhalten wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}).$$

Es zeigt sich nun, dass die entsprechenden zeitlichen Verläufe der Koordinaten nur dann durch ein dynamisches System beschrieben werden kann, wenn wir den Phasenraum so wählen, dass er neben den Koordinaten x auch die Geschwindigkeit des Punktteilchens enthält. Wenn die Kraft auch noch von der Zeit t abhängt, müssen wir sogar auch noch die Zeit zu den Freiheitsgraden des Phasenraums hinzufügen.

Ein anderes Beispiel für die Wichtigkeit der richtigen Wahl des Phasenraums sind Fibonaccis Kaninchen, oder allgemeinere Rekursionsformeln.

Fibonaccis Kaninchen 1.4. *Leonardo von Pisa hat schon 1202 ein Populationsmodell mit diskreter Zeit $n = 0, 1, 2, \ldots$ untersucht. Ein neugeborenes Hasenpaar wird in einen* *umzäunten Garten gesetzt. Jedes Hasenpaar erzeugt während seines Lebens jeden Monat ein weiteres Paar. Ein neugeborenes Paar wird nach einem Monat fruchtbar und bekommt somit nach zwei Monaten seine ersten Nachkommen. Es soll angenommen werden, dass die Hasen nie sterben. Bezeichnen wir mit* k_n *die Anzahl Kaninchenpaare nach* n *Monaten, dann ist* $k_0 = k_1 = 1$ *(das erste Paar) und* $k_2 = 2$*, da das erste Paar seine ersten Nachkommen nach zwei Monaten bekommt. Auch im dritten Monat bekommt nur das erste Paar neue Nachkommen, es ist also* $k_3 = 3$*. Im vierten Monat leben noch alle Kaninchen aus dem dritten Monat und die Paare, die nach zwei Monaten schon das waren, bekommen Nachwuchs. Es ist also* $k_4 = k_3 + k_2$*. Allgemein erhält man die Rekursionsformel*

$$k_{n+1} = k_n + k_{n-1} \quad \textit{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dabei steht der 1.Term k_n *für die Anzahl der Kaninchen, die schon da sind, während der 2.Term* k_{n-1} *die Anzahl der im* $(n+1)$*-ten Monat neu geborenen Kaninchenpaare angibt. Um aus dieser Rekursionsformel ein zeitdiskretes dynamisches System zu machen, muss man den Phasenraum als die Menge aller Paare* (k_n, k_{n-1})*, das heißt man muß zu der Anzahl der Kaninchenpaare im jeweiligen Jahr die Anzahl im vorherigen Jahr hinzufügen. Das entsprechende dynamische System lässt sich dann einfach lösen.*

Man kann dieses dynamische System mithilfe eines generierenden Funktionals lösen. Sei also

$$K(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{n!} t^n.$$

Dann ist die Ableitung von $K(t)$ das generierende Funktional von

$$\dot{K}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{n!} n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_{n+1}}{n!} t^n.$$

Also folgt aus der Rekursionsgleichung

$$\ddot{K}(t) = \dot{K}(t) + K(t) \quad \text{mit den Anfangswerten} \quad K(0) = 1 = \dot{K}(0).$$

Somit haben wir diese Rekursionsformal also in eine Differentialgleichung übersetzt und die Startswerte in ein sogenanntes Anfangswertproblem dieser Differentialgleichung. Weil in dieser Differentialgleichung Ableitungen bis zur zweiten Ordnung auftauchen, werden wir bei der Integration zweimal integrieren müssen und entsprechend zwei Integrationskonstanten auftauchen. Deshalb müssen wir zwei Anfangswerte vorgeben. Ganz ähnlich wie bei den Newtonschen Gleichungen müssen wir zu der Folge k_n mit generierendem Funktional $K(t)$ die Folge k_{n+1} mit generierendem Funktional $\dot{K}(t)$ hinzufügen, um ein dynamisches System zu erhalten. Im nächsten Abschnitt werden wir lernen, solche Differentialgleichungen zu lösen. Wenn man das entsprechende Anfangswertproblem gelöst hat, und die Lösung im Punkt $t = 0$ auch glatt ist, dann ergibt ihre Taylorreihe eine Lösung von Fibonaccis Kaninchen. Es stellt sich sogar heraus, dass diese Lösung sogar auf ganz $t \in \mathbb{C}$ eine konvergente Potenzreihe definiert.

Diese Erweiterungen des Phasenraums im Fall der Newtonschen Gleichungen und im Fall von Fibonaccis Kaninchen sind also miteinander verwandt. Ganz allgemein müssen wir den Phasenraum groß genug wählen um tatsächlich ein dynamisches System zu erhalten.

Man kann Fibonaccis Kanichen oder allgemeiner Rekursionsgleichungen auch noch durch ein anderes generierendes Funktional lösen. Wir wollen diese andere Methode hier auch vorstellen, weil mit ihr auch viele andere Rekursionsgleichungen gelöst werden können. Sei diesmal

$$K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n z^n.$$

Dann können wir die Rekursionsformel direkt in folgende Gleichung umschreiben

$$\frac{K(z) - k_0 - k_1 z}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} k_{n+1} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (k_n + k_{n-1}) z^n = K(z) - k_0 + zK(z).$$

Wenn wir diese Gleichung nach $K(z)$ auflösen erhalten wir

$$K(z) = \frac{k_0 + (k_1 - k_0)z}{1 - z - z^2}.$$

Mit den Anfangswerten $k_0 = 1 = k_1$ ergibt das

$$K(z) + \frac{1}{1 - z - z^2}.$$

Das ist offenbar eine gebrochen rationale Funktion, die auf dem Komplement der Nullstellen des Nenners analytisch ist und als konvergente Potenzreihe geschrieben werden kann. Durch Partialbruchzerlegung können wir diese Potenzreihe auch einfach ausrechen und damit die Fibonaccis Folge lösen. Seien also $z_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $z_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ die beiden Lösungen von $z^2 + z - 1 = 0$. Dann gibt es zwei eindeutige reelle Zahlen α und β mit

$$\frac{1}{1 - z - z^2} = \frac{\alpha}{z - z_1} + \frac{\beta}{z - z_2}.$$

Durch Multiplikation mit dem Nenner erhalten wir

$$\alpha(z_2 - z_1) = -1 \quad \beta(z_1 - z_2) = -1.$$

Mithilfe der geometrischen Reihe ist die Potenzreihe $K(z)$ gegeben durch

$$K(z) = \frac{1}{(z_2 - z_1)z_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_1}\right)^n + \frac{1}{(z_1 - z_2)z_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_2}\right)^n .$$

Definition 1.5. *$x \in M$ heißt Fixpunkt oder Ruhelage eines dynamischen Systems $\Phi : G \times M \to M$, wenn $\Phi(g, x) = x \quad \forall g \in G$.*

Beispiel 1.6. *Für $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x$ ist $x = 0$ ist der einzige Fixpunkt der iterierten Abbildung.*

Definition 1.7. **(i)** *Für $x \in M$ heißt die Menge $\{\Phi(g, x) \mid g \in G\}$ Orbit oder Trajektorie (durch x), die Abbildung $\Phi(\cdot, x) : G \to M, \quad g \mapsto \Phi(g, x)$ heißt Bahnkurve (durch x).*

(ii) *Ein Orbit durch x heißt periodisch mit Periode $g \in G$, wenn $g > 0$ und $\Phi(g, x) = x$. Eine Periode heißt Minimalperiode, wenn $\Phi(\tilde{g}, x) \neq x$ für $0 < \tilde{g} < g$.*

Proposition 1.8. *Wenn G eine Gruppe ist, dann definiert die Zugehörigkeit zu einem Orbit eine Äquivalenzrelation auf dem Phasenraum.*

Beweis: Wir definieren also für $x_1, x_2 \in M$

$$x_1 \sim x_2, \text{ falls } x_2 \in \Phi(G, x_1).$$

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, denn

(i) Wegen $\Phi_0 = Id$ ist immer $x \sim x$.

(ii) Gilt $x_2 = \Phi(t, x_1)$, dann folgt $x_1 = \Phi(-t, x_2)$ aus $\Phi(t_2, \cdot) \circ \Phi(t_2, \cdot) = \Phi(t_1 + t_2, \cdot)$ und $\Phi_(0\cdot) = \mathbb{1}_M$. Die Relation ist damit symmetrisch ($x_1 \sim x_2 \Rightarrow x_2 \sim x_1$).

(iii) Gilt $x_2 = \Phi(t_1, x_1)$ und $x_3 = \Phi(t_2, x_2)$, dann folgt $x_3 = \Phi(t_1 + t_2)(x_1)$. Die Relation ist damit transitiv ($x_1 \sim x_2, x_2 \sim x_3 \Rightarrow x_1 \sim x_3$). **q.e.d.**

Beispiel 1.9. *Sei $M = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ und für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ $\Phi : Z \times M \to M$ gegeben durch die Drehung $\Phi(n, z) = e^{2\pi i \alpha n} \cdot z$. Dann ist genau dann jeder Orbit periodisch, wenn $\alpha \in \mathbb{Q}$, also $a = \frac{q}{p}, q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}, q$ und p teilerfremd. Die Minimalperiode ist dann p.*

Man ist nur an einzelnen Orbits interessiert, sondern auch am Verhalten benachbarter Orbits. Z.B. ist es beruhigend, dass auch bei einer kleinen Veränderung der Geschwindigkeit der Erde, z.B. durch Meteroiteneinschlag, ihre neue Bahn auf Dauer in der Nähe der alten bleibt. Insbesondere können wir Stabilität von Fixpunkten untersuchen.

Definition 1.10. *Sei x_0 ein Fixpunkt von $\Phi : G \times M \to M$.*

(i) *x_0 heißt Liapunov-stabil, wenn für jede Umgebung $U \subset M$ von x_0 eine (kleinere) Umgebung V von x_0 existiert, so dass für alle $t \geq 0$*

$$\Phi(t, V) \equiv \{\Phi(t, x) \mid x \in V\} \subset U.$$

(ii) *x_0 heißt asymptotisch stabil, falls x_0 Liapunov-stabil ist und eine Umgebung $V \subset M$ von x_0 existiert mit $\Phi(t, V) \subset \Phi(s, V)$ für $t > s$ und*

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t, x) = x_0 \quad \textit{für} \quad x \in V.$$

Beispiel 1.11. $G = \mathbb{Z}, \quad M = \mathbb{C}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \Phi(t, x)) = \lambda^t \cdot x.$

Für $\mid \lambda \mid < 1$ ist $0 \in M$ asymptotisch stabil.

Für $\mid \lambda \mid \leq 1$ ist $0 \in M$ Liapunov-stabil.

Definition 1.12. *Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt Attraktor des Dynamischen Systems, wenn A abgeschlossen, $\Phi(t, A) = A$ für $t \in G$ und eine offene Umgebung $U_0 \subset M$ von A existiert mit*

(i) *$\Phi(t, U_0) \subset U_0$ für $t \geq 0$*

(ii) *Für jede offene Umgebung V von A, $A \subset V \subset U_0 \subset M$ ein $\tau > 0$ existiert mit $\Phi(t, U_0) \subset V$ für $t \geq \tau$.*

Das Bassin eines Attraktors A ist die Vereinigung aller offenen Umgebungen von A, die (i) und (ii) erfüllen. Damit ist das Bassin B selbst eine offene Umgebung von A, die die Eigenschaft (i) besitzt. Wie das nächste Beispiel zeigt, ist aber die Eigenschaft (ii) für B i.A. nicht erfüllt.

Beispiel 1.13. $M = \mathbb{C}, \quad G = \mathbb{Z}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

$$\Phi(1, x) = \begin{cases} e^{i\lambda} \frac{x}{\sqrt{|x|}} & , \textit{ für } x \neq 0 \\ 0 & , \textit{ für } x = 0. \end{cases}$$

Hier ist $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ ein Attraktor, und sein Bassin ist $\mathbb{C} \setminus 0$.

1.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wenn die Abbildung Φ eines zeitkontinuierlichen dynamischen Systems auf einem Vektorraum $M = V$ partiell nach t differenzierbar ist, dann können wir die Bedingung (ii) bei $s = 0$ nach s differenzieren und erhalten

$$\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t} = F(\Phi(t,x)) \quad \text{mit} \qquad F : V \to V \qquad x \mapsto F(x) = \frac{\partial \Phi(0,x)}{\partial t}.$$

Also erfüllen alle Trajektorien durch den Anfangspunkt $x_0 \in M$ die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{q}(t) = F(q(t))$ mit dem Anfangswert $q(0) = q_0$. Differentialgleichungen sind Gleichungen, die Funktionen zu ihren Ableitungen in Beziehung setzen. Wenn diese Funktionen von mehreren Variablen abhängen, dann sind die Ableitungen, die in der entsprechenden Differentialgleichung mit der Funktion in Beziehung gebracht werden, partielle Ableitungen. Dann spricht man von partiellen Differentialgleichungen. Typischerweise sind Differentialgleichungen im folgenden Sinne *lokale* Gleichungen, dass sie nur die Werte einer gesuchten Funktion und endlich vieler Ableitungen für *einen* Wert der Variablen miteinender in Beziehung bringen. Mit gewöhnlichen Differentialgleichungen werden also im Allgemeinen Gleichungen von der folgenden Form bezeichnet

$$F(q^{(k)}(t), q^{(k-1)}(t), \ldots, \dot{q}(t), q(t), t) = 0.$$

Hierbei ist $t \mapsto q(t)$ die gesuchte Funktion, die auch vektorwertig sein kann.

Definition 1.14. *Differentialgleichungen von der Form*

$$F(q^{(k)}(t), q^{(k-1)}(t), \ldots, \dot{q}(t), q(t), t) = 0$$

heißen gewöhnliche Differentialgleichungen.

Historisch wurden solche Differentialgleichungen von Newton gleichzeitig mit der Entdeckung der Differentialrechnung eingeführt, um die Bewegung von massiven Teilchen im Gravitationsfeld zu beschreiben. Im einfachsten Fall eines Punktteilchens im Schwerefeld nehmen die Newton'schen Gleichungen folgende Form an:

$$m\frac{d^2 q}{dt^2} = F(q, \dot{q}, t),$$

wobei $F(q, \dot{q}, t)$ die auf das Punktteilchen wirkende Kraft darstellt. Im einfachsten Fall $F = -mg$ taucht nur die zweite Ableitung der gesuchten Koordinatenfunktion von q des Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit auf, so dass wir deren Lösung aus der Differential- und Integralrechnung schon kennen:

$$q(t) = q_0 + q_1(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}.$$

Die Lösung können wir aus der Differentialgleichung durch zweimaliges Integrieren der linken und rechten Seite erhalten. Das Ziel unserer Untersuchung einer Differentialgleichung ist dabei möglichst alle Lösungen zu bestimmen und dann solche zusätzlichen Eigenschaften der Lösungen zu finden, die die Lösung eindeutig festlegen.

Definition 1.15. *Eine Lösung ist eine Funktion q, die so oft differenzierbar ist, dass alle in der Differentialgleichung vorkommenden Ableitungen existieren, und die zusammen mit diesen Ableitungen die Differentialgleichung erfüllt.*

In der Differentialgleichung

$$m\frac{d^2q}{dt^2} = -mg$$

hängen m (die Masse des Teilchens) und g (das Schwerefeld) nicht von t ab. Deshalb ist die Differentialgleichung äquivalent zu

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -g.$$

Wenn wir die linke und die rechte Seite integrieren erhalten wir nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\dot{q}(t) - \dot{q}(t_0) = -g(t - t_0) \text{ bzw.} \quad \dot{q}(t) = \dot{q}(t_0) - g(t - t_0).$$

Nach nochmaligem Integrieren erhalten wir schließlich

$$q(t) = q(t_0) + \dot{q}(t_0)(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}.$$

Die Funktion $q(t) = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + q_1(t - t_0) + q_0$ ist auf $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und es gilt:

$$\frac{du}{dt}(t) = -g(t - t_0) + q_1 \text{ und} \quad \frac{d^2q}{dt^2}(t) = -g.$$

Also sind alle Lösungen von der Form

$$q(t) = -\frac{g(t - t_0)^2}{2} + q_1(t - t_0) + q_0, \text{ wobei } q(t_0) = q_0 \text{ und } \frac{dq}{dt}(t_0) = q_1.$$

Damit haben wir in diesem einfachen Beispiel unser Ziel erreicht.

Zusammenfassung 1.16. *Die höchste vorkommende Ableitung der Differentialgleichung $m\frac{d^2q}{dt^2} = -gm$ ist die zweite Ableitung. Durch geeignetes zweimaliges Integrieren konnten wir die Differentialgleichung lösen. Dabei entstanden zwei Integrationskonstanten und die Lösungen waren dann eindeutig durch die Wahl dieser Integrationskonstanten bestimmt. Diese Integrationskonstanten konnten wir schließlich als die Werte* *der Lösung und ihrer ersten Ableitung zu dem Zeitpunkt* t_0 *interpretieren. Deshalb ist der Lösungsraum dieser Differentialgleichung zweidimensional und wird parametrisiert durch* $(q(t_0), \frac{dq}{dt}(t_0)) \in \mathbb{R}^2$*. Zu jeder solchen Wahl eines Anfangszustandes* (q_0, q_1) *gibt es dann genau eine Lösung, die gegeben ist durch*

$$q(t) = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + q_1(t - t_0) + q_0.$$

Typischerweise beschreiben solche Differentialgleichungen die zeitliche Entwicklung von veränderlichen Größen in der Natur. Diese Differentialgleichungen geben dann ein kausales Verhalten der veränderlichen Größen vor. Durch das Lösen der Differentialgleichung können wir dann aus der Kenntnis der veränderlichen Größen und genügend vieler Ableitungen von ihnen zu einem (Anfangs-)Zeitpunkt t_0 das Verhalten von ihnen sowohl in der Zukunft, als auch in der Vergangenheit ausrechnen und damit ihr Verhalten in der Zukunft vorhersagen und auf ihr Verhalten in der Vergangenheit zurückschließen. Die Anzahl der Ableitungen, die wir zum Zeitpunkt t_0 kennen müssen, ist dann gegeben durch die Anzahl der Integrationskonstanten, also die Anzahl der Integrale, die wir benötigen, um die Gleichung zu lösen. Da wir uns typischerweise auch die Funktionswerte vorgeben, also die Nullte-Ableitung, sollten wir im Allgemeinen alle Ableitungen bis zu einer Ordnung niedriger als der höchsten vorkommenden Ableitung vorgeben.

Definition 1.17. *Die Ordnung einer Differentialgleichung ist die höchste vorkommende Ordnung aller auftauchenden Ableitungen einer Differentialgleichung.*

Definition 1.18. *(Anfangswertproblem) Die Suche nach einer Lösung* q *einer gewöhnlichen Differentialgleichung der Ordnung* n*, die zu einem gegebenen Wert* t_0 *der Variablen* t *(nach der abgeleitet wird) zusammen mit den ersten* $n - 1$ *Ableitungen die Werte*

$$q(t_0) = q_0, \frac{dq}{dt}(t_0) = q_1, \ldots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}(t_0) = q_{n-1}$$

annimmt, heißt Anfangswertproblem.

Aufgrund unserer Vorüberlegungen erwarten wir, dass jedes solches Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung hat. Wir werden später auch Bedingungen angeben, unter denen wir die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen solcher Anfangswertprobleme beweisen können. Es stellt sich heraus, dass manche dieser Anfangswertprobleme viele Lösungen besitzen und andere gar keine.

Beispiel 1.19. **(i)** *Das Anfangswertproblem* $\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = 4q$ *mit* $q(0) = 0$ *hat offenbar die*

Lösungen

$$q(t) = \begin{cases} (t-b)^2 & \text{für } b < t \\ 0 & \text{für } -a \le t \le b \\ (t+a)^2 & \text{für } t < -a \end{cases}$$

Hier sind a und b zwei beliebige nichtnegative reelle Zahlen, die beide auch ∞ sein können.

(ii) *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die keine Stammfunktion besitzt (z.B. die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen). Dann hat das Anfangswertproblem $\frac{du}{dt} = f$ mit $q(0) = 0$ keine Lösung.*

Die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen besitzt auf keinem offenen Intervall (a, b) eine Stammfunktion. Wenn nämlich F eine solche Stammfunktion wäre, dann wäre $x \mapsto F(x)$ monoton wachsend und $x \mapsto F(x) - x$ monoton fallend. Wegen dem Mittelwertsatz muss für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ entweder gelten

$$F(x_1) - F(x_2) = x_1 - x_2 \text{ oder } F(x_1) - F(x_2) = 0.$$

Im zweiten Fall folgt aus der Monotonie von F, dass F zwischen x_1 und x_2 konstant ist und im ersten Fall folgt aus der Monotonie von $x \mapsto F(x) - x$, dass diese Funktion zwischen x_1 und x_2 konstant ist. Also ist die Ableitung von F zwischen x_1 und x_2 entweder konstant gleich 0 oder konstant gleich 1. Damit ist F keine Stammfunktion der charakteristischen Funktion der rationalen Zahlen.

1.3 Gewöhnliche Differentialgleichungssysteme

Im einfachsten Fall sind die Funktionen, die mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung erfüllen soll, reelle Funktionen. In diesem Fall hat eine gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung n die Form

$$f(t, q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(n)}(t)) = 0,$$

wobei

$$f : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$$

eine reelle Funktion ist. Hierbei haben wir angenommen, dass nur die Werte einer reellen Funktion und aller ihrer Ableitungen bis zur Ordnung n zu einem Zeitpunkt t mit einander in Beziehung gebracht werden. Wenn wir zusätzlich noch annehmen, dass sich die Differentialgleichung nach der höchsten Ableitung auflösen lässt, dann nimmt sie die Form

$$\frac{d^n q}{dt^n} = f(t, q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)})$$

an, mit einer Funktion
$$f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}.$$
Wenn wir jetzt $\mathbb{R}^m$-wertige Funktionen u betrachten, dann nimmt sie die Form
$$\frac{d^n q}{dt^n} = f(t, q, \dot{q}, \dots, q^{(n-1)})$$
an, mit einer Funktion
$$f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^n \to \mathbb{R}^m.$$
Solche Differentialgleichungen heißen Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen oder gewöhnliche Differentialgleichungssysteme. Um die folgende Untersuchung zu vereinfachen, machen wir von folgender Beobachtung Gebrauch.

Satz 1.20. *Jedes gewöhnliche Differentialgleichungssystem von obiger Form lässt sich durch Vergrößerung von m auf $m \cdot n$ in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung verwandeln. Wenn zuletzt noch der Parameter t zu einer zusätzlichen Komponente von q gemacht wird, also m auf $m \cdot n + 1$ erhöht wird, erreicht man, dass f nicht mehr von t abhängt.*

Beweis: Fassen wir die Funktionen $(q, \dot{q}, \dots, q^{(n-1)})$ zu einer $\mathbb{R}^{n \cdot m}$-wertigen Funktion zusammen, so ist die gewöhnliche Differentialgleichung
$$\frac{d^n q}{dt^n} = f(t, q, \dot{q}, \dots, q^{(n-1)})$$
offenbar äquivalent zu
$$\frac{d}{dt}(q, \dot{q}, \dots, q^{(n-1)}) = (\dot{q}, \dots, q^{n-1}, f(t, q, \dot{q}, \dots, q^{(n-1)})).$$
Hierbei geht das entsprechende Anfangswertproblem
$$q(t_0) = q_0, \dots, q^{(n-1)}(t_0) = q_{n-1}$$
über in
$$(q, \dot{q}, \dots, q^{(n-1)})(t_0) = (q_0, \dots, q_{n-1}).$$
Wenn wir q auch noch um die Funktion t erweitern, dann ist die ursprüngliche Differentialgleichung offenbar äquivalent zu
$$\frac{d}{dt}(t, q, \dot{q}, \dots, q^{(n-1)}) = (1, \dot{q}, \dots, q^{n-1}, f(t, q, \dot{q}, \dots, q^{(n-1)})).$$

Hierbei geht das entsprechende Anfangswertproblem

$$q(t_0) = q_0, \ldots, q^{(n-1)}(t_0) = q_{n-1}$$

über in

$$(t, q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)})(t_0) = (t_0, q_0, \ldots, q_{n-1}).$$

q.e.d.

Wir hatten oben gesehen, dass die Ableitung von zeitkontinuierlichen Systemen durch genau solche Differentialgleichungssysteme beschrieben wird. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass unter bestimmten Bedingungen diese Differentialgleichungen auch die Abbildung Φ eindeutig bestimmen.

Beispiel 1.21. *Die Differentialgleichung* $m\frac{d^2q}{dt^2} = -gm$ *ist äquivalent zu dem Differentialgleichungssystem*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

1.4 Existenz und Eindeutigkeit

Das wichtigste mathematische Mittel um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen zu beweisen ist der Banachsche Fixpunktsatz.

Satz 1.22. *(***Banachscher Fixpunktsatz***) Sei* X *ein vollständiger metrischer Raum und* f *eine Lipschitz-stetige Abbildung von* X *nach* X *mit Lipschitzkonstante* $L < 1$*, d.h. für alle* $x, y \in X$ *gilt* $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$*. Dann besitzt* f *genau einen Fixpunkt und für jedes* $x_0 \in X$ *konvergiert die Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $x_{n+1} = f(x_n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *gegen den Fixpunkt.*

Beweis: Aus der Lipschitz-Stetigkeit von f folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in X$:

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq L^n d(x, y).$$

Hier bezeichnet f^n die n-fache Verknüpfung von f mit sich selber. Also folgt aus der Dreiecksungleichung für alle $m > n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(f^m(x_0), f^n(x_0)) &\leq \sum_{l=n}^{m-1} d(f^{l+1}(x_0)), f^l(x_0)) \\ &\leq \sum_{l=n}^{m-1} L^l d(f(x_0), x_0) \\ &= (1 - L^{m-n})\frac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0) \\ &\leq \frac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0). \end{aligned}$$

Weil $0 < L < 1$ konvergiert $\frac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0)$ gegen Null und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge. Wegen der Vollständigkeit konvergiert sie. Wegen der Stetigkeit von f gilt

$$f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Also ist der Grenzwert ein Fixpunkt von f. Wegen der Lipschitzstetigkeit von f ist der Abstand von zwei Fixpunkten kleiner oder gleich als L mal dem Abstand. Also ist $(1-L)$ mal dem Abstand kleiner oder gleich Null. Dann ist wegen $L < 1$ der Abstand nicht positiv, also gleich Null und beide Fixpunkte stimmen überein. **q.e.d.**

In diesem Abschnitt zeigen wir die Existenz und Eindeutigkeit von gewöhnliche Differentialgleichungen. Dabei müssen wir allerdings an die Nichtlinearität gewisse Einschränkungen machen.

Definition 1.23. *Eine Funktion f von einem metrischen Raum X in den metrischen Raum Y heißt lokal Lipschitz-stetig, wenn es für jedes $x_0 \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ von x_0 gibt und eine Lipschitzkonstante $L > 0$, so dass für alle $x, x' \in U$ gilt*

$$d(f(x), f(x')) \leq L d(x, x').$$

Satz 1.24. *(Lokale Existenz und Eindeutigkeit) Sei I ein offenes Intervall, $U \subset V$ eine offene Teilmenge eines Banachraums V und $f : I \times U \to V$ eine stetige Abbildung, die bezüglich der zweiten Variablen lokal Lipschitzstetig ist, d.h. für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ gibt es ein $\delta > 0$ und ein $L > 0$, so dass für alle $(t, q), (t, \tilde{q}) \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times B(q_0, \delta)$*

$$\|f(t, q) - f(t, \tilde{q})\| \leq L\|q - \tilde{q}\|$$

gilt. Dann gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ ein $\epsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit $q(t_0) = q_0$ auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ genau eine Lösung besitzt.

Beweis: Wegen der lokalen Lipschitzstetigkeit gibt es $\delta > 0$ und $L > 0$, so dass für alle $(t, q), (t, \tilde{q}) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(q_0, \delta)}$ auch $\|f(t, q) - f(t, \tilde{q})\| \leq L\|q - \tilde{q}\|$ gilt. Wegen der Stetigkeit von f ist die Abbildung

$$F : q \mapsto F(q) \quad \text{mit} \quad F(q)(t) = q_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, q(s)) ds$$

eine stetige Abbildung von $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(q_0, \delta)})$ nach $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], V)$. Sei

$$\|f(\cdot, q_0)\|_\infty = \sup_{s\in[t_0-\delta, t_0+\delta]} \|f(s, q_0)\|.$$

Wenn $\epsilon \leq \delta$ und $\epsilon\left(\|f(\cdot, q_0)\|_\infty + L\delta\right) \leq \delta$, dann ist für alle $q \in C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], \overline{B(q_0,\delta)})$

$$\|F(q) - q_0\|_\infty \leq \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s,q_0) + f(s,q(s)) - f(s,q_0))ds \right\| \leq \epsilon\left(\|f(\cdot,q_0)\|_\infty + L\delta\right) \leq \delta.$$

Also bildet F den vollständigen metrischen Raum $C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], \overline{B(q_0,\delta)})$ auf sich selber ab. Für $q, \tilde{q} \in C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], \overline{B(q_0,\delta)})$ gilt

$$\|F(q) - F(\tilde{q})\|_\infty \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s,q(s) - f(s,\tilde{q}(s))\| \, ds \leq \epsilon L \|q - \tilde{q}\|_\infty.$$

Sei also ϵ kleiner als $\epsilon < \min\left\{\delta, \frac{\delta}{\|f(\cdot,q_0)\|_\infty + L\delta}, \frac{1}{L}\right\} = \min\left\{\delta, \frac{\delta}{\|f(\cdot,q_0)\|_\infty + L\delta}\right\}.$

Dann definiert die Abbildung F eine Lipschitzstetige Abbildung mit Lipschitzkonstante $\epsilon \cdot L < 1$ von dem vollständigen metrischen Raum $C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], \overline{B(q_0,\delta)})$ auf sich selber. Jeder Fixpunkt ist wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung stetig differenzierbar und es gilt $\dot{q}(t) = f(t,q)$ für alle $t \in (t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$ mit $q(t_0) = q_0$. Also löst q dieses Anfangswertproblem auf $(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$. Wenn q umgekehrt auf $(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$ dieses Anfangswertproblem löst, dann ist die Ableitung von $F(q) - q$ gleich Null, und beide Funktionen $F(q)$ und q sind bei $t = t_0$ gleich q_0. Also stimmen beide Funktionen überein und jede Lösung des obigen Anfangswertproblems ist ein Fixpunkt von F. Also folgt die Existenz und Eindeutigkeit dieses Anfangswertproblems auf $(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz. **q.e.d.**

Wegen Satz 1.20 können wir annehmen, dass f nicht von t abhängt. Eine solche autonome gewöhnliche Differentialgleichung ist durch ein Vektorfeld $F : U \to V$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset V$ eines Banachraumes gegeben. Wir nennen dann für $x \in U$ die Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\dot{q}(t) = F(q(t)) \quad \text{mit} \qquad\qquad q(0) = x$$

Integralkurven durch x. Wegen Übungsaufgabe 1.3 sind diese Integralkurven Kandidaten für die Bahnen eines dynamischen Systems.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie die Lösungen der Anfangswertprobleme, also die Fixpunkte von F, von t_0, q_0 und f abhängen. Wegen Satz 1.20 können wir das Anfangswertproblem in ein solches verwandeln, in dem f nicht von t abhängt. Weil solche Anfangswertprobleme bezüglich t translationsinvariant sind, können wir dann den Anfangspunkt 0 wählen. Deshalb untersuchen wir im Folgenden nur die Abhängigkeit der Lösung des Anfangswertproblems von q_0 und f.

Jede Lösung q der Differentialgleichung $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit einer differenzierbaren Funktion f erfüllt auch

$$\ddot{q}(t) = \frac{d}{dt} f(t, q(t)) = \frac{\partial f(t, q(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, q(t))}{\partial q} \dot{q}(t) = \frac{\partial f(t, q(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, q(t))}{\partial q} f(t, q(t)).$$

Indem wir immer höhere Ableitungen bilden sehen wir, dass für r mal (stetig) differenzierbare Funktionen f, jede Lösung auch $(r+1)$ mal (stetig) differenzierbar ist. Wir werden gleich sehen, dass in diesem Fall die Lösung der entsprechenden Anfangswerte auch r mal (stetig) differenzierbar von q_0 abhängt.

Satz 1.25. *Sei I ein offenes Intervall, $U \subset V$ eine offene Teilmenge eines Banachraums V und $f : I \times U \to V$ eine stetige Abbildung, die partiell nach q r mal stetig differenzierbar ist mit $r \in \mathbb{N}$, und deren Ableitung $\frac{\partial f}{\partial q}$ lokal beschränkt ist. Dann gibt es für alle $(t_0, q_0) \in I \times U$ eine offene Umgebung W von q_0 in V, $\epsilon > 0$ und eine r mal stetig differenzierbare Funktion $g : W \to C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V)$, so dass für $q_1 \in W$ die Funktion $g(q_1)$ die eindeutige Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist*

$$\frac{dq}{dt}(t) = f(t, q(t)) \text{ für alle } t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \text{ mit } \quad q(t_0) = q_1.$$

Beweis: Wir benutzen den Satz der impliziten Funktion. Weil $\frac{\partial f}{\partial q}$ lokal beschränkt ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass U den abgeschlossenen Ball $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(q_0, \delta)}$ enthält und $\frac{\partial f}{\partial q}$ auf $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(q_0, \delta)}$ durch L beschränkt ist. Wegen dem Schrankensatz ist dann f auf $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(q_0, \delta)}$ für festes t in q Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L > 0$. Sei also $0 < \epsilon < \min\left\{\delta, \frac{1}{L}\right\}$ ähnlich gewählt wie in dem Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf. Dann definiert

$$F : V \times C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(q_0, \delta)}) \to C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V), \qquad (q_1, q) \mapsto F(q_1, q)$$
$$\text{mit} \quad F(q_1, q)(t) = q_1 + \int_{t_0}^{t} f(s, q(s)) ds$$

eine stetige Abbildung. Die partielle Ableitung $\frac{\partial F(q_1, q)}{\partial q}$ ist gegeben durch

$$\frac{\partial F(q_1, q)}{\partial q} : \qquad C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V) \to C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V), \qquad z \mapsto \frac{\partial F(q_1, q)}{\partial q}(z)$$
$$\text{mit} \qquad \frac{\partial F(q_1, q)}{\partial q}(z)(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f(s, q(s))}{\partial q}(z(s)) ds.$$

Weil die Ableitungen $\frac{\partial f(s,q(s))}{\partial q}$ beschränkt sind durch L, ist die Ableitung $\frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}$ beschränkt durch $L\epsilon < 1$. Also konvergiert für $q_1 \in V$ und $q \in C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], B(q_0,\delta))$ die Neumannsche Reihe

$$\left(\mathbb{1}_{C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],V)} - \frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}\right)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}\right)^l$$

in $\mathcal{L}(C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],V))$ gegen den inversen Operator von $\mathbb{1}_{C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],V)} - \frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}$. Offenbar ist für $q_1, q_2 \in V$ die punktweise Differenz der entsprechenden Abbildungen eine konstante Abbildung: $F(q_1,q) - F(q_2,q) = q_1 - q_2$.
Deshalb ist für jedes $q \in C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon], B(q_0,\delta))$ die Abbildung $q_1 \mapsto F(q_1,q)$ eine glatte Abbildung von V nach $C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],V)$. Also ist die Abbildung

$$\begin{aligned} G : V \times C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon], B(q_0,\delta)) &\to C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],V), \\ (q_1,q) &\mapsto \left(\mathbb{1}_{C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],B(q_0,\delta))} - F(q_1,q)\right) = q - F(q_1,q) \end{aligned}$$

eine stetig differenzierbare Abbildung und besitzt auf dem gesamten Definitionsbereich eine invertierbare partielle Ableitung nach $q \in C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon], B(q_0,\delta))$. Das Urbild der $0 \in C(I,V)$ besteht genau aus den Fixpunkten der Abbildungen $q \mapsto F(q_1,q)$. Aus dem Satz der impliziten Funktion folgt, dass es eine stetig differenzierbare Abbildung g von einer Umgebung W von $q_0 \in V$ auf die entsprechenden Fixpunkte der Abbildungen $q \mapsto F(q_1,q)$ gibt. Diese Abbildung ist außerdem genauso oft stetig differenzierbar, wie G. An der expliziten Formel für die erste partielle Ableitung $\frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}$ erkennt man, dass die partiellen Ableitungen von G bis zur selben Ordnung existieren und stetig sind, bis zu der auch die partiellen Ableitungen von f nach q stetig sind. Also ist G und damit auch die Abbildung g auf die Lösung des entsprechenden Anfangswertproblems r mal stetig differenzierbar. **q.e.d.**

Der Beweis zeigt auch, dass die Lösung des Anfangswertproblems unter den gleichen Voraussetzungen stetig differenzierbar von t_0 und von f abhängt, wenn auf dem Raum der Funktionen $f \in C(I \times U, V)$ die Supremumsnorm von f und von $\frac{\partial f}{\partial q}$ benutzt wird. Wenn in diesem Satz die Funktion f nicht von t abhängt, dann lassen sich die ersten $r+1$ Ableitungen $\dot{q}(t), \ldots, q^{(r+1)}(t)$ der Lösung durch die ersten r Ableitungen der Funktion f nach q bei $q(t)$ ausdrücken. Deshalb sind die entsprechenden Lösungen des Anfangswertproblems sogar $(r+1)$ mal stetig nach t differenzierbar. Insbesondere hängen für glatte f, die nicht von t abhängen, die Lösungen des Anfangswertproblems glatt von q_0 und t ab. Die Abhängigkeit von t_0 ist wenn f nicht von t abhängt trivial. Höhere Ableitungen nach t_0 können wir dann mit dem oben beschriebenen Trick für differenzierbare Funktionen f kontrollieren. Jetzt wollen wir die Lösungen auf möglichst große Intervalle fortsetzen.

Satz 1.26. *(Globale Existenz und Eindeutigkeit) Sei $O \subset \mathbb{R} \times V$ eine offene Teilmenge und $f : O \to V$ eine stetige Abbildung, die wie bei der lokalen Existenz und Eindeutigkeit lokal Lipschitz-stetig ist. Dann gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in O$ genau ein maximales Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$, das t_0 enthält, und auf dem das Anfangswertproblem*

$$\dot{q}(t) = f(t, q) \quad \text{mit} \quad q(t_0) = q_0$$

genau eine Lösung q enthält. Das Intervall ist in dem Sinne maximal, dass an beiden Rändern, also bei a und b, eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) *$a = -\infty$ (bzw. $b = \infty$).*

(ii) *$t \mapsto \|f(t, q(t))\|$ ist für alle $\epsilon > 0$ auf $(a, a + \epsilon)$ (bzw. $(b - \epsilon, b)$) unbeschränkt.*

(iii) *Die Lösung q lässt sich stetig auf $[a, b)$ (bzw. $(a, b]$) fortsetzen, der Graph der Fortsetzung liegt aber nicht in O, d.h. $\lim_{t \downarrow a}(t, q(t)) \notin O$ (bzw. $\lim_{t \uparrow b}(t, q(t)) \notin O$).*

Beweis: Zunächst bemerken wir, dass für jedes Intervall (a, b), das t_0 enthält, und auf dem das Anfangswertproblem

$$\dot{q}(t) = f(t, q(t)) \text{ mit } q(t_0) = q_0$$

eine Lösung $\tilde{q}$ besitzt, so dass sich $\tilde{q}$ auf $[a, b)$ oder $(a, b]$ stetig fortsetzen lässt, und der Graph der Fortsetzung in O liegt, das neue Anfangswertproblem

$$\dot{q}(t) = f(t, q(t)) \text{ mit } q(a) = \lim_{t \to a+} \tilde{q}(t) \text{ bzw. } q(b) = \lim_{t \to b-} \tilde{q}(t)$$

wegen des Satzes von Picard-Lindelöf eine Lösung in einer Umgebung von a bzw. b besitzt. Der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf zeigt auch, dass auf $[a, a + \epsilon)$ bzw. $(b - \epsilon, b]$ dieses Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist und mit $\tilde{q}$ übereinstimmt. Also existiert ein maximales Intervall (a, b), auf dem das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung besitzt. Wenn am linken bzw. rechten Rand die Bedingungen (i) und (ii) nicht erfüllt sind, dann ist die Ableitung der Lösung auf einer offenen Menge $(a, a + \epsilon)$ bzw. $(b - \epsilon, b)$ beschränkt und deshalb ist die Lösung dort Lipschitz-stetig. Dann konvergiert für jede Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen a bzw. b konvergiert auch die Folge $((t_n, q(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \times V$. Der Grenzwert kann dann aber nicht in O liegen, weil sonst die Lösung eine Fortsetzung auf eine Umgebung von a bzw. b hätte. **q.e.d.**

Bemerkung 1.27. **(i)** *Wenn (ii) erfüllt ist, kann $t \mapsto f(t, q(t))$ nicht stetig auf $[a, a + \epsilon)$ bzw. $(b - \epsilon, b]$ fortgesetzt werden. Also können q und f nicht so stetig auf größere Definitionsbereiche fortgesetzt werden, dass a (bzw. b) im Definitionsbereich von q und $(a, q(a))$ (bzw. $(b, q(b))$) im Definitionsbereich von f liegt.*

(ii) *Jede in q stetig differenzierbare Funktion f ist in q lokal Lipschitz-stetig, weil für stetig differenzierbare Funktionen die Ableitungen lokal beschränkt sind und nach dem Schrankensatz lokal Lipschitz-stetig sind. Wegen dem Schrankensatz gilt für $f(t,q) = A(t)q$ auch $|\ln(\|q(t)\|) - \ln(\|q(t_0)\|)| \leq \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| ds$. In diesem Fall kann $f(t,q)$ nur am Rand des Definitionsbereichs von A unbeschränkt sein. Dann ist auch (ii) nur am Rand des Definitionsbereichs von A möglich.*

Wenn $\dim V < \infty$ kann man die Existenz, aber nicht die Eindeutigkeit (wir kennen schon ein Gegenbeispiel), auf stetige Funktionen f verallgemeinern. Anstatt dem Banachschen Fixpunktsatz verwenden wir dann den Satz von Arzela Ascoli.

Satz 1.28. *(Arzela-Ascoli) Sei K ein kompakter metrischer Raum und V ein endlich dimensionaler Banachraum. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(K,V)$ besitzt eine konvergente Teilfolge, wenn*

(i) *für jedes $x \in K$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und*

(ii) *für jedes $x \in K$ die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig ist in x, d.h. für jedes $x \in K$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass aus $x' \in B(x,\delta) \subset K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $f_n(x') \in B(f_n(x),\epsilon) \subset V$.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar auf K gleichgradig stetig ist. Für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $y \in K$ gibt es wegen (ii) ein $\delta_y > 0$, so dass aus $d(x,y) < 2\delta_y$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $d(f_n(x), f_n(y)) < \frac{\epsilon}{2}$. Wegen der Kompaktheit von K hat die Überdeckung $\{B(y,\delta_y) | y \in K\}$ eine endliche Teilüberdeckung $K = B(y_1,\delta_1) \cup \ldots \cup B(y_N,\delta_N)$. Sei δ das Minimum von $\delta_1,\ldots,\delta_N$. Dann enthält für alle Paare $x, x' \in K$ mit $d(x,x') < \delta$ einer der Bälle $B(y_1,\delta_1),\ldots,B(y_N,\delta_N)$ den einen Punkt x. Damit sind beide in einem der Bälle $B(y_1,2\delta_1),\ldots,B(y_N,2\delta_N)$ enthalten. Daraus folgt $d(f_n(x), f_n(x')) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig auf ganz K.

Sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die in K dicht liegt. Wegen (i) ist dann für alle $m \in \mathbb{N}$ der Abschluss A_m der Menge der Folge $(f_n(x_m))_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Teilmenge von V. Wir definieren jetzt induktiv eine Teilfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Folge $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in V, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $n \geq m$ gilt $d(g_n(x_m), a_m) < \frac{1}{n}$. Dafür wählen wir zunächst einen Häufungspunkt a_1 von $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Teilfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $d(g_n(x_1), a_1) \leq \frac{1}{n}$. Induktiv wählen wir danach für jedes $M \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ einen Häufungspunkt a_M von $(g_n(x_M))_{n\in\mathbb{N}}$ und ersetzen alle Folgenglieder von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Indizes größer als $M-1$ durch eine Teilfolge von $(g_n)_{n\geq M}$, so dass für alle $n \geq M$ gilt $d(g_n(x_M), a_M) < \frac{1}{n}$. Dann gilt für alle $m = 1,\ldots,M$ und alle $n \geq m$ auch $d(g_n(x_m), a_m) < \frac{1}{n}$.

Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass aus $x, x' \in K$ mit $d(x, x') < \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $d(g_n(x), g_n(x')) < \frac{\epsilon}{3}$. Die Überdeckung $(B(x_m, \delta))_{m\in\mathbb{N}}$ von K besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Also gibt es ein $M \in \mathbb{N}$, so dass alle $l, n \geq M$ an den Zentren der Bälle der Teilüberdeckung $d(g_l(x_m), g_n(x_m)) < \frac{\epsilon}{3}$ erfüllen. Dann folgt für alle $x \in K$ und alle $l, n \geq M$

$$d(g_l(x), g_n(x)) \leq d(g_l(x), g_l(x_m)) + d(g_l(x_m), g_n(x_m)) + d(g_n(x_m), g_n(x)) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Also ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(K, V)$ eine Cauchyfolge und konvergiert. **q.e.d.**

Satz 1.29. *(Satz von Peano) Sei I ein offenes Intervall und $U \subset V$ eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen Banachraums und f eine stetige Abbildung $f : I \times U \to V$. Dann gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ ein $\epsilon > 0$ und auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset I$ eine Lösung des Anfangswertproblems* $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ *mit* $q(t_0) = q_0$.

Beweis: Für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$, so dass

$$[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times \overline{B(q_0, \delta)} \subset I \times U.$$

Auf dieser kompakten Menge ist dann f beschränkt durch $\|f\|_\infty < \infty$. Verkleinere also gegebenenfalls ϵ, so dass $\|f\|_\infty \cdot \epsilon \leq \delta$ gilt. Für jede Partition P

$$[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] = [t_{-M}, t_{1-M}] \cup \ldots \cup [t_{-1}, t_0] \cup [t_0, t_1] \cup \ldots \cup [t_{N-1}, t_N]$$

mit $t_0 - \epsilon = t_{-M} < t_{1-M} < \ldots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = t_0 + \epsilon$ des Intervalls $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$, die t_0 als den Anfangs- und Endpunkt eines Teilintervalls enthält, definieren wir folgendermaßen eine Näherungslösung q_P der Differentialgleichung. Auf den Intervallen $[t_{-m}, t_{1-m}]$ definieren wir q_p induktiv für $m = 1, \ldots, m = M$ dadurch, dass jeweils der Wert bei t_{1-m} für $m = 1$ gleich q_0 ist und für $m > 1$ gleich dem Wert $q_P(t_{1-m})$ von dem schon konstruierten q_p bei t_{1-m} ist, und die Ableitung jeweils konstant gleich $f(t_{m-1}, q_P(t_{1-m}))$ ist. Entsprechend definieren wir die Lösung auch indukltiv auf den Intervallen $[t_{n-1}, t_n]$ für $n = 1, \ldots, n = N$ dadurch, dass jeweils der Wert bei t_{n-1} für $n = 1$ gleich q_0 ist und für $n > 1$ gleich dem Wert $q_P(t_{n-1})$ von dem schon konstruierten q_P bei t_{n-1} ist, und die Ableitung jeweils konstant gleich $f(t_{n-1}, q_P(t_{n-1}))$ ist. Wegen $\|f\|_\infty \cdot \epsilon \leq \delta$ und weil f auf $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times \overline{B(q_0, \delta)}$ beschränkt ist durch $\|f\|_\infty$, liegen dann alle Werte von q_P in $\overline{B(q_0, \delta)}$.

Sei nun $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Partitionen, deren maximale Intervalllängen eine Nullfolge bilden. Wir zeigen jetzt, dass eine Teilfolge der entsprechenden Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Näherungslösungen gegen eine Lösung des Anfangswertproblems konvergiert. Offenbar erfüllt die Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen des Satzes von Arzela-Ascoli. Deshalb konvergiert eine Teilfolge von $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ gegen eine stetige Funktion

q, die bei t_0 gleich q_0 ist. Weil die stetige Funktion f auf der kompakten Teilmenge $[t_0-\epsilon, t_0+\epsilon] \times \overline{B(q_0,\delta)}$ stetig und damit auch gleichmäßig stetig ist, konvergiert auch die Folge von Funktionen $t \mapsto f(t, q_n(t))$ auf $[t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]$ gleichmäßig gegen die stetige Funktion $t \mapsto (f(t, q(t))$, die dann auch Riemann integrabel ist. Indem wir für alle $t \in [t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]$ die Endpunkte der Intervalle einer solchen Partition zwischen t_0 und t auswählen definiert jedes P auch eine Partition des Intervalls $[t_0, t]$ bzw. $[t, t_0]$. Dann ist $q_P(t) - q_0$ gerade eine entsprechende Riemannsumme von dem Integral $\int_{t_0}^t f(s, q_P(s))ds$. Offenbar ist die Differenz der Riemannsummen zweier stetiger Funktionen auf $[t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]$, beschränkt durch die Supremumsnorm der Differenz mal 2ϵ. Wegen dem Kriterium von Riemann und der gleichmäßigen Konvergenz von $t \mapsto f(t, q_n(t))$ gegen $t \mapsto f(t, q(t))$ konvergiert $(q_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen

$$q_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, q(s))ds = \lim_{n\to\infty} q_n(t) = q(t) \quad \text{für alle} \quad t \in [t_0-\epsilon, t_0+\epsilon].$$

Wegen dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist dann q differenzierbar mit $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$. Also löst q das Anfangswertproblem mit $q(t_0) = q_0$. **q.e.d.**

Eine Lösung einer Differentialgleichung auf einem abgeschlossenen Intervall ist eine stetige Funktion, die im Inneren stetig differenzierbar ist, und deren Ableitung sich stetig auf das abgeschlossene Intervall fortsetzen lässt. Weil eine Funktion auf der Vereinigung von zwei Intervallen genau dann stetig ist, wenn sie auf beiden Intervallen stetig ist und auf der Schnittmenge übereinstimmt, können wir solche Lösungen zusammensetzen: Wenn q_1 eine Lösung des Anfangswertproblems $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit $q(t_1) = q_0$ auf $[t_1-\epsilon, t_1]$ ist und q_2 auf $[t_1, t_1+\epsilon]$. Dann ist

$$q(t) = \begin{cases} q_1(t) & \text{für } t \in [t_1-\epsilon, t_1] \\ q_2(t) & \text{für } t \in [t_1, t_1+\epsilon] \end{cases}$$

eine Lösung auf $[t_1-\epsilon, t_1+\epsilon]$. Also können wir Lösungen wieder nach links bzw. rechts fortsetzen. Für jede total geordnete Familie von offenen Intervallen, auf denen jeweils eine Lösung existiert und jeweils auf der Schnittmenge von zwei solchen Intervallen übereinstimmt, ist die Vereinigung auch das Intervall einer Lösung. Wegen dem Zornschen Lemma existiert dann für jede Lösung ein maximales offenes Intervall, auf das wir sie fortsetzen können. Wir erhalten also wie im Satz 1.26:

Satz 1.30. *(Globale Existenz) Sei V ein endlichdimensionaler Banachraum, $O \subset \mathbb{R} \times V$ eine offene Teilmenge und $f : O \to V$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in O$ eine (nicht notwendiger Weise eindeutige) maximale Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{q}(t) = f(t, q(t)) \text{ mit } q(t_0) = q_0$$

auf einem Intervall (a, b), das t_0 enthält. Die Lösung ist in dem Sinne maximal, dass an beiden Rändern, also bei a und b, eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $a = -\infty$ *(bzw.* $b = \infty$*)*

(ii) $t \mapsto \|f(t, q(t))\|$ *ist für alle* $\epsilon > 0$ *auf* $(a, a + \epsilon)$ *(bzw.* $(b - \epsilon, b)$*) unbeschränkt.*

(iii) *Die Lösung q lässt sich stetig auf $[a, b)$ (bzw. $(a, b]$) fortsetzen, der Graph der Fortsetzung liegt aber nicht in O.* **q.e.d.**

Jede maximale Lösung kann also nicht als Lösung auf ein größeres Intervall fortgesetzt werden. Aber es kann mehrere solcher maximaler Lösungen geben, und zwei verschiedene maximale Lösungen können auf unterschiedlichen Intervallen definiert sein und auf Teilintervallen übereinstimmen.

Korollar 1.31. *Sei F ein stetiges oder lokal Lipschitz-stetiges und beschränktes Vektorfeld auf einem (endlichdimensionalen) Banachraum V. Dann sind alle Integralkurven auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.*

Beweis: Weil F auf ganz V definiert ist, kann (iii) nicht erfüllt sein. Weil F beschränkt ist, kann (ii) nicht erfüllt sein. Also muss am Rand (i) gelten. **q.e.d.**

Korollar 1.32. *Sei $F : X \to V$ ein stetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge X eines Banachraumes V. Wenn für ein $x \in X$ die Integralkurve durch x nicht für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist, dann ist sie in keiner kompakten Teilmenge von X enthalten.*

Beweis: Auf jeder Integralkurve, die in einer kompakten Teilmenge von X enthalten ist, ist das Vektorfeld F beschränkt. Also kann für solche Integralkurven die Bedingung (ii) im Satz 1.30 nicht gelten. **q.e.d.**

Insbesondere sind alle Integralkurven von stetigen Vektorfeldern auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen Banachraumes, die sich nicht auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen lassen, entweder in keiner beschränkten Teilmenge enthalten, oder sie kommen dem Rand von X beliebig nahe.

1.5 Flüsse und Vektorfelder

In der Übungsaufgabe 1.3 haben wir gesehen, dass ein zeitkontinuierliches partiell nach t differenzierbares dynamisches System ein Vektorfeld F definiert. In diesem Abschnitt konstruieren wir aus dem Vektorfeld F das dazugehörige dynamische System Φ. Zunächst wollen wir alle maximalen Integralkurven aus dem vorangehenden Satz zu Abbildungen von offenen Teilmengen von $\mathbb{R} \times M$ nach M zusammensetzen.

Definition 1.33. *Sei X ein topologischer Raum, $W \subset \mathbb{R} \times X$ eine offene Teilmenge und $\Phi : W \to X$ eine Abbildung, die folgende Bedingungen erfüllen:*

(i) *Für alle $x \in X$ ist $\{t \in \mathbb{R} \mid (t, x) \in W\}$ ein offenes Intervall, das die Null enthält.*

(ii) *Sei $(s, x) \in W$ und $(t, \Phi(s, x)) \in W$, dann ist auch $(t + s, x) \in W$ und es gilt*

$$\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x).$$

(iii) *Für alle $x \in X$ gilt $\Phi(0, x) = x$.*

Dann heißt Φ ein lokaler Fluss auf X.

Lemma 1.34. *Sei $\Phi : W \to X$ ein stetiger lokaler Fluss auf dem topologischen Raum X. Dann gilt:*

(i) *Für alle $t \in \mathbb{R}$ sei $V_t = \{x \in X \mid (t, x) \in W\}$. Dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge V_t offen. Für alle $x \in V_t$ ist auch $\Phi(t, x) \in V_{-t}$ und die Abbildung*

$$\Phi(t, \cdot) : \quad V_t \to V_{-t}, \quad x \mapsto \Phi(t, x)$$

ein Homöomorphismus mit der inversen Abbildung $\Phi(-t, \cdot)$.

(ii) *Für jedes $x \in X$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U \subset X$ von x, so dass W die Menge $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ enthält. Für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ sind insbesondere V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x und $\Phi(t, \cdot)$ ein Homöomorphismus von der offenen Umgebung V_t von x auf die offene Umgebung V_{-t} von x.*

Beweis: Für alle $(t_0, x_0) \in W$ ist W eine offene Umgebung von $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U \subset X$ von x_0, so dass $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times U$ in W enthalten ist. Also sind für alle $t \in \mathbb{R}$ die Mengen V_t offen.

Sei $t \in \mathbb{R}$ und $x \in V_t$. Wir führen den Beweis für $t > 0$. Für $t < 0$ geht er analog. Wegen der Bedingung (i) liegt (s, x) für alle $s \in [0, t]$ in W. Die kompakte Teilmenge $\{(0, \Phi(s, x)) \mid s \in [0, t]\}$ von W besitzt eine endliche Überdeckung von Mengen der Form $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ mit $\epsilon > 0$ und offenen Teilmengen $U \subset X$. Deshalb enthält W für ein $\epsilon > 0$ das kartesische Produkt von $(-\epsilon, \epsilon)$ mit einer offenen Umgebung von $\{\Phi(s, x) \mid s \in [0, t]\}$. Wegen der Bedingung (ii) gilt für alle $s \in [-t, 0]$

$$(r, \Phi(t + s, x)) \in W \quad \text{und} \quad \Phi(r, \Phi(t + s, x)) = \Phi(t + s + r, x) \quad \text{für alle } r \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Wegen der Bedingung (ii) folgt aus $(s, \Phi(t, x)) \in W$ und $(r, \Phi(s, \Phi(t, x)) \in W$ auch $(s + r, \Phi(t, x)) \in W$ und $\Phi(r, \Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + r, \Phi(t, x))$. Für alle $s \in [-t, 0]$ folgt dann induktiv $(s, \Phi(t, x)) \in W$ und $\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(t + s, x)$. Also liegt $\Phi(t, x)$ in V_{-t} und $\Phi(-t, \cdot)$ ist die Umkehrabbildung von $\Phi(t, \cdot)$. Weil Φ stetig ist, sind dann $\Phi(t, \cdot)$ und $\Phi(-t, \cdot)$ Homöomorphismen. Jetzt folgt (ii) aus dem Beweis von (i). **q.e.d.**

Satz 1.35. *Sei X eine offene Teilmenge eines Banachraumes V. Dann definiert für jedes lokal Lipschitz-stetige Vektorfeld $F : X \to V$ die Vereinigung aller maximalen Integralkurven aus dem Satz 1.26 einen stetigen lokalen Fluss Φ_F auf X. Wenn F $r \in \mathbb{N}$ mal stetig differenzierbar ist, dann ist Φ_F ein r mal stetig differenzierbar Fluss mit r mal stetig differenzierbarer partieller Ableitung $\frac{\partial \Phi_F}{\partial t}$.*

Umgekehrt ist jeder partiell nach t differenzierbare lokale Fluss Φ, dessen partielle Ableitung $F(x) = \frac{\partial \Phi(0,x)}{\partial t}$ lokal Lipschitz-stetig ist, die Einschränkung von Φ_F auf eine offene Teilmenge $W \subset W_F$.

Beweis: Sei $F : X \to V$ ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf X. Sei W_F die Vereinigung in $\mathbb{R} \times X$ aller kartesischen Produkte der Definitionsbereiche der eindeutigen maximalen Integralkurven aus Satz 1.26 mit Anfangswert $q(0) = x \in X$ mit den Mengen $\{x\}$. Sei $\Phi_F : W_F \to X$ für jedes $x \in X$ definiert durch die entsprechende Integralkurve durch x. Wenn $(s, x) \in W_F$ und $(t, \Phi_F(s, x)) \in W_F$ liegt, dann stimmen die beiden Integralkurven mit Anfangswert $x(0) = x$ und $x(s) = \Phi_F(s, x)$ wegen der Eindeutigkeit von Integralkurven auf der Schnittmenge der Definitionsbereich überein. Also bilden sie zusammen eine Integralkurve auf einem Intervall das sowohl 0, als auch s und $t + s$ enthält, und $x(0) = x$, $x(s) = \Phi_F(s, x)$ und $x(t + s) = \Phi_F(t, \Phi_F(s, x))$ erfüllt. Also folgt

$$(t + s, x) \in W_F \text{ und } \Phi_F(t + s, x) = \Phi_F(t, \Phi_F(s, x)).$$

Weil im Beweis der Existenz des Anfangswertproblems im Satz von Picard-Lindelöf das Intervall, auf dem die Integralkurve durch $x \in$ definiert ist, nur von einem $\delta > 0$ mit $\overline{B(x, \delta)} \subset X$ und der Lipschitzkonstanten L und dem Supremum von $\|F\|$ auf dieser kompakten Menge $\overline{B(x, \delta)}$ abhängt, enthält W_F für alle $x \in X$ eine offene Umgebung von $(0, x) \in \mathbb{R} \times X$. Dann enthält W_F für alle $(s, x) \in W_F$ mit einer offenen Umgebung um $(0, \Phi_F(s, x))$ auch eine offene Umgebung von (s, x). Also ist W_F offen.

Wenn $F : X \to V$ r mal stetig differenzierbar ist, dann ist wegen Satz 1.25 auch Φ_F r mal stetig differenzierbar ist. Weil in diesem Fall f nicht von t abhängt, lassen sich die ersten $r + 1$ Ableitungen $\dot{q}(t), \ldots, q^{(r+1)}(t)$ der Lösung durch die ersten r Ableitungen der Funktion f nach q bei $q(t)$ ausdrücken. Deshalb sind die entsprechenden Lösungen des Anfangswertproblems sogar $(r + 1)$ mal stetig partiell nach t differenzierbar.

Sei jetzt $\Phi : W \to X$ ein partiell nach t stetig differenzierbarer Fluss auf X, dessen partielle Ableitung nach t lokal Lipschitz-stetig ist. Wegen der Bedingung (ii) gilt für alle $(t, x) \in W$ und $(s, \Phi(t, x)) \in W$

$$\frac{\partial \Phi(t + s, x)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi(t + s, x)}{\partial s} = \frac{\partial \Phi(s, \Phi(t, x))}{\partial s}.$$

Mit $s = 0$ folgt, dass die partielle Ableitung $\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t}$ an der Stelle (t, x) gleich der partiellen Ableitung von $\frac{\partial \Phi(s,\Phi(t,x))}{\partial s}$ an der Stelle $(0, \Phi(t, x))$ ist. Dann ist $t \mapsto \Phi(t, x)$ die eindeutige Integralkurve durch x des lokal Lipschitz-stetigen Vektorfeldes $F : X \to V$ mit $F(x) = \frac{\partial\Phi(0,x)}{\partial t}$. Aus der Eindeutigkeit von Integralkurven folgt, dass für jedes $x \in X$ die Bahn $t \mapsto \Phi(t,x)$ eine Einschränkung der maximalen Integralkurve $t \mapsto \Phi_F(t,x)$ des Vektorfeldes F durch x ist. Also ist W eine offene Teilmenge von W_F und Φ die Einschränkung von Φ_F auf W. **q.e.d.**

Aus Lemma 1.34 und Satz 1.35 folgt

Korollar 1.36. *Sei $F : X \to V$ ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge X eines Banachraumes V. Dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge $V_t = \{x \in X | (t,x) \in W_F\}$ eine offene Teilmenge von X und die Abbildung $x \mapsto \Phi_F(t,x)$ ist ein Homöomorphismus von V_t nach V_{-t} mit Umkehrabbildung $x \mapsto \Phi_F(-t,x)$. Wenn F r mal stetig differenzierbar ist, dann sind dies Abbildungen auch r mal stetig differenzierbar. Außerdem gibt es für alle $x \in X$ ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $t \in (-\epsilon,\epsilon)$ die Mengen V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x sind.* **q.e.d.**

Definition 1.37. **(i)** *Ein lokaler Fluss $\Phi : W \to X$ auf einem topologischen Raum X heißt globaler Fluss, wenn $W = \mathbb{R} \times X$ ist.*

(ii) *Ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld $F : X \to V$ auf einer offene Teilmenge eines Banachraumes V heißt vollständig, wenn der entsprechende Fluss Φ_F ein globaler Fluss ist.*

Offenbar definieren stetige globale Flüsse und vollständige lokal Lipschitz-stetige Vektorfelder zeitkontinuierliche dynamische Systeme. Allerdings definieren nicht alle stetigen Vektorfelder, deren Integralkurven alle auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind, auch ein zeitkontinuierliches dynamisches System mit $G = \mathbb{R}$

Beispiel 1.38. *Sei F folgendes stetige Vektorfeld auf $\mathbb{R}$:*

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(x) = \begin{cases} \frac{2x}{|x|}\sqrt{|x|} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Offenbar ist F auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ lokal Lipschitz-stetig. Die Integralkurven durch $x > 0$ sind für $t \in [-\sqrt{|x|},\infty)$ gegeben durch $\Phi(t,x) = (\sqrt{|x|}+t)^2$ und für $t > -\sqrt{|x|}$ auch eindeutig. Die Integralkurven durch $x < 0$ sind für $t \in [-\sqrt{|x|},\infty)$ gegeben durch $\Phi(t,x) = -(\sqrt{|x|}+t)^2$ und für $t > -\sqrt{|x|}$ eindeutig. Für $t > 0$ bildet $\Phi(t,\cdot)$ die Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ also auf die Menge $(-\infty,-t^2) \cup (t^2,\infty)$ ab. Wegen den Bedingungen (i) und (ii) kann $\Phi(-t,\cdot)$ dann alle Punkte in $[-t^2,t^2]$ nur auf 0 abbilden. Dann müsste $\Phi(t,0)$ gleich allen Punkten in $[-t^2,t^2]$ sein. Also gibt es kein dynamisches System zu F.

Satz 1.39. *Auf einem kompakten topologischen Raum X sind alle lokalen Flüsse auch globale Flüsse.*

Beweis: Wegen Lemma 1.34 gibt es für jedes $x \in X$ ein $\epsilon_x > 0$ und eine offene Umgebung U_x von $x \in X$, so dass der Definitionsbereich W die Menge $(-\epsilon_x, \epsilon_x) \times U$ enthält. Die Überdeckung $(U_x)_{x \in X}$ von X, hat eine endliche Teilüberdeckung. Das Minimum der entsprechenden ϵ_x nennen wir wieder $\epsilon > 0$. Dann folgt aus der Bedingung (i) des Flusses, dass für jedes $(t, x) \in W$ die Menge W auch die Menge $\{(t + s, x) \in \mathbb{R} \times X | s \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ enthält. Weil W die Menge $\{(0, x)|x \in X\}$ enthält, folgt induktiv für alle $l \in \mathbb{N}$, dass W auch die Menge

$$(-(l + 1)\epsilon, (l + 1)\epsilon) \times X = \{(t + s, x) \in \mathbb{R} \times X \mid (t, x) \in (-l\epsilon, l\epsilon) \times X, s \in (-\epsilon, \epsilon)\}$$

enthält. Also ist W gleich $\mathbb{R} \times X$. **q.e.d.**

Wir haben in dem Beweis nur benutzt, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass der Definitionsbereich W des Flusses Φ von F die Menge $(-\epsilon, \epsilon) \times X$ enthält, bzw. die Integralkurven von F mit allen Anfangswerten $x(0) \in X$ auf $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert sind.

Korollar 1.40. **(i)** *Ein lokaler Fluss auf einem topologischen Raum X ist genau dann ein globaler Fluss, wenn W eine Menge $(-\epsilon, \epsilon) \times X$ enthält mit $\epsilon > 0$.*

(ii) *Ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld $F : X \to V$ auf einer offenen Menge eines Banachraumes V definiert genau dann einen globalen Fluss, wenn für ein $\epsilon > 0$ die Integralkurven von F durch alle $x \in X$ auf $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert sind.*

(iii) *Ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld $F : X \to V$ auf einer offenen Teilmenge eines Banachraumes, das außerhalb einer kompakten Menge verschwindet, definiert einen globalen Fluss.*

(iv) *Auf einem Banachraum $X = V$ definieren beschränkte und lokal Lipschitz-stetige Vektorfelder einen globalen Fluss.*

(v) *Auf einem Banachraum $X = V$ definieren Lipschitz-stetige Vektorfelder einen globalen Fluss.*

Beweis: (i)-(ii) haben wir schon gezeigt und (iv) folgt aus Korollar 1.31. Weil es für jedes $x \in X$ ein $\epsilon > 0$ und eine Umgebung U von x gibt, so dass der entsprechende lokale Fluss auf $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ definiert ist, und die Integralkurven durch Nullstellen auf ganz $\mathbb{R}$ konstant sind, erfüllt ein Vektorfeld, das (iii) erfüllt, auch (ii).

Sei $F : V \to V$ ein Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf einem Banachraum V mit Lipschitzkonstante L. Im Satz von Picard-Lindelöff haben wir für $x \in X$ gezeigt, dass mit $\delta > 0$ die Integralkurve durch x in dem Ball $B(x, \delta)$ auf dem Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert ist, wenn ϵ folgende Ungleichung erfüllt:

$$\epsilon < \min\left\{\delta, \frac{\delta}{\|F(x)\| + L\delta}\right\}.$$

Mit $\delta = \|F(x)\| + 1$ können wir $\epsilon = \frac{1}{1+L}$ wählen. Also folgt (v) aus (ii). **q.e.d.**

Korollar 1.41. **(i)** *Ein globaler stetiger Fluss auf dem topologischen Raum X definiert durch*

$$\Phi(\cdot,\cdot): \quad \mathbb{R} \to C(X,X), \quad t \mapsto \Phi(t,\cdot)$$

einen Homomorphismus von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der Homöomorphismen von X.

Umgekehrt definieren alle Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der Homöomorphismen von X, die als Abbildungen von $\mathbb{R} \times X$ nach X stetig sind, einen globalen stetigen Fluss.

(ii) *Sei $F : X \to V$ ein vollständiges lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf einer offene Menge X eines Banachraumes V. Dann definiert der entsprechende Fluss $\Phi_F : \mathbb{R} \times X \to X$ einen Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der Homöomorphismen von X.*

Beweis: (i) Offenbar ist $W = \mathbb{R} \times X$ dazu äquivalent, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $V_t = X$. Die Bedingung (ii) besagt genau, dass $t \mapsto \Phi(t,\cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Also folgt die Aussage aus dem Lemma 1.34.

(ii) folgt aus (i) und und Satz 1.35. **q.e.d.**

Übungsaufgabe 1.42. *Sei $F : X \to V$ ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge X eines Banachraumes und $f : X \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.*

(i) *Zeige, dass für $C < f < C^{-1}$ mit $0 < C < 1$ alle maximalen Integralkurven von fF die Verkettung von den entsprechenden Integralkurven von F mit bijektiven Abbildungen von den entsprechenden maximalen Intervallen aufeinander sind.*

(ii) *Zeige dass fF lokal Lipschitz-stetig ist, wenn f lokal Lipschitz-stetig ist.*

(iii) *Es sei $f > C > 0$ lokal Lipschitz-stetig und F und fF vollständig. Zeige, dass dann die beiden entsprechenden dynamischen Systeme die gleichen Trajektorien (als Mengen) haben, aber als dynamische Systeme im Allgemeinen verschieden sind.*

(iv) *Zeige, dass im Fall $X = V$ das Vektorfeld $\frac{F}{1+\|F\|}$ vollständig ist, und die Mengen der Integralkurven mit denen von F übereinstimmen.*

Hinweis zu (i): Nimm an, dass sich die Integralkurven von fF schreiben lassen als die Verkettung einer reellen Funktion mit den Integralkurven von F und leite eine Differentialgleichung für diese reelle Funktion her. Diese Differentialgleichung läßt sich dann einfach lösen.

1.6 Elementare Lösungsverfahren

In diesem Abschnitt wollen wir uns auf gewöhnliche Differentialgleichungen beschränken, in denen die gesuchte Funktion eine reelle Funktion ist. Die Differentialgleichungen erster Ordnung haben also die Form

$$\dot{q}(t) = f(t, q(t)).$$

Wenn es uns gelingt, die Funktion f als einen Quotienten zu schreiben

$$f(t, q) = \frac{g(t)}{h(q)}$$

dann können wir die Differentialgleichung umformen zu

$$\dot{q}(t)h(q(t)) = g(t).$$

Wenn H eine Stammfunktion von h ist und G eine Stammfunktion von G, dann gilt

$$\frac{d}{dt}H(q(t)) = \frac{d}{dt}G(t).$$

Also folgt dann für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t) = \frac{g(t)}{h(q(t))} \text{ mit } q(t_0) = q_0$$
$$H(q(t)) - H(q_0) = G(t) - G(t_0).$$

Wenn wir jetzt noch annehmen, dass H eine Umkehrfunktion besitzt, was natürlich auf allen Intervallen gilt, auf denen h positiv bzw. negativ ist, dann erhalten wir also als Lösung des Anfangswertproblems

$$q(t) = H^{-1}(G(t) - G(t_0) + H(q_0)).$$

Satz 1.43. *(Trennung der Variablen) Seien g und h stetige Funktionen auf einem offenen Intervall I und h sei entweder positiv oder negativ. Dann sind sowohl g als auch h auf allen kompakten Teilintervallen von I Riemann-integrabel. Seien G und H Stammfunktionen von g bzw. h. Dann ist H entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend, besitzt also eine Umkehrabbildung $H^{-1} : I' \to I$ von einem offenen Intervall I' auf I. Dann ist die eindeutige Lösung der Anfangswertprobleme*

$$\dot{q}(t) = \frac{g(t)}{h(q(t))} \textit{ mit } q(t_0) = q_0$$

gegeben durch $$q(t) = H^{-1}(G(t) - G(t_0) + H(q_0)).$$

Sie ist auf dem Intervall definiert, auf dem $G(t) - G(t_0) + H(q_0)$ in I' liegt. **q.e.d.**

Wenn es uns gelingt eine Funktion $F(t,q)$ zu finden, so dass gilt

$$f(t,q) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}(t,q)}{\frac{\partial F}{\partial q}(t,q)},$$

dann können wir die Differentialgleichung umformen zu

$$\frac{d}{dt}F(t,q(t)) = \frac{\partial F(t,q(t))}{\partial t} + \frac{dq(t)}{dt}\frac{\partial F(t,q(t))}{\partial q} = 0.$$

Also gilt dann für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t)\frac{\partial F(t,q(t))}{\partial q} + \frac{\partial F(t,q(t))}{\partial t} = 0 \quad \text{mit} \quad q(t_0) = q_0$$

$$F(t,q(t)) = F(t_0,q_0).$$

Diese Gleichung beschreibt implizit die Lösung des Anfangswertproblems.

Satz 1.44. *(Exakte Differentialgleichungen) Sei $(t,q) \mapsto F(t,q)$ differenzierbar. Dann sind alle Lösungen des Anfangswertproblems*

$$\dot{q}(t)\frac{\partial F(t,q(t))}{\partial q} + \frac{\partial F(t,q(t))}{\partial t} = 0 \quad \textit{mit} \quad q(t_0) = q_0$$

implizit gegeben durch $\qquad F(t,q(t)) = F(t_0,q_0).$ **q.e.d.**

Für zwei Funktionen $g(t,q)$ und $h(t,q)$ mit $f(t,q) = -\frac{g(t,q)}{h(t,q)}$, gibt es nicht immer eine Funktion $F(t,q)$ mit $\frac{\partial F(t,q)}{\partial t} = g(t,q)$ und $\frac{\partial F(t,q)}{\partial q} = h(t,q)$.

Lemma 1.45. *(Stammfunktion) Seien g und h zwei stetig differenzierbare Funktionen auf einem konvexen offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Dann gibt es auf Ω genau dann eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $F(t,q)$ mit*

$$\frac{\partial F(t,q)}{\partial t} = g(t,q) \textit{ und } \frac{\partial F(t,q)}{\partial q} = h(t,q) \textit{ wenn gilt } \frac{\partial g(t,q)}{\partial q} = \frac{\partial h(t,q)}{\partial t}.$$

Beweis: Sei $(t_0,q_0) \in \Omega$ beliebig. Dann definieren wir die Funktion

$$F(t,q) = (t-t_0)\int_0^1 g(t_s,q_s)ds + (q-q_0)\int_0^1 h(t_s,q_s)ds,$$

mit $t_s = t_0 + s(t - t_0)$ und $q_s = q_0 + s(q - q_0)$. Weil die Funktionen g und h differenzierbar sind, sind sie stetig und damit auch integrierbar. Die Ableitungen von F sind dann

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(t,q)}{\partial t} &= \int_0^1 g(t_s,q_s)ds + (t-t_0)\int_0^1 \frac{\partial g(t_s,q_s)}{\partial t} sds + (q-q_0)\int_0^1 \frac{\partial h(t_s,q_s)}{\partial t} sds \\
&= \int_0^1 g(t_s,q_s)ds + \int_0^1 \frac{dg(t_s,q_s)}{ds} sds = g(t,q) \\
\frac{\partial F(t,q)}{\partial q} &= \int_0^1 h(t_s,q_s)ds + (q-q_0)\int_0^1 \frac{\partial h(t_s,q_s)}{\partial q} sds + (t-t_0)\int_0^1 \frac{\partial g(t_s,q_s)}{\partial q} sds \\
&= \int_0^1 h(t_s,q_s)ds + \int_0^1 \frac{dh(t_s,q_s)}{ds} sds = h(t,q)
\end{aligned}$$

Wenn umgekehrt $\frac{\partial F(t,q)}{\partial t} = g(t,q)$ und $\frac{\partial F(t,q)}{\partial q} = h(t,q)$ gilt, dann folgt aus dem Satz von Schwarz

$$\frac{\partial g(t,q)}{\partial q} = \frac{\partial^2 F(t,q)}{\partial q \partial t} = \frac{\partial^2 F(t,q)}{\partial t \partial q} = \frac{\partial h(t,q)}{\partial t}.$$ **q.e.d.**

Wir können diese Aussage auf Vereinigungen von konvexen Gebieten verallgemeinern, solange nur die Vorschrift, gemäß der wir F fortsetzen, eindeutig ist. Das gilt für alle einfach zusammenhängenden Gebiete Ω, d.h. solche Gebiete, die für jede stetige Abbildung $p : S^1 \to \Omega$ eine Homotopie zu einer konstanten Abbildung besitzen, d.h. also, es gibt zu jedem solchen p eine stetige Abbildung $[0,1] \times S^1 \to \Omega$, die auf $\{0\} \times S^1$ gerade gleich p und die auf $\{1\} \times S^1$ konstant ist. Anschaulich bedeutet das, dass jeder geschlossene Weg in Ω zu einem Punkt zusammengezogen werden kann.

Es gibt auch Fälle, in denen die Differentialgleichung

$$\dot{q}(t)h(t,q(t)) + g(t,q(t)) = 0$$

erst mit einer Funktion erweitert werden muss, bevor sie exakt ist.

Beispiel 1.46. *Die Differentialgleichung*
$$2t\dot{q} + q(t) = 0$$
ist nicht exakt, weil gilt
$$\frac{\partial q}{\partial q} = 1 \neq 2 = \frac{\partial 2t}{\partial t}.$$
die Differentialgleichung
$$2tq(t)\dot{q}(t) + q^2(t) = 0$$

ist aber exakt, weil gilt $$\frac{\partial q^2}{\partial q} = 2q = \frac{\partial}{\partial t} 2qt.$$

Korollar 1.47. *(Eulersche Multiplikator) Wenn eine Differentialgleichung durch Multiplikation mit einer Funktion auf die Form gebracht werden kann*

$$\dot{q}(t)h(t, q(t)) + g(t, q(t)) = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial h(t,q)}{\partial t} = \frac{\partial g(t,q)}{\partial q},$$

dann existiert auf einfach zusammenhängenden Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine Funktion F, so dass die Differentialgleichung exakt ist

$$\frac{d}{dt} F(t, q(t)) = \dot{q}(t) \frac{\partial F(t, q(t))}{\partial q} + \frac{\partial F(t, q(t))}{\partial t} = 0.$$

Dann gilt für die Lösungen des entsprechenden Anfangswertproblems mit $q(t_0) = q_0$

$$F(t, q(t)) = F(t_0, q_0).$$

q.e.d.

Um für eine Differentialgleichung von der Form

$$\dot{q}(t)h(t, q(t)) + g(t, q(t)) = 0$$

einen Eulerschen Multiplikator $M(t, q(t))$ zu finden, müssen wir die Gleichung

$$\frac{\partial M(t,q)}{\partial t} h(t,q) + M(t,q) \frac{\partial h(t,q)}{\partial t} = \frac{\partial M(t,q)}{\partial q} g(t,q) + M(t,q) \frac{\partial g(t,q)}{\partial q}$$

lösen. Das ist eine partielle Differentialgleichung, die im Allgemeinen nicht leichter zu lösen ist als die ursprüngliche Differentialgleichung. In einigen Fällen können wir Lösungen erraten oder einfache Lösungen berechnen, die nur von t bzw. u abhängen.

Zuletzt bemerken wir, dass einige Differentialgleichungen durch eine Substitution in eine der Differentialgleichungen verwandelt werden können, die wir lösen können.

Beispiel 1.48. (i)

$$\dot{q}(t) = f(at + bq(t) + c) \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Für $b = 0$ können wir die Differentialgleichung direkt integrieren. Für $b \neq 0$ führt die Substitution $p(t) = at + bq(t) + c$ auf die Differentialgleichung $\dot{p}(t) = a + bf(p(t))$ oder auch $\frac{\dot{p}(t)}{a+bf(p(t))} = 1$. Diese Differentialgleichung können wir mit der Methode der Trennung der Variablen lösen: Sei F eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{a+bf(x)}$. Dann erfüllen die Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t) = f(at + bq(t) + c) \text{ mit } \qquad q(t_0) = q_0$$

die Gleichung $$F(at + bq(t) + c) - F(at_0 + bq_0 + c) = t - t_0.$$

(ii) $\dot{q} = f\left(\frac{q(t)}{t}\right)$ *homogene Differentialgleichung. Die Substitution* $p(t) = \frac{q(t)}{t}$ *führt zu*

$$\dot{p}(t) = \frac{f(p(t)) - p(t)}{t}.$$

Diese Differentialgleichung können wir durch Trennung der Variablen lösen:

$$\frac{\dot{p}(t)}{f(p(t)) - p(t)} = \frac{1}{t}.$$

(iii)

$$\dot{q} = f\left(\frac{at + bq(t) + c}{\alpha t + \beta q(t) + \gamma}\right) \quad \textit{mit } a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Wenn die Determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$ *ist, dann ist entweder* $\alpha t + \beta q(t)$ *ein Vielfaches von* $at + bq(t)$ *oder umgekehrt. Deshalb haben wir dann ein Beispiel der Art in (i). Wenn diese Determinante* $\neq 0$ *ist, dann hat das lineare Gleichungssystem*

$$at + bu + c = 0 \qquad \alpha t + \beta u + \gamma = 0$$

genau eine Lösung (t_0, q_0). *Die Differentialgleichung können wir umformen zu*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(q(t + t_0) - q_0) &= f\left(\frac{a(t + t_0) + bq(t + t_0) + c - (at_0 + bq_0 + c)}{\alpha(t + t_0) + \beta q(t + t_0) + \gamma - (\alpha t_0 + \beta q_0 + \gamma)}\right) \\ &= f\left(\frac{a + b\frac{q(t+t_0)-q_0}{t}}{\alpha + \beta\frac{q(t+t_0)-q_0}{t}}\right). \end{aligned}$$

Also erhalten wir ein Beispiel von der Form (ii).

(iv) *Bernoullische Differentialgleichung:*

$$\dot{q}(t) + g(t)q(t) + h(t)q^{\alpha}(t) = 0 \quad \alpha \neq 1.$$

Die Substitution $p(t) = q^{1-\alpha}(t)$ *führt zu der Differentialgleichung*

$$\dot{p}(t) = (1 - \alpha)\dot{q}(t)q^{-\alpha}(t) = (\alpha - 1)g(t)p(t) + (\alpha - 1)h(t).$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung, die wir im Abschnitt 1.7 gelöst haben.

1.7 Lineare Differentialgleichungen

Definition 1.49. *Eine Differentialgleichung von der Form*

$$\dot{q}(t) = A(t)q(t) + b(t)$$

heißt lineare gewöhnliche Differentialgleichung auf einem (offenen) Intervall $I \subset \mathbb{R}$*. Hierbei ist* q *eine gesuchte Funktion von* I *mit Werten in einem Vektorraum* V *(z.B.* $\mathbb{K}^n$*) und* A *eine Abbildung von* I *in die linearen Abbildungen von* V *auf* V *(oder im Falle eines normierten Vektorraumes* $\mathcal{L}(V)$*, die linearen stetigen Abbildungen von* V *nach* V*). Im Fall von* $V = \mathbb{K}^n$ *können wir* $\mathcal{L}(V)$ *mit den* $n \times n$ *Matrizen* $\mathbb{K}^{n\times n}$ *identifizieren und* V *mit den Spaltenvektoren in* $\mathbb{K}^n$*. Dann ist* $A(t)q(t)$ *das Matrix-Produkt der* $n \times n$*-Matrix* $A(t)$ *mit dem Spaltenvektor* $q(t)$*, also wieder ein Spaltenvektor in* $\mathbb{K}^n$*. Schließlich ist* b *eine Abbildung von* I *nach* V*. Wenn* $b(t) = 0$ *ist, dann heißt die Differentialgleichung homogen, andernfalls inhomogen. Wenn* A *nicht von* t *abhängt, also als Abbildung konstant ist, heißt die Differentialgleichung autonom, andernfalls nicht autonom.*

Satz 1.50. *Die Menge aller Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung bildet einen Vektorraum über* $\mathbb{K}$*. Wenn also* q *und* $\tilde{q}$ *Lösungen sind, dann sind auch* $q+\tilde{q}$ *und* λu *für alle* $\lambda \in \mathbb{K}$ *Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung. Die Menge aller Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung bildet einen affinen Raum. Eine allgemeine Lösung ist die Summe einer speziellen Lösung und einer allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen linearen Differentialgleichung.*

Beweis: Seien q und $\tilde{q}$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $\dot{q}(t) = A(t)q(t) + b(t)$ bzw. $\dot{\tilde{q}}(t) = A(t)\tilde{q}(t) + b(t)$, dann erfüllt $q - \tilde{q}$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}(q(t) - \tilde{q}(t)) = A(t)(q(t)) - \tilde{q}(t)),$$

also die entsprechende homogene Differentialgleichung. Genauso gilt auch für alle $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\frac{d}{dt}\lambda(q(t) - \tilde{q}(t)) = A(t)\lambda(q(t)) - \tilde{q}(t)).$$

Deshalb ist der Raum aller Lösungen eines homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems ein Vektorraum und die allgemeine Lösung eines inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems ist die Summe einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung des entsprechenden homogenen Systems. **q.e.d.**

Satz 1.51. *(Existenz und Eindeutigkeit des linearen Anfangswertproblems). Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein offenes (nicht notwendig beschränktes) Teilintervall von* $\mathbb{R}$ *und* $A : I \to \mathcal{L}(V)$

eine stetige Abbildung von $\mathbb{R}$ in die beschränkten stetigen linearen Abbildungen des Banachraums V. Außerdem sei $b : I \to V$ stetig. Dann besitzt für jedes $q_0 \in V$ und jedes $t_0 \in I$ das Anfangswertproblem $\dot{q}(t) = A(t) \cdot q(t) + b(t)$ mit $q(t_0) = q_0$ genau eine stetig differenzierbare Lösung $q : I \to V$.

Bemerkung 1.52. *Jede Lösung der Differentialgleichung muss differenzierbar sein und damit auch stetig. Dann muss sie sogar stetig differenzierbar sein. Deshalb gibt es also auch nur genau eine Lösung.*

Beweis: Wir benutzen den Satz von Picard-Lindelöff. Wir zeigen die Aussage zunächst auf einem Teilintervall, dessen Abschluss in I enthalten ist. Offenbar ist das Supremum $\|A\|_\infty$ von $\|A\|$ eine Lipschitzkonstante L. Wie im Korollar 1.40 (v) müssen $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$ folgendes erfüllen:

$$\epsilon < \left\{ \delta, \frac{\delta}{\|A\|_\infty(\|q_0\| + \delta} \right\}.$$

Weil wir δ beliebig groß wählen können existiert ein solches ϵ. Dann existiert eine eindeutige Lösung auf jedem relativkompakten Teilintervall. Wegen der Eindeutigkeit können wir alle diese Lösungen zu eine globalen Lösung auf I zusammensetzen.**q.e.d.**

Aus den beiden vorangehenden Sätzen folgt sofort:

Korollar 1.53. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, V ein Banachraum, und $A : I \to \mathcal{L}(V)$ und $b : I \to V$ stetige Abbildungen. Dann induziert für jedes $t_0 \in I$ die Abbildung $C(I, V) \to V, u \mapsto q(t_0)$ einen linearen Isomorphismus von der Menge aller Lösungen der Differentialgleichung $\dot{q}(t) = A(t)q(t)$ auf V. Für jede Lösung $\tilde{q}$ der inhomogenen Differentialgleichung $\dot{q}(t) = A(t)q(t) + b(t)$ induziert die Abbildung $C(I, V) \to V, u \mapsto q(t_0) - \tilde{q}(t_0)$ einen affinen Isomorphismus von der Menge aller Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung nach V.* **q.e.d.**

Insbesondere haben also die Lösungsräume der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungssysteme erster Ordnung dieselbe Dimension wie der Vektorraum, in dem die Werte der gesuchten Funktion liegen. Insbesondere stimmt also für reelle gewöhnliche Differentialgleichungen n-ter Ordnung die Dimension des Lösungsraumes mit der Ordnung überein, wie wir das erwartet haben. Nachdem wir jetzt also für eine erste Klasse von Differentialgleichungen die Existenz und Eindeutigkeit des Anfangswertproblems gezeigt haben, wollen wir uns der Frage zuwenden, wie wir diese Lösungen auch ausrechnen können.

Beispiel 1.54. *Wir stellen uns eine Insel vor, die von Störchen, Fröschen und Fliegen bewohnt wird. Dabei stellen wir uns die Nahrungskette so vor, dass die Störche $S(t)$ sich sowohl von den Fröschen als auch von den Fliegen ernähren, die Frösche $F(t)$ nur von den Fliegen und die Fliegen $f(t)$ von dem Aas der Frösche und Störche. Wir nehmen* *jetzt an, dass das Tierwachstum nur von der vorhandenen Nahrungsmenge gesteuert wird:*

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= F(t) + f(t) \quad -2S(t)\\ \dot{F}(t) &= -S(t) + f(t)\\ \dot{f}(t) &= S(t) + F(t) \quad -2f(t)\end{aligned}$$

Beispiel 1.55. *Seien $A : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ stetig. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$\dot{q}(t) = A(t)q(t) + b(t), \quad q(t_0) = q_0$$

eine eindeutige Lösung, die wir jetzt bestimmen wollen. Dazu betrachten wir zunächst das entsprechende homogene Anfangswertproblem mit $b = 0$. Wenn q eine Nullstelle bei einem $t_1 \in \mathbb{R}$ hat, dann stimmt q mit der eindeutigen Lösung $q = 0$ des entsprechenden homogenen Anfangswertproblems mit $q(t_1) = 0$ überein. Andernfalls hat q keine Nullstelle und wir können die Differentialgleichung umformen zu

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{d}{dt}\ln(q(t)) = A(t) \text{ mit } q(t_0) = q_0.$$

Wir erhalten

$$\ln(q(t)) = \int_{t_0}^{t} A(s)ds + \ln(q_0) \text{ bzw.} \qquad q(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) q_0.$$

Sei also q_s für alle $s \in \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung $q_s(t) = \exp\left(\int_s^t A(r)dr\right) b(s)$ des Anfangswertproblems $\dot{q}_s(t) = q_s(t)A(t)$ mit $q_s(s) = b(s)$. Dann folgt

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} q_s(t)ds = q_t(t) + \int_{t_0}^{t} A(t)q_s(t)ds = b(t) + A(t)\int_{t_0}^{t} q_s(t)ds.$$

Also löst $\int_{t_0}^{t} q_s(t)ds$ das Anfangswertproblem

$$\dot{q}(t) = A(t)q(t) + b(t) \text{ mit } \qquad q(t_0) = 0.$$

Wir erhalten also die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems als die Summe

$$q(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) q_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{s}^{t} A(r)dr\right) b(s)ds.$$

des homogenen Anfangswertproblems und dem Integral über alle Anfangswertprobleme des homogenen Problems, wobei wir als Anfangswerte jeweils den inhomogenen Term einsetzen. Dieses Verfahren wollen wir jetzt verallgemeinern.

Satz 1.56. *(Variation der Parameter) Sei $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und V ein Banachraum. Dann ist die Abbildung*

$$C([\alpha, \beta], \mathcal{L}(V)) \times C([\alpha, \beta], V) \times [\alpha, \beta] \times V \to C([\alpha, \beta], V) \qquad (A, b, t_0, q_0) \mapsto u$$

auf die eindeutige Lösung q des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t) = A(t)q(t) + b(t) \text{ mit } \qquad q(t_0) = q_0$$

stetig. Die Einschränkung dieser Abbildung auf ein festes t_0 hängt analytisch von A, b und q_0 ab. Für jedes $(A, b, t_0) \in C([\alpha, \beta], \mathcal{L}(V)) \times C([\alpha, \beta], V) \times [\alpha, \beta]$ ist dann die entsprechende Einschränkung der Abbildung ein affiner Isomorphismus von $q_0 \in V$ auf die Menge der Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{q}(t) = A(t)q(t) + b(t).$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, berechnen wir mit ihm die Lösung eines inhomogenen Anfangswertproblems aus der Lösung des homogenen Anfangswertproblems.

Korollar 1.57. *Sei $A : I \to \mathcal{L}(V)$ eine stetige Abbildung auf einem offenen nicht notwendigerweise beschränkten Intervall und $b : I \to V$ auch. Dann setzt sich wegen der Variation der Parameter die eindeutige Lösung $q_s(t)$ des Anfangswertprobleme*

$$\dot{q}_s(t) = A(t)q_s(t) \text{ mit } \qquad q_s(s) = b(s)$$

zu einer stetigen Abbildung $I \mapsto C(I, V)$ $\quad s \mapsto q_s$ zusammen. Die eindeutige Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t) = A(t)q(t) + b(t) \text{ mit } \qquad q(t_0) = q_0$$

ist dann die Summe des entsprechenden homogenen Anfangswertproblems und des Integrals

$$\int_{t_0}^{t} q_s(t) ds.$$

Beweis: Wegen des vorangehenden Satzes ist die Abbildung $s \mapsto q_s(t)$ auf allen Teilintervallen $[\alpha, \beta] \subset I$ stetig von $[\alpha, \beta]$ nach $C([\alpha, \beta], V)$. Dann existiert für alle $t \in I$ das Integral $\int\limits_{t_0}^{t} q_s(t)ds$. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{t_0}^{t} q_s(t)ds = q_t(t) + A(t)\int\limits_{t_0}^{t} q_s(t)ds = b(t) + A(t)\int\limits_{t_0}^{t} q_s(t)ds \text{ und } \int\limits_{t_0}^{t_0} q_s(t)ds = 0.$$

Diese Funktion löst das inhomogene Anfangswertproblem mit $q_0 = 0$. Wegen Satz 1.50 ist die eindeutige Lösung des allgemeinen Anfangswertproblems die Summe dieser Funktion und der Lösung des entsprechenden homogenen Anfangswertproblems.**q.e.d.**
Beweis von Satz 1.56: Offenbar ist die Abbildung

$$\begin{aligned} C([\alpha, \beta], \mathcal{L}(V)) \times C([\alpha, \beta], V) \times [\alpha, \beta] \times V \times C([\alpha, \beta], V) &\to C([\alpha, \beta], V) \\ (A, b, t_0, q_0, q) \mapsto f_{A,b,t_0,q_0}(q) \text{ mit } f_{A,b,t_0,q_0}(q)(t) &= q_0 + \int\limits_{t_0}^{t} (A(s)q(s) + b(s))ds \end{aligned}$$

stetig und hängt für festes t_0 analytisch von A, b, q_0 und q ab. Weil das Integral linear ist, ist sie sogar eine Summe von linearen Abbildungen und einer bilinearen Abbildung. Damit ist f sogar ein Polynom in A, b, q_0, und q. Die Lipschitzkonstante $\tilde{L}$ der Abbildung $\tilde{f} = f_{\tilde{A},\tilde{b},\tilde{t}_0\tilde{q}_0}$, mit einem Element $(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{t}_0, \tilde{q}_0) \in C([\alpha, \beta], \mathcal{L}(V)) \times C([\alpha, \beta], V) \times [\alpha, \beta] \times V$ können wir abschätzen durch

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{f}(q) - \tilde{f}(\tilde{q})\right\|_\infty &= \left\|\int\limits_{\tilde{t}_0}^{t} A(s)(q(s) - \tilde{q}(s))ds + \int\limits_{\tilde{t}_0}^{t} (\tilde{A}(s) - A(s))(q(s) - \tilde{q}(s))ds\right\|_\infty \\ &\leq |\beta - \alpha|\|q - \tilde{q}\|_\infty \left(\|A\|_\infty + \|\tilde{A} - A\|_\infty\right). \end{aligned}$$

Wir wählen das Intervall $[\alpha, \beta]$ und $\epsilon > 0$ so klein, dass die den Elementen $(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{t}_0, \tilde{q}_0)$ in dem ϵ-Ball von (A, b, t_0, q_0) entsprechenden $\tilde{f}$ Lipschitz-stetig sind mit Lipschitzkonstante $\tilde{L} \leq |\beta - \alpha|(\|A\|_\infty + \epsilon) \leq L_0 < 1$. Für $n > m \geq N \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{f}^n(q) - \tilde{f}^m(q)\right\|_\infty &\leq \left\|\tilde{f}^m(\tilde{f}^{n-m}(q) - \tilde{f}^0(q))\right\|_\infty \\ &\leq \tilde{L}^m \left\|\sum_{l=1}^{n-m} (\tilde{f}^l(q) - \tilde{f}^{l-1}(q))\right\|_\infty \\ &\leq \tilde{L}^N \left(\sum_{l=0}^{n-m-1} \tilde{L}^l \|\tilde{f}(q) - q\|_\infty\right) \qquad \leq \frac{\tilde{L}^N}{1 - \tilde{L}}\|\tilde{f}(q) - q\|_\infty. \end{aligned}$$

Wir wählen die Startfunktion q identisch gleich Null. Dann ist $\|\tilde{f}(q) - q\|$ beschränkt durch

$$\|\tilde{f}(0) - 0\|_\infty \leq \|q_0\| + \|\tilde{q}_0 - q_0\| + |\beta - \alpha| \left(\|b\|_\infty + \|\tilde{b} - b\|_\infty\right).$$

Weil auf dem ϵ-Ball um (A, b, t_0, q_0) die Lipschitzkonstante uniform durch $L_0 < 1$ beschränkt ist, konvergiert dann die Folge $(\tilde{f}^n(q))_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Lösung des Anfangswertproblems. Der Grenzwert ist als gleichmäßiger Grenzwert von stetige Abbildung eine stetige Funktion von (A, b, t_0, q_0), die für festes t_0 analytisch von (A, b, q_0) abhängt (also eine konvergente Potenzreihe besitzt).

Wenn die Lipschitzkonstante größer als 1 ist, überdecken wir das Intervall durch hinreichend kleine Teilintervalle und setzen die entsprechenden Lösungen fort. **q.e.d.**

Damit haben wir die Berechnung der Lösung auf das Lösen des homogenen Anfangswertproblems zurückgeführt.

Satz 1.58. *(Exponentialfunktion) Die Potenzreihe* $\exp(A) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ *konvergiert für alle* $A \in \mathcal{L}(V)$*, wenn* V *ein Banachraum ist. Außerdem gilt*

$$\frac{d}{dt}\exp((t-t_0)A) = A\exp((t-t_0)A) = \exp((t-t_0)A)A.$$

Beweis: Wegen $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ folgt $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. Dann folgt die Behauptung aus den entsprechenden Aussagen für die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$. **q.e.d.**

Korollar 1.59. *(Lösung des autonomen Anfangswertproblems) Das inhomogene Anfangswertproblem*

$$\dot{q}(t) = Aq(t) + b(t) \text{ mit } q(t_0) = q_0$$

mit $A \in \mathcal{L}(V)$ *und stetigem* $b : I \to V$ *besitzt die eindeutige Lösung*

$$q(t) = \exp((t-t_0)A)q_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \exp((t-s)A)b(s)ds.$$

Beweis: Es genügt wegen der Variation der Parameter zu zeigen, dass das homogene Anfangswertproblem $(b = 0)$ durch $q(t) = \exp((t-t_0)A)q_0$ gelöst wird. Das folgt aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion. **q.e.d.**

Damit bleibt noch das Problem der Berechnung der Exponentialfunktion. Dazu benutzen wir die Diagonalisierung bzw. Jordannormalform von Matrizen.

Übungsaufgabe 1.60. (i) *Aus der Analysis wissen wir, dass das Anfangswertproblem der Differentialgleichung*

$$q^{(n)}(t) = 0 \text{ mit } q(0) = q_0, \dot{q}(0) = q_1, \ldots, q^{(n-1)}(0) = q_{n-1}$$

die Lösung

$$q(t) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{q_l t^l}{l!}$$

besitzt. Dieses Anfangswertproblem ist äquivalent zu den Anfangswertproblemen

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \\ \vdots \\ q^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \\ \vdots \\ q^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad mit \quad \begin{pmatrix} q(t_0) \\ \dot{q}(t_0) \\ \vdots \\ q^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Deshalb gilt

$$\exp\left(t \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{1} + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{t^l}{l!} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}^l$$

Zeige direkt diese Identität.

(ii) *Zeige, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) gilt*

$$\exp\left(t \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \exp(t\lambda) \cdot \exp\left(t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

(iii) *Die Matrix A lasse sich durch die invertierbare Matrix B diagonalisieren:*

$$A = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} B^{-1}$$

Zeige, dass dann gilt

$$\exp(tA) = B \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(t\lambda_n) \end{pmatrix} B^{-1}.$$

Beispiel 1.61. *Die Matrix*

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

lässt sich diagonalisieren auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Also ist die Lösung des Beispiels der Störche, Frösche und Fliegen gegeben durch

$$\begin{pmatrix} S(t) \\ F(t) \\ f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(0) \\ F(0) \\ f(0) \end{pmatrix}.$$

Lemma 1.62 (Gronwall)**.** *Seien $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$, $A \in L^1([\alpha, \beta])$ eine nichtnegative Lebesgue integrable Funktion und $b, q \in L^\infty([\alpha, \beta])$ beschränkte messbare reelle Funktionen. Gilt die erste der folgenden Ungleichungen für fast alle $t \in [\alpha, \beta]$, dann auch die zweite:*

$$q(t) \leq b(t) + \int_\alpha^t A(s)q(s)ds \quad \Longrightarrow \quad q(t) \leq b(t) + \int_\alpha^t \exp\left(\int_s^t A(s')ds'\right) A(s)b(s)ds.$$

Beweis: Wir setzen die erste Ungleichung n mal in sich selber ein und erhalten

$$\begin{aligned} q(t) \leq b(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_\alpha^t A(t_1) \int_\alpha^{t_1} A(t_2) \cdots \int_\alpha^{t_{k-1}} A(t_k)b(t_k)dt_k \cdots dt_1 + \\ + \int_\alpha^t A(t_1) \int_\alpha^{t_1} A(t_2) \cdots \int_\alpha^{t_{n-1}} A(t_n)q(t_n)dt_n \cdots dt_1. \end{aligned}$$

Weil A nicht negativ ist, folgen diese Ungleichungen induktiv aus der ersten Ungleichung. Durch vertauschen der Indizes und der Integrationen erghalten wir

$$\begin{aligned} \int_\alpha^t A(t_n) \int_\alpha^{t_n} A(t_{n-1}) \cdots \int_\alpha^{t_2} A(t_1)q(t_1)dt_1 \cdots dt_n &= \int_{\alpha < t_1 < \cdots < t_n} A(t_n) \cdots A(t_1)q(t_1)dt_n \cdots dt_1 \\ &= \int_\alpha^t \int_{t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq t} A(t_n) \cdots A(t_2)A(t_1)q(t_1)dt_n \cdots dt_1. \end{aligned}$$

Alle Permutationen von $t_2, \dots, t_n$ bilden die offenen Teilmengen

$$\{(t_2, \dots, t_n) \in [t_1, t]^{n-1} \mid t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t\}$$

auf disjunkte Mengen ab, die zusammen das gleiche Volumen wir $[t_1, t]^{n-1}$ haben. Weil $A(t_2) \cdots A(t_n)$ sich durch die Permutationen nicht ändert erhalten wir

$$q(t) \leq b(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\left(\int_{t_1}^{t} A(s')ds'\right)^{k-1}}{(k-1)!} A(s)b(s)ds + \int\limits_{\alpha}^{t} \frac{\left(\int_{t_1}^{t} A(s')ds'\right)^{n-1}}{(n-1)!} A(s)q(s)ds.$$

Mit $\int_{t_1}^{t} A(s)ds \leq \|A\|_{L^1([\alpha,\beta])}$ erhalten wir für $n \to \infty$ die zweite Ungleichung. **q.e.d.**

Lemma 1.63. *(Fundamentallösung) Sei $A : I \to \mathcal{L}(V)$ eine stetige Funktion von einem Intervall in die stetigen linearen Abbildungen des Banachraums V. Dann konvergiert*

$$F(t) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{t_0}^{t} A(t_n) \int\limits_{t_0}^{t_n} A(t_{n-1}) \dots \int\limits_{t_0}^{t_2} A(t_1) dt_1 \dots dt_n$$

auf $t \in I$ gegen die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{F}(t) = A(t)F(t) \text{ mit } F(t_0) = \mathbb{1}.$$

Beweis: Wegen dem Gronwallschen Lemma läßt sich mit $b = \mathbb{1}$ die Norm $\|F(t)\|$ durch die Reihe von $\exp\left(\int_{t_0}^{t} \|A(s)\| ds\right)$ abschätzen und konvergiert auf kompakten Teilmengen von I gleichmäßig. Aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung folgt

$$\dot{F}(t) = A(t) + \sum_{n=1}^{\infty} A(t) \int\limits_{t_0}^{t} A(t_{n-1}) \int\limits_{t_0}^{t_{n-1}} A(t_{n-2}) \dots \int\limits_{t_0}^{t_2} A(t_1) dt_1 \dots dt_{n-1} = A(t)F(t). \textbf{q.e.d.}$$

Diese Lösung $F(t)$ heißt Fundamentallösung des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t) = A(t)q(t) \text{ mit } \qquad q(t_0) = q_0.$$

Offenbar ist dann $F(t)$ die lineare Abbildung, die jedem q_0 den entsprechenden Wert der Lösung an der Stelle t zuordnet. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung der beiden Anfangswertprobleme

$$\dot{q}(t) = A(t)q(t) + b(t) \text{ mit } q(t_0) = q_0 \text{ und } \qquad \dot{q}(t) = A(t)q(t) + b(t) \text{ mit } q(t_1) = q_1$$

ist die Fundamentallösung des ersten Anfangswertproblems an der Stelle t_1 als lineare Abbildung invers zu der Fundamentallösung des zweiten Anfangswertproblems an der Stelle t_0. Deshalb ist die Fundamentallösung eine einmal stetig differenzierbare Abbildung von I in die invertierbaren Elemente von $\mathcal{L}(V)$.

Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t) = A(t)q(t) \text{ mit } \qquad q(s) = b(s)$$

ist dann gegeben durch

$$q_s(t) = F(t)F^{-1}(s)b(s).$$

Wegen der Variation der Parameter ist dann die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t) = A(t)q(t) + b(t) \text{ mit } \qquad q(t_0) = q_0$$

gegeben durch

$$q(t) = F(t)q_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(t)F^{-1}(s)b(s)ds.$$

Deshalb genügt es zum Lösen einer gewöhnlichen, linearen Differentialgleichung, die Fundamentallösung zu bestimmen. Wenn alle $A(t)$ miteinander kommutieren:

$$A(t)A(t') = A(t')A(t) \text{ für alle } t, t' \in I,$$

wie das im Fall $V = \mathbb{R}$ gilt, dann ist $F(t) = \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} A(s)ds\right)$, im Allgemeinen aber nicht. Im endlichdimensionalen Fall, wenn wir A durch $n \times n$ Matrizen darstellen können, ist allerdings folgende Beziehung sehr nützlich.

Satz 1.64. *(Spur und Determinante) Sei $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ eine stetige Abbildung des offenen Intervalls I in die $\mathbb{K}$-wertigen $n \times n$ Matrizen. Dann gilt für die Fundamentallösung*

$$F : I \to \mathbb{K}^{n\times n} \textit{ mit } \quad \dot{F}(t) = A(t)F(t) \textit{ und } \quad F(t_0) = \mathbb{1},$$

$$\frac{d}{dt}\det(F(t)) = \operatorname{Spur}(A(t))\det(F(t)) \textit{ mit } \quad \det(F(t_0)) = 1.$$

Also hat $\det(F(t))$ auf I keine Nullstellen und $F(t)$ ist für alle $t \in I$ invertierbar.

Beweis: Weil die Determinante $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ ein Polynom in den Einträgen der entsprechenden Matrix ist, ist sie eine analytische Funktion. Wir zeigen zunächst, dass die Ableitung dieser Abbildung bei allen invertierbaren Matrizen A gegeben ist durch

$$\frac{d}{dt}\det(A+tB)\mid_{t=0}= \det(A)\,\mathrm{Spur}(A^{-1}B).$$

Es gilt nämlich

$$\det(A+tB) = \det(A)\det(\mathbb{1}+tA^{-1}B).$$

Offenbar ist $\det(\mathbb{1}+tA^{-1}B)$ ein Polynom in t vom Grad n, und die Koeffizienten sind Polynome in den Koeffizienten von $A^{-1}B$. Weil die Unterdeterminanten von $\mathbb{1}$ genau dann nicht verschwinden, wenn die genausovielte Spalte wie Zeile gestrichen wird und dann die Unterdeterminanten gleich Eins sind, gilt

$$\det(\mathbb{1}+tA^{-1}B) = 1 + t\,\mathrm{Spur}(A^{-1}B) + \text{Terme höherer Ordnung.}$$

Damit folgt

$$\frac{d}{dt}\det(A+tB)\bigg|_{t=0} = \det(A)\,\mathrm{Spur}(A^{-1}B).$$

Wenden wir diese Formel auf $F(t)$ an, so erhalten wir mit der Kettenregel an den Stellen, an denen $F(t)$ invertierbar ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\det(F(t)) &= \mathrm{Spur}(\dot{F}(t)F^{-1}(t))\det(F(t))\\ &= \mathrm{Spur}(A(t))\det(F(t)).\end{aligned}$$

Dann folgt aus dem Beispiel, dass $\det(F(t))$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t) = \mathrm{Spur}(A(t))q(t) \text{ mit } q(t_0) = 1$$

ist. Also gilt

$$\det(F(t)) = \exp\left(\int_{t_0}^{t}\mathrm{Spur}(A(s))ds\right)$$

q.e.d.

Kapitel 2

Hamiltonsche Mechanik

2.1 Gradientenflüsse

Definition 2.1. *Sei X eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $H : X \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann definiert der Gradient von H ein Vektorfeld auf X. Ein entsprechender Fluss heißt Gradientenfluss.*

Wenn die Ableitung von H lokal Lipschitzstetig ist, dann ist wegen dem Satz von Picard-Lindelöff 1.24 der Gradientenfluss eindeutig.

Lemma 2.2. *Sei $H : X \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge von $\mathbb{R}^n$ einmal stetig differenzierbar. Dann ist H auf jeder Integralkurve des Gradientenflusses monoton wachsend. Wenn der Gradient von H bei $x \in X$ nicht verschwindet ist H auf der Integralkurve des Gradientenflusses durch X sogar streng monoton wachsend.*

Beweis: Der Gradient von H ist definiert als

$$\nabla H(x) = \left(\frac{\partial H(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial H(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial H(x)}{\partial x_n} \right).$$

Wenn also $q(t)$ eine Integralkurve des Gradientenflusses durch $x \in H$ ist, dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(q(t)) &= \frac{\partial H(g(t))}{\partial x_1} \dot{q}_1(t) + \dots \frac{\partial H(q(t))}{\partial x_n} \dot{q}_n(t) \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}(q(t)) \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial H}{\partial x_n}(q(t)) \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Gleichheit kann nur gelten, wenn der Gradient von H bei $q(t)$ verschwindet. **q.e.d.**

Um das Maximum einer Funktion H zu finden, kann man einfach den Gradientenfluss mit einem beliebigen Anfangswert möglichst lange fließen lassen. Dabei wird dann der Wert von H immer größer. Wenn man Glück hat landet man in einem Maximum.

Beispiel 2.3. *Sei $H(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ das Quadrat der euklidischen Länge. Um einen Vektor minimaler Länge zu finden, benutzen wir den negativen Gradientenfluss.*

$$-\nabla H(x) = -2x.$$

Dieses Vektorfeld besitzt die Integralkurven

$$g(t) = e^{-2t}x \text{ mit } q(0) = x.$$

Also konvergieren alle Bahnen dieses Gradientenflusses gegen das einzige Minimum $x = 0$ von dem Quadrat der euklidischen Länge H.

Korollar 2.4. *Sei H auf einer offenen Teilmenge X von $\mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar. Dann besitzt der entsprechende lokale Fluss außer den Fixpunkten keine weiteren periodischen Orbits. Die Fixpunkte bestehen aus allen kritischen Punkten von H.*

Beweis: Offenbar sind alle kritischen Punkte von H auch Fixpunkte des entsprechenden Gradientenflusses. Wenn x kein kritischer Punkt von H ist, dann nimmt H auf der Integralkurve durch x nur noch Werte größer als $H(x)$ an und kann nicht mehr zu x zurückkehren. **q.e.d.**

Lemma 2.5. *Sei $F : X \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge X des $\mathbb{R}^n$. Wenn X konvex ist oder einfach zusammenhängend, dann ist F genau dann ein Gradientenvektorfeld, wenn für alle $1 \leq i < j \leq n$ gilt*

$$\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i}.$$

Beweis: Sei $x_0 \in X$ ein beliebiger Punkt. Wir definieren für jeden Punkt x die Funktion

$$H : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto H(x) = \int_0^1 (x - x_0) \cdot F(x_0 + t(x - x_0))dt.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial x_i} &= \int_0^1 F_i(x_0 + t(x - x_0))dt + \int_0^1 (x - x_0)t\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0 + t(x - x_0))dt \\
&= \int_0^1 F_i(x_0 + t(x - x_0))dt + \int_0^1 \sum_{j=1}^n (x - x_0)_j t\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0 + t(x - x_0))dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(tF_i(x_0 + t(x - x_0))\right)dt = F_i(x_0 + x - x_0) = F_i(x).
\end{aligned}$$

Also ist F das Gradientenvektorfeld von H. Umgekehrt erfüllt das Gradientenvektorfeld von H

$$\frac{\partial^2 H(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 H(x)}{\partial x_j \partial x_i}$$ **q.e.d.**

Übungsaufgabe 2.6. *Sei H eine stetig differenzierbare Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$, die nach unten beschränkt ist. Für ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sei $t \mapsto q(t)$ die Integralkurve von dem negativen Gradientenvektorfeld von H durch den Punkt x_0. Zeige folgende Aussagen*

(i) *Es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass $\|q(t_2) - q(t_1)\| \leq C\sqrt{t_2 - t_1}$ für alle $0 \leq t_1 \leq t_2$ im maximalen Definitionsbereich der Integralkurve q gilt.*

Hinweis: benutze den Schrankensatz, die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, und dass das Integral $H(q(t_2)) - H(q(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dH(q(s))}{ds} ds$ beschränkt ist.

(ii) *Folgere aus (i), dass die Integralkurven durch alle $x \in \mathbb{R}^n$ für alle $t \in [0, \infty)$ definiert sind.*

(iii) *Zeige dass jeder Grenzwert $x \in \mathbb{R}^n$ von den Folgen $(q(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit streng monoton wachsenden unbeschrnkten Folgen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0, \infty)$ ein kritischer Punkt von H ist mit $H(x) = \inf\{H(q(t)) \mid t \in [0, \infty)\}$.*

Hinweis: Zeige mithilfe von Arzela-Ascoli dass eine Teilfolge von der Folge von Funktionen $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $q_n(t) = q(t + t_n)$ auf allen kompakten Teilmengen von $[0, \infty)$ gegen eine Integralkurve des negativen Gradientenvektorfeldes konvergiert.

(iv) *Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Grenzwert einer Folge $(q(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ wie in (iii). Für ein $\delta > 0$ sei $W = \{t \in [0, \infty) \mid q(t) \in B(x, \delta)\}$ und $\int_W \|\dot{q}(t)\| dt < \infty$. Dann konvergiert q im Grenzwert $t \to \infty$ gegen x.*

Hinweis: Betrachte die Folge $(\tilde{t}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\tilde{t}_n = \sup\{t \in [t_n, \infty) \mid [t_n, t] \subset W\}$. Zeige, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{t}_N = \infty$ gibt, weil sonst die Folge $(q(\tilde{t}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert im Widerspruch zu $\|x - q(\tilde{t}_n)\| = \delta$.

(v) *Sei x wie in (iv) und $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $\Phi' > 0$, so dass für ein $\delta > 0$ folgende sogenannte Gradientenungleichung gilt: (siehe Sen-Zhong Huang: Gradient Inequalities, AMS 2006)*

$$\frac{1}{\Phi'(H(y))} \leq \|\nabla H(y)\| \quad \textit{für alle} \quad y \in B(x, \delta).$$

Dann konvergiert q im Grenzwert $t \to \infty$ gegen x.

Hinweis: Zeige $\|\dot{q}(t)\| \leq -\frac{d}{dt}\Phi(H(q(t)))$ für alle t mit $q(t) \in B(x, \delta)$.

2.2 Hamiltonsche Systeme

Um das Gradientenvektorfeld einer Funktion zu definieren haben wir implizit die euklidische Metrik benutzt. Im Allgemeinen ist die Ableitung einer differenzierbaren Funktion auf einer offenen Teilmenge X eines Banachraumes V eine lineare Abbildung von V nach $\mathbb{R}$, also ein Element des Dualraumes von V. Um den Dualraum mit V zu identifizieren benötigen wir ein Skalarprodukt. Wir können auch andere (antisymmetrische) Bilinearformen benutzen um aus Funktionen Vektorfelder zu konstruieren.

Auf dem $\mathbb{R}^{2n}$ betrachten wir die Bilinearform

$$\omega : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto \omega(v, w) = v^t \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} w = \sum_{i+1^n} (v_i w_{n+i} - v_{n+i} w_i).$$

Hierbei betrachten wir v und w als Spaltenvektoren in $\mathbb{R}^{2n}$. Dann induziert eine differenzierbare Funktion H das Vektorfeld $X(H) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{smallmatrix}\right) \nabla H$ mit $\omega(v, X(H)) = v \cdot \nabla H$.

Definition 2.7. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^{2n}$ offen und $H \in C^2(M, \mathbb{R})$. Die Differentialgleichung*

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i} \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

oder, in den Koordinaten $x = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = (q, p)$ $\dot{x} = X(H)(x)$ mit dem Hamiltonschen Vektorfeld $X(H) + J\nabla H$ und $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ heißt Hamiltonsche Differentialgleichung.

Bemerkung 2.8. *H wird Hamiltonfunktion genannt. Wir setzen im Folgenden einfachheitshalber oft voraus, dass H ein Dynamisches System definiert.*

Definition 2.9. *Eine reelle Funktion auf dem Phasenraum M eines dynamischen Systems heißt Integral der Bewegung, wenn sie auf allen Bahnen konstant ist.*

Satz 2.10. *Die Hamiltonfunktion ist ein Integral der Bewegung.*

Beweis: $\frac{d}{dt} H(\Phi(t,x)) = H'(\frac{d}{dt}\Phi(t,x)) = H'(X(H))(\Phi(t,x)) = (\nabla H \cdot J\nabla H)(\Phi(t,x))$. Es gilt aber

$$(v, Jv) = (J^t v, v) = -(Jv, v) = -(v, Jv) = 0$$

für $v \in \mathbb{R}^{2n}$, also auch für $\nabla H(\Phi(t,x))$. **q.e.d.**

Dieser Satz erlaubt uns, das dynamische System auf die (oft Energieschalen genannten) Niveaumengen $H^{-1}(\{E\})$ zu restringieren. Nach dem Satz über die implizite Funktion sind dies für reguläre Werte von E von H Untermannigfaltigkeiten von M. Dies ermöglicht es für den Fall $n = 1$, also $M = \mathbb{R}^2$, für eine gegebene Funktion H die Orbits, allerdings ohne Zeitparametrisierung, aufzufinden: Zu $x \in M$ betrachten wir die Niveaumenge $H^{-1}(\{H(x)\})$. Ist $\nabla H(x) = 0$, so besteht der Orbit nur aus x. Sonst ist in einer Umgebung von x die Niveaumenge $H^{-1}(\{H(x)\})$ eine Kurve im Phasenraum $\mathbb{R}^2$, was man durch Verwendung des impliziten Funktionensatzes sehen kann. Um den Orbit zu bekommen, dehnen wir diese Kurve nach beiden Seiten so weit wie möglich aus. Die Orientierung erhalten wir durch die Richtung, die durch Drehung des Gradienten im Uhrzeigersinn um $\pi/2$ entsteht (J entspricht einer solchen Drehung).

Beispiel 2.11. *Die Orbits des eindimensionalen harmonischen Oszillators sind konzentrische Kreise um den Ursprung:* $H(q,p) + p^2 + q^2$.

Begriffe: Mit Phasenraum $M \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n_p \times \mathbb{R}^n_q$ nennen wir

- n Zahl der Freiheitsgrade
- $q \in \mathbb{R}^n_q$ Ort und $p \in \mathbb{R}^n_p$ Impuls
- $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ Geschwindigkeit
- H Hamiltonfunktion oder Gesamtenergie
- Besitzt der Phasenraum die Form $M = \mathbb{R}^n_p \times N$, so heißt $N \subset \mathbb{R}^n_q$ Konfigurationsraum.

2.3 Symplektische Gruppe

Damit die Hamiltonsche Differentialgleichung linear wird, muss $H : M \to \mathbb{R}$ bis auf eine Konstante ein homogenes Polynom zweiten Grades sein, also von der Form

$$H(x) = H(0) + \frac{1}{2}(x, Ax)$$

mit einer $2n \times 2n$ Matrix A. Die Funktionen zu A und A^t stimmen überein. Deshalb können wir o.B.d.A. $A = A^t$ annehmen. Dann ergibt sich $\nabla H(x) = Ax$ und $\dot{x} = JA \cdot x$. Die Differentialgleichungen bleiben invariant, wenn wir zu H eine Konstante dazuaddieren. Das entspricht physikalisch der Tatsache, dass nicht absolute Energiewerte, sondern nur Energiedifferenzen messbar sind. Wir setzen der Einfachheit halber $H(0) = 0$. Setzen wir $U = JA \in \mathcal{M}(2n, \mathbb{R})$, so stellen wir fest, dass

$$U^t J + JU = (JA)^t J + J^2 A = AJ^t J + J^2 A = -AJ^2 + J^2 A = 0$$

gilt. Das führt uns zu folgender Definition:

Definition 2.12. *Eine $2n \times 2n$ Matrix U und der entsprechenden Endomorphismus des $\mathbb{R}^{2n}$ heißen infinitesimal symplektisch, wenn folgendes gilt:*

$$U^t J + JU = 0.$$

Da die Bedingung an U linear ist, bilden die infinitesimal symplektischen Endomorphismen einen Unterraum $sp(n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$.

Satz 2.13. *Für $U \in sp(n)$ gilt* $\mathrm{Spur}(U) = 0$.

Beweis: $\mathrm{Spur}(U) = \mathrm{Spur}(U^t) = -\mathrm{Spur}(JUJ^{-1}) = -\mathrm{Spur}(U)$. **q.e.d.**

Korollar 2.14. *Lineare Hamiltonsche Systeme sind volumenerhaltend.*

Beweis: $\Phi(t,x) = \exp(Ut)x$, und $\det(\exp(Ut)) = \exp(\mathrm{Spur}(U)t) = 1$. **q.e.d.**

Der Fluss eines linearen hamiltonschen Systems hat nicht nur die Eigenschaft volumenerhaltend zu sein. Es gilt auch

$$(\exp(Ut))^t J \exp(Ut) = \sum_{n=0}^{\infty} (U^t t)^n J \exp(Ut) = J \sum_{n=0}^{\infty} (-Ut)^n \exp(Ut) = J \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Diese Gleichung besagt, dass ein linearer Hamiltonscher Fluss die schiefsymmetrische Bilinearform

$$\omega : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}, \quad (v,w) \mapsto \omega(v,w) = (v, Jw)$$

invariant lässt, d.h. $\omega(\Phi(t,v), \Phi(t,w)) = \omega(v,w)$, ähnlich wie eine orthogonale Transformation das kanonische Skalarprodukt des $\mathbb{R}^n$ invariant lässt. Den mechanischen Bewegungen entspricht damit eine besondere Art der Geometrie, die wir im nächsten Abschnitt eingehender untersuchen.

2.3.1 Symplektische Geometrie

Die den mechanischen Bewegungen zugrundeliegende symplektische Geometrie besitzt gewisse Ähnlichkeiten mit der Riemannschen Geometrie. Diese werden wir im Folgenden herausarbeiten.

Definition 2.15. *Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $n < \infty$ und $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform.*

(i) *Die Transponierte ω^t von ω ist durch $\omega^t(e_1.e_2) = \omega(e_2, e_1)$ gegeben.*

(ii) *ω heißt symmetrisch, wenn $\omega^t = \omega$, schiefsymmetrisch, wenn $\omega^t = -\omega$.*

(iii) *Durch ω wird die lineare Abbildung $V \to V'$, $\quad v \mapsto \omega(v,\cdot)$ mit $\omega(v,\cdot) : V \to \mathbb{R}$, $\quad w \mapsto \omega(v,w)$ in den Dualraum V' von V induziert.*

(iv) *ω heißt nicht degeneriert, wenn $\omega(v,\cdot) = 0$ nur für $v = 0$ gilt.*

(v) *Bezüglich einer Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von V ist die darstellende $n \times n$ Matrix J von ω durch $(J)_{ik} = \omega(b_i, b_k)$, $\quad i,k = 1,\ldots,n$ gegeben.*

(vi) *Der Rang von ω ist der (basisunabhängige) Rang der darstellenden Matrix.*

(vii) *Ist ω eine Bilinearform auf W und $A \in \mathcal{L}(V,W)$, dann heißt die Bilinearform*

$$A^*\omega : V \times V \to \mathbb{R}, \quad A^*\omega(v,w) = \omega(Av, Aw)$$

der pull-back von ω bezüglich A.

Satz 2.16. *Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

(i) *Ist ω symmetrisch mit Rang r, dann ist die darstellende Matrix von ω bezüglich einer geeigneten Basis eine Diagonalmatrix, deren diagonale Einträge entweder ± 1 sind oder 0.*

(ii) *Ist ω schiefsymmetrisch mit Rang r, so ist $r = 2m, m \in \mathbb{N}_0$ und die darstellende Matrix von ω besitzt bezüglich einer geeigneten Basis die Form*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} & 0 \\ -\mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $m \times m$-Einheitsmatrizen $\mathbb{1}$.

Beweis: Diese Aussagen werden oft in der Vorlesung Lineare Algebra bewiesen.

(i) Es gilt die Polarisationsidentität

$$\omega(v,w) = \frac{1}{4}(\omega(v+w, v+w) - \omega(v-w, v-w)).$$

Ist also $\omega \neq 0$, dann existiert ein Vektor $\hat{v}_1$ mit $c_1 = \omega(\hat{v}_1, \hat{v}_1) \neq 0$. Setze $v_1 = \hat{v}_1/\sqrt{| c_1 |}$. Wir betrachten den von v_1 aufgespannten eindimensionalen Unterraum $V_1 \subset V$ und $V_2 = \{v \in V \mid \omega(v, v_1) = 0\}$. Es gilt $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ und $V_1 + V_2 = V$, denn für $v \in V$ gilt

$$v - \omega(v_1, v_1)\omega(v, v_1)v_1 \in V_2.$$

Wir betrachten die Einschränkung von ω auf V_2 und fahren induktiv fort.

(ii) Für $\omega \neq 0$ existieren $\hat{v}_1, \hat{v}_{m+1} \in V$ mit $c_1 = \omega(\hat{v}_1, \hat{v}_{m+1}) \neq 0$. Setze $v_1 = \hat{v}_1/c_1$ und $v_{m+1} = \hat{v}_{m+1}$ Es ist

$$\omega(v_1, v_1) = \omega(v_{m+1}, v_{m+1}) = 0 \quad \text{und} \quad \omega(v_1, v_{m+1}) = -\omega(v_{m+1}, v_1) = 1.$$

Sei $V_1 = Span(v_1, v_{m+1}) \subset V$ und

$$V_2 = \{v \in V | \omega(v, w) = 0 \quad \text{für alle} \quad w \in V_1\}.$$

Es gilt $V_2 \cap V_1 = \{0\}$ und $V_2 + V_1 = V$, denn für $v \in V$ gilt

$$v + \omega(v, v_1)v_{m+1} - \omega(v, v_{m+1})v_1 \in V_2.$$

Wir behandeln induktiv die Einschränkung von ω auf V_2 etc.

Definition 2.17. • *Eine symplektische Form auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine nicht degenerierte schiefsymmetrische Bilinearform $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$.*

- *(V, ω) heißt dann symplektischer Vektorraum.*
- *Sind (V, ω) und (F, ω) symplektisch, so heißt eine lineare Abbildung $A : V \to W$ symplektisch, wenn $A^*\omega = \omega$.*

Bemerkung 2.18. (i) *Die symplektischen Abbildungen $A \in \mathcal{L}(V)$ sind diejenigen, die die symplektische Form ω erhalten, d.h. $A^*\omega = \omega$. Wegen dem vorangehenden Satz finden wir eine Basis von V, in der die darstellende Matrix von ω gleich $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist. Es sei A die darstellende Matrix von A. Dann gilt*

$$A^t J A = J.$$

(ii) *Zwar sind symplektische Abbildungen volumenerhaltend, aber i.A. volumenerhaltende Abbildungen nicht symplektisch. Betrachten wir beispielsweise einen vierdimensionalen Vektorraum V mit Bais $v_1, \ldots, v_4$ und symplektischer Bilinearform ω mit Matrix $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $A : V \to V$, $(v_1, v_2, v_3, v_4) \mapsto (-v_1, -v_2, v_3, v_4)$ volumenerhaltend, aber $\omega(Av_1), Av_3)) = -\omega(v_1, v_3)$. Läßt aber ein Endomorphismus A des $\mathbb{R}^2$ Die orientierte Fläche invariant, so ist A auch symplektisch. Denn für 2×2 Matrizen A gilt $\det(A)A^{-1} = J^t A^t J$, also $A^t J A = J$ genau dann, wenn der durch A gegebene Endomorphismus eine flächenerhaltende Abbildung ist.*

Satz 2.19. *Sei (V, ω) ein symplektischer Vektorraum, dann bildet die Menge der symplektischen Endomorphismen $A : V \to V$ unter der Komposition eine Gruppe, die symplektische Gruppe $Sp(V, \omega)$ genannt wird.*

Bemerkung 2.20. *Für einen Euklidischen Raum (V, ω) mit positiv definiter symmetrischer Bilinearform ω erhalten wir in ähnlicher Weise die orthogonale Gruppe.*

Beweis: Wir wählen eine Basis von V bezüglich der ω die darstellende Matrix $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ hat. Eine lineare Abbildung ist genau dann symplektisch, wenn die entsprechende Matrix A die Gleichung $A^t JA = J$ erfüllt. Dann ist $J^{-1}A^t J = -JA^t J$ die inverse von A, also A invertierbar. Aus der Definition folgt, dass A^{-1} symplektisch ist. Wenn A, B zwei darstellende Matrizen von symplektischen Abbildungen sind, dann folgt

$$(AB)^t JAB = B^t A^t JAB = B^t JB = J.$$

Also ist auch die Komposition zweier symplektischer Abbildungen symplektisch. Die identische Abbildung ist offenbar symplektisch. **q.e.d.**

Wegen Satz 2.16 ist $Sp(V, \omega)$ isomorph zur Gruppe

$$Sp(n) = \{A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}) \mid (Av)^t JAw = v^t(A^t JA)w = v^t Jw \forall v, w \in \mathbb{R}^{2n} \iff A^t JA = J\}.$$

wobei ω bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^{2n}$ die darstellende Matrix J besitzt (ganz analog braucht man nach Satz 2.16 nur die orthogonale Gruppe $O(n)$ bezüglich des euklidischen Skalarproduktes zu betrachten.

Beispiel 2.21. *Der Fluss $\Phi(t, x) = \exp(tU)x$ mit $U = JA$ eines linearen Hamiltonschen Systems mit Hamiltonfunktion $H(x) = \frac{1}{2}(x, Ax)$ mit $A^t = A$ ist Element der symplektischen Gruppe $Sp(n)$.*

Der Betrag der Determinante eines symplektischen Endomorphismus ist gleich 1, denn es gilt ja

$$det(A^t JA) = (detA)^2 det(J) = det(J).$$

Übungsaufgabe 2.22. *Zeige in folgenden Schritten* $\det(A) = 1$ *für alle* $A \in Sp(n)$*.*

(i) *Sei ω die symplektische Form zu der Matrix $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ auf dem $\mathbb{R}^{2n}$. Dann definiert*

$$\begin{aligned} \omega^n : (\mathbb{R}^{2n})^{2n} \to \mathbb{R}, \quad (v_1, \ldots, v_{2n}) &\mapsto \omega^n(v_1, \ldots, v_{2n}) \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_{2n}} (-1)^{|\sigma|} \omega(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}) \cdot \ldots \cdot \omega(v_{\sigma(2n-1)}, v_{\sigma(2n)}) \end{aligned}$$

eine total antisymmetrische $2n$-lineare Abbildung. Zeige, dass jede symplektische Abbildung A diese Abbildung invariant läßt, d.h. dass für alle $v_1, \ldots, v_{2n} \in \mathbb{R}^{2n}$ auch $\omega^n(Av_1, \ldots, Av_{2n}) = \omega^n(v_1, \ldots, v_{2n})$ gilt.

(ii) *Zeige, dass jede total antisymmetrische* $2n$*-lineare Abbildung auf* $\mathbb{R}^{2n}$ *proportional zu der folgenden Abbildung ist: (benutze die Eigenschaften von* $\det$*)*

$$(v_1, \ldots, v_{2n}) \mapsto \det(v_1, \ldots, v_{2n}).$$

Hier ist $(v_1, \ldots, v_{2n})$ *die Matrix, deren Spalten die Vektoren* $v_1, \ldots, v_{2n}$ *sind.*

(iii) *Folgere aus (ii), dass sich jede total antisymmetrische* $2n$*-lineare Abbildung* F *auf dem* $\mathbb{R}^{2n}$ *unter einer linearen Abbildung* A *folgendermaßen transformiert:*

$$F(Av_1, \ldots, Av_{2n}) = \det(A)F(v_1, \ldots, v_{2n}) \quad \textit{für alle} \quad v_1, \ldots, v_{2n} \in \mathbb{R}^{2n}.$$

(iv) *Zeige dass* $\det(A) = 1$ *für alle* $A \in Sp(n)$ *gilt.*

Es folgt unmittelbar, dass das Produkt der $\mathbb{C}$-Nullstellen des charakteristischen Polynoms eines symplektischen Endomorphismus 1 ist.

Satz 2.23. *Sei* $A \in Sp(n)$ *und* $\lambda \in \mathbb{C}$ *Eigenwert von* A*. Dann sind auch* $\bar{\lambda}, \lambda^{-1}$ *und* $\bar{\lambda}^{-1}$ *Eigenwerte.*

Beweis: Dass mit λ auch $\overline{\lambda}$ Eigenwert ist, folgt daraus, dass die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $\det(\lambda\mathbb{1} - A)$ reell sind. Wir beweisen, dass $1/\lambda$ Eigenwert ist, indem wir das charakteristische Polynom von A betrachten. Dann gilt für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

$$\begin{aligned}
\det(\lambda\mathbb{1} - A) &= \det(J(\lambda\mathbb{1} - A)J^{-1}) & & & \text{da} \quad & \det J = 1 \neq 0 \\
&= \det(\lambda\mathbb{1} - JAJ^{-1}) & &= \det(\lambda\mathbb{1} - (A^t)^{-1}) & \text{da} \quad & JAJ^{-1} = (A^t)^{-1} \\
&= \det(\lambda\mathbb{1} - A^{-1}) & &= \det(A^{-1}(\lambda A - \mathbb{1})) & & \\
&= \det(A^{-1}) \cdot \det(\lambda A - \mathbb{1}) & &= \det(\lambda A - \mathbb{1}) & \text{da} \quad & \det(A) = 1 \\
&= (-\lambda)^{2n} \det(\lambda^{-1}\mathbb{1} - A) & &= \lambda^{2n} \det(\lambda^{-1}\mathbb{1} - A). & &
\end{aligned}$$

Da A invertierbar ist, sind alle komplexen Eigenwerte λ von A ungleich 0 und die Aussage folgt. **q.e.d.**

Auch die algebraischen Multiplizitäten der genannten Eigenwerte sind gleich.

Satz 2.24. *Sei* $A \in Sp(n)$ *und* $\lambda \in \mathbb{C}$ *Eigenwert von* A *mit Vielfachheit* k *(d.h. eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Ordnung* k*). Dann sind auch* $\bar{\lambda}, \lambda^{-1}$ *und* $\bar{\lambda}^{-1}$ *Eigenwerte mit Vielfachheit* k*. Die Multiplizitäten etwaiger Eigenwerte* $+1$ *und* -1 *sind gerade.*

Beweis: Für $P(\lambda) = \det(\lambda\mathbb{1} - A)$ gilt $P(\lambda) = \lambda^{2n}P(\lambda^{-1})$. Einen Eigenwert $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ der Vielfachheit k können wir abspalten:

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k Q(\lambda),$$

so dass für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ folgendes gilt:

$$\lambda^{2n} P(\lambda^{-1}) = (\lambda - \lambda_0)^k Q(\lambda) = (-\lambda\lambda_0)^k (\lambda^{-1} - \lambda_0^{-1})^k Q(\lambda).$$

Da $Q(\lambda)$ ein Polynom vom Grad $2n - k$ in λ ist, ist $(\lambda_0^k \lambda^{k-2n}) \cdot Q(\lambda)$ ein Polynom in λ^{-1}. Also ist λ_0^{-1} Nullstelle der Multiplizität $l \geq k$ von $P(\lambda^{-1})$. Vertauschen der Rollen von λ_0 und λ_0^{-1} zeigt $l = k$.

Es gilt genau dann $\lambda_0 = 1/\lambda_0$, wenn $\lambda_0 \in \{\pm 1\}$. Da insgesamt $2n$ Eigenwerte existieren und die Anzahl der Eigenwerte $\neq \pm 1$ gerade ist, muss die Multiplizität der 1 zusammen mit der der -1 gerade sein. Wegen $\det A = 1$ folgt dann auch einzeln gerade Multiplizität. **q.e.d.**

Beispiel 2.25. *Die Eigenwerte von $A \in Sp(1)$ sind entweder alle gleich 1, oder gleich -1, oder beide reell oder beide vom Betrag Eins und jeweils inverse zueinander.*

Nicht alle symplektischen Matrizen sind diagonalisierbar.

Beispiel 2.26. *Die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gehört zu $Sp(1)$ ist aber nicht diagonalisierbar.*

Es gilt $Sp(n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ und damit wird die symplektische Gruppe zu einem metrischen Raum. Alle Einträge von $A^t JA - J$ definieren auf $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ ein quadratisches Polynom. Weil alle diese Matrizen aber schiefsymmetrisch sind, sind höchstens $\frac{2n(2n-1)}{2}$ Einträge davon unabhängig, z.B. die $n(2n-1)$ oberen Dreieckseinträge. Wir behaupten jetzt, dass $n(2n-1)$ von diesen Polynome an allen Stellen $A \in Sp(n)$ linear unabhängige Ableitungen besitzen. Sei $A_0 \in Sp(n)$ und $A = A_0(\mathbb{1} + tU)$ mit $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$. Dann erhalten wir $A^t JA - J = t(U^t J + JU) + t^2(U^t JU)$. Weil A_0 invertierbar ist, ist der Kern der Ableitungen aller dieser Polynome bei $A = A_0$ isomorph zu $U \in sp(n)$. Offenbar ist eine Matrix $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ genau dann in $sp(n)$, wenn JU symmetrisch ist. Deshalb hat $sp(n)$ die Dimension $(2n)^2 - \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n+1)$. Deshalb ist die Teilmenge $Sp(n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ tatsächlich die Nullstellenmenge von $n(2n-1)$ quadratischen Polynomen, deren Ableitungen auf $Sp(n)$ alle linear unabhängig sind. Wegen dem Satz der Impliziten Funktion, ist dann $Sp(n)$ eine $n(2n+1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von dem Vektorraum $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$.

Wir können Wege in $Sp(n)$, d.h. stetige Abbildungen $c : [0, 1] \to Sp(n)$ einführen. Wie verhalten sich dann die Eigenwerte von $c(t)$ bei Veränderung des Parameters t? Offensichtlich können Eigenwerte auf der reellen Achse bzw. dem Einheitskreis diese nicht verlassen, solange sie isoliert bleiben, Aus dieser Eigenschaft folgt eine Form von Stabilität Hamiltonscher Systeme unter kleinen Störungen.

2.3.2 Symplektische Algebra

Definition 2.27. *Eine lineare Abbildung $U \in \mathcal{L}(V)$ heißt infinitesimal symplektisch bezüglich einer symplektischen Bilinearform ω auf V, wenn*

$$\omega(Uv, w) + \omega(v, Uw) = 0 \quad \textit{für alle} \quad v, w \in V.$$

Die Menge dieser Abbildungen bezeichnen wir mit $sp(V, \omega)$. Wegen der Linearität von ω und U ist $sp(V, \omega)$ ein Unterraum von $\mathcal{L}(V)$.

Definition 2.28. *Eine Liealgebra ist ein Vektorraum V mit einer bilinearen antisymmetrischen Abbildung*

$$[\cdot,\cdot] : V \times V \to V, \quad (v, w) \mapsto [v, w],$$

die die Jacobiidentität erfüllt:

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0 \quad \textit{für alle} \quad a, b, c \in V.$$

Lemma 2.29. *Mit dem Kommutator $[A, B] = AB - BA$ von $A, B \in \mathcal{L}(V)$ ist $sp(V, \omega)$ eine Unter-Liealgebra von $\mathcal{L}(V)$.*

Beweis: $(\mathcal{L}(V), [\cdot,\cdot])$ ist eine Liealgebra, da der Kommutator bilinear und antisymmetrisch ist, und die Jacobi-Identität

$$\begin{aligned}
&[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = \\
&\qquad A(BC - CB) - (BC - CB)A + B(CA - AC) - (CA - AC)B + \\
&\qquad\qquad + C(AB - BA) - (AB - BA)C = 0
\end{aligned}$$

für $A, B, C \in \mathcal{L}(V)$ erfüllt. Da für $A, B \in sp(V, \omega)$ und für $v, w \in V$

$$\begin{aligned}
\omega([A, B]v, w) + \omega(v, [A, B]w) &= \omega(ABv, w) - \omega(BAv, w) + \omega(v, ABw) - \omega(v, BAw) \\
&= \omega(Bv, Aw) + \omega(Av, Bw) - \omega(Av, Bw) + \omega(Bv, Aw) = 0,
\end{aligned}$$

ist auch $[A, B] \in sp(V, \omega)$. **q.e.d.**

Analog zu der obigen Aussage über die Gruppe $Sp(V, \omega)$ erhält man:

Satz 2.30. *Sei (V, ω) ein symplektischer Vektorraum und $U \in sp(V, \omega)$.*

(i) *Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von U mit Multiplizität k, so sind auch $-\lambda, \overline{\lambda}, -\overline{\lambda}$ Eigenwerte der Multiplizität k.*

(ii) *Ist Null Eigenwert, so besitzt er gerade Multiplizität.*

Beispiel 2.31. *Die Eigenwerte von $U \in sp(1)$ sind entweder beide reell oder imaginär.*

Eng verwandt mit dem Begriff der Liealgebra ist der der Liegruppe.

Beispiel 2.32. *Das wichtigste Beispiel einer Liegruppe ist $G = GL(n, \mathbb{R})$, die Gruppe der invertierbaren Matrizen in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Hier ist G als die offene Teilmenge derjenigen Matrizen A im n^2-dimensionalen Vektorraum $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ definiert, für die $\det(A) \neq 0$. Dadurch wird G zu einer sogenannten Untermannigfaltigkeit, und Matrizenmultiplikation und Inversion sind in den Matrizeneinträgen glatt. Betrachten wir die Abbildung*

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to GL(n, \mathbb{R}), \quad U \mapsto \exp(U),$$

dann liegt das Bild der Exponentialfunktion tatsächlich in G, denn

$$\det(\exp(U)) = \exp(\mathrm{Spur}(U)) > 0.$$

Da $g \in G$ mit $\det(g) < 0$ existieren, ist $\exp$ nicht surjektiv ist. Für $A \in G$ mit $\|A - \mathbb{1}\| < 1$ ist $\exp$ invertierbar, denn die Potenzreihe von $\ln$ konvergiert:

$$\ln(A) = \ln(\mathbb{1} + (A - \mathbb{1})) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathbb{1} - A)^k}{k}.$$

Die Ableitung von $\exp$ ist bei $g = \mathbb{1}$ bijektiv. Deshalb ist wegen dem Satz der inversen Funktion die Einschränkung von $\exp$ auf eine Umgebung von $0 \in \mathcal{L}(V)$ ein Homöomorphismus auf eine Umgebung von $\mathbb{1} \in GL(V)$. Die Liealgebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ bildet mit dem Kommutator eine Liealgebra. Der Kommutator misst den Mangel an Kommutativität in der Gruppenmultiplikation, denn für $U_1, U_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\exp(\epsilon U_1)\exp(\epsilon U_2)\exp(-\epsilon U_1)\exp(-\epsilon U_2) = \mathbb{1} + \epsilon^2[U_1, U_2] + \mathrm{O}(\epsilon^3).$$

Man nennt daher $gl(n, \mathbb{R}) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ die Liealgebra von $GL(n, \mathbb{R})$.

Analog können wir die Exponentialabbildung

$$sp(V, \omega) \to Sp(V, \omega), \quad U \mapsto \exp(U)$$

von der symplektischen Liealgebra in die symplektischen Liegruppen betrachten. Für $U \in sp(V, \omega)$ ist $\exp(U) \in Sp(V, \omega)$, denn aus von $\omega(Uv, w) = \omega(v, -Uv)$ folgt $\omega(\exp(U)v, w) = \omega(v, \exp(-U)w)$ und damit auch

$$\omega(\exp(U)v, \exp(U)w) = \omega(v, \exp(-U)\exp(U)w) = \omega(v, w).$$

Wir sehen, dass die Eigenwerte λ mit $Re(\lambda) > 0$ von U zu Eigenwerten $\exp(\lambda)$ mit Betrag > 1 von $\exp(U)$ werden. Erinnern wir uns nun an die Tatsache, dass für die quadratische Hamiltonfunktion $H(x) = \frac{1}{2}(x, Ax)$ die Differentialgleichung $\dot{x} = X(H)(x) = JAx$ die Lösung $\Phi_t(x) = \exp(U)x$ mit $U = JAt \in sp(n)$ besitzt, dann wird klar, dass der Fixpunkt 0 höchstens dann Liapunovstabil sein kann, wenn alle Eigenwerte von JA rein imaginär sind.

2.4 Variationsrechnung

Für das Folgende sind einige Kenntnisse aus der Variationsrechnung erforderlich. Die Variationsrechnung befaßt sich mit der Suche nach Funktionen, die kritische Punkte eines Funktionals sind, d.h. einer reellen Funktion auf einem undendlichdimensionalen Funktionenraum. In unseren Fall nennen wir diesen Raum Kurvenraum. Solche Funktionen nennt man Funktionale. Das Standardbeispiel eines Funktionals ist die Kurvenlänge in der euklidischen Ebene. Eine parametrisierte Kurve $\gamma = \{t, x : x = x(t), t_0 \leq t \leq t_1\}$ ist dabei eine Abbildung $t \mapsto x(t)$ von einem Intervall nach $\mathbb{R}^n$:

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt \quad \text{für} \quad \gamma : \quad [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto x(t).$$

Im allgemeinen versteht man unter einem Funktional eine Abbildung eines Raumes von Kurven nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Im Fall eines differenzierbaren Funktionals Φ ist das Differential $\Phi'(\gamma)$ von Φ an der Stelle γ eindeutig bestimmt als ein Element des Dualraumes des entsprechenden Funktionenraumes:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{|\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) - \Phi'(\gamma)(h)|}{\|h\|} \to 0.$$

Das Differential des Funktionals nennt man auch Variation des Funktionals und h die Variation der Kurve.

Beispiel 2.33. *Es sei $\gamma = \{t, x : x = x(t), t_0 \leq t \leq t_1\}$ eine Kurve in der t, x-Ebene, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ und $L = L(a, b, c)$ eine differenzierbare Funktion dreier Variablen. Wir definieren ein Funktional Φ durch*

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt.$$

Im Spezialfall $L = \sqrt{1 + b^2}$ ergibt sich die Bogenlänge γ.

Satz 2.34. *Wenn $(a, b, c) \to L(a, b, c)$ zweimal stetig differenzierbar ist, dann ist das Funktional*

$$\Phi : \quad \gamma \to \Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt$$

differenzierbar, und seine Ableitung wird durch folgende Formel gegeben:

$$\Phi'(\gamma)(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \bigg|_{t_0}^{t_1}.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}\Phi(\gamma+h)-\Phi(\gamma) &= \int\limits_{t_0}^{t_1}\Big(L(x+h,\dot{x}+\dot{h},t)-L(x,\dot{x},t)\Big)\,dt \\ &= \int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial x}h+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{h}\right)dt+\mathrm{O}(h^2)=\Phi'(\gamma)(h)+\mathrm{O}(h^2)\end{aligned}$$

mit $\Phi'(\gamma)(h)=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial x}h+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{h}\right)dt$. Eine partielle Integration ergibt

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{h}dt=-\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)hdt+\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}h\right|_{t_0}^{t_2}.$$

q.e.d.

Definition 2.35. *Unter einem kritischen Punkt eines differenzierbaren Funktionals $\Phi(\gamma)$ versteht man die Kurve γ, für die $\Phi'(\gamma)(h)=0$ für beliebiges h ist; genauso, wie ein kritischer Punkt einer Funktion eine Nullstelle des Differentials ist.*

Satz 2.36. *Damit die Kurve $\gamma=\{t,x:x=x(t),t_0\le t\le t_1\}$ ein kritischer Punkt des Funktionals $\Phi(\gamma)=\int_{t_0}^{t_1}L(x.\dot{x},t)dt$ im Raum der Kurven wird, die durch die Punkte $x(t_0)=x_0$ und $x(t_1)=x_1$ verlaufen, ist es notwendig und hinreichend, dass*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

längs der Kurve $x(t)$ gilt.

Lemma 2.37. *Wenn eine stetige Funktion $f(t)$ auf $t\in[t_0,t_1]$ für jede glatte Funktion $h(t)$ mit $h(t_0)=h(t_1)=0$ die Beziehung $\int_{t_0}^{t_1}f(t)h(t)dt=0$ erfüllt, dann ist $f=0$.*

Beweis des Lemmas. Es sei $f(t^*)>0, t_0<t^*<t_1$. Infolge der Stetigkeit ist $f(t)>c$ in einer gewissen Umgebung des Punktes t^*:

$$t_0<t^*-\epsilon<t<t^*+\epsilon<t_1.$$

Ferner sei $h(t)=0$ außerhalb der Umgebung, $h(t)\ge 0$ innerhalb der Umgebung und $h(t)=1$ auf der halben Umgebung (d.h., $t^*-\frac{\epsilon}{2}<t<t^*+\frac{\epsilon}{2}$). Dann ist offensichtlich

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}f(t)h(t)dt=\int\limits_{t^*-\epsilon}^{t^*+\epsilon}f(t)h(t)dt\ge\int\limits_{t^*-\frac{\epsilon}{2}}^{t^*+\frac{\epsilon}{2}}f(t)h(t)dt\ge\epsilon c>0.$$

Der so erhaltene Widerspruch zeigt, dass $f(t^*) = 0$ für alle $t_0 < t^* < t_1$ ist. **q.e.d.**
Beweis des Satzes. Aus dem vorangehenden Satz ergibt sich

$$\Phi'(\gamma)(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Der zweite Summand ist gleich 0 wegen $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Wenn γ ein kritischer Punkt ist, gilt $\Phi(\gamma)(h) = 0$ für alle h mit $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Deshalb ist für solche stetigen h

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt = 0 \quad \text{mit} \quad f(t) = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}.$$

Nach dem Lemma ist $f = 0$. Umgekehrt folgt aus $f = 0$ offenbar $\Phi'(\gamma) = 0$. **q.e.d.**

Beispiel 2.38. *Man überprüfe, dass ein kritischer Punkt der Bogenlänge eine Gerade ist. Es gilt nämlich* $L = \sqrt{1 + \dot{x}^2}$*, und damit* $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ *und* $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}$*. Dann folgt aus*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \right) = 0 \quad \textit{auch} \quad \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = c \quad \textit{und} \quad \dot{x} = c_1 \quad \textit{bzw.} \quad x = c_1 t + c_2.$$

Definition 2.39. *Die Gleichung*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

heißt Euler-Lagrangesche Gleichung des Funktionals

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)dt.$$

Sei x ein Vektor im n-dimensionalen Raum, $\gamma = \{t, x : x = x(t), t_0 \leq t \leq t_1\}$ eine Kurve im $(n + 1)$-dimensionalen Raum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion von $2n + 1$ Argumenten. Analog zum Vorhergehenden läßt sich der folgende Satz beweisen:

Satz 2.40. *Damit die Kurve* γ *kritischer Punkt des Funktionals* $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)dt$ *im Raum der Kurven* γ *im* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *von der Form* $t \mapsto (t, x(t))$ *ist, welche die beiden gegebenen Punkte* $(t_0, x_0), (t_1, x_1)$ *verbinden, ist es notwendig und hinreichend, dass die Euler-Lagrangesche Gleichung*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

längs der Kurve γ *erfüllt wird.* **q.e.d.**

Das ist ein System von n Gleichungen zweiter Ordnung, und die Lösung hängt von $2n$ willkürlichen Konstanten ab. Sie gestatten die $2n$ Bedingungen $x(t_0) = x_0$ und $x(t_1) = x_1$ zu erfüllen.

Wichtige Bemerkung 2.41. *Die Eigenschaft einer Kurve γ, kritischer Punkt eines Funktionals zu sein, hängt nicht von der Wahl des Koordinatensystems ab.*

Zum Beispiel wir ein und dasselbe Funktional - die Bogenlänge einer Kurve - in kartesischen Koordinaten und in Polarkoordinaten durch verschiedene Formeln

$$\Phi_{\text{kar}} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 dt} \quad \text{und} \quad \Phi_{\text{pol}} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 dt}$$

gegeben. Aus der Beziehung $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ folgt nämlich

$$\begin{aligned}(\dot{x}, \dot{y}) &= (\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)\\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).\end{aligned}$$

Die kritischen Punkte sind die gleichen - es sind Geraden in der Ebene. Die Gleichungen der Geraden in kartesischen Koordinaten und in Polarkoordinaten ergeben sich durch verschiedene Funktionen $(x(t), y(t))$ und $(r(t), \varphi(t))$. Beide erfüllen die Euler-Lagrangesche Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

nur ist im ersten Fall

$$x_{\text{kar}} = (x, y) \quad \text{und} \quad L_{\text{kar}} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

und im zweiten

$$x_{\text{pol}} = (r, \varphi), \quad L_{\text{pol}} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}.$$

Somit können wir leicht die Differentialgleichung der Gesamtheit aller Geraden in beliebigen Koordinaten aufschreiben.

2.5 Lagrangesche Gleichungen

Hier wird das Variationsprinzip hergeleitet, dessen kritischen Punkte die Lösung der Newtonschen Gleichungen für die Bewegung eines Systems von Teilchen mit den Koordinaten q_i im Kraftfeld eines Potentials U ist. Wir vergleichen die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} m\dot{q}_i = F = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

mit der Euler-Lagrangeschen Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

Satz 2.42. *Die Lösungen der Bewegungsgleichung des mechanischen Systems von Teilchen im Kraftfeld eines Potentials U sind kritische Punkte des Funktionals $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} Ldt$, wobei $L = T - U$ die Differenz von kinetischer und potentieller Energie ist.*

Beweis: Mit $U = U(q)$ und $T = \sum m_i \frac{\dot{q}_i^2}{2}$ haben wir

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i.$$ **q.e.d.**

Folgerung 2.43. *Es eien $q_1, \ldots, q_{3n}$ beliebige Koordinaten im Konfigurationsraum eines Systems von n Massenpunkten. Dann wird die Änderung von q in der Zeit durch die Euler-Lagrangeschen Gleichungen beschrieben:*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \textit{ mit } L = T - U.$$

Beweis. Nach dem vorhergehenden Satz ist die Bewegung ein kritischer Punkt des Funktionals $\int Ldt$. Also sind in einem beliebigen Koordinatensystem die in diesem System aufgeschriebenen Euler-Lagrangeschen Gleichungen erfüllt. **q.e.d.**

Definition 2.44. *In der Mechanik sind die folgenden Bezeichnungen gebräuchlich:*

- $L(q, \dot{q}, t) = T - U$ *ist die Lagrange-Funktion*
- q_i *sind die generalisierten Koordinaten*
- $\dot{q}_i$ *die generalisierten Geschwindigkeiten*
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ *die kanonisch konjugierten (generalisierten) Impulse*
- $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ *die verallgemeinerten Kräfte*
- $\int L(q, \dot{q}, t)dt$ *ist die Wirkung*
- $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$ *sind die Lagrangeschen Gleichungen.*

Der obige Satz wird das Hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung genannt, weil die Bewegung $q(t)$ in einigen Fällen nicht nur extremal ist, sondern auch den kleinsten Wert des Funktionals der Wirkung $\int L dt$ liefert.

Beispiel 2.45. *Für einen freien Massenpunkt im $\mathbb{R}^3$ ist*

$$L = T = \frac{m\dot{q}^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2).$$

Hier sind die generalisierten Geschwindigkeiten die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors und die kanonisch konjugierten Impulse $p_i = m\dot{q}_i$ die Komponenten des Impulsvektors, und die Lagrangeschen Gleichungen stimmen mit den Newtonschen $\frac{dp}{dt} = 0$ überein. Die kritischen Punkte sind Geraden. Aus dem Hamiltonschen Prinzip folgt, dass die Geraden nicht nur die Kürzesten sind (d.h. die kritischen Punkte der Bogenlänge $\int \sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2} dt$), sondern auch die kritischen Punkte der Wirkung

$$\int_{t_0}^{t_1} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) dt.$$

Übungsaufgabe 2.46. *Man beweise, dass dieser kritische Punkt ein Minimum ist.*

Beispiel 2.47. *Wir betrachten die Bewegung im Zentralfeld in der Ebene in Polarkoordinaten $q_1 = r, q_2 = \varphi$. Aus der Beziehung $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ erhalten wir*

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)$$

und damit für die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

und die Lagrange-Funktion

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) \quad mit \quad U = U(q_1).$$

Die kanonisch konjugierten Impulse sind $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, d.h.

$$p_1 = m\dot{r} \quad und \quad p_2 = mr^2\dot{\varphi}.$$

Wir können p_2 als z-Komponente M_z des Drehimpulses interpretieren:

$$\begin{aligned} M &= m(x, y, 0) \wedge (\dot{x}, \dot{y}, 0) = (0, 0, x\dot{y} - y\dot{x}) \\ &= (0, 0, mr\cos\varphi(\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi) - mr\sin\varphi(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)) = (0, 0, mr^2\dot{\varphi}). \end{aligned}$$

Die Lagrangesche Gleichung $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ *nimmt folgende Form an:*

$$\dot{p}_1 = m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \qquad \dot{p}_2 = 2mr\dot{r} + mr^2\ddot{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial q_2} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0.$$

Deshalb lautet die zweite Lagrangesche Gleichung $\dot{p}_2 = 0$ *also* p_2 *konstant. Das ist der Drehimpulserhaltungssatz. Im allgemeinen Fall, d.h. wenn das Feld nicht zentral, also* $U = U(r, \varphi)$ *ist, folgt* $\dot{p}_2 = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}$. *Wegen*

$$\begin{aligned} dU &= \frac{\partial U}{\partial r}dr + \frac{\partial U}{\partial \varphi}d\varphi = -F_x dx - F_y dy \\ &= -(F_x \cos\varphi + F_y \sin\varphi)dr + r(F_x \sin\varphi - F_y \cos\varphi)d\varphi \end{aligned}$$

gilt dann auch

$$(x, y, 0) \wedge (F_x, F_y, 0) = (0, 0, xF_y - yF_x) = (0, 0, -r(F_x \sin\varphi - F_y \cos\varphi) = \left(0, 0, -\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right).$$

Diese Gleichung läßt sich also in

$$\frac{d}{dt}M = \frac{d}{dt}mx \wedge \dot{x} = m\dot{x} \wedge \dot{x} + mx \wedge \ddot{x} = x \wedge F = N$$

umformen. Die zeitliche Änderung des Drehimpulses bezüglich der z-Achse ist gleich dem Drehmoment der Kraft F bezüglich der z-Achse.

Das betrachtete Beispiel legt eine Verallgemeinerung des Drehimpulserhaltungssatzes nahe.

Definition 2.48. *Die Koordinate* q_i, *heißt zyklisch, wenn die Lagrange-Funktion von ihr nicht abhängt:* $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.

Satz 2.49. *Der zu einer zyklischen Koordinate* q_i *gehörende kanonisch konjugierte Impuls* $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ *bleibt erhalten.*

Beweis: Auf Grund der Lagrangeschen Gleichung gilt $\quad \dfrac{dp_i}{dt} = \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad$ **q.e.d.**

2.6 Legendre-Transformation

Als nächstes wollten wir die Lagrangesche Mechanik in die Hamiltonsche Mechanik transformieren. Durch diese Transformation werden alle Funktionen nicht mehr als

Funktionen von q und $\dot{q}$ sondern als Funktionen von q und den konjugierten Impulsen $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ aufgefasst. Diese zweiten Variablen sind aber nur implizit gegeben. Die Transformation, die das leistet heißt Legendre-Transformation.

Die Legendre Transformation ist ein mathematisches Verfahren, welches auf einem Übergang von Funktionen eines linearen Raumes zu Funktionen in einem dualen Raum beruht. Die Legendre-Transformation ist verwandt mit der projektiven Dualität und den Tangentialkoordinaten der algebraischen Geometrie oder mit der Konstruktion des dualen Banachraumes in der Analysis. Sie kommt in der Physik (z.B. bei der Definition thermodynamischer Größen) oft vor.

Definition 2.50. *Es sei $y = f(x)$ eine konvexe stetige Funktion auf einem reellen Intervall. Für alle $p \in \mathbb{R}$ sei $F(p,x) = px - f(x)$. Für alle $p \in \mathbb{R}$, für die die Funktion $x \mapsto F(p,x)$ in Abhängigkeit von x auf dem Definitionsbereich von f ein Maximum annimmt, sei $x(p)$ die Koordinate eines solchen Maximums und g definiert durch*

$$g(p) = F(p, x(p)) = px(p) - f(x(p)).$$

Wenn f streng konvex ist, dann ist $x(p)$, wenn es existiert auch eindeutig.

Übungsaufgabe 2.51. *Man zeige, daß des Definitionsbereich von g ein Punkt, eine beschränktes Intervall oder ein einseitig unbeschränktes Intervall oder ganz $\mathbb{R}$ sein kann, wenn die Funktion f auf der ganzen x-Achse definiert ist. Man zeige ferner: Ist die Funktion f in einem abgeschlossenen Intervall definiert, so ist sie auf der ganzen p-Achse definiert.*

Beispiel 2.52. **(i)** *Es sei $f(x) = x^2$. Dann ist*

$$F(p,x) = px - x^2 \quad \textit{und} \quad x(p) = \frac{p}{2} \quad \textit{und} \quad g(p) = \frac{1}{4}p^2.$$

(ii) *Es sei $f(x) = \frac{mx^2}{2}$. Dann ist*

$$F(p,x) = px - \frac{mx^2}{2} = -\frac{m}{2}\left(x - \frac{p}{m}\right)^2 + \frac{p^2}{m}.$$

Also gilt $g(p) = \frac{p^2}{2m}$.

(iii) *Es sei $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ mit $1 < \alpha$. Dann hat für alle $p \in \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto F(p,x) = px - f(x)$ eine monoton fallende Ableitung $x \mapsto p - x^{\alpha-1}$ und bei $x = p^{\frac{1}{\alpha-1}}$ ein eindeutiges Maximum. Also folgt*

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto g(p) = p^{1+\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha} = \frac{\alpha-1}{\alpha}p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{p^\beta}{\beta} \quad \textit{mit} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

(iv) *Es sei $f(x)$ ein konvexes Polygon. Dann ist auch g ein konvexes Polygon, wobei den Ecken von $f(x)$ die Kanten von $g(p)$ entsprechen und den Kanten von $f(x)$ die Ecken von $g(p)$. Beispielsweise geht ein Winkel in eine Strecke über.*

Wir nehmen an, daß die Funktion f differenzierbar ist. Dann muss f' monoton wachsend sein. Es ist leicht zu prüfen, daß die Legendre-Transformation eine konvexe Funktion in eine konvexe überführt. Somit können wir sie zweimal anwenden.

Lemma 2.53. *Sie f eine differenzierbare konvexe Funktion auf einem offenen Intervall I. Dann verläuft der Graph von f oberhalb aller Tangenten an den Graphen von f.*

Beweis: Weil f konvex ist, ist f' monoton wachsend. Dann folgt für alle $x_0, x \in I$:

$$f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) = \int_{x_0}^{x} (f'(t) - f'(x_0))dt \begin{cases} \geq 0 & \text{für} \quad x \geq x_0 \\ \geq 0 & \text{für} \quad x \leq x_0. \end{cases}$$

Offenbar ist $x \mapsto f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Deshalb veräuft die Tangente an alle Punkte unterhalb des Graphen.**q.e.d.**

Satz 2.54. *Die Legendre-Transformation ist für differenzierbare konvexe Funktionen involutiv, d.h. ihr Quadrat ist gleich der identischen Transformation: Wenn f bei der Legendre-Transformation in g übergeht, liefert die Legendre-Transformation von g wieder f.*

Beweis: Um die Legendre-Transformierte der Funktion g von der Variablen p zu bestimmen, müssen wir definitionsgemäß eine neue unabhängige Variable betrachten (die wir mit x bezeichnen), die Funktion

$$G(x, p) = xp - g(p)$$

aufstellen und den Punkt $p(x)$ finden, in welchem G ein Maximum hat:

$$G(x, p) \leq G(x, p(x)) \quad \text{für alle} \quad p.$$

Dann wird durch die Legendre-Transformation von $g(p)$ eine Funktion von x gegeben, die gleich $G(x, p(x))$ ist. Wir beweisen, daß $G(x, p(x)) = f(x)$ ist. Dazu bemerken wir, daß für festes p im Definitionsbereich von g die Abbildung $x \mapsto G(x, p) = xp - g(p)$ eine einfache geometrische Bedeutung hat: Es ist die Tangente an den Graphen von f in dem Punkt $(x(p), f(x(p)))$, welche die Steigung p hat. Tatsächlich ist bei festem p die Funktion $G(x, p)$ eine lineare Funktion von x, wobei $\frac{\partial G}{\partial x} = p$ ist, und bei $x = x(p)$ haben wir $G(x, p) = xp - g(p) = xp - xp + f(x(p)) = f(x(p))$ gemäß der Definition von $g(p)$. Weil f differenzierbar ist und $x(p)$ ein kritischer Punkt von $x \mapsto px - f(x)$ muss auch $f'(x(p)) = p$ gelten.

Wir halten nun den Punkt $x = x_0$ fest und verändern p. Dann sind die Werte $G(x,p)$ die Funktionswerte der Schnittpunkte der Tangenten an den Graphen von f mit der Geraden $x = x_0$. Aus dem vorangehenden Lemma folgt, dass all diese Tangenten unterhalb des Graphen von f verlaufen und dass deshalb das Maximum $G(x,p)$ bei festem $x(p_0)$ gleich $f(x)$ ist und für $p = p(x_0) = f'(x_0)$ angenommen wird. **q.e.d.**

Folgerung 2.55. *Es sei eine Schar von Geraden $y = px - g(p)$ gegeben. Dann hat die Einhüllende dieser Schar die Gleichung $y = f(x)$, wobei f die Legendre-Transformation der Funktion g ist.*

Definition 2.56. *Zwei Funktionen f und g, die Legendre-Transformierte voneinander sind, nennt man nach Young zueinander dual.*

Nach Definition der Legendre-Transformation gilt für alle p auch $F(x,p) = px - f(x) \leq g(p)$ für beliebige x. Dann gilt diese Ungleichung für beliebige x und p. Hieraus folgt die Youngsche Ungleichung

$$px \leq f(x) + g(p).$$

2.6.1 Der Fall mehrerer Variabler

Es sei jetzt $x \mapsto f(x)$ eine konvexe Funktion auf einer konvexen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; d.h. der für je zwei Punkte $x, y \in \Omega$ liegt der Graph von f unter der Verbindungsstrecke zwischen den beiden Punkten:

$$f(x + t(y-x) \leq f(x) + t(f(y) - f(x) \quad \text{für alle} \quad t \in [0,1].$$

Wenn f zweimal differenzierbar ist, sind die zweiten Richtungsableitungen in alle Richtungen nicht negativ. Deshalb ist die Hessische, also die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen von f, eine nicht negative Matrix, d.h. für alle $dx \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \geq 0.$$

Dann wird die Legendre Transformation $p \mapsto g(p)$ der Funktion f definiert als

$$g(p) = F(p, x(p)) = max\{F(p,x) \mid x \in \Omega\} \quad \text{mit} \quad F(p,x) = p \cdot x - f(x).$$

Der Definitionsbereich besteht aus allen p, für die das Maximum in der obigen Definition existiert. Wenn f differenzierbar ist, dann gilt $p = \frac{\partial f}{\partial x}$. Alle vorangegangenen Betrachtungen, einschließlich der Youngschen Ungleichung, lassen sich ohne Änderungen auf diesen Fall übertragen.

Übungsaufgabe 2.57. **(i)** *Weil für jede konvexe Funktion f auf einer konvexen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die Einschränkung auf die Schnittmenge von Ω mit einer beliebigen Geraden im $\mathbb{R}^n$ eine konvexe Funktion ist, verläuft für jede differenzierbare konvexe Funktion auf einer offenen konvexen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die Tangentialebene an jeden Punkt unterhalb des Graphen von f.*

(ii) *Zeige, dass für eine differenzierbare konvexe Funktion f auf einer offenen konvexen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ für $x_0 \in \Omega$ die Menge $\{x \in \Omega \mid f'(x) = f'(x_0)\}$ konvex ist.*

(iii) *Es sei $f : V \to \mathbb{R}$ eine konvexe differenzierbare Funktion auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V, so dass die Abbildung $f' : V \to V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ in den Dualraum von V surjektiv ist. Man zeige, dass für alle p das folgende Maximum existiert und eine Funktion $g : V' \to \mathbb{R}$ definiert:*

$$g(p) = F(p, x(p)) = max\{F(p, x) \mid x \in \Omega\} \quad mit \quad F(p, x) = \langle p, x\rangle - f(x).$$

(iv) *Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form $x \mapsto f(x) = \sum f_{ij}x_jx_j$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Man zeige, dass ihre Legendre-Transformierte ebenfalls eine quadratische Form $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $p \mapsto g(p) = \sum g_{ij}p_ip_j$ ist, wobei die Werte beider Formen in den entsprechenden Punkten übereinstimmen. D.h. es gilt*

$$f(x(p)) = g(p) \quad für\ alle \quad p \in \mathbb{R}^n \quad und \quad g(p(x)) = f(x) \quad für\ alle \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

2.7 Hamiltonsche Gleichungen

Durch die Legendre Transformation geht das System der Lagrangschen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in ein besonderes symmetrisches System von $2n$ Gleichungen erster Ordnung über, in das System der Hamiltonschen Gleichungen (oder der kanonischen Gleichungen).

Wir betrachten das System der Lagrangeschen Gleichungen

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad \text{mit} \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

zu einer gegebenen Lagrange-Funktion $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche wir bezüglich des zweiten Arguments $\dot{q}$ als konvex annehmen.

Satz 2.58. *Die Lagrangschen Gleichungen sind zu folgendem System von $2n$ Gleichungen erster Ordnung äquivalent, die Hamiltonsche Gleichungen genannt werde:*

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad und \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Hierbei ist $H(q,p,t) = \max\{p\dot{q} - L(q,\dot{q},t) \mid \dot{q} \in \mathbb{R}^n\}$ für festes q und t die Legendre-Transformierte der Lagrange Funktion, als Funktion von $\dot{q}$.

Beweis: Auf Grund der Definition ist für festes q und t die Legendre-Transformierte von $L(q,\dot{q},t)$ bezüglich $\dot{q}$ eine Funktion $H(p) = p\dot{q} - L(\dot{q})$, in der $\dot{q}$ durch p mittels der Formel $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ ausgedrückt ist und die noch von den Parametern q, t abhängt. Diese Funktion H nennt man Hamilton-Funktion. Ihr totales Differential

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial t}dt,$$

ist gleich dem totalen Differential von $p\dot{q} - L$ für $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$:

$$dH = \dot{q}dp - \frac{\partial L}{\partial q}dq - \frac{\partial L}{\partial t}dt.$$

Beide Ausdrücke für dH müssen übereinstimmen. Deshalb gilt

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Unter Verwendung der Lagrangschen Gleichungen $\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$ erhalten wir die Hamiltonschen Gleichungen. Wenn also $q(t)$ den Lagrangschen Gleichungen genügt, so erfüllt $(p(t), q(t))$ die Hamiltonschen Gleichungen. Umgekehrt folgt aus $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ und den Hamiltonschen Gleichungen auch die Lagrangeschen Gleichungen. Somit sind das Lagrangsche und das Hamiltonsche System äquivalent. **q.e.d.**

Bemerkung 2.59. *Der so bewiesene Satz bezieht sich auf alle Variationsprobleme und nicht nur auf die Lagrangeschen Gleichungen der Mechanik.*

Beispiel 2.60. *Im Beispiel der Newtonschen Gleichungen hat die Lagrange-Funktion die Form $L = T - U$, wobei die kinetische Energie T eine quadratische Form in $\dot{q}$ ist*

$$T = \frac{1}{2}\sum a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \quad \textit{mit} \quad a_{ij}(q,t),$$

und die potentielle Energie nur von q abhängt $U = U(q)$.

Satz 2.61. *Unter diesen Voraussetzungen ist die Hamilton-Funktion H die Gesamtenergie $H = T + U$.*

Der Beweis basiert auf dem folgenden Lemma über die Legendre-Transformierte einer quadratischen Form:

Lemma 2.62. *Die Werte einer quadratischen Form $f(x)$ und ihrer Legendre- Transformierten $g(p)$ stimmen in den entsprechenden Punkten überein: $f(x) = g(p)$.*

Beispiel 2.63. *Für die Form $f(x) = \frac{mx^2}{2}$ ist $p = mx$ und $g(p) = \frac{p^2}{2m} = \frac{mx^2}{2} = f(x)$.*

Beweis des Lemmas: Nach dem Eulerschen Satz über homogene Funktionen zweiten Grades ist

$$f'(x)(x) = 2f(x).$$

Folglich ist $g(p(x)) = p \cdot x - f(x) = f'(x)(x) - f(x) = 2f(x) - f(x) = f(x)$. **q.e.d.**
Beweis des Satzes: Für festes q und t gilt wegen dem Lemma

$$H = p \cdot \dot{q} - L(\dot{q}) = 2T(\dot{q}) - (T(\dot{q}) - U) = T(\dot{q}) + U. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Beispiel 2.64. *Für die eindimensionale Bewegung gilt*

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q}.$$

In diesem Fall ist $T = \frac{m}{2}\dot{q}^2$, $U = U(q)$, $p = \dot{q}$, $H = \frac{p^2}{2m} + U(q)$, und die Hamiltonschen Gleichungen erhalten die Form

$$m\dot{q} = p \qquad\qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Dieses Beispiel ermöglicht es, sich schnell zu erinnern, in welcher der beiden Hamiltonschen Gleichungen sich das Minuszeichen befindet.

Aus dem Satz über die Äquivalenz der Bewegungsgleichungen mit dem Hamiltonschen System ergibt sich eine Reihe wichtiger Folgerungen. Zum Beispiel nimmt der Energieerhaltungssatz eine einfache Gestalt an:

Korollar 2.65. *Offensichtlich gilt $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$. Insbesondere ist für ein System dessen Hamiltonfunktion nicht explizit von der Zeit abhängt ($\frac{\partial H}{\partial t} = 0$) die Hamiltonfunktion eine Erhaltungsgröße: $H(p(t), q(t)) = const.$*

Beweis: Betrachten wir die Änderung von H entlang der Trajektorie $H(p(t), q(t), t)$, dann ist infolge der Hamiltonschen Gleichungen

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Beim Betrachten von Zentralfeldern stellen wir fest, dass sich das Problem durch die Einführung von Polarkoordinaten auf ein eindimensionales zurückführen läßt. Es zeigt sich nun, dass jede Symmetrie eines Problems es zuläßt, ein Koordinatensystem q so auszuwählen, dass die Hamilton-Funktion von gewissen Koordinaten nicht abhängt. Damit ist es also möglich, gewisse erste Integrale zu finden, die ein solches Problem in ein Problem mit einer geringeren Anzahl von Koordinaten überführen.

Definition 2.66. *Wenn die Hamilton-Funktion $H(p_1, p_2, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n; t)$ nicht von der Koordinate q_i abhängt, also $\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$ gilt, nennt man sie zyklisch*

Dieser Name stammt von dem Spezialfall der Winkelkoordinate φ im Zentralfeld. Offenbar ist die Koordinate q_1 dann und nur dann zyklisch, wenn sie in der Lagrange-Funktion nicht auftritt $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$. Aus der Hamiltonschen Form der Bewegungsgleichung ergibt sich

Korollar 2.67. *Es sei q_1 eine zyklische Koordinate. Dann ist p_1 ein Integral der Bewegung. Die Änderung der übrigen Koordinaten mit der Zeit ist dabei dieselbe wie in einem System mit $n-1$ unabhängigen Koordinaten $q_2, \ldots, q_n$ mit der Hamilton-Funktion*

$$H(c, p_2, \ldots, p_n; q_2, \ldots, q_n; t),$$

die noch vom Parameter $c = p_1$ abhängt.

Beweis: Setzen wir $p' = (p_2, \ldots, p_n)$ und $q' = (q_2, \ldots, q_n)$, dann bekommt das Hamiltonsche System die Form

$$\frac{d}{dt} q' = \frac{\partial H}{\partial p'} \qquad \frac{d}{dt} q_1 = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \frac{d}{dt} p' = -\frac{\partial H}{\partial q'} \qquad \frac{d}{dt} p_1 = 0.$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass $p_1 = const$ ist. Deshalb geht die Größe p_1 im Gleichungssystem für p' und q' nur als Parameter in die Hamiltonfunktion ein. Nach dem das System von $2n-2$ Gleichungen gelöst ist, nimmt die Gleichung für q_1 die Gestalt

$$\frac{d}{dt} q_1 = \frac{\partial H(p_1, p'(t), q'(t), t)}{\partial p_1}$$

an und läßt sich leicht integrieren. **q.e.d.**

Korollar 2.68. *Jedes System mit zwei Freiheitsgraden ($n = 2$), das eine zyklische Koordinate hat, ist integrierbar.*

Beweis: In diesem Fall ist nämlich das System für p', q' eindimensional und kann unverzüglich mithilfe des Integrals $H(p', q') = c$ integriert werden. **q.e.d.**

2.8 Ein Satz von Liouville

Wir werden sehen, dass der Fluss des eines Hamiltonschen Vektorfeldes infolge der Hamiltonschen Gleichungen das Volumen im Phasenraum unverändert läßt. Hieraus folgt z.B., dass das Hamiltonsche System nicht asymptotisch stabil sein kann. Wir betrachten der Einfachheit halber den Fall, dass die Hamilton- Funktion die Zeit nicht explizit enthält $H = H(q, p)$.

Definition 2.69. *Der $2n$-dimensionale Raum mit den Koordinaten $p_1, \dots, p_n$ und $q_1, \dots, q_n$ wird Phasenraum genannt.*

Beispiel 2.70. *Im Fall $n = 1$ ist dies die Phasenebene mit dem Systems $\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$.*

Ebenso wie in diesem einfachsten Beispiel ergeben die rechten Seiten der Hamiltonschen Gleichungen ein Vektorfeld: In jedem Punkt (q, p) des Phasenraumes gibt es einen $2n$-dimensionalen Vektor $(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p})$. Wir setzen voraus, dass sich jede Lösung der Hamiltonschen Gleichungen auf die gesamte Zeitachse fortsetzen läßt. Dafür ist es wegen Lemma 1.40 hinreichend, dass die Niveaumengen der Funktion H kompakt sind.

Definition 2.71. *Der Phasenfluß ist die einparametrige Gruppe der Transformationen des Phasenraumes*

$$\Phi(t, \cdot) : (p(0), q(0)) \mapsto (p(t), q(t)),$$

wobei $p(t), q(t)$ die Lösungen des Systems der Hamiltonschen Gleichungen sind.

Übungsaufgabe 2.72. *Man beweise, dass $\{\Phi(t, \cdot) \mid t \in \mathbb{R}\}$ eine Gruppe ist.*

Satz 2.73 (Liouville)**.** *Der Phasenfluß von einer zweimal differenzierbaren Hamiltonfunktion H läßt das Volumen unverändert: Für jeden beliebigen Bereich D ist das Volumen von $\Phi(t, D)$ unabhängig von t gleich dem Volumen von D.*

Wir werden eine etwas allgemeinere Behauptung beweisen die ebenfalls von Liouville stammt. Gegeben sei ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$\dot{x} = F(x) \quad \text{mit} \quad F : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

dessen Lösungen auf der gesamten Zeitachse fortgesetzt werden können. Es sei $\Phi(t, \cdot)$ der entsprechende Fluss:

$$\frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial t} = F(\Phi(t, x)).$$

Ferner sei $D(0)$ eine Teilmenge von Ω und $v(0)$ sein Volumen. Wir definieren

$$v(t) = \text{Volumen}(D(t)) \quad \text{für} \quad D(t) = \Phi(t, D(0)).$$

Satz 2.74. *Wenn die Divergenz $\nabla \cdot F$ des Vektorfeldes F verschwindet, dann läßt $\Phi(t, \cdot)$ das Volumen unverändert: $v(t) = v(0)$.*

Wir beweisen zunächst folgedes Lemma:

Lemma 2.75. *Es gilt die Beziehung*

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \int\limits_{D(0)} \nabla \cdot F dx^n.$$

Beweis: Für beliebiges t und nach Definition der Jacobischen Determinante gilt

$$v(t) = \int\limits_{D(0)} \left|\det \frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial x}\right| dx^n.$$

Für $t = 0$ ist $\Phi(0,x) = x$ und $\frac{\partial \Phi(0,x)}{\partial t} = F(x)$. Daraus folgt

$$\left.\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \mathbb{1} \qquad\qquad \left.\frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial x}\right|_{t=0} = F'(x).$$

Wegen $\nabla \cdot F(x) = \operatorname{Spur} F'(x)$ folgt die Aussage aus dem Lemma 1.64. **q.e.d.**

Beweis des Satzes von Liouville: Wegen der Eigenschaft (ii) in Definition 1.33 folgt aus dem Lemma auch

$$\left.\frac{dv(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \int\limits_{D(t_0)} \nabla \cdot F dx^n.$$

Weil die Divergenz identisch verschwindet, isl also $v(t)$ konstant. **q.e.d.**

Speziell für das Hamiltonsche System gilt für zweimal differenzierbare H

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) = 0.$$

Damit ist der Satz von Liouville ebenfalls bewiesen. **q.e.d.**

Der Liouvillesche Satz erlaubt es, bei der Untersuchung mechanischer Systeme Methoden der sogenannten Ergodentheorie anzuwenden. In der Ergodentheorie benutzt man die Maßtheorie um dynamische Systeme zu untersuchen. Natürlicherweise spielen dabei solche dynamischen eine herausragende Rolle, bei denen ein invariantes Maß existiert. Wegen dem Satz von Liouville erhalten alle Hamiltonschen Vektorfelder das Volumenmaß. Zum Abschluss dieses Abschnittes zeigen wir noch einen grundlegenden Satz über solche Systeme, die ein Maß invariant lassen. Dabei betrachten wir den einfachten und allgemeinsten Fall einer Abbildung, die ein Maß invariant läßt.

Poincaréscher Wiederkehrsatz 2.76. *Es sei A eine volumenerhaltende, stetige Abbildung, die ein offenes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ endlichen Volumens auf sich selbst abbildet: $A[\Omega] \subset \Omega$. Dann besitzt jede offene Teilmenge $O \subset \Omega$ eine messbare Teilmenge S mit Volumen Null, so dass alle Elemente $x \in O \setminus S$ unendlich oft nach O zurückkehren, d.h. die Folge $(A^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ enthält unendlich viele Elemente in O.*

Beweis: Wir bezeichnen mit der Abbildung A^{-1} die Abbildung von den messbaren Teilmengen von Ω auf sich selber, die jeder messbaren Menge das Urbild unter A zuordnet. Entsprechend bezeichen wir für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit A^{-n} die n-fache Iteration von A^{-1}, also die Abbildung, die jede messbare Teilmenge $X \subset \Omega$ auf das Urbild von X unter der n-fachen Iteration von A abbildet. Insbesondere sei $A^0[X] = X$ für alle messbaren Teilmengen $X \subset \Omega$. Die offene Menge O hat natütlich ein positives Volumen

$$\operatorname{vol}(O) = \int\limits_O d^n x > 0.$$

Dann sei U die Menge aller Punkte $x \in O$, für die die Folgen $(A^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ unendlich viele Elemente in O besitzen:

$$U = O \cap \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A^{-n}[O].$$

Weil A volumenerhaltend ist, und Ω auf sich selber abbildet, gilt $\operatorname{vol}(\Omega) = \operatorname{vol}(A[\Omega])$. Deshalb hat das Komplement $\Omega \setminus A[\Omega]$ von dem Bild von Ω unter A in Ω kein Volumen

$$\operatorname{vol}(\Omega \setminus A[\Omega]) = \operatorname{vol}(\Omega) - \operatorname{vol}(A[\Omega]) = 0.$$

Für jede messbare Teilmenge $X \subset \Omega$ wird $A^{-1}[X]$ durch A auf das relative Komplement von $\Omega \setminus A[\Omega]$ in X abgebildet. Deshalb gilt für jede messbare Teilmenge $X \subset \Omega$ auch $\operatorname{vol}(A^{-1}[X]) = \operatorname{vol}(X)$. Daraus folgt für alle $N \in \mathbb{N}_0$

$$\operatorname{vol}(O) = \operatorname{vol}(A^{-1}[O]) = \operatorname{vol}(A^{-N}[O]) \quad \text{und} \quad \operatorname{vol}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A^{-n}[O]\right) = \operatorname{vol}\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A^{-n}[O]\right).$$

Die Folge $(\bigcup_{n=N}^{\infty} A^{-n}[O])_{N\in\mathbb{N}_0}$ enthält immer kleinere Mengen, die alle das gleiche Volumen haben. Dann gilt für alle $N \in \mathbb{N}_0$:

$$0 = \operatorname{vol}\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A^{-n}[O] \setminus \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A^{-n}[O]\right) \geq \operatorname{vol}\left(O \cap \bigcup_{n=N}^{\infty} A^{-n}[O] \setminus \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A^{-n}[O]\right) \geq 0.$$

Das Komplement von U in O ist gleich

$$S = O \setminus U = \bigcup_{N=0}^{\infty} \left(O \cap \bigcup_{n=N}^{\infty} A^{-n}[O] \setminus \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A^{-n}[O]\right).$$

Weil alle diese Mengen kein Volumen haben, hat auch S kein Volumen. **q.e.d.**

Wir haben in dem Beweis sogar für alle messbaren Mengen $O \subset \Omega$ gezeigt, dass die Menge aller Punkte $x \in O$, für die die Folge $(A^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ unendlich viele Element in O besitzt, das gleiche Volumen wir O hat.

Dieser Satz wird zum Beispiel auf den Phasenfluß eines mechanischen Systems angewandt, in dem U im Unendliche anwächst, so dass folgende Mengen kompakt sind:

$$\Omega = \{(q,p) \mid T(q,p) + U(q) \le E\}.$$

Weil der Phasenfluss diese Mengen invariant läßt, kann man dann den Poincaréschen Wiederkehrsatz anwenden. Wie sich das Teilchen bewegt, ist zwar unbekannt. Jedoch sagt das Poincarésche Theorem eine unendlichfache Rückkehr in jede Umgebung der Ausgangslage voraus. Dies ist eine der wenigen allgemeinen Schlußfolgerungen über den Charakter der Bewegung. Die Einzelheiten der Bewegung sind schon in dem folgenden Fall nicht mehr bekannt:

$$\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Eine etwas paradoxe Schlußfolgerung aus dem Liouvilleschen Satz und dem Poincaréschen Wiederkehrsatz ist folgende Aussage: Wenn man die Trennwand öffnet, die eine Kammer mit Gas von der mit dem Vakuum trennt, so konzentrieren sich die Gasmoleküle nach einer gewissen Zeit wieder in der ersten Kammer. Die Lösung des Rätsels besteht darin,dass eine "gewisse Zeit" größer ist als die Zeit der Existenz des Sonnensystems. Siehe beispielsweise P. Halmos, Lectures on Ergodic Theory, AMS 2006.

Beispiel 2.77. *Es sei Ω ein Kreis und A die Drehung um den Winkel $2\pi\alpha$. Die Abbildung $t \mapsto \exp(2\pi it)$ ist ein Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{S}^1$. Der Kern besteht aus $\mathbb{Z}$. Deshalb ist $\mathbb{S}^1$ isomorph zu $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Das Lebesguemaß induziert auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ein translationsinvariantes Maß. Deshalb ist dieses Maß unter der Multiplikation mit $\exp(2\pi i\alpha)$ invariant. Wenn $\alpha = \frac{m}{n}$ rational ist, dann ist A^n die identische Transformation. Wenn α nicht rational ist, so folgt aus dem Poincarésche Wiederkehrsatz, dass für alle $\delta > 0$ ein $x \in (-\delta,\delta)$ existiert, so dass $x + \frac{n\alpha}{2\pi} \in (-\delta,\delta) \mod \mathbb{Z}$ für unendliche viele $n \in \mathbb{N}$ gilt. Weil für irrationale α aber gilt $n\alpha \neq 0 \mod \mathbb{Z}$, gibt es für alle $\delta > 0$ also unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $n\alpha \in (-2\delta,0)\cup(0,2\delta) \mod \mathbb{Z}$. Dann liegen in jedem Intervall der Länge 4δ von $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ undendlich viele Elemente von der Folge $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$. Deshalb folgt*

Korollar 2.78. *Ist $\frac{\alpha}{2\pi}$ keine rationale Zahl, so ist für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ die Menge der komplexen Zahlen $\{\exp(ik\alpha)z \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine in $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ dichte Teilmenge.* **q.e.d.**

Beispiel 2.79. *Es sei $\Omega = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ein zweidimensionaler Torus und $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2)$ seien Winkelkoordinaten auf ihm. Das konstante Vektorfeld $\alpha \in \mathbb{R}^2$ ist divergenzfrei und induziert auf Ω einen volumenerhaltenden Fluss:*

$$\Phi(t,\cdot) : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2, \quad \varphi \mapsto \Phi(t,\varphi) = \varphi + t\alpha \mod \mathbb{Z}^2.$$

Um die Bahnen dieses dynamischen Systems zu untersuchen, betrachten wir für alle $\varphi_1 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *die Bahn durch den Punkt* $(\varphi_1, 0) \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. *Wenn* $\alpha_2 \neq 0$, *dann geht die Bahn für* $t = \frac{n}{\alpha_2}$ *mit* $n \in \mathbb{Z}$ *wieder durch einen Punkt von der Form* $(\varphi_1 + \frac{n\alpha_1}{\alpha_2}, n) = (\varphi_1 + \frac{n\alpha_1}{\alpha_2}, 0) \mod \mathbb{Z}^2$. *Also können wir durch die Translation* $t \mapsto t + \frac{n}{\alpha_2}$ *ein zeitdiskretes System* $\varphi_1 \mapsto \varphi_1 + \frac{n\alpha_1}{\alpha_2}$ *auf* $\varphi_1 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *definieren. Dann folgt aus Korollar 2.78*

Satz 2.80. *Ist das Verhältnis* $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ *irrational, so ist für alle* $\phi \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ *die Umwicklung* $\{\Phi(t, \varphi) \mid t \in \mathbb{R}\}$ *des Torus überall dicht auf dem Torus.*

Übungsaufgabe 2.81. *Man zeige, dass im Fall eines irrationalen* ω *die Lissajoussche Figur* $\{(\cos t, \cos \omega t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ *im Quadrat* $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ *überall dicht ist.*

Übungsaufgabe 2.82. *Es sei* Ω *ein* n*-dimensionaler Torus* $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. *Es sei* $\alpha \in \mathbb{R}^n$ *und* $\Phi(t, \cdot)$ *die volumenerhaltende Transformation*

$$\Phi(t, \cdot) : \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n, \quad \varphi \mapsto \varphi + at.$$

Man untersuche, unter welchen Bedingungen an α *und* φ *die folgenden Mengen dicht in* $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ *liegen:*

(i) $\{\Phi(t, \varphi) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

(ii) $\{\Phi(t, \varphi) \mid t \in \mathbb{Z}\}$.

Die Transformationen aus den vorangehenden Beispielen sind eng mit der Mechanik verknüpft. Da aber das Poincarésche Theorem abstrakt ist, ist es nicht an mechanische Anwendungen gebunden.

Übungsaufgabe 2.83. *Wir betrachten jeweils die erste Ziffer der Zahlen* 2^n:

$$(n = 0, 1, 2, \ldots) : \quad 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, \ldots$$

(i) *Finde ein maßerhaltendes zeitdiskretes dynamisches System, so dass die obige Folge durch einen Orbit dieses Systems beschrieben werden kann.*

(ii) *Zeige, dass jede Ziffer in* $\{1, \ldots, 9\}$ *in der obigen Folge undendlich oft vorkommt.*

(iii) *Zeige, dass es nur ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem zeitdiskreten dynamischen Systeme in (i) gibt, das unter* $\Phi(1, \cdot)$ *invariant ist.*

Hinweise: benutze, dass das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ *eindeutig dadurch charakterisiert ist, dass es translationsinvariant ist und die Menge* $[0, 1]$ *das Volumen Eins hat.*

(iv) *Berechne die Wahrscheinlichkeiten, mit der 7 und 8 in der obigen Folge auftauchen.*

2.9 Kommutator von Vektorfeldern

Jedem differenzierbaren Vektorfeld $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ können wir zwei Objekte zuordnen:

(i) Den lokalen Fluß Φ_A auf der offenen Teilmenge $W_A \subset \mathbb{R} \times \Omega$, der die maximalen Integralkurven folgender gewöhnlichen Differentialgleichung beschreibt:

$$\frac{\partial \Phi_A(t,x)}{\partial t} = A(\Phi_A(t,x)).$$

(ii) Den Differentialoperator erster Ordnung L_A, der Richtungsableitungen in Richtung des Vektorfeldes A:

$$(L_A f)(x) = A(x) \cdot \nabla f(x) = A_1(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} + \ldots + A_n(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}.$$

Übungsaufgabe 2.84. *Man zeige, daß der Operator L_A linear ist:*

$$L_A(\lambda f + \mu g) = \lambda L_A f + \mu L_A g \quad \text{für alle} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{und differenzierbare} \quad f, g$$

und beweise die Leibnizsche Formel

$$L_A(fg) = (L_A f)g + f(L_A g) \quad \text{für differenzierbare} \quad f, g.$$

Übungsaufgabe 2.85. **(i)** *Man gebe Bedingungen an, unter denen das Vektorfeld A eindeutig einen lokalen Fluss Φ_A definiert.*

(ii) *Umgekehrt gebe man Bedingungen an, unter denen ein lokaler Fluss Φ eindeutig ein Vektorfeld A bestimmt.*

(iii) *Man zeige induktiv in n, dass es für einen Differentialoperator L auf den glatten Funktionen einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, der linear ist und die Leibnizregel erfüllt, ein glattes Vektorfeld A gibt, so dass $Lf = L_A f$ für alle Polynome f gilt.*

(iv) *Man zeige, dass (iii) im Fall $n = 1$ sogar für alle glatten Funktionen f gilt. Benutze dabei, dass für jede glatte Funktion f die Funktion $\frac{f - f(x_0)}{x - x_0}$ auch glatt ist.*

(v) *Zeige induktiv in n, dass (iii) für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und alle glatten Funktionen f gilt.*

Auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seien zwei Vektorfelder A und B gegeben. Wir sagen, dass die entsprechenden lokalen Flüsse kommutieren, wenn

$$\Phi_A(s, \Phi_B(t,x)) = \Phi_B(t, \Phi_A(s,x))$$

für alle s, t, x gilt, so dass einerseits $(t, x) \in W_B$ und $(s, \Phi_B(t, x)) \in W_A$ gilt und andererseits $(s, x) \in W_A$ und $(t, \Phi_A(s, x)) \in W_B$. Diese Menge ist immer eine Umgebung von $(s, t, x) \in \{0\} \times \{0\} \times \Omega$.

Übungsaufgabe 2.86. *Man zeige, dass die lokalen Flüsse Φ_A und Φ_B von zwei differenzierbaren Vektorfeldern A und B auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ genau dann kommutieren, wenn $\Phi_A(s, \Phi_B(t, x)) = \Phi_B(t, \Phi_A(s, x))$ für alle (s, t, x) in einer Umgebung von $\{0\} \times \{0\} \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega$ gilt.*

Man gebe ein Beispiel von nicht kommutierenden Flüssen an.

Um den Grad der Nichtkommutativität der beiden Flüße Φ_A und Φ_B zu messen, betrachten wir die beiden Punkte $\Phi_A(s, \Phi_B(t, x))$ und $\Phi_B(t, \Phi_A(s, x))$. Zur Abschätzung des Abstands zwischen diesen Punkten vergleichen wir die Werte für eine glatte Funktion f auf Ω. Die Differenz

$$\triangle(s, t, x) = f(\Phi_A(s, \Phi_B(t, x)) - f(\Phi_B(t, \Phi_A(s, x))$$

ist offenbar eine differenzierbare Funktion, welche für $s = 0$ und für $t = 0$ gleich 0 ist. Deshalb verschwinden bei $(s, t) = (0, 0)$ alle partiellen Ableitungen nur nach s oder nur nach t. Die erste nicht verschwindende Ableitung bei $(s, t) = (0, 0)$ ist also die gemischte zweite partielle Ableitung nach s und t. Diesen Term berechnen wir jetzt.

Lemma 2.87. *Die gemischte partielle Ableitung von $\triangle$ nach s, t an der Stelle $(s, t) = (0, 0)$ ist der Kommutator der Differentiation in den Richtungen von A und B:*

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\right|_{s=t=0} f(\Phi_A(s, \Phi_B(t, x)) - f(\Phi_B(t, \Phi_A(s, x)) = (L_B L_A f - L_A L_B f)(x).$$

Beweis: Gemäß der Definition L_A gilt

$$\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} f(\Phi_A(s, \Phi_B(t, x)) = (L_A f)(\Phi_B(t, x))).$$

Wenn wir die Funktion $L_A f$ mit g bezeichnen, ergibt sich nach Definition von L_B

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} g(\Phi(t, x)) = (L_B g)(x),$$

und damit

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\right|_{s=t=0} (L_B L_A f)(x).$$

Wegen dem Schwarzschen Lemma kommutieren die partiellen Ableitungen, und wir können die gemischte Ableitung des anderen Terms in umgekehrter Reihenfolge ausrechnen. Dann folgt die Behauptung. **q.e.d.**

Wir betrachten jetzt den Kommutator von $L_B L_A - L_A L_B$. Auf den ersten Blick ist das ein Differentialoperator zweiter Ordnung.

Lemma 2.88. *Der Operator $L_B L_A - L_A L_B$ ist ein linearer Differentialoperator erster Ordnung, der linear ist und die Leibnizregel erfüllt.*

Beweis: Es seien $A = (A_1, \ldots, A_n)$ und $B = (B_1, \ldots, B_n)$ die Komponenten der Vektorfelder A bzw. B auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$L_B L_A f = \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j} f \qquad = \sum_{i,j=1}^n B_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f + \sum_{i,j=1}^n B_i A_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Wenn wir hiervon $L_A L_B f$ subtrahieren, verschwinden die Terme mit den zweiten Ableitungen von f, und übrig bleibt

$$(L_B L_A - L_A L_B) f = \sum_{i,j=1}^n \left(B_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - A_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Also gilt $[L_B, L_A] = L_C$ mit $C(x) = A'(x)B(x) - B'(x)A(x)$. Dann folgt auch, dass der Kommutator linear ist und die Leibnizregel erfüllt. **q.e.d.**

Man rechnet auch leicht allgemein nach, dass der Kommutator zweier Differentialoperatoren L und L', die beide die Leibnizregel erfüllen, wieder die Leibnizregel erfüllt:

$$\begin{aligned}
(LL' - L'L)(fg) &= L((L'f)g + f(L'g)) - L'((Lf)g + f(Lg)) \\
&= (LL'f)g + (L'f)(Lg) + (Lf)(L'g) + f(LL'g) \\
&- (L'Lf)g - (Lf)(L'g) - (L'f)(Lg) - f(L'Lg) \\
&= (LL' - L'Lf)g + f(LL' - L'Lg).
\end{aligned}$$

Definition 2.89. *Da jeder lineare Differentialoperator erster Ordnung durch ein Vektorfeld gegeben ist, entspricht der Operator $L_B L_A - L_A L_B$ ebenfalls einem Vektorfeld*

$$C : \Omega \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto C(x) = A'(x)B(x) - B'(x)A(x) \quad \textit{und} \quad L_C = L_B L_A - L_A L_B.$$

Diese Vektorfeld heißt der Kommutator der beiden Vektorfelder B und A und wird mit $C = [B, A]$ bezeichnet.

Übungsaufgabe 2.90. *Es sei A das lineare Vektorfeld, das jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ auf das Vektorprodukt von x mit dem Vektor $a \in \mathbb{R}^3$ abbildet und B das lineare Vektorfeld, dass jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ auf das Vektorprodukt von x mit dem Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ abbildet. Die entsprechenden Flüsse ergeben Rotationen um die Achsen a und b. Berechne den Kommutator $[A, B]$ dieser beiden Vektorfelder.*

Satz 2.91. *Der Kommutator verwandelt den linearen Raum von Vektorfeldern auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in eine Lie Algebra.*

Beweis: Linearität und Schiefsymmetrie des Kommutators sind evident. Wir beweisen nun die Jacobische Identität. Gemäß der Definition der Poissonklammer gilt

$$\begin{aligned} L_{[A,B],C]} &= L_C L_{[A,B]} - L_{[A,B]} L_C \\ &= L_C L_B L_A - L_C L_A L_B + L_A L_B L_C - L_B L_A L_C. \end{aligned}$$

Insgesamt sind in der Summe $L_{[[A,B],C]} + L_{[[B,C],A]} + L_{[[C,A],B]}$ zwölf Terme vorhanden; jeder erscheint zweimal mit engegengesetztem Vorzeichen. **q.e.d.**

Satz 2.92. *Seien A und B differenzierbare Vektorfelder auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Die beiden lokalen Flüsse Φ_A und Φ_B kommutieren dann und nur dann, wenn der Kommutator $[A, B]$ der beiden Vektorfelder verschwindet.*

Beweis: Wenn die beiden lokalen Flüsse Φ_A und Φ_B kommutieren, dann folgt aus Lemma 2.87, dass auch die beiden Vektorfelder kommutieren, also $[A, B] = 0$.

Umgekehrt nehmen wir jetzt an, dass der Kommutator $[A, B]$ der beiden Vektorfelder A und B verschwindet. Wir wollen zeigen, dass die beiden lokalen Flüsse dann auch kommutieren. Offenbar ist für $(s, x) \in W_A$ und hinreichend kleine t die Abbildung $(t, x) \mapsto \Phi_A(-s, \Phi_B(t, \Phi_A(s, x)))$ ein lokaler differenzierbarer Fluss. Weil jeder differenzierbare Fluss zu einem Vektorfeld gehört, gehört auch dieser Fluss zu einem Vektorfeld, dass wir mit B_s bezeichnen wollen. Dieses Vektorfeld berechnet sich durch:

$$B_s(x) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \Phi_A(-s, \Phi_B(t, \Phi_A(s, x))) = \Phi'_A(-s, \Phi_A(s, x)) B(\Phi_A(s, x)).$$

Hier bezeichnet der Strich die Ableitung nach der Raumkoordinate in Ω. Wir wollen jetzt für $x \in \Omega$ die Abbildung $s \mapsto B_s(x)$ nach s differenzieren. Dafür bemerken wir, dass B_s eine Verkettung von drei Abbildungen ist. Die letzte $\Phi'_A(-s, \Phi_A(s, x))$ ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ auf sich selber, die von s abhängt. Um sie nach s zu differenzieren, ist es einfacher die Umkehrabbildung nach s zu differenzieren. Aus $\Phi_A(-s, \Phi_A(s, x)) = x$ folgt, dass die Ableitungen dieser beiden Abbildungen zueinander invers sind, also $\Phi'_A(-s, \Phi_A(s, x))$ die Umkehrabbildung von $\Phi'_A(s, x)$ ist. Weil die partiellen Ableitungen nach s und x vertauschen, gilt

$$\frac{\partial \Phi'_A(s, x)}{\partial s} = \frac{\partial^2 \Phi_A(s, x)}{\partial s \partial x} = \frac{\partial^2 \Phi_A(s, x)}{\partial x \partial s} = \frac{\partial A(x) \Phi_A(s, x)}{\partial x} = A'(\Phi_A(s, x)) \Phi'_A(s, x).$$

Dann folgt für die inverse lineare Abbildung

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\Phi'_A(-s,\Phi(s,x)) &= -\Phi'_A(-s,\Phi(s,x))A'(\Phi_A(s,x))\Phi'_A(s,x)\Phi'_A(-s,\Phi(s,x))\\ &= -\Phi'_A(-s,\Phi(s,x))A'(\Phi_A(s,x)).\end{aligned}$$

Deshalb berechnet sich die Ableitung von $s \mapsto B_s(x)$ durch

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}B_s(x) &= \Phi'_A(-s,\Phi_A(s,x))B'(\Phi_A(s,x))A(\Phi_A(s,x))\\ &\quad - \Phi'_A(-s,\Phi_A(s,x))A'(\Phi_A(s,x))B(\Phi_A(s,x))\\ &= \Phi'_A(-s,\Phi_A(s,x))[A,B](\Phi_A(s,x)).\end{aligned}$$

Wenn also der Kommutator verschwindet, dann ist $s \mapsto B_s(x)$ für alle $x \in \Omega$ konstant. Für $s = 0$ gilt aber $B_0 = B$. Deshalb ist dann dieses Vektorfeld B_s für alle s gleich B. Dann stimmen aber auch die beiden Flüsse überein. Also folgt, dass für hinreichend kleine s die folgenden beiden Flüsse übereinstimmen:

$$\Phi_A(-s,\cdot)\circ\Phi_B(t,\cdot)\circ\Phi_A(s,\cdot) = \Phi_B(t,\cdot).$$

Dann folgt sofort $\Phi_B(t,\cdot)\circ\Phi_A(s,\cdot) = \Phi_A(s,\cdot)\circ\Phi_B(t,\cdot)$. **q.e.d.**

Dieser Satz zeigt, dass die Vektorfelder als die Lie-Algebra der Gruppe der lokalen Diffeomorphismen einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ angesehen werden kann. Dabei definiert der Kommutator von Vektorfeldern die Verknüpfung der Lie-Algebra, also die Lieklammen. Umgekehrt läßt sich die Lieklammer einer Lie-Algebra mithilfe des Kommutators von Vektorfeldern definieren.

Es sei G die Gruppe der linearen invertierbaren Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ auf sich selber. Ähnliche Aussagen gelten auch für Untergruppen dieser Gruppe. Für $g \in G$ ist die Rechtstranslation R_g die Abbildung

$$R_g : G \to G, \quad R_g h = hg.$$

Die Ableitung von R_g im Punkt g bildet die $n \times n$ Matrizen auf sich selber ab. Somit entspricht jeder $n \times n$-Matrix A auch ein Vektorfeld auf G: Es besteht aus den Rechtstranslationen $(R_g)'A$ und wird rechtsinvariantes Vektorfeld genannt. Offensichtlich ist ein rechtsinvariantes Vektorfeld auf einer Gruppe eindeutig durch seinen Wert im Einselement bestimmt.

Übungsaufgabe 2.93. (i) *Man zeige, dass die rechtsinvarianten Vektorfelder auf G durch die Abbildungen $g \mapsto Ag$ gegeben sind, wobei A eine $n \times n$-Matrix ist.*

(ii) *Man zeige, dass der Kommutator zweier rechtsinvarianter Vektorfelder wieder ein rechtsinvariantes Vektorfeld ist, und genau dem Kommutator der entsprechenden $n \times n$-Matrizen entspricht.*

2.10 Poissonklammer

Wir werden in diesem Abschnitt sehen, dass die Hamiltonschen Vektorfelder auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ eine Unteralgebra der Lieschen Algebra aller Vektorfelder bilden. Die Hamiltonfunktionen bilden sogar selber eine Liesche Algebra: Die Operation in dieser Algebra wird Poissonklammer von Funktionen genannt. Die ersten Integrale des Hamiltonschen Phasenflusses bilden eine Unteralgebra der Lieschen Algebra der Hamilton-Funktionen.

Es sei Ω eine offene Teilmenge von dem Phasenraum $(q,p) \in \mathbb{R}^{2n}$. Jede auf Ω zweimal stetig differenzierbare Funktion $H : \Omega \to \mathbb{R}$ entspricht ein lokaler Fluss $\Phi_H(t,\cdot) = \Phi_{X(H)}$ auf Ω, nämlich der Phasenfluß des Hamiltonschen Vektorfeldes $X(H)$.

Definition 2.94. *Die Poissonklammer $\{g,f\}$ zweier differenzierbarer Funktionen f und g auf einer offenen Menge Ω des Phasenraumes $(q,p) \in \mathbb{R}^{2n}$ is definiert als die Ableitung von f in Richtung des Hamiltonschen Vektorfeldes $X(g)$:*

$$\{g,f\}(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\Phi_{X(g)}(t,x)).$$

Somit ist die Poissonklammer zweier Funktionen auf Ω ebenfalls eine Funktion auf Ω.

Bemerkung 2.95. *In der klassischen Dynamik definiert man üblicherweise die Poissonklammer mit einem umgekehrten Vorzeichen. Dann ist aber die Abbildung $f \mapsto X(f)$ von den Funktionen in die Hamiltonschen Vektorfelder mit der in der Differentialgeometrie üblichen Definition kein Lie Algebra Homomorphismus. Deshalb definiert Arnold beispielsweise die Lieklammer von Vektorfeldern mit dem umgekehrten Vorzeichen, als es in der Differentialgeometrie üblich ist. Weil sich die Konventionen der klassischen Mechanik mit denen der Differentialgeometrie wiedersprechen, müssen wir eine Wahl treffen. Wir haben uns für die Konventionen der Differentialgeometrie entschieden, und definieren deshalb die Poissonklammer mit dem umgekehrten Vorzeichen, als es in der klassischen Mechanik üblich ist.*

Korollar 2.96. *Die Funktion f ist dann und nur dann ein Integral des Phasenflusses der Hamilton-Funktion H, wenn ihre Poissonklammer mit H identisch verschwindet:*

$$\{H,f\} = 0.$$

q.e.d.

Wir können die Poissonklammer auch in einer etwas anderen Art definieren, wenn wir den Isomorphismus J zwischen dem Gradienten von H und den Vektorfeldern auf einer offenen Teilmenge Ω des Phasenraumes $(q,p) \in \mathbb{R}^{2n}$ verwenden. Das Hamiltonsche Vektorfeld $X(H)$ ist durch $X(H) = J\nabla H$ definiert. Hieraus ergibt sich

Korollar 2.97. *Die Poissonklammer der Funktion g und f ist gleich dem Wert der Richtungsableitung in Richtung von dem Hamiltonschen Vektorfeld $X(g)$:*

$$\{g, f\} = X(g) \cdot \nabla f. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Setzen wir $X(g) = J\nabla g$ in die Formel ein, so ergibt sich

Korollar 2.98. *Die Poissonklammer der Funktionen g und f ist gleich dem antisymmetrischen Produkt der Gradienten der beiden Funktionen g und f:*

$$\{g, f\} = (J\nabla g) \cdot \nabla f = -\nabla g \cdot J\nabla f = \nabla f \cdot J\nabla g. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Jetzt gilt offensichtlich

Korollar 2.99. *Die Poissonklammer der Funktionen f und g ist eine schiefsymmetrische Bilinearform der Funktionen f und g:*

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \quad \{\lambda f + \mu g, h\} = \lambda\{f, h\} + \mu\{g, h\} \quad \textit{mit} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Die vorangegangenen Betrachtungen sind zwar evident. Sie führen zu nichttrivialen Schlußfolgerungen, darunter zu folgender Verallgemeinerung des Noetherschen Satzes.

Satz 2.100. *Wenn eine Hamilton-Funktion H auf einer offenen Teilmenge Ω des Phasenraumes $(q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ gegeben ist, und auf den Integralkurven eines Hamiltonschen Vektorfeldes $X(g)$ einer Funktion g auf Ω konstant ist, so ist g ein Integral des Systems mit der Hamilton-Funktion H.*

Beweis: Unter dieser Bedingung ist H ein Integral des Flusses $\Phi_{X(g)}$, daraus folgt $\{g, H\} = 0$ und $\{H, g\} = 0$, und F ist ein Integral des Flusses. **q.e.d.**

Die Poissonklammer zweier differenzierbarer Funktionen berechnet sich also durch

$$\begin{aligned}\{f, g\}(q, p) &= \nabla g(q, p) \cdot J\nabla f(q, p) = \nabla_p g(q, p) \cdot \nabla_q f(q, p) - \nabla_q g(q, p)\nabla_p f(q, p) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g(q, p)}{\partial p_i} \frac{\partial f(q, p)}{\partial q_i} - \frac{\partial g(q, p)}{\partial q_i} \frac{\partial f(q, p)}{\partial p_i} \right).\end{aligned}$$

Insbesondere sind die Poissonklammern der Basisfunktionen $q_1, \ldots, q_n$ und $p_1, \ldots, p_n$ gegeben durch

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \text{ für } i, j = 1, \ldots, n \text{ und } -\{q_i, p_j\} = \{p_j, q_i\} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Korollar 2.101. *Die Poissonklammer erüllt für differenzierbare Funktionen f, g, h auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ folgende Leibnizregel:*

$$\{h, fg\} = \{h, f\}g + f\{h, g\}.$$

Beweis: Das folgt daraus, dass die Poissonklammer $\{h, fg\}$ gleich der Richtungsableitung von fg in Richtung des Vektorfeldes $X(h)$ ist, und die Richtungsableitung jedes Vektorfeldes die Leibnizregel erfüllt. **q.e.d.**

Satz 2.102. *Die Poissonklammer erfüllt für zweimal differenzierbare Funktionen f, g, h auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ folgende Jacobiidentität:*

$$\{h, \{g, f\}\} + \{f, \{h, g\}\} + \{g, \{f, h\}\} = 0.$$

Korollar 2.103. *(Satz von Poisson). Die Poissonklammer zweier Integrale f und g der Bewegung f, g eines Systems mit der Hamilton-Funktion H ist ebenfalls ein Integral der Bewegung.*

Beweis: Aus der Jacobischen Identität folgt

$$\{H, \{g, f\}\} = -\{f, \{H, g\}\} + \{g, \{H, f\}\} = 0.$$ **q.e.d.**

Somit können wir aus der Kenntnis zweier erster Integrale ein drittes, viertes usw. bekommen. Allerdings sind nicht alle so ermittelten Integrale grundsätzlich neu, da es nicht mehr als $2n$ unabhängige Funktionen auf $\mathbb{R}^{2n}$ gibt. Manchmal bekommen wir Funktionen von alten Integralen oder Konstanten, die gleich 0 sein können. Mitunter ergeben sich jedoch neue Integrale.

Übungsaufgabe 2.104. *Auf dem Phasenraum $\mathbb{R}^{2n}$ ist der Drehimpuls M definiert als das Vektorprodukt von q mit p. Man berechne die Poissonklammern der Komponenten von p und M.*

Daraus folgt der

Satz 2.105. *Wenn zwei Komponenten M_1 und M_2, des Drehimpulses eines mechanischen Systems Erhaltungsgrößen sind, ist es die dritte ebenfalls.* **q.e.d.**

Beweis der Jacobischen Identität: Wir betrachten die Summe

$$\{h, \{g, f\}\} = \{g, \{f, h\}\} + \{f, \{h, g\}\},$$

die eine Linearkombination von zweiten partiellen Ableitungen der zugehörigen Funktionen f, g und h ist, deren Koeffizienten Produkte der erste Ableitungen der beiden anderen Funktionen sind. Die zweiten Ableitungen von f tauchen nur in den Termen

$$\{h, \{g, f\}\} + \{g, \{f, h\}\} = \{h, \{g, f\}\} - \{g, \{h, f\}\}$$

auf und sind gleich

$$(L_{X(h)}L_{X(g)} - L_{X(g)}L_{X(h)})f = [X(h), X(g)] \cdot \nabla f.$$

Wir haben gesehen, dass diese Richtungsableitung von f in Richtung des Kommutators $[X(h), X(g)]$ nur erste Ableitungen von f enthält. Also verschwinden die Koeffizienten vor den zweiten Ableitungen von f und dann wegen der Symmetrie auch vor den zweiten Ableitungen von g und h. Dann muss dieser Ausdruck verschwinden. **q.e.d.**

Korollar 2.106. *Es seien $X(g)$ und $X(h)$ Hamiltonsche Vektorfelder zu den Hamilton Funktionen g und h. Dann ist die Richtungsableitung von f in Richtung des Kommutators $[X(h), X(g)]$ gegeben durch*

$$\{h, \{g, f\}\} - \{g, \{h, f\}\} = \{\{h, g\}, f\}$$

also die Richtungsableitung von f in Richtung von $X(\{h, g\})$. Deshalb ist der Kommutator $[X(h), X(g)]$ zweier Hamiltonscher Vektorfelder wieder ein Hamiltonsches Vektorfeld $X(\{h, g\})$ von der Poissonklammer der beiden Funktionen h und g. **q.e.d.**

Definition 2.107. *Ein linearer Unterraum einer Lieschen Algebra wird Unteralgebra genannt, wenn der Kommutator zweier beliebiger Elemente des Unterraumes in ihm liegt. Die Unteralgebra einer Lieschen Algebra ist ebenfalls eine Liesche Algebra.*

Korollar 2.108. *Die Hamiltonschen Vektorfelder auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ bilden eine Unteralgebra der Lieschen Algebra aller Vektorfelder.* **q.e.d.**

Der Poissonsche Satz über die ersten Integrale läßt sich damit umformulieren zu

Korollar 2.109. *Die Integrale des Hamiltonschen Phasenflusses bilden eine Unteralgebra der Lieschen Algebra aller Funktionen.* **q.e.d.**

Die Liesche Algebra der Hamilton Funktionen kann auf natürliche Weise auf die Liesche Algebra der Hamiltonschen Vektorfelder abgebildet werden. Dazu ordnen wir jeder Funktion H das Hamiltonsche Vektorfeld H der Hamilton-Funktion H zu.

Korollar 2.110. *Die Abbildung der Lieschen Algebra von Funktionen auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ auf die Liesche Algebra der Hamiltonschen Vektorfelder ist ein Homomorphismus von Lieschen Algebren. Sein Kern besteht aus den lokal konstanten Funktionen. Wenn Ω zusammenhängend ist, dann ist der Kern eindimensional und besteht aus den konstanten Funktionen.*

Beweis: Die Abbildung ist linear, und Jacobiidentität zeigt, daß die Abbildung die Poissonklammer von Funktionen in den Kommutator von Vektorfeldern überführt. Der Kern besteht aus Funktionen f, für die $J\nabla f$ identisch verschwindet. Da J invertierbar ist, sind das genau die lokal konstanten Funktionen. **q.e.d.**

Korollar 2.111. *Damit die Phasenflüsse der Hamilton-Funktionen f und g kommutieren, ist es notwendig und hinreichend, daß die Poissonklammer der Funktionen f und g (lokal) konstant ist.* **q.e.d.**

Definition 2.112. *Eine differenzierbare Abbildung Φ von einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ auf eine offene Teilmenge $\Omega' \subset \mathbb{R}^{2n}$ heißt kanonisch, wenn*

$$\{f \circ \Phi, g \circ \Phi\} = \{f, g\} \circ \Phi$$

für alle differenzierbaren Funktionen f und g auf Ω' gilt.

Satz 2.113. *Eine differenzierbare Abbildung Φ von einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ auf eine offene Teilmenge $\Omega' \subset \mathbb{R}^{2n}$ ist genau dann kanonisch, wenn ihre Ableitung auf ganz Ω symplektisch ist, also die Jacobimatrix zu $Sp(n)$ gehört:*

$$(\Phi'(x))^t J \Phi'(x) = J \quad \textit{für alle} \quad x \in \Omega.$$

Beweis: Seien f und g differenzierbare Funktionen auf Ω'. Dann gilt für alle $x \in \Omega$:

$$\begin{aligned}
\{f \circ \Phi, g \circ \Phi\}(x) &= -\nabla(f \circ \Phi)(x) \cdot J\nabla(g \circ \Phi)(x) \\
&= -\left((\Phi'(x))^t(\nabla f)(\Phi(x))\right) \cdot J(\Phi'(x))^t(\nabla g)(\Phi(x)) \\
&= -(\nabla f)(\Phi(x)\left(\Phi'(x)J(\Phi'(x))^t\right)(\nabla g)(\Phi(x)).
\end{aligned}$$

Die Abbildung Φ ist also kanonisch, wenn $\Phi'(x)J(\Phi'(x))^t = J$ für alle $x \in \Omega$ gilt. Wegen $J^{-1} = -J = J^t$ sind für eine symplektische Matrix A auch die Matrizen A^{-1}, JAJ^{-1} und $A^t = JA^{-1}J^{-1}$ symplektisch. Deshalb ist obige Bedingung äquivalent dazu, dass die Ableitung von Φ symplektisch ist. Wenn die Abbildung Φ kanonisch ist, dann muss obige Bedingung für alle differenzierbaren Funktionen f und g gelten. Daraus folgt auch, dass die Ableitung $\Phi'(x)$ für alle $x \in \Omega$ symplektisch ist. **q.e.d.**

Satz 2.114. *Ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer einfach zusammenhängenden offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ ist genau dann ein Hamiltonsches Vektorfeld, wenn der entsprechende lokale Fluss aus kanonischen Abbildung besteht.*

Beweis: Sei Φ_F der lokale Fluss eines Vektorfeldes F auf $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$. Für $t = 0$ ist der lokale Fluss die identische Abbildung, und damit offensichtlich kanonisch. Die Ableitung der Jacobimatrix $\frac{\partial \Phi_F(t,x)}{\partial x}$ nach t berechnet sich durch

$$\frac{\partial^2 \Phi_F(t,x)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 \Phi_F(t,x)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial F(\Phi_F(t,x)}{\partial x} = F'(\Phi_F(t,x))\Phi'_F(t,x).$$

Ein Vektorfeld ist genau dann ein Hamiltonsches Vektorfeld, wenn es von der Form $J\nabla f(x)$ für eine differenzierbare Funktion f ist. Also ist für ein Hamiltonsches Vektorfeld $X(f)$ die Ableitung der Jacobimatrix des lokalen Flusses $\Phi_{X(f)}$ nach t von der

Form J mal der Hessischen von f, also das Produkt von J mit einer symmetrischen Matrix, also einer Matrix in $sp(n)$. Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi_F(t,x)}{\partial x}\right)^t J\frac{\partial\Phi_F(t,x)}{\partial x} = (\Phi'(t,x))^t\left((F'(\Phi(t,x))^t J + JF'(\Phi(t,x))\right)\Phi'(t,x) = 0.$$

Also besteht der lokale Fluss aus kanonischen Abbildungen. Wenn umgekehrt der lokale Fluss aus kanonischen Abbildungen besteht, dann ist $F'(x)$ für alle $x \in \Omega$ ein Element von $sp(n)$. Daraus folgt, dass $-JF'(x)$ für alle $x \in \Omega$ symmetrisch ist. Aus Lemma 2.5 folgt dann, dass $-JF'$ die Hesse'sche einer Funktion auf Ω ist, und F ein Hamiltonsches Vektorfeld ist. **q.e.d.**

Wir bekommen noch eine weitere Verallgemeinerung des Noetherschen Satzes: Ist ein Fluß bekannt, der mit dem betrachteten kommutiert, so läßt sich ein Integral der Bewegung errechnen.

Definition 2.115. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ eine offene Teilmenge. Dann heißen alle Vektorfelder, die lokal Hamiltonsche Vektorfelder sind, lokale Hamiltonsche Vektorfelder. Ein Phasenfluß, der durch ein lokal Hamiltonsches Vektorfeld gegeben ist, wird lokal Hamiltonscher Fluß genannt.*

Korollar 2.116. *Ein Vektorfeld auf einer offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ ist genau dann ein lokales Hamiltonsches Vektorfeld, wenn sein Fluss aus kanonischen Transformationen besteht.*

Beweis: Jeder Punkt $x \in \Omega$ besitzt in Ω eine konvexe und damit einfach zusammenhängende Umgebung. Auf solchen Mengen haben wir die Aussage gezeigt. **q.e.d.**

Nicht alle lokalen Hamiltonschen Vektorfelder sind auch Hamiltonsche Vektorfelder:

Beispiel 2.117. *Es sei $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ der zweidimensionale Torus, dessen Punkt durch das Koordinatenpaar $(q,p) \mod \mathbb{Z}$ gegeben sind. Nun betrachten wir die Familie von Verschiebungen $\Phi(t,(q,p)) = (p+t,q)$. Das ist ein differenzierbare Fluss, der dann von einem Vektorfeld induziert ist. Für alle t sind diese Abbildungen offenbar kanonische Abbildungen. Also ist Φ Fluss eines lokalen Hamiltonschen Vektorfeldes. Aus $\dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}, \dot q = \frac{\partial H}{\partial p}$ würde $\frac{\partial H}{\partial p} = 0, \frac{\partial H}{\partial q} = -1$, d.h. $H = -q + C$ folgen. Aber q ist nur eine lokale Koordinate auf $\mathbb{T}^2$, und die Abbildung $H : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$ und $\frac{\partial H}{\partial q} = 1$ existiert nicht. Somit ist $\Phi(t,\cdot)$ kein Hamiltonscher Phasenfluß.*

Übungsaufgabe 2.118. *Man zeige, daß auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ die lokal Hamiltonschen Vektorfelder eine Unteralgebra der Lieschen Algebra aller Vektorfelder bilden. Dabei ist der Kommutator zweier lokal Hamiltonscher Vektorfelder F und*

G sogar ein Hamiltonsches Vektorfeld, dessen Hamilton Funktion eindeutig durch die Felder Vektorfelder F und G mittels der Formel

$$H(x) = F(x) \cdot JG(x)$$

gegeben ist. Somit bilden die Hamiltonschen Vektorfelder ein Ideal in der Lieschen Algebra der lokal Hamiltonschen Vektorfelder.

2.11 Integrable Systeme

Um ein System von $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen zu integrieren, müssen $2n$ erste Integrale bekannt sein. Wenn ein System von Hamiltonschen Differentialgleichungen gegeben ist, stellt sich heraus, daß es in vielen Fällen genügt, nur n erste Integrale zu kennen, denn jedes von ihnen erlaubt, die Ordnung des System nicht nur um 1, sondern gleich um 2 herabzusetzen. Wir erinnern uns, daß die Funktion f und nur dann ein Integral der Bewegung eines Systems mit der Hamilton-Funktion H ist, wenn die Poissonklammer $\{f, H\}$ identisch verschwindet.

Definition 2.119. *Zwei Funktionen f und g auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ sind miteinander in Involution, wenn ihre Poissonklammer identisch verschwindet.*

Wenn mehrere Funktionen $f = (f_1, \ldots, f_m)$ auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ alle paarweise miteinander in Involution sind, dann bleiben die entsprechenden Phasenflüsse durch einen Punkt $x_0 \in \Omega$ alle innerhalb der entsprechenden Niveaumengen

$$\{x \in \Omega \mid f_1(x) = f_1(x_0), \ldots, f_m(x) = f_m(x_0)\} = f^{-1}[\{f(x_0)\} \quad \text{mit} \quad x_0 \in \Omega.$$

Wenn für eine der Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ diese Niveaumengen mit den entsprechenden Niveaumengen der restlichen Funktionen übereinstimmen, dann ist der Funktionswert dieser Funktion an allen Punkten durch die Funktionswerte der restlichen Funktionen eindeutig bestimmt. Wenn alle diese Funktionen stetig differenzierbar sind, dann gibt es Punkte $x_0 \in \Omega$, an denen der Rang der Ableitung der Abbildung

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^m \quad x \mapsto f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

maximal ist. An diesen Punkten x_0 gibt es dann eine Auswahl dieser Funktionen, deren Gradienten alle an diesem Punkt x_0 linear unabhängig sind, und für die die Gradienten aller dieser Funktionen in x_0 von den Gradienten der ausgewählten Funktionen linear abhängen. Wegen der Stetigkeit der Gradienten, und weil die Dimension des Unterraumes von $\mathbb{R}^{2n}$, der von den Gradienten $\nabla f_1(x), \ldots, \nabla f_m(x)$ auf gespannt wird in dem Punkt $x = x_0$ maximal ist, muss dann das gleiche in einer Umgebung von x_0 gelten.

Aus dem Satz der impliziten Funktion folgt, dass die Niveaumengen der ausgewählten Funktionen durch die Punkte in einer Umgebung von x_0 einen Tangentialraum besitzen, der das orthogonale Komplement ihrer linear unabhängigen Gradienten ist. Weil alle anderen Gradienten aber lokal von diesen Gradienten linear abhängigen, verschwinden die Gradienten aller Funktionen auf den Niveaumengen der ausgwählten Funktionen. Deshalb stimmen in einer Umgebung von x_0 die Niveaumangen der ausgewählten Funktionen mit den Niveaumangen aller Funktionen überein. In diesem Fall sind in einer Umgebung von x_0 die Funktionswerte aller Funktionen eindeutig durch die Funktionswerte der ausgewählten Funktionen bestimmt. Wir sagen dann, dass alle Funktionen algebraisch nur von den ausgewählten Funktionen abhängen. Solche algebraisch abhängige Funktionen beinhalten dann keine zusätzliche Information. Deshalb wollen wir sie weglassen. Wir können dann zumindest auf der Umgebung von solchen Punkten x_0, an denen der Rang der Ableitung von der funktion $f = (f_1, \ldots, f_m)$ maximal ist, annehmen, dass all Gradienten $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ linear unabhängig sind. Offenbar kann es maximal n solcher Funktionen geben, die zusätzlich alle paarweise miteinder in Involution sind.

Wenn die Bahn eines Hamiltonschen Vektorfeldes durch einen Punkt x_0 nach längeren Zeit in die Umgebung des Punktes x_0 zurückkehrt, dann muss die Hamiltonfunktion an allen diesen Punkten die gleichen Werte annehmen. Nun kann man sich vorstellen, das die Bahn eines Hamiltonschen Vektorfeldes sogar in einer höherdimensionalen Menge einer Umgebung von x_0 dicht liegt, und deshalb die Hamiltonfunktion wegen ihrer Stetigkeit sogar auf dieser höherdimensionalen Menge konstant sein muss. Allerdings kann das nur global passieren, dadurch dass die Bahn unendlich oft in Umgebungen von x_0 zurückkehrt. Deshalb beeinflussen auch die globalen Eigenschaften der Phasenflüsse von Hamiltonschen Vektorfeldern, das lokale Verhalten der entsprechenden Hamiltonfunktionen. Um diesen Zusammenhang in den Blick zu bekommen, sollten wir annehmen, dass die Phasenflüsse der betrachteten Hamiltonschen Vektorfelder zumindest für alle Punkte aus der Niveaumenge global existieren. Solche Hamiltonschen Systeme, die maximal viele algebraisch unabhängige Integraler der Bewegung haben, die alle paarweise miteinander in Involution sind, heißen integrabel:

Definition 2.120. *Ein Hamiltonsches System einer Hamiltonfunktion H auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ heißt vollständig integrabel, wenn es neben der Hamiltonfunktion H noch $n-1$ andere Funktionen gibt, die*

(i) *alle paarweise miteinander in Involution sind,*

(ii) *deren Gradienten linear unabhängig sind,*

(iii) *und deren Hamiltonschen Vektorfelder vollständig sind.*

Definition 2.121. *Eine Untergruppe $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ heißt diskret, wenn es eine offene Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ gibt, deren Schnittmenge mit Γ nur die Null enthält.*

Liouville hat nun beweisen, dass man diese Systeme tatsächlich integrieren kann. Hier ist eine exakte Formulierung dieses Satzes.

Satz 2.122. *(Liouville) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ eine offenen Teilmenge, x_0 ein Punkt in Ω, und $f = (f_1, \ldots, f_n)$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf Ω,*

(i) *die alle paarweise miteinander in Involution sind,*

(ii) *deren Gradienten auf der Niveaumenge $N = f^{-1}[\{f(x_0)\}]$ linear unabhängig sind,*

(iii) *und deren Hamiltonsche Vektorfelder $X(f_1), \ldots, X(f_n)$ durch alle Punkte $x \in N$ der Niveaumenge Integralkurven auf ganz $\mathbb{R}$ besitzen.*

Dann sind die Zusammenhangskomponenten von N homöomorph zu dem Quotienten $\mathbb{R}^n/\Gamma$, wobei Γ eine diskrete Untergruppe vom $\mathbb{R}^n$ ist. Die Phasenflüsse der Hamiltonschen Vektorfelder $X(f_1), \ldots, X(f_n)$ wirken dabei wie die Translationen des $\mathbb{R}^n$.

Beweis: Wegen dem Satz der impliziten Funktion gibt es für alle $x \in N$ eine offene Umgebung U und einen Homöomorphismus Ψ von U auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^{2n}$, so dass $U \cap N$ durch Ψ auf $V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = V \cap \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_{n+1} = 0, \ldots, x_{2n} = 0\}$ ist. Dabei sind Ψ und die Umkehrabbildung Ψ^{-1} sogar zweimal stetig differenzierbar. Insbesondere besitzt jeder Punkt von N dann eine Umgebung, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Weil die Gradienten $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_n$ auf der Niveaumenge lineare unabhängig sind, und weil J invertierbar ist, sind auch die Hamiltonschen Vektorfelder $X(f_1), \ldots, X(f_n)$ auf N linar unabhängig. Also besitzt die n-dimensionale Niveaumenge N n linear unabhängige Vektorfelder $X(f_1), \ldots, X(f_n)$, die alle paarweise miteinander kommutieren. Weil $f_1, \ldots, f_n$ alle paarweise miteinander in Involution sind, verschwinden die Richtungsableitungen dieser Funktionen in Richtung einer der Vektorfelder $X(f_1), \ldots, X(f_n)$ auf ganz N. Insbesondere werden diese Vektorfelder durch Ψ' auf Vektoren in $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ abgebildet.

Wir definieren jetzt folgende Abbildung von $\mathbb{R}^n \times N$ nach N:

$$\Phi : \mathbb{R}^n \times N \to N, \quad (t, x) \mapsto \Phi(t, x) = \Phi_{X(f_1)}(t_1, \Phi_{X(f_n)}(t_2, \ldots, \Phi_{X(f_n)}(t_n, x) \cdots).$$

Hierbei bezeichnet $\Phi_{X(f_1)}, \ldots, \Phi_{X(f_n)}$ die Flüsse der Vektorfelder $X(f_1), \ldots, X(f_n)$. Wegen der Bedingung (iii) sind sie auf ganz N für alle $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ definiert. Weil die Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ alle paarweise miteinander in Involution, sind sie auf dem Bild von $t \mapsto \Phi(t, x)$ lokal konstant. Deshalb liegt das Bild von Φ in N. Weil die Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ zweimal stetig differenzierbar sind, sind die Vektorfelder $X(f_1), \ldots, X(f)n)$

einmal stetig differenzierbar, und die Abbildung F zweimal stetig differenzierbar. Wegen der Bedingung (i) kommutieren alle diese Flüsse miteinander. Deshalb können wir die Reihenfolge der Abbildungen $\Phi_{X(f_1)}(t_1,\cdot),\ldots,\Phi_{X(f_n)}(t_n,\cdot)$ in der Definition von F beliebig vertauschen. Aus der Flusseigenschaft (ii) der lokalen Flüsse folgt

$$\Phi(t+t',x)) = \Phi(t,\Phi(t',x)) = \Phi(t',\Phi(t,x)) \quad \text{für alle} \quad t,t' \in \mathbb{R}^n.$$

Wir zeigen jetzt, dass für alle $x \in N$ das Bild von $t \mapsto \Phi(t,x)$ in N abgeschlossen und offen ist. Dazu benutzen wir die Abbildungen Ψ, die wir oben eingeführt haben. Die Abbildungen $\Psi^{-1}\circ\Phi$ besitzen lokal invertierbare Ableitungen. Wegen dem Satz der inversen Funktion sind sie dann lokal bijektiv, also insbesondere lokal auch surjektiv. Deshalb ist das Bild von $t \mapsto \Phi(t,x)$ eine Umgebung aller seiner Elemente, und damit offen. Wenn eine Folge im Bild von $t \mapsto \Phi(t,x)$ gegen ein Element $y \in N$ konvergiert, dann besitzt y auch eine Umgebung U mit einem entsprechenden Homöomorphismus Ψ. Dann gibt es eine Umgebung von y in N, die im Bild von $t \mapsto \Phi(t,y)$ enthalten ist. Dann gibt es in dieser Umgebung auch unendlich viele Element im Bild von $t \mapsto \Phi(t,x)$. Aus der Gleichung $\Phi(t',y) = \Phi(t,x)$ folgt dann $\Phi(t-t',x) = \Phi(-t',\Phi(t,x) = \Phi(-t',\Phi(t',y) = y$. Also liegt auch y im Bild von $t \mapsto \Phi(t,x)$. Deshalb ist das Bild von $t \mapsto \Phi(t,x)$ auch abgeschlossen. Das Bild unter einer stetigen Abbildung einer zusammenhängenden Menge ist wieder zusammenhängend. Deshalb ist für alle $x \in N$ das Bild von $t \mapsto \Phi(t,x)$ zusammenhängend und in der Zusammenhangskomponente von N enthalten, die x enthält. Weil das Bild aber offen und abgeschlossen ist, stimmt es dann mit der Zusammenhangskomponente überein, die x enthält.

Sei jetzt N_0 eine Zusammenhangskomponente von N, also das Bild der Abbildung $t \mapsto \Phi(t,x)$ für alle $x \in N_0$. Als letztes zeigen wir noch, dass die beiden Mengen

$$\{t \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(t,x) = x \text{ für ein } x \in N_0\} \qquad \{t \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(t,x) = x \text{ für alle } x \in N_0\}$$

übereinstimmen und diskrete Untergruppen von $\mathbb{R}^n$ sind. Weil für alle $x \in N_0$ die Abbildung $t \mapsto \Phi(t,x)$ eine surjektive Abbildung von $t \in \mathbb{R}^n$ auf N_0 ist, gibt es für zwei $x,y \in N_0$ ein $t \in \mathbb{R}^n$ mit $\Phi(t,x) = y$ bzw. $\Phi(-t,y) = x$. Dann folgt aus der Kommutativität von dem Fluss Φ, dass die beiden Mengen

$$\{t \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(t,x) = x\} \qquad\qquad \{t \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(t,y) = y\}$$

übereinstimmen. Beide Mengen sind wegen der Kommuativität von $t \mapsto \Phi(t,\cdot)$ Untergruppen von $\mathbb{R}^n$. Weil die Abbildungen $t \mapsto \Psi^{-1}\circ\Phi(t,x)$ lokale Homöomorphismen sind, gibt es eine Umgebung der $\{0\} \in \mathbb{R}^n$, die nur das Element 0 in dieser Menge enthält. Also ist diese Menge eine diskrete Untergruppe vom $\mathbb{R}^n$. **q.e.d.**

Wir wollen jetzt solche diskreten Untergruppen vom $\mathbb{R}^n$ untersuchen.

Lemma 2.123. *Für eine Untergruppe $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ist folgendes äquivalent:*

(i) *Es gibt eine offenen Umgebung der Null im $\mathbb{R}^n$, die schnittfremd zu $\Gamma \setminus \{0\}$ ist.*

(ii) *Jede beschränkte Menge im $\mathbb{R}^n$ enthält höchstens endlich viele Elemente von Γ.*

(iii) *Entweder ist $\Gamma = \{0\}$ oder es gibt ein Element kürzester Länge in $\Gamma \setminus \{0\}$.*

(iv) *Die Schnittmenge von Γ mit jedem linearen Unterraum vom $\mathbb{R}^n$ ist eine diskrete Untergruppe dieses linearen Unterraumes.*

(v) *Für $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$ ist $\Gamma \cap \mathbb{R}\gamma$ eine diskrete Untergruppe von $\mathbb{R}\gamma$. Wenn $\Gamma \not\subset \mathbb{R}\gamma$, dann gibt es ein Element in $\Gamma \setminus \mathbb{R}\gamma$ mit minimalem Abstand zu $\mathbb{R}\gamma$.*

(vi) *Es gibt endlich viele linear unabhängige Elemente $\gamma_1, \ldots \gamma_m$ in Γ, die Γ erzeugen.*

Beweis: Wenn (i) gilt, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $B(0, \varepsilon) \cap \Gamma = \{0\}$ gilt. Weil die Differenz zweier Elemente von Γ wieder in Γ liegt, ist dann die Länge der Differenz zweier Elemente in Γ entweder gleich Null oder gößer als ε. Dann enthält jeder Ball $B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ höchstens ein Element in Γ. Wenn A eine beschränkte Menge ist, dann ist der Abschluss von A eine kompakte Menge und besitzt eine endliche Überdeckung von Bällen vom Radius $\frac{\varepsilon}{2}$. Als enthält A höchstens endlich viele Elemente.

Wenn $\Gamma \neq \{0\}$ dann gibt es eine beschränkte Menge, die ein Element von $\Gamma \setminus \{0\}$ enthält. Also folgt (iii) aus (ii).

Aus (iii) folgt, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B(0, \varepsilon) \cap \Gamma = \{0\}$ gilt. Daraus folgt (i). Also sind (i)-(iii) äquivalent.

Weil die Schnittmenge einer offenen Umgebung der Null in $\mathbb{R}^n$ mit jedem linearen Unterraum vom $\mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung der Null in dem linearen Unterraum ist, folgt (iv) aus (i). Die Umkehrung folgt, weil $\mathbb{R}^n$ ein linearer Unterraum vom $\mathbb{R}^n$ ist.

Es gelte (i)-(iv), und γ sei ein Element von $\Gamma \setminus \{0\}$. Dann gibt es für alle $x \in \mathbb{R}\gamma$ ein $n \in \mathbb{Z}$, so dass $x - n\gamma \in B(0, \|\gamma\|)$ gilt. Für jedes Element von $\Gamma \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}\gamma)$, dessen Abstand zu $\mathbb{R}\gamma$ kleiner als δ ist, gibt es in $B(0, \delta + \|\gamma\|)$ eine Element von Γ mit dem gleichen Abstand zu $\mathbb{R}\gamma$. Wegen (ii) gibt es dann ein Element in $\Gamma \setminus \mathbb{R}\gamma)$ mit minimalem Abstand zu $\mathbb{R}\gamma$. Wenn umgekehrt (v) gilt und $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so dass alle Elemente von $(\Gamma \setminus \{0\}) \cap \mathbb{R}\gamma$ und $\Gamma \setminus \mathbb{R}\gamma$ länger als ε sind. Also gilt (i).

Wir beweisen jetzt unter den Bedingungen (i)-(v) induktiv in m die Aussage (vi). Das erste γ_1 definieren wir als das kürzeste Element von $\Gamma \setminus \{0\}$, soweit es existiert. Dann ist $\Gamma \cap \mathbb{R}\gamma_1 = \mathbb{Z}\gamma_1$, weil es sonst in $\mathbb{R}\gamma_1$ ein kürzeres Element geben würde. Sei $P_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $x \mapsto P_1(x) = x - \frac{\langle \gamma_1, x \rangle}{\langle \gamma_1, \gamma_1 \rangle}\gamma_1$ die orthogonale Projektion auf das orthogonale Komplement von $\mathbb{R}\gamma_1$. Dann ist der Kern von P_1 gleich $\mathbb{R}\gamma_1$. Wegen (v) ist das Bild von Γ unter P_1 eine diskrete Untergruppe vom $\mathbb{R}^n$. Offenbar gilt $\Gamma \simeq \mathbb{Z}\gamma_1 \oplus$

$P_1(\Gamma)$. Wir fahren jetzt induktiv fort und erhalten dadurch induktiv linear unabhängige Elemente $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \Gamma$, die Γ erzeugen. Wenn umgekehrt (vi) gilt, dann gibt es lineare Abbildungen $l_1, \dots, l_m$ auf $\mathbb{R}^n$, so dass $\gamma = l_1(\gamma)\gamma_1 + \dots + l_m(\gamma)\gamma_m$ für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt. Weil $l_1, \dots, l_m$ auf beschränkten Mengen beschränkt sind, folgt (ii). **q.e.d.**

Die Anzahl der Erzeugenden von Γ in (vi) ist die Dimension des von Γ erzeugten Unterraumes und deshalb unabhängig von der Wahl der Erzeugenden. Sie wird Rang der diskreten Untergruppe genannt. Wegen (vi) sind für diskrete Untergruppen $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ vom Rang n die Quotienten $\mathbb{R}^n/\Gamma$ isomorph zu $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, also n-dimensionale Tori. Wir können $\mathbb{R}^n$ in eine direkte Summe des Unterraumes, der von Γ erzeugt wir und dessen orthogonalem Komplement zerlegen. Der Quotient $\mathbb{R}^n/\Gamma$ ist isomorph zu der direkten Summe von dem orthogonalen Komplement und dem Quotienten des von Γ erzeugten Unterraumes durch Γ. Wenn der Rang von Γ nicht n ist, ist also $\mathbb{R}^n/\Gamma$ nicht kompakt.

Korollar 2.124. *Unter den Bedingungen von dem Satz von Liouville ist eine Zusammenhangskomponente der Niveaumenge N genau dann kompakt, wenn sie isomorph zu einem Torus ist.* **q.e.d.**

Zum Abschluss diese Abschnittes wollen wir zeigen, dass alle Hamiltonschen Systeme lokal vollständig integrabel sind:

Satz 2.125. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ eine offene Teilmenge und H eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf Ω. Dann besitzt jeder Punkt $x \in \Omega$, an dem ∇H nicht verschwindet, auf einer Umgebung $U \subset \Omega$ von x zweimal stetig differenzierbare Funktionen $f_1 = H, f_2 \dots, f_n$, die auf U die Bedingungen (i)-(ii) aus der Definition 2.121 erfüllen.*

Bevor wir diesen Satz beweisen können brauchen wir ein wenig Vorbereitung. Zwei dynamische Systeme $\Phi : \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$ und $\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \times \tilde{\Omega} \to \tilde{\Omega}$ sind offenbar äquivalent, wenn es einen Homöomorphismus $\Psi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ gibt, so dass Folgendes gilt:

$$\tilde{\Phi}(t, \cdot) = \Psi \circ \Phi(t, \cdot) \circ \Psi^{-1} \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aus der Gruppeneigenschaft folgt, dass das äquivalent dazu ist, dass das für kleine t gilt. Entsprechend induzieren zwei Vektorfelder F und $\tilde{F}$ auf den offenen Teilmengen Ω und $\tilde{\Omega}$ äquivalent lokale Flüsse, wenn für alle $x \in \tilde{\Omega}$ und hinreichend kleine t

$$\Phi_{\tilde{F}}(t, x) = \Psi(\Phi_F(t, \Psi^{-1}(x)))$$

gilt. Diese Gleichung ist offenbar äquivalent dazu, dass Ψ die Integralkurven von F auf die Integralkurven von $\tilde{F}$ abbildet. Wenn wir das nach t differenzieren folgt

$$\tilde{F}(x) = \Psi'(\Psi^{-1}(x))F(\Psi^{-1}(x)).$$

Diese Formel beschreibt wie sich Vektorfelder unter differenzierbaren Homöomorphismen transformieren. Unter den Koordinatenvektorfeldern einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ verstehen wir die konstanten Vektorfelder auf die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$.

Lemma 2.126. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $X_1, \ldots, X_m$ kommutierende stetig differenzierbare Vektorfelder auf Ω. Alle Punkte $x \in \Omega$, in denen $X_1, \ldots, X_m$ linear unabhängig sind, besitzen eine Umgebung $U \subset \Omega$ mit einem zweimal stetig differenzierbaren Homöomorphismus Φ von einer offenen Teilmenge $O \subset \mathbb{R}^n$ auf U, das die ersten m Koordinatenvektorfelder von O in die Vektorfelder $X_1, \ldots, X_m$ transformiert.*

Beweis: Sei $x_0 \in \Omega$ ein Punkt, an dem die Vektorfelder $X_1, \ldots, X_m$ linear unabhängig sind. Dann gibt es in $(t, x + x_0) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$ eine Umgebung von $(0, 0)$, auf der die Flüsse

$$(t, x) \mapsto \Phi_{X_1}(t_1, \Phi_{X_2}(t_2, \ldots, \Phi_{X_m}(t_m, x + x_0) \cdots)$$

definiert sind. Wir wählen einen lineare Unterraum V der Dimension $n - m$ vom $\mathbb{R}^n$, dessen Schnittmenge mit der linearen Hülle von $X_1(x_0), \ldots, X_m(x_0)$ gleich $\{0\}$ ist. Die Einschränkung der obigen Abbildung auf die Schnittmenge der Umgebung von $(0, 0)$ mit $(t, v) \in \mathbb{R}^n \times V$ definiert eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung nach Ω, deren Ableitung im Punkt $(t, v) = (0, 0)$ invertierbar ist. Wegen dem Satz der inversen Funktion gibt es dann einen zweimal stetig differenzierbaren Homöomorphismus Φ von einer Umgebung O von $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times V$ auf eine Umgebung U von x_0 mit zweimal stetig differenzierbarer Umkehrabbildung. Weil die lokalen Flüsse $\Phi_{X_1}(t_1, \cdot), \ldots, \Phi_{X_m}(t_m, \cdot)$ kommutieren, werden die Integralkurven der Vektorfelder $X_1, \ldots, X_m$ durch Φ^{-1} auf die Integralkurven der ersten m Koordinatenvektorfelder von $\mathbb{R}^m \times V$ abgebildet. Weil die Vektorfelder $X_1, \ldots, X_m$ durch Φ^{-1} auf stetig differenzierbare Vektorfelder abgebildet werden, die eindeutig durch ihre Integralkurven bestimmt sind, transformiert Φ die ersten m Koordinatenvektorfelder von $O \subset \mathbb{R}^m \times V \simeq \mathbb{R}^n$ in diese Vektorfelder.**q.e.d.**

Lemma 2.127. *Seien $f_1, \ldots, f_m$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$, die alle paarweise miteinander in Involution sind. Dann besitzen alle Punkte $x \in \Omega$, an denen $\nabla f_1(x), \ldots, \nabla f_m(x)$ lineare unabhängig sind, eine Umgebung U und einen zweimal stetig differenzierbaren Homöomorphismus Ψ auf eine offene Teilmenge $O \subset \mathbb{R}^{2n}$, so dass $X(f_1), \ldots, X(f_m)$ durch Ψ auf die ersten m Koordinatenvektorfelder abgebildet werden, und $f_1|_U = \Psi_{2n-m+1}, \ldots, f_m|_U = \Psi_{2n}$ gilt.*

Beweis: Die Abbildung $f = (f_1, \ldots, f_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ hat in einem Punkt $x_0 \in \Omega$, in dem $\nabla f_1(x_0), \ldots, \nabla f_m(x_0)$ linear unabhängig sind, eine Ableitung vom Rang m. Offenbar ist die Aussage äquivalent zu der analogen Aussage für die Funktion $f - f(x_0)$. Deshalb können wir $f(x_0) = 0$ annehmen. Sei K der Kern von $f'(x_0)$ als linearer Unterraum von $\mathbb{R}^{2n}$. Sei jetzt W ein m dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^{2n}$, den $f'(x_0)$

isomorph nach $\mathbb{R}^m$ abbildet. Dann gibt es eine offene Teilmenge $\tilde{\Omega}$ von $K \times W$, die durch $(k, w) \mapsto x_0 + k + w$ diffeomorph auf Ω abgebildet wird. Im Folgenden identifizieren wir $\tilde{\Omega}$ mit Ω. Die zweimal stetig differenzierbare Abbildung

$$\tilde{\Psi} : \tilde{\Omega} \to K \times \mathbb{R}^m, \quad (k, w) \mapsto (k, f(x_0 + k + w)$$

hat im Punkt $(0, 0) \in \tilde{\Omega}$ eine invertierbare Ableitung. Wegen dem Satz der inversen Funktion bildet Ψ eine Umgebung $\tilde{U} \subset \tilde{\Omega}$ bijektiv mit zweimal stetig differenzierbarer Umkehrabbildung Ψ^{-1} auf eine offene Umgebung $\tilde{O}$ von $(0, 0)$ ab.

Weil die Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ paarweise miteinander in Involution sind, kommutieren die Hamiltonschen Vektorfelder $X(f_1), \ldots, X(f_m)$, und ihre Integralkurven verbleiben in den entsprechenden Niveaumengen von f. Wenn wir wie oben beschrieben Ω mit $\tilde{\Omega}$ identifizieren, dann werden durch $\tilde{\Psi}$ diese Vektorfelder in stetig differenzierbare kommutierende Vektorfelder $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_m$ auf $\tilde{O}$ transformiert. Die Werte dieser Vektorfelder bei $(0, 0)$ liegen also in K und spannen einen m dimensionalen Unterraum X von K auf. Sei $\tilde{V}$ ein $2n - 2m$-dimensionaler Unterraum von K, dessen Schnittmenge mit X gleich $\{0\}$ ist. Dann können wir $\tilde{O}$ mit einer offenen Teilmenge von $X \times \tilde{V} \times \mathbb{R}^m$ identifizieren. Wir wenden das vorangehende Lemma auf die stetig differenzierbaren Vektorfelder $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_m$ von $\tilde{O}$ an, und wählen in dem Beweis dort die Menge V als $\tilde{V} \times \mathbb{R}^m$. Dann erhalten wir eine Homöomorphismus Φ von einer offenen Umgebung O von $(0, 0) \in X \times V \times \mathbb{R}^m$ auf eine offene Umgebung von $(0, 0) \in \tilde{O}$. Sei jetzt U das Urbild dieser offenen Umgebung von $(0, 0)$ in $\tilde{O}$ unter $\tilde{\Psi}$, aufgefasst als Teilmenge von Ω, und $\Psi = \Phi^{-1} \circ \tilde{\Psi}$. Dann ist Ψ eine bijektive zweimal stetig differenzierbare Abbildung von U auf O, mit zweimal stetig differenzierbarer Umkehrabbildung. Die Hamiltonschen Vektorfelder $X(f_1), \ldots, X(f_m)$ werden durch Ψ in die ersten m Koordinatenvektorfelder transformiert. Weil die Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ längs der Integralkurven dieser Vektorfelder konstant sind, läßt Φ^{-1} die letzten m Koordinaten invariant und es gilt $f|_U = \Psi_{2n_m+1}, \ldots, f_m|_U = \Psi_{2n}$. **q.e.d.**

Beweis von Satz 2.125: Wenn in der Situation des vorangehenden Lemmas m kleiner als n ist, dann sind die Funktionen $\Psi_{m+1} \ldots, \Psi_{2n-m}$ konstant auf den Integralkurven der Hamiltonschen Vektorfelder $X(f_1) \ldots, X(f_m)$. Deshalb sind diese Funktionen mit allen Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ in Involution. Deshalb gibt es dann lokal ein zusätzliches Integral der Bewegung. Außerdem sind die Ableitungen von $\Psi_{m+1} \ldots, \Psi_{2n-m}$ linear unabhängig von den Ableitungen von $f_1, \ldots, f_m$. Wir wenden also das vorangehende Lemma mehrfach an und erhalten auf einer immer kleineren Umgebung eines Punktes $x_0 \in \Omega$ mit $\nabla H(x_0) \neq 0$ eine immer größere Anzahl an Integralen der Bewegung.**q.e.d.**

Im Fall von n glatten Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$, die alle paarweise miteinander in Involution sind, besitzt wegen dem vorangehenden Lemma jeder Punkt $x_0 \in \Omega$, an dem die Gradienten $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_n$ linear unabhängig sind, einen Diffeomorphismus einer offenen Umgebung U von x_0 auf eine offene Teilmenge

$O \subset \mathbb{R}^{2n}$, die die Hamiltonschen Vektorfelder in die ersten n Koordinatenvektorfelder transformiert und deren letzte n Koordinaten mit den Funktionen übereinstimmen. Diese Abbildungen müssen nicht kanonisch sein.

Übungsaufgabe 2.128. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung und $\Psi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ die Abbildung mit $(q, p) \mapsto \Psi(q, p) = (q + f(p), p)$.*

(i) *Zeige, dass Ψ die Hamiltonschen Vektorfelder der letzten n Komponenten p von $(q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ auf die ersten n Koordinatenvektorfelder von $\mathbb{R}^{2n}$ abbildet.*

(ii) *Charakterisiere die Funktionen f, für die Ψ kanonisch ist.*

Übungsaufgabe 2.129. *Auf $\mathbb{R}^{2n}$ seien folgende Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ gegeben*

$$f_i : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}, \quad (q, p) \mapsto f_i(q, p) = q_i^2 + p_i^2.$$

(i) *Zeige, dass alle diese Funktionen paarweise miteinander in Involution sind.*

(ii) *Bestimme die Menge aller Punkte an denen die Gradienten dieser Funktionen linear unabhängig sind. Zeige, dass diese Menge eine Vereinigung von Niveaumengen ist, und charakterisiere die entsprechenden Funktionswerte.*

(iii) *Gebe eine möglichst große Teilmenge von Ω an, auf der die Hamiltonfunktion $H = f_1 + \ldots + f_n$ vollständig integrabel ist.*

(iv) *Zeige, dass alle Niveaumengen Tori sind.*

(v) *Zeige dass die Hamiltonschen Vektorfelder $X(f_1), \ldots, X(f_n)$ vollständig sind.*

2.12 Winkelwirkungsvariable

In diesem Abschnitt wollen wir für ein vollständig integrables System eine kanonische Abbildung konstruieren, die die Hamiltonschen Vektorfelder in die ersten n Koordinatenvektorfelder überführt und deren letzte n Einträge die Algebra der Integrale der Bewegung erzeugt. Dabei nehmen wir an, dass die Niveaumengen kompakt sind.

Lemma 2.130. *Seien $f = (f_1, \ldots, f_n)$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$, deren Gradienten auf einer kompakten Zusammenhangskomponente N_0 einer Niveaumenge $f^{-1}[\{f(x_0)\}]$ linear unabhängig sind. Dann gibt es einen zweimal stetig differenzierbaren Homöomorphismus Ψ mit zweimal stetig differenzierbarer Umkehrabbildung Ψ^{-1} von einer offene Teilmenge $U \subset \Omega$, die die kompakte Zusammenhangskomponente N_0 enthält, nach $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \times O$. Hier ist O eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Die letzten n Komponenten von ψ stimmen mit der Einschränkungen $f|_U$ überein.*

Beweis: Wir schränken f auf eine offene Umgebung von N_0 ein, deren Schnittmenge mit der Niveaumenge $f^{-1}[\{f(x_0)\}]$ gleich N_0 ist. Jeder Punkt $x \in N_0$ besitzt eine Umgebung, wie wir sie im Lemma 2.127 konstruiert haben. Weil die Niveaumenge kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Dann gibt es eine offene Umgebung O von $f(x_0) \in \mathbb{R}^n$, so dass für alle $y \in O$ die Niveaumengen $f^{-1}[\{y\}]$ in dieser endlichen Teilüberdeckung enthalten sind. Alle diese Niveaumengen sind dann kompakt, und die Hamiltonschen Vektorfelder sind auf ihnen vollständig. Wegen dem Satz von Liouville, sind alle diese Niveaumengen isomorph zu $\mathbb{R}^n/\Gamma(y)$. Die diskreten Untergruppen $\Gamma(y)$ haben dann für alle $y \in O$ den Rang n. Offenbar hängen die Erzeugenden von $\Gamma(y)$ zweimal stetig differenzierbar von $y \in O$ ab. Deshalb gibt es einen Isomorphismus von den Niveaumengen auf $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, der zweimal stetig differenzierbar von $y \in O$ abhängt. Dann folgt die Aussage aus dem Lemma 2.127 **q.e.d.**

Man kann die letzten n Komponenten dieser Abbildung Ψ so verändern, dass es eine kanonische Transformation wird. Um das zu zeigen benutzt man den Formalismus des Erzeugenden Funktionals einer kanonischen Abbildung.

Lemma 2.131. *Sei $(q,p) \mapsto (Q,P)$ eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung von einer offenen einfach zusammenhängenden Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ auf eine offene einfach zusammenhängende Teilmenge $\Omega' \subset \mathbb{R}^{2n}$. Das Vektorfeld*

$$F = (p,0) + \sum_{i=1}^{n} Q_i \nabla P_i$$

ist genau dann ein Gradientenvektorfeld ist, wenn $(q,p) \mapsto (Q,P)$ kanonisch ist.

Beweis: Wegen Lemma 2.5 ist ein Vektorfeld F genau dann ein Gradientenvektorfeld, wenn die Ableitung F' eine symmetrische Matrix ist. Für das Vektorfeld $F = (p,0)$ gilt offenbar $F' - (F')^t = J$.

Für das Vektorfeld $F = \sum_{i=1}^n Q_i \nabla P_i$ fallen in $F' - (F')^t$ die zweiten Ableitungen von P wegen dem Schwarzen Lemma weg. Dann gilt $F' - (F')^t = -(\Phi')^t J \Phi'$ (Übungsaufgabe), wobei Φ' die Jacobimatrix von $(q,p) \mapsto (Q,P)$ ist.

Dann folgt, dass das Vektorfeld $F = (p,0) + \sum_{i=1}^n Q_i \nabla P_i$ genau dann ein Gradientenvektorfeld ist, wenn die Jacobimatrix Φ' der Abbildung $(q,p) \mapsto (Q,P)$ auf Ω in $Sp(n)$ liegt. Dann folgt die Aussage aus dem Satz 2.113. **q.e.d.**

Wir schreiben für das Gradientenvektorfeld $F = (p,0) + \sum_{i=1}^n Q_i \nabla P_i$ der Funktion S auch $dS = p \cdot dq + Q \cdot dP$, und nennen solche Gradientenvektorfelder auch Einsformen. Deshalb definiert $p \cdot dq + Q \cdot dP$ auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge eine Funktion S. Wir nehmen jetzt an, dass diese Funktion nur von den Variablen q und P abhängt. Dann folgt aus $dS(q,P) = p \cdot dq + Q \cdot dP$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} \quad \text{und} \quad Q = \frac{\partial S}{\partial P}.$$

Wir konstruieren in der Situation von Lemma 2.130 eine kanonische Transformation $(q,p) \mapsto (Q,P)$, deren erste n Komponenten Q mit den ersten n Komponenten von Ψ übereinstimmen, und deren letzte n Komponenten nur von f abhängen. Wir nehmen dafür an, dass in einem Punkt $x_0 \in N_0$ die Ableitung von f nach p invertierbar ist. Das können wir durch eine geeignete Wahl von Koordinaten immer erreichen. Das entsprechende erzeugende Funktional $S(q,P)$ soll nur von q und P abhängen. Weil P dann die Integrale der Bewegung darstellt, sind für festes P auch die Funktionen $(f_1,\ldots,f_n)$ und damit auch die Niveaumengen fixiert. Die Funktion S stimmt auf den Niveaumengen mit dem Wegintegral $\int pdq$ überein. Wir wollen die Funktion S zunächst auf den Niveaumengen konstruieren.

Übungsaufgabe 2.132. *Zeige in der Situation von Lemma 2.130, dass es für alle $y \in O$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion S auf $\mathbb{R}^n$ gibt, so dass*

$$\frac{\partial S(t)}{\partial t_i} = X(f_i)(\Phi(t,y)) \cdot (p,0)(\Phi(t,y)) \quad \textit{für alle } t \in \mathbb{R}^n \textit{ und } S(0) = 0 \textit{ gilt.}$$

Dabei ist Φ die Wirkung von $\mathbb{R}^n$ auf der Niveaumenge $f^{-1}[\{f(y\}]$, die wir im Satz von Liouville konstruiert haben.

Satz 2.133. *In der Situation von Lemma 2.130 wählen wir Erzeugende $\gamma_1(y),\ldots,\gamma_n(y)$ der diskreten Untergruppe von der Niveaumenge durch y. Wir definieren die Funktionen*

$$P_1(y) = S(\gamma_1(y)) \quad ,\ldots, \quad P_n(y) = S(\gamma_n(y)).$$

Wenn die Ableitung der Abbildung P in $f(x_0)$ invertierbar ist, und die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial p}$ im Punkt x_0 invertierbar ist, dann ist die Abbildung $(\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n} \times P) \circ \Psi$ eine kanonische Abbildung von einer offenen Umgebung von N_0 auf das kartesische Produkt von $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ mit einer offenen Umgebung von $f(x_0 \in O$.

Beweis: Weil $\frac{\partial f}{\partial p}$ im Punkt x_0 invertierbar ist, ist eine Umgebung von x_0 eindeutig durch $p(q,f)$ und q parametriesierbar. Weil die Ableitung von P im Punkt $f(x_0)$ invertierbar ist, ist eine Umgebung von x_0 auch durch $p(q,P)$ und q parametrisierbar. Dort definieren wir die Funktion S durch $S(q,P) = \int_{q_0}^{q} p(q,P)dq$. Für festes P stimmt dieses S mit dem aus der obigen Übungsaufgabe überein, und ist mehrdeutig. Die Differenz zwischen den Zweigen sind ganzzahlige Linearkombinationen von den Einträgen von P. Deshalb sind die Ableitungen der Differenzen nach P lokal konstant. Die verschiedenen Zweige von Q unterscheiden sich dann nur um ganze Zahlen. Insbesondere sind die Differenzen von den Werten von Q an den Erzeugenden $\gamma_1(y),\ldots,\gamma_n(y)$ und 0 gleich den kanonischen Einheitsvektoren von $\mathbb{R}^n$. **q.e.d.**

Die Komponenten der Variablen Q werden Winkelvariable genannt und die Komponenten der Variable P Wirkungsvariable.

Kapitel 3

Stabilität von dynamischen Systemen

Es ist das Hauptziel dieses Kapitels, ein möglichst gutes Verständnis des qualitativen Verhaltens des von einer gewöhnlichen Differentialgleichung erzeugten Flusses in der Nähe eines kritischen Punktes zu gewinnen. Diese Fragestellung steht in engem Zusammenhang mit dem Langzeitverhalten, der sog. Stabilitätstheorie.

Zuerst beweisen wir das “Prinzip der linearisierten Stabilität”, welches es erlaubt, aus dem Spektrum des in einem kritischen Punkt linearisierten Vektorfeldes Aufschluß über die Ljapunovstabilität dieses kritischen Punktes zu bekommen. Im letzten Paragraphen dieses Kapitels betrachten wir, in Analogie zur Klassifizierung linearer Flüsse, hyperbolische kritische Punkte eines differenzierbaren Vektorfeldes. Wir beweisen den Linearisierungssatz von Grobmann und Hartmann sowie den Satz über die lokalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten.

3.1 Die Klassifikation linearer Flüsse

In diesem Abschnitt untersuchen wir zunächst die Stabilität von dynamischen Systemen, die dem Fluss lineare Vektorfelder auf einem endlichdimensionalen Vektorraum E entsprechen. Solche dynamischen Systeme haben immer die Null als Fixpunkt. Wir werden später sehen, dass in einer Umgebung von Fixpunkten, das Verhalten von allgemeineren dynamischen Systemen durch solche Systeme beschrieben werden kann. Deshalb ist es sinnvoll sich zunächst auf solche Systeme einzuschränken. Die entsprechenden dynamischen Systeme sind dann durch einen linearen Fluss gegeben:

$$\Phi(t, x) = e^{tA}x, \quad A \in \mathcal{L}(E)$$

Wir betrachten zuerst zweidimensionale reelle Systeme

$$\dot{x} = Ax \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2).$$

Aus dem ersten Kapitel wissen wir, daß die Lösungen durch das Spektrum $\sigma(A)$ und die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte charakterisiert sind und daß wir sinnvollerweise A diagonalisieren bzw. auf Jordansche Normalform bringen:

$$\dot{y} = By \quad \text{mit} y = Px \quad \text{und} \quad B = P^{-1}AP$$

und einem geeigneten invertierbaren $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ betrachten. Dazu müssen wir verschiedene Fälle unterscheiden:
1. Fall: A hat reelle nichtverschwindende Eigenwerte verschiedenen Vorzeichens. In diesem Fall ist A halbeinfach und es existiert ein invertierbares $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ mit

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda < 0 < \mu.$$

Also wird der von B erzeugte Fluß $e^{tB}y$ (in y-Koordinaten!) durch

$$t \to (e^{\lambda t} y^1, e^{\mu t} y^2)$$

gegeben. In diesem Fall sagt man, der Nullpunkt sei ein Sattel.
2.Fall: Alle Eigenwerte haben negative Realteile. Dann benutzen wir das Folgende Stabilitätskriterium. In diesem Fall sagt man, der Nullpunkt sei eine Senke oder er sei asymptotisch stabil.

Satz 3.1 (Stabilitätskriterium). *Für $A \in \mathcal{L}(E)$ auf einem endlichdimensionalen Banachraum E konvergiert* $\exp(tA)$ *in $\mathcal{L}(E)$ im Grenzwert $t \to \infty$ genau dann gegen Null, wenn alle Eigenwerte (komplexen Nullstellen des charakteristischen Polynoms) von A negativen Realteil haben.*

Beweis: Wir bringen A auf Jordansche Normalform. Weil alle Normen eines endlichdimensionalen Vektorraumes äquivalent sind, genügt es die Aussage für die Jordansche Normalform von A zu beweisen. Wegen Übungsaufgabe1.60 sind dann alle Lösungen von $\dot{x} = Ax$ Linearkombinationen von $x(t) = t^n \exp(t\lambda)x$, wobei λ ein Eigenwert von A ist. Weil $|\exp(t\lambda)| = \exp(t\Re(\lambda))$ gilt, konvergieren diese Lösungen für $t \to \infty$ genau dann gegen Null, wenn die Realteile von allen Eigenwerten negativ sind. **q.e.d.**

Wir betrachten nun verschiedene Unterfälle:
(a) Die Eigenwerte sind reell: $\lambda \leq \mu < 0$. Wenn A diagonalisierbar ist, dann folgt

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Dann erhält man $y(t) = (e^{\lambda t}y^1, e^{\mu t}y^2)$. Ist A nicht diagonalisierbar, dann muß notwendigerweise $\lambda = \mu$ sein. So hat A die Jordansche Normalform

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda < 0.$$

Die Matrix P ist dabei reell $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, da λ reell ist. Dann hat die transformierte Gleichung $\dot{y} = By$ die Lösungen $y(t) = y_1(t), y_2(t))$ mit

$$y_1(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta t e^{\lambda t} \qquad\qquad y_2(t) = \beta e^{\lambda t}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Man kann beispielweise (bei geeigneten Konstanten α und β) $y_1 = \xi$ als Funktion von $y_2 = \eta$ ausdrücken. Dann erhalten wir

$$\xi = (\alpha/\beta)\eta + (1/\lambda)\eta \log(\eta/\beta) \quad \text{mit} \quad \lambda < 0.$$

In allen diesen Fällen sagt man, 0 sei ein (stabiler) Knoten, wobei man im letzten Fall oft von einem uneigentlichen Knoten und im Fall von $B = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda)$ von einem Focus spricht.

(b) Die Eigenwerte sind komplex: also konjugiert komplex, wie wir bereits wissen. Ist $A_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ die Komplexifizierung von $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, so folgt aus $A_{\mathbb{C}}z = \lambda z$ durch Konjugation $A_{\mathbb{C}}\bar{z} = \bar{\lambda}\bar{z}$, d.h. $A_{\mathbb{C}}z = \lambda z \Leftrightarrow A_{\mathbb{C}}\bar{z} - \bar{\lambda}\bar{z}$. Ist also z ein Eigenvektor von $A_{\mathbb{C}}$ zum Eigenwert λ so besitzt $\mathbb{C}^2$ die Basis

$$\{z, \bar{z}\} = \{x + iy, x - iy\} \quad \text{mit} \quad x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Wegen $\lambda \notin \mathbb{R}$ ist dann $\{x, y\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Ferner gilt mit $\lambda = a + i\omega$:

$$Ax + iAy = A_{\mathbb{C}}(x + iy) = (\alpha + i\omega)(x + iy) = \alpha x - \omega x + i(\alpha y + \omega x),$$

$$Ax = \alpha x - \omega y \qquad\qquad Ay = \omega x + \alpha y.$$

Wir sehen: hat $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ einen nichtreellen Eigenwert $\lambda = \alpha + i\omega$, mit $\omega \neq 0$, so ist auch $\bar{\lambda} = \alpha - i\omega$ ein Eigenwert und es existiert ein invertierbares $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ mit

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix}, \quad \omega > 0.$$

Um e^{tB} zu berechnen, identifizieren wir $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ durch $(\xi, \eta) \leftrightarrow \xi + i\eta$. Wegen

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\xi & - & \omega\eta \\ \omega\xi & + & \alpha\eta \end{pmatrix} \leftrightarrow (\alpha + i\omega)(\xi + i\eta),$$

entspricht bei dieser Identifikation B der Multiplikation mit $\lambda = \alpha + i\omega$. Wenn wir $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ mit $\mathbb{C}$ wie üblich durch $M \in \mathcal{L}(\mathbb{C}) \leftrightarrow m = M1 \in \mathbb{C}$ identifizieren, erhalten wir einen $\mathbb{R}$-Algebraisomorphismus $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \leftrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Folglich entspricht B^n für alle $n \in \mathbb{N}$ der Matrix zu λ^n und somit e^{tB} der Matrix zu $e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))$, also

$$e^{tB} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix}\cos\omega t & -\sin\omega t\\ \sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}.$$

Geometrisch bewirkt also e^{tB} eine Streckung mit dem Faktor $e^{\lambda t}$ und eine Drehung im mathematisch positiven Sinn um den Winkel ω. In diesem Fall sagt man, der Ursprung sei ein stabiler Strudel oder eine stabile Spirale.

3.Fall: Alle Eigenwerte haben positive Realteile. Durch die Zeitumkehr können wir diesen Fall in den zweiten transformieren. Es folgt für jede nichttriviale Lösung

$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = \infty \text{ und } \lim_{t\to-\infty} u(t) = 0$$

Man sagt, der Ursprung sei eine Quelle. Wegen $e^{tA} = e^{-t(-A)}$ erhält man die Phasenporträts von Fall 2 durch Umkehren der Pfeile. Man spricht dann von instabilen Foci, Knoten und Strudeln.

4.Fall: Die Eigenwerte sind rein imaginär. In diesem Fall kann A auf die Form

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix}0 & -\omega\\ \omega & 0\end{pmatrix}, \quad \omega > 0,$$

transformiert werden. Folglich gilt

$$e^{tB} = \begin{pmatrix}\cos\omega t & -\sin\omega t\\ \sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix},$$

und alle Lösungen sind periodisch mit der Periode $2\pi/\omega$. In den y-Koordinaten sind die Orbits Kreise mit 0 als Mittelpunkt, in den x-Koordinaten Ellipsen. In diesem Fall sagt man, 0 sei ein Zentrum oder ein Wirbel.

Die Information über die Eigenwerte von $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ ist in dem charakteristischen Polynom

$$\det(A - \lambda) = \lambda^2 - \operatorname{Spur}(A)\lambda + \det(A)$$

enthalten. Mit der Diskriminante $D = \operatorname{Spur}^2(A) - 4\det(A)$ werden die Eigenwerte durch $\frac{1}{2}(\operatorname{Spur}(A) \pm \sqrt{D})$ gegeben. Folglich sind die Eigenwerte reell, wenn $D \geq 0$ gilt, und sie sind komplex mit negativem Realteil für $\operatorname{Spur}(A) < 0$ und $D < 0$, usw.. Also kann man die geometrische Information über die Phasenporträts von $\dot{x} = Ax$, die vom charakteristischen Polynom abgeleitet werden kann, zusammenfassen:

Sattel: $\det(A) < 0$.

Senken: $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) < 0$.

Knoten: $\mathrm{Spur}^2(A) > 4\det(A)$.
Wirbel: $\mathrm{Spur}^2(A) < 4\det(A)$.

Zentren: $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) = 0$.

Quellen: $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) > 0$.

Knoten: $\mathrm{Spur}^2(A) > 4\det(A)$.
Wirbel: $\mathrm{Spur}^2(A) < 4\det(A)$.

3.2 Hyperbolische lineare Flüsse

Im Folgenden wollen wir die sogenannten hyperbolischen linearen Flüsse einführen. Sie sind im Wesentlichen dadurch charakterisiert, dass sie keine Grenzfälle enthalten die durch sehr kleine Störungen ihr Verhalten dramatisch verändern können. Wir betrachten dafür den allgemeinen Fall eines beliebigen $\mathbb{K}$- Vektorraums E der Dimension $m < \infty$. Für $A \in \mathcal{L}(E)$ nennen wir dann kurz e^{tA} den von A erzeugten linearen Fluß auf E (statt der präziseren Bezeichnung

$$\Phi : \mathbb{R} \times E \to E, \quad (t, x) \mapsto e^{tA}x,$$

die wir früher verwendeten). Der Nullpunkt von E, der ein kritischer Punkt von e^{tA} ist (der einzige, wenn A injektiv ist), heißt eine Senke (bzw. Quelle), wenn

$$\lim_{t\to\infty} e^{tA}x = 0 \qquad \text{bzw.} \lim_{t\to-\infty} e^{tA}x = 0 \qquad \text{für alle } x \in E \setminus \{0\}.$$

Wegen dem Stabilitätskriterium ist 0 genau dann eine Senke (bzw. Quelle), wenn gilt

$$\Re(\lambda) < 0 \quad \text{bzw. } \Re(\lambda) > 0 \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \sigma(A).$$

Ist 0 eine Senke (bzw. Quelle), so sagt man auch, der lineare Fluß e^{tA} sei eine Kontraktion (bzw. Expansion). Wir wollen nun zeigen, daß bei einer Kontraktion (bzw. Expansion) jede Flußlinie $\varphi_x(t) = e^{tA}x$ mit $x \neq 0$ für $t \to \infty$ exponentiell gegen 0 (bzw. "gegen ∞") konvergiert. Dazu benötigen wir das folgende wichtige Lemma.

Ist $M \subset \mathbb{C}$ nicht leer und ist $\beta \in \mathbb{R}$, so schreiben wir im folgenden

$$\Re(M) < \beta,$$

wenn $\Re(m) < \beta$ für alle $m \in M$ gilt. Analog sind verwandte Ungleichungen zu interpretieren. Ferner verstehen wir unter einer Hilbertnorm $\|\cdot\|$ eine aus einem Skalarprodukt abgeleitete Norm, d.h. für ein geeignetes Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf E gilt $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

Lemma 3.2. *Für $A \in \mathcal{L}(E)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelte $\Re(\sigma(A)) < \alpha$. Dann existiert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf E mit* $\|e^{tA}\| \leq e^{\alpha t}$ *für alle* $t \in \mathbb{R}_+$.

Beweis: Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann wissen wir, daß A bzgl. einer geeigneten Basis die Form

$$A = D + N \quad \text{mit} \quad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_k) = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_m)$$

und $N^m = 0$ sowie $DN = ND$. Außerdem können wir die Basis $\{e_1, \ldots, e_m\}$ von E so wählen, daß gilt: $Ne_j = e_{j-1}$ oder 0. Ersetzen wir e_j durch $a_j = \delta^j e_j$ mit $\delta > 0$, so bleibt D unverändert, und für N gilt: $Na_j = \delta a_{j-1}$ oder 0. Also hat die Matrix von N bezüglich der Basis $\{a_1, \ldots, a_m\}$ höchstens in der oberen Nebendiagonalen von Null verschiedene Elemente, und zwar die Zahlen δ. Wenn wir nun die zu dieser Basis gehörige euklidische Norm verwenden, erhalten wir zu jedem $\epsilon > 0$ eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf E mit $\|N\| \leq \epsilon$. Für $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ und e^{tD} gilt offensichtlich

$$\|D\| = \max_{1\leq j\leq m} |\mu_j| \quad \|e^{tD}\| = \max_{1\leq j\leq m} |e^{t\mu_j}| = \max_{1\leq j\leq m} e^{t\Re(\mu_j)} \leq e^{t(a-\epsilon)},$$

wenn wir $\epsilon > 0$ so wählen, daß $\Re(\lambda) \leq \alpha - \epsilon$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$ ist. Also gilt für $t > 0$

$$\|e^{tA}\| = \|e^{tD+tN}\| = \|e^{tD}e^{tN}\| \leq \|e^{tD}\| \cdot \|e^{tN}\| \leq e^{t(a-\epsilon)}e^{t\|N\|} \leq e^{t(a-\epsilon)}e^{t\epsilon} = e^{\alpha t}$$

Da der Realteil eines komplexen Skalarproduktes ein reelles Skalarprodukt ist, induziert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_{E_\mathbb{C}}$, die auf der Komplexifizierung $E_\mathbb{C}$ eines reellen Vektorraumes E definiert ist, auf dem reellen Untervektorraum E eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_E$. Da für $A \in \mathcal{L}(E)$ und $x \in E$ offensichtlich $\|Ax\|_E = \|A_\mathbb{C}x\|_{E_\mathbb{C}}$ gilt, folgt $\|A\|_E = \|A\|_{E_\mathbb{C}}$. Also erhalten wir die Behauptung im reellen Fall ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) durch Anwenden der obigen Resultate auf die Komplexifizierung. **q.e.d.**

Korollar 3.3. **(i)** *Gilt $\Re(\sigma(A)) < \alpha$, so existiert eine Konstante $\beta \geq 0$ mit*

$$\|e^{tA}\| \leq \beta e^{\alpha t} \quad \textit{für alle} \quad t \geq 0.$$

(ii) *Gilt $\Re(\sigma(A)) > \alpha$, so existiert eine Konstante $\gamma > 0$ mit*

$$\|e^{tA}x\| \geq \gamma e^{\alpha t}\|x\| \quad \textit{für} \quad x \in E \textit{ und } t \geq 0.$$

Beweis: (i) folgt aus der Äquivalenz aller Normen auf dem endlichdimensionalen Raum $\mathcal{L}(E)$ und dem vorangehenden Lemma. In (ii) folgt aus dem vorangehenden Lemma wegen $\sigma(-A) = -\sigma(A)$ für eine geeignete Hilbertnorm $\|\cdot\|$

$$\|e^{-tA}\| = \|e^{t(-A)}\| \leq e^{-\alpha t} \quad \text{für} \quad t \geq 0.$$

$$\|x\| = \|e^{-tA}e^{tA}x\| \leq \|e^{-tA}\|\|e^{tA}x\| \leq e^{-\alpha t}\|e^{tA}x\| \quad \text{für} \quad x \in E \text{ und } t \geq 0.$$

Daraus folgt (ii) wieder wegen der Äquivalenz der Normen. **q.e.d.**

Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir das folgende Theorem über das exponentielle Abklingen bzw. Anwachsen der Flußlinien im Falle einer Senke bzw. Quelle.

Satz 3.4. *Es Sei $A \in \mathcal{L}(E)$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Der Nullpunkt einer Senke.*

(ii) *Es existieren $\alpha > 0$ und $\beta \geq 0$ mit $\|e^{tA}x\| \leq \beta e^{-\alpha t}\|x\|$ für alle $t \geq 0$ und $x \in E$.*

(iii) *Es existieren eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf E und $\alpha > 0$ mit $\|e^{tA}\| \leq e^{-\alpha t}$ für $t \geq 0$.*

Ebenso sind äquivalent:

(i') *Der Nullpunkt ist eine Quelle.*

(ii') *Es existieren $\alpha > 0$ und $\beta \geq 0$ mit $\|e^{tA}x\| \geq \beta e^{\alpha t}\|x\|$ für alle $t \geq 0$ und $x \in E$.*

(iii') *Es existieren eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ und $\alpha > 0$ mit $\|e^{tA}x\| \geq e^{-\alpha t}\|x\|$ für $t \geq 0$.*

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem vorangehenden Korollar. **q.e.d.**

Im folgenden bezeichnen wir mit $m(\lambda)$ die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ von $A \in \mathcal{L}(E)$. Außerdem zerlegen wir das Spektrum $\sigma(A)$ disjunkt,

$$\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_n(A) \cup \sigma_u(A),$$

in das "stabile Spektrum":	$\sigma_s(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \Re(\lambda) < 0\}$,
das "neutrale Spektrum":	$\sigma_n(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \Re(\lambda) = 0\}$,
und das "instabile Spektrum":	$\sigma_u(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \Re(\lambda) > 0\}$.

Definition 3.5. *Der von A erzeugte Fluß e^{tA} heißt hyperbolisch, wenn $\sigma_n(A) = \emptyset$, also*

$$\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_u(A).$$

Das folgende Theorem liefert die mehrdimensionale Verallgemeinerung des zweidimensionalen Sattels.

Satz 3.6. *Sei e^{tA} ein hyperbolischer linearer Fluß. Dann gibt es eine Zerlegung*

$$E = E_s \oplus E_u \qquad \textit{mit} \quad A = A_s \oplus A_u \qquad \textit{und} \quad e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u},$$

derart, daß e^{tA_s} eine Kontraktion und e^{tA_u} eine Expansion sind. Sie ist eindeutig mit

$$dim(E_s) = \sum_{\lambda \in \sigma_s(A)} m(\lambda) \qquad dim(E_u) = \sum_{\lambda \in \sigma_u(A)} m(\lambda).$$

Beweis: Wir betrachten zuerst den komplexen Fall: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir setzen

$$E_s = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_s(A)} E_\lambda \qquad E_u = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_u(A)} E_\lambda \qquad \text{mit } E_\lambda = \{x \in E \mid (A-\lambda)^{m(\lambda)} x = 0\}.$$

Dann ist $E = E_s \oplus E_u$, und diese Zerlegung zerlegt $A = A_s \oplus A_u$. Offenbar gilt

$$\sigma(A_s) = \sigma_s(A) \quad \text{und} \quad \sigma(A_u) = \sigma_u(A).$$

Nun folgt aus dem Stabilitätskriterium, daß e^{tA_s} eine Kontraktion bzw. e^{tA_u} eine Expansion ist. Offenbar gelten die Formeln für die Dimensionen. Es bleibt noch, die Eindeutigkeit zu zeigen. Aus dem Satz über die Jordansche Normalform wissen wir, dass ein Unterraum von E genau dann invariant unter A ist, wenn er eine direkte Summe von invarianten Unterräumen folgender Zerlegung ist:

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} E_\lambda.$$

Die Eigenwerte der Einschränkung von A auf einen invarianten Unterraum von E bestehen aus den Eigenwerten $\lambda \in \sigma(A)$, für die der entsprechende invariante Unterraum von E_λ nicht trivial ist. Insbesondere besitzt jeder invariante Unterraum von E eine Zerlegung in eine direkte Summe von invarianten Unterräumen von E_s und von E_u. Wegen dem Stabilitätskriterium ist jeder invariante Unterraum von E, auf dem die Einschränkung von A eine Kontraktion ist, ein invarianter Unterraum von E_s, und jeder invariante Unterraum von E, auf dem die Einschränkung von A eine Expansion ist, ein Unterraum von E_u. Daraus folgt die Eindeutigkeit der Zerlegung.

Es sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann können wir das bereits Bewiesene auf die Komplexifizierung $E_{\mathbb{C}} = E + iE$ und $A_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}})$ anwenden. Also gilt

$$E_{\mathbb{C}} = (E_{\mathbb{C}})_s \oplus (E_{\mathbb{C}})_u \text{ und } A_{\mathbb{C}} = (A_{\mathbb{C}})_s \oplus (A_{\mathbb{C}})_u,$$

derart, daß $e^{t(A_{\mathbb{C}})_s}$ eine Kontraktion und $e_u^{t(A_{\mathbb{C}})}$ eine Expansion sind. Wir setzen

$$E_s = (E_{\mathbb{C}})_s \cap E \text{ und } E_u = (E_{\mathbb{C}})_u \cap E.$$

Ein komplexer Unterraum von $E_{\mathbb{C}}$ ist die Komplexifizierung von der Schnittmenge $E_{\mathbb{C}} \cap E$, wenn er invariant unter der komplexen Konjugation ist. Die komplexe Konjugation bildet E_λ auf $\{x \in E \mid (A - \bar{\lambda})^{m(\lambda)} x = 0\}$ ab. Deshalb ist eine direkte Summe von solchen Unterräumen genau dann invariant unter der komplexen Konjugation, wenn die entsprechende Teilmenge von $\sigma(A)$ invariant unter der komplexen Konjugation ist. Also sind $(E_{\mathbb{C}})_s$ und $(E_{\mathbb{C}})_u$ invariant unter der komplexen Konjugation und damit die Komplexifizierungen von E_s und E_u. Die Behauptung folgt aus der entsprechenden Behauptung im komplexen Fall. **q.e.d.**

Die invarianten Untervektorräume E_s bzw. E_u des hyperbolischen linearen Flusses e^{tA} heißen stabile bzw. instabile Untervektorräume des Flusses. Ein hyperbolischer linearer Fluß kann eine Kontraktion ($E_u = \{0\}$) oder eine Expansion ($E_s = \{0\}$) sein.

Es erhebt sich die Frage, was an den Phasenporträts dieses Abschnitts charakteristisch ist. Ist es möglich, durch Einführen geeigneter nichtlinearer Koordinaten einen Sattel in einen Knoten oder einen stabilen Knoten in eine instabile Spirale zu verwandeln? Wir werden zeigen, daß dies nicht der Fall ist, daß es aber wohl möglich ist, einen stabilen Knoten in einen stabilen Strudel zu transformieren. Dazu müssen wir zuerst den Begriff äquivalenter Flüsse präzisieren.

Definition 3.7. *Seinen Φ und $\tilde{\Phi}$ zwei lokale Flüsse auf den topologischen Räumen Ω und $\tilde{\Omega}$, mit den Definitionsbereichen $W \subset \mathbb{R} \times \Omega$ und $\tilde{W} \subset \mathbb{R} \times \tilde{\Omega}$. Die Lokalen Flüsse Φ und $\tilde{\Phi}$ heißen flußäquivalent, wenn es einen orientierungserhaltenden Automorphismus $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und einen Homöomorphismus Ψ von Ω auf $\tilde{\Omega}$ gibt, so dass $\alpha \times \Psi$ ein Hoöomorphismus von W auf $\tilde{W}$ ist, und $\Psi \circ \Phi = \tilde{\Phi} \circ (\alpha \times \Psi)$ auf W gilt.*

Jedes Paar (α, Ψ) mit diesen Eigenschaften heißt eine (topologische) Flußäquivalenz. Folglich ist (α, Ψ) genau dann eine topologische Flußäquivalenz, wenn das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \Omega \subset W & \xrightarrow{\Phi} & \Omega \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha \times \Psi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Psi} \\ \mathbb{R} \times \tilde{\Omega} \subset \tilde{W} & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & \tilde{\Omega}. \end{array}$$

Hierbei ist $\alpha \times \Psi$ durch $\alpha \times \Psi : W \to \mathbb{R} \times \Omega$, mit $(\alpha \times \Psi)(t, x) = (\alpha(t), \Psi(x))$ definiert.

Sind Ω und $\tilde{\Omega}$ offene Teilmengen vom $\mathbb{R}^n$, und Ψ stetig differenzierbar mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung, so heißen Φ und $\tilde{\Phi}$ stetig differenzierbar äquivalent und (α, Ψ) ist eine C^1-Flußäquivalenz. Sind Ω und $\tilde{\Omega}$ Banachräume und Ψ linear, so heißen Φ und $\tilde{\Phi}$ linear äquivalent und (α, Ψ) ist eine lineare Flußäquivalenz.

Bemerkung 3.8. *Ein orientierungserhaltender Automorphismus von $\mathbb{R}$ ist von der Form*

$$\alpha(t) = \alpha \cdot t \quad \textit{für alle} \quad t \in \mathbb{R}$$

mit einer eindeutig bestimmten positiven Zahl α. Und jedes $\alpha > 0$ definiert dadurch einen orientierungserhaltenden Automorphismus definiert. Wir im folgenden den Automorphismus α stets mit der durch ihn bestimmten positiven Zahl identifizieren.

Offenbar sind (topologische) Flußäquivalenz bzw. C^1-Flußäquivalenz bzw. lineare Flußäquivalenz Äquivalenzrelationen.

Außerdem bildet eine Flussäquivalenz Ψ die Orbits von Φ auf die Orbits von $\tilde{\Phi}$ ab, und zwar unter Erhaltung der Orientierung.

Es ist nun leicht, lineare Flüsse linear zu klassifizieren, d.h. die Äquivalenzklassen der linearen Flußäquivalenz zu bestimmen.

Satz 3.9. *Seien A und B lineare Abbildungen auf endlichdimensionalen Vektorräumen. Dann sind e^{tA} und e^{tB} genau dann linear flußäquivalent, wenn für ein $\alpha > 0$ die beiden linearen Abbildungen A und αB die gleiche Jordansche Normalform haben.*

Beweis: Ist (α, Ψ) eine lineare Flußäquivalenz zwischen e^{tA} und e^{tB}, so gilt

$$\Psi \circ e^{tA} = e^{\alpha t B} \circ \Psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Psi \circ e^{tA} = e^{\alpha t B} \circ \Psi \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Da der Generator des Flusses eindeutig bestimmt ist, ist das zu $A = \Psi^{-1} \circ \alpha B \circ \Psi$ äquivalent. Also haben A und αB die gleiche Jordansche Normalform.

Umgekehrt folgt daraus, dass A und αB für ein $\alpha > 0$ die gleiche Jordansche Normalform haben, dass es ein invertierbares Ψ gibt mit $A = \Psi^{-1} \alpha B \Psi$. **q.e.d.**

Der nächste Satz zeigt, daß die differenzierbare Klassifizierung nichts Neues ergibt.

Satz 3.10. *Für lineare Abbildungen A und B auf endlichdimensionalen Vektorräumen sind e^{tA} und e^{tB} genau dann C^1-flußäquivalent, wenn sie linear flußäquivalent sind.*

Beweis: Es sei (α, Ψ) eine C^1-Flußäquivalenz zwischen e^{tA} und e^{tB}. Damm führt der stetig differenzierbare Homöomorphismus $\Psi \in C^1$ dem kritischen Punkt $x = 0$ des Flusses e^{tA} in einen kritischen Punkt y des Flusses e^{tB} über, also in ein y mit $e^{sB} y = y$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Bezeichnen wir mit T die Translation $x \to x - y$, so stellt $(\alpha, T \circ \Psi)$ eine Flußäquivalenz zwischen e^{tA} und e^{tB} dar wegen

$$\begin{aligned} T \circ \Psi \circ e^{tA} x &= \Psi \circ e^{tA} x - y = e^{\alpha t B} \Psi(x) - y \\ &= e^{\alpha t B} \Psi(x) - e^{\alpha t B} y = e^{\alpha t B} (T \circ \Psi)(x) \quad \text{für alle } x \in E, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Außerdem ist $T \circ \Psi(0) = 0$ und $C = (T \circ \Psi)'(0)$ eine invertierbare lineare Abbildung. Durch Differenzieren der Beziehung in $x = 0$ folgt aus

$$(T \circ \Psi) \circ e^{tA} x = e^{\alpha t B} (T \circ \Psi)(x) \quad \Longrightarrow \quad C e^{tA} = e^{\alpha t B} C \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Also ist (α, C) eine lineare Flußäquivalenz zwischen e^{tA} und e^{tB}. Die Umkehrung ist offensichtlich. **q.e.d.**

Für die wesentlich schwierigere topologische Klassifizierung linearer Flüsse benötigen wir das folgende

Lemma 3.11. *Die Realteile aller Eigenwerte von $A \in \mathcal{L}(E)$ auf einem endlichdimensionalen Vektorraum E seien negativ, und Φ sei der von A erzeugte lineare Fluß auf E, d.h. $\Phi(t, \cdot) = e^{tA}$ für $t \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf E, derart, daß*

$$\bar{\Phi} : \mathbb{R} \times \mathbb{S} \to E \setminus \{0\}, \quad (t, x) \mapsto \Phi(t, x)$$

auf $\mathbb{R} \times \mathbb{S} = \mathbb{R} \times \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ ein Homöomorphismus ist.

Beweis: Wähle $\alpha > 0$ so, dass die Realteile aller Eigenwerte von A kleiner als $-\alpha$ sind. Dann existiert nach Lemma 3.2 eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf E mit

$$\|e^{tA}\| \leq e^{-\alpha t} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Es sei $y \in E \setminus \{0\}$ beliebig. Dann ist $\Phi(t, y) = e^{tA} y \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ wegen $y = \Phi(-t, \Phi(t, y))$ und wegen Satz 3.4

$$\|y\| = \|\Phi(t, \cdot) \circ \Phi(-t, y)\| \leq e^{-\alpha t} \|\Phi(-t, y)\|, \quad \text{also} \quad \|\Phi(-t, y)\| \geq e^{\alpha t} \|y\|$$

für alle $t \geq 0$. Daraus ergibt sich unmittelbar, daß jeder nichtkritische Orbit die Sphäre $\mathbb{S}$ in genau einem Punkt schneidet. Also ist

$$\bar{\Phi} : \mathbb{R} \times \mathbb{S} \to E \setminus \{0\}$$

eine stetige Bijektion. Es bleibt zu zeigen, daß die Umkehrabbildung stetig ist.

Es sei also $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $E \setminus \{0\}$, die gegen $y \in E \setminus \{0\}$ konvergiert. Dann existieren eine Folge (t_k) in $\mathbb{R}$ und eine Folge (x_k) in $\mathbb{S}$ mit $y_k = \Phi(t_k, x_k)$. Da $\mathbb{S}$ kompakt ist können wir durch Übergang zu einer geeigneten Teilfolge annehmen, daß $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen $x \in \mathbb{S}$ konvergiert. Durch Auswahl einer weiteren Teilfolge können wir auch annehmen, daß (t_k) gegen $t \in \bar{\mathbb{R}}$ konvergiert. Gilt $t \in (0, \infty]$, so folgt für große k

$$\|y_k\| = \|\Phi(t_k, x_k)\| \leq e^{-\alpha t_k} \|x_k\| = e^{-\alpha t_k},$$

also $\|y\| \leq e^{-\alpha t}$, woraus wegen $y \neq 0$ folgt, daß t endlich ist. Ist $t \in [-\infty, 0)$, so folgt für große k

$$\|y_k\| = \|\Phi(t_k, x_k)\| \leq e^{-\alpha t_k} \|x_k\| = e^{-\alpha t_k},$$

also $\|y\| \geq e^{-\alpha t} = e^{\alpha |t|}$, woraus sich $t > -\infty$ ergibt. Somit ist $t \in \mathbb{R}$, und aus der Stetigkeit von Φ folgt $y = \Phi(t, x) = \Phi(t, x)$. Da dies für jede konvergente Teilfolge gilt, sehen wir, daß die Umkehrabbildung $\bar{\Phi}^{-1}$ (d.h. die "Projektion" von $y \in E \setminus \{0\}$ längs des Orbits $\gamma(y)$ auf $\mathbb{S}$) stetig ist. **q.e.d.**

Das obige Lemma besagt geometrisch, daß jeder nichtkritische Orbit die Einheitssphäre $\mathbb{S}$ einer geeigneten Hilbertnorm transversal schneidet. Das folgende Lemma besagt anschaulich, daß die Orbits einer Kontraktion "geradegebogen" werden können.

Lemma 3.12. *Die Realteile aller Eigenwerte von $A \in \mathcal{L}(E)$ auf einem endlichdimensionalen Vektorraum E seien negativ. Dann ist e^{tA} flußäquivalent zu $e^{-t}\mathbb{1}_E$ mit einer Flußäquivalenz der Form $(1, \Psi)$.*

Beweis: Wegen dem vorangehenden Lemma existiert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf E, derart, daß für die zugehörige Einheitssphäre $\mathbb{S}$ gilt:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{S} \to E \setminus \{0\}, \quad (t, x) \mapsto e^{tA}x = \Phi(t, x)$$

ist ein Homöomorphismus. Es sei nun S die Einheitssphäre bzgl. der ursprünglichen Norm $\|\cdot\|_E$ von E. Dann definieren wir eine Bijektion $\Psi : E \to E$ durch $\Psi(0) = 0$ und

$$\Psi(x) = e^t \frac{\Phi(t, x)}{\|\Phi(t, x)\|_E}, \quad x \in E \setminus \{0\},$$

wobei t die nach dem vorangehenden Lemma eindeutig bestimmte reelle Zahl ist mit $\Phi(t, x) \in \mathbb{S}$. Da die Abbildung

$$\bar{\Psi} : \mathbb{S} \to S, \quad y \mapsto \frac{y}{\|y\|_E}$$

offensichtlich ein Homöomorphismus ist und da $\Psi(x) = e^t \bar{\Psi} \circ \Phi(t, x)$ gilt, ist aufgrund von dem vorangehenden Lemma Ψ ein Homöomorphismus von $E \setminus \{0\}$ auf sich. Um zu zeigen, daß Ψ stetig ist in $0 \in E$, sei V eine beschränkte Umgebung von 0. Dann existiert ein $t_0 > 0$ mit $e^{-t}S \subset V$ für alle $t \geq t_0$. Es sei nun

$$U = \left\{ x \in E \mid \|x\| < \tfrac{1}{\|e^{-t_0 A}\|} \right\}.$$

Dann gilt für $x \in U$

$$\|\Phi(-t_0, x)\| = \|e^{t_0 A}x\| \leq \|e^{-t_0 A}\| \cdot \|x\| < 1.$$

Wegen dem vorangehenden Lemma gilt für $t \geq 0$ mit dem entsprechenden α

$$\|\Phi(t - t_0, x)\| = \|\Phi(t, \Phi(-t_0, x))\| \leq e^{-\alpha t}\|\Phi(-t_0, x)\| < e^{-\alpha t} \leq 1.$$

Wir sehen, daß $t < -t_0$ für das eindeutig bestimmte $t = t(x)$ mit $\Phi(t,x) \in \mathbb{S}$ gilt. Also folgt $\Psi(U) \subset V$ aus der Definition von Ψ. Somit ist Ψ stetig in 0. Analog zeigt man, daß Ψ^{-1} in 0 stetig ist. Folglich ist Ψ ein Homöomorphismus von E auf sich.

Damit $(1, \Psi)$ eine Flußäquivalenz ist, muß gezeigt werden, daß

$$\Psi \circ \Phi(t,x) = e^{-t}\Psi(x) \quad \text{für alle } x \in E \text{ und alle } t \in \mathbb{R}$$

gilt. Für $x = 0$ ist dies trivialerweise richtig. Für $x \neq 0$ ist $x = \Phi(s,y)$ für ein geeignetes Paar $(s,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}$. Hieraus folgt aufgrund der Definition von Ψ für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\Psi \circ \Phi(t,x) = \Psi \circ \Phi(t, \Phi(s,y)) = \Psi \circ \Phi(t+s, y) \quad &= e^{-(t+s)}\frac{y}{\|y\|_E} = e^{-t}\left(e^{-s}\frac{y}{\|y\|_E}\right) \\ = e^{-t}\left(e^{-s}\frac{\Phi(-s,x)}{\|\Phi(-s,x)\|_E}\right) = e^{-t}\Psi(x).\end{aligned}$$

q.e.d.

Nach diesen Vorbereitungen können wir den zentralen Klassifikationssatz für hyperbolische Flüsse beweisen. Dabei definieren wir für eine lineare Abbildung $A \in \mathcal{L}(E)$

$$m_-(A) = \sum_{\lambda \in \sigma_s(A)} m(\lambda) \qquad\qquad m_+(A) = \sum_{\lambda \in \sigma_u(A)} m(\lambda).$$

Satz 3.13. *Zwei hyperbolische lineare Flüsse e^{tA} und e^{tB} sind genau dann flußäquivalent, wenn $m_\pm(A) = m_\pm(B)$ gilt. Die Dimensionen der stabilen und instabilen Unterräume sind die einzigen Invarianten der Flußäquivalenz solcher Flüsse.*

Beweis: $\Leftarrow$: Wegen Satz 3.6 existiert eine direkte Summenzerlegung

$$E = E_s \oplus E_u, \quad e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u}$$

mit $\dim(E_s) = m_-(A)$, derart, daß e^{tA_s} eine Kontraktion und e^{tA_u} eine Expansion sind. Aufgrund des Stabilitätskriteriums und dem vorangehenden Lemma existiert eine Flußäquivalenz $(1, \Psi_s)$ zwischen e^{tA_s} und $e^{-t}\mathbb{1}_{E_s}$. Analog erhalten wir wegen $e^{tA_u} = e^{-t(-A_u)}$ eine Flußäquivalenz $(1, \Psi_u)$ zwischen e^{tA_u} und $e^t\mathbb{1}_{E_u}$. Nun verifiziert man unmittelbar, daß $(1, \Psi_s \oplus \Psi_u)$ mit

$$\Psi_s \oplus \Psi_u : E_s \oplus E_u \to E_s \oplus E_u, \quad x + y \mapsto \Psi_s(x) + \Psi_u(y)$$

eine Flußäquivalenz zwischen $e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u}$ und $e^{-t}\mathbb{1}_{E_s} \oplus e^t\mathbb{1}_{E_u}$ ist.

Analog existieren eine direkte Summenzerlegung

$$F = F_s \oplus F_u, e^{tB_s} \oplus e^{tB_u}$$

und eine Flußäquivalenz $(1, \tilde{\Psi}_s \oplus \tilde{\Psi}_u)$ zwischen $e^{-t}\mathbb{1}_{F_s} \oplus e^t\mathbb{1}_{F_u}$. Wegen $\dim E_s = \dim F_s$ existieren ein Isomorphismus $T_s : E_s \to F_s$ und ein Isomorphismus $T_u : E_u \to F_u$. Dann ist $(1, T_s \oplus T_u)$ eine Flußäquivalenz zwischen den Flüssen $e^{-t}\mathbb{1}_{E_s} \oplus e^t\mathbb{1}_{E_u}$ und $e^{-t}\mathbb{1}_{F_s} \oplus e^t\mathbb{1}_{F_u}$. Also folgt die Flußäquivalenz von e^{tA} und e^{tB} aus der Transitivität.

$\Rightarrow$: Ist (α, Ψ) eine Flußäquivalenz zwischen e^{tA} und e^{tB}, so folgt aus

$$\Psi(e^{tA}x) = e^{\alpha tB}\Psi(x) \quad \text{für alle } (t, x) \in \mathbb{R} \times E$$

daß $\Psi[E_s] \subset F_s$ und somit, aus Symmetriegründen, auch $\Psi^{-1}[F_s] \subset E_s$ gilt (weil der Homöomorphismus Ψ die Konvergenz gegen 0 für $t \to \infty$ erhält). Also bildet Ψ den Vektorraum E_s homöomorph auf den Vektorraum F_s ab. Nun folgt aus dem Gebietsvarianzsatz der Topologie (z.B. Dugundji), daß $\dim(F_s) = \dim(E_s)$ ist. Also erhalten wir $m_\pm(A) = m_\pm(B)$ aus der Eindeutigkeit der Zerlegung in Satz 3.6. **q.e.d.**

Bemerkung 3.14. **(i)** *Die topologische Klassifizierung linearer Flüsse* e^{tA} *mit* $\sigma(A) \subset i\mathbb{R}$, *d.h. mit* $\sigma(A) = \sigma_n(A)$ *ist ein ungelöstes Problem.*

(ii) *Es ist nicht schwer zu sehen, daß die Menge der* $A \in \mathcal{L}(E)$ *mit* $\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_u(A)$ *offen und dicht in* $\mathcal{L}(E)$ *ist, d.h. die Eigenschaft, einen hyperbolischen Fluß zu erzeugen, ist eine generische Eigenschaft, sie kommt fast allen* $A \in \mathcal{L}(E)$ *zu. Folglich können wir mit dem vorangehenden Satz fast alle linearen Flüsse klassifizieren (was allerdings nichts nützt, wenn wir uns speziell für solche Flüsse interessieren, die nicht hyperbolisch sind).*

(iii) *Ist* e^{tA} *ein hyperbolischer linearer Fluß, so ist er insbesondere flußäquivalent zu dem einfachen "mehrdimensionalen Sattel".*

Übungsaufgabe 3.15. **(i)** *Beschreiben Sie die Phasenporträts eines ebenen linearen Flusses in den im Text nicht behandelten Fällen, d.h. wenn mindestens ein Eigenwert Null ist.*

(ii) *Beschreiben Sie die Phasenporträts des linearen Flusses* e^{tA} *mit* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, *d.h. des dreidimensionalen linearen Flusses, unter den verschiedenen möglichen Verteilungen der Eigenwerte von* A *in .*

(iii) *Veranschaulichen Sie sich das Phasenporträt des linearen Flusses* e^{tA} *mit* $A = \mathrm{diag}(\omega_1, -\omega_1, \omega_2, -\omega_2) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.

(iv) *Beweisen Sie, daß* $\{A \in \mathcal{L}(E) | \sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset\}$ *offen und dicht in* $\mathcal{L}(E)$ *ist.*

3.3 Stabilität linearer Flüsse

Zunächst verallgemeinern wir die Definition 1.10 auf nicht autonome gewöhnliche Differentialgleichungen.

Definition 3.16. *Sei $\Omega \subset E$ eine offene Umgebung der Null eines endlichdimensionalen Banachraums und $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und f eine lokal Lipschitzstetige Funktion auf $J \times \Omega$. Für alle $(\tau, \xi) \in J \times \Omega$ besitzt dann das folgende Anfangswertproblem eine eindeutige maximale Lösung $t \mapsto u(t, \tau, \xi)$ auf einem Intervall $[\tau, t^+(\tau, \xi))$:*

$$\dot{x}(t) = f(t, x) \quad \textit{mit} \quad x(\tau) = \xi.$$

Für alle $t \in J$ sei $f(t, 0) = 0$, und damit die konstante Funktion 0 eine Lösung der entsprechenden Anfangswertprobleme.

(i) *Die Lösung 0 heißt (Ljapunov-)stabil, wenn für jede Umgebung $U \subset \Omega$ von 0 und jedes $\tau \in J$ eine (kleinere) Umgebung V von 0 existiert, so dass $u(t, \tau, \xi) \in U$ für alle $\xi \in V$ und alle $t \geq \tau$ gilt. Andernfalls heißt sie instabil.*

ii) *Die Lösung 0 heißt attraktiv, wenn für jedes $\tau \in J$ eine Umgebung V von 0 existiert, so dass die Lösungen $t \mapsto u(t, \tau, \xi)$ auf $[\tau, \infty)$ definiert ist, und im Grenzwert $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert.*

(iii) *Die Lösung 0 heißt asymptotische stabil, wenn sie stabil und attraktiv ist.*

Schließlich sagt man, die Nulllösung sei gleichmäßig stabil bzw. gleichmäßig attraktiv, wenn die Umgebung V bzw. W unabhängig von $\tau \in J$ gewählt werden können und wenn der Grenzwert gleichmäßig bzgl. $(\tau, \xi) \in J \times W$ existiert. Die letzte Forderung bedeutet, daß zu jeder Umgebung $\tilde{U}$ von 0 ein $T > 0$ existiert mit $u(t, \tau, \xi) \in \tilde{U}$ für $t > \tau + T$ und alle $(\tau, \xi) \in J \times W$. Die Nulllösung ist gleichmäßig asymptotisch stabil, wenn sie gleichmäßig stabil und gleichmäßig attraktiv ist.

Bemerkung 3.17. (i) *Wenn wir für U eine Umgebung von 0 mit $dist(U, \partial\Omega) > 0$ wählen, impliziert Satz 1.26, daß $t^+(\tau, \xi) = \infty$ für alle $\xi \in V$ gilt. Folglich ist die Nulllösung genau dann stabil, wenn zu jeder Umgebung U von 0 und jedem $\tau \in J$ eine Umgebung V von 0 existiert mit*

$$t^+(\tau, \xi) = \infty \textit{ und } u(t, \tau, \xi) \in U \quad \textit{für alle } (t, \xi) \in [\tau, \infty) \times V.$$

Wenn die Nulllösung instabil ist, kann es, bei festem $\tau \in J$, beliebig nahe bei 0 Anfangswerte ξ mit $t^+(\tau, \xi) < \infty$ geben.

(ii) *Der Begriff der Stabilität ist eine Verschärfung der "stetigen Abhängigkeit von den Anfangswerten". Sie bedeutet, daß* $\lim_{\xi \to 0} u(t, \tau, \xi) = 0$ *für jedes* $\tau \in J$ *gleichmäßig auf kompakten Teilintervallen von* J *gilt.*

(iii) *Die Begriffe der Stabilität und Attraktivität sind unabhängig von* $\tau \in J$ *in folgendem Sinn: wenn* $x = 0$ *stabil bzw. attraktiv bzgl.* $\tau \in J$ *ist, so auch bzgl.* $\sigma \in J$*. In der Tat, wenn* $x = 0$ *stabil bzgl.* $\tau \in J$ *ist, existiert zu jeder Umgebung* U *von* 0 *eine Umgebung* V *von* 0 *mit* $x(t, \tau, \xi) \in U$ *für* $(t, \xi) \in [\tau, \infty) \times V$*. Ist* $\sigma < t$*, so existiert eine Umgebung* $\tilde{V}$ *von* 0 *mit* $u(t, \sigma, \eta) \in V$ *für* $(t, \eta) \in [\sigma, \tau] \times \tilde{V}$*. Dies folgt leicht aus der Stetigkeit von* u *und der Kompaktheit des Intervalls* $[\sigma, \tau]$*. Also gilt* $u(t, \sigma, \eta) \in U$ *für* $(t, \eta) \in [\sigma, \infty) \times \tilde{V}$*.*

Für $\tau < \sigma$ *ist* $\tilde{V} = u(\sigma, \tau, V)$ *eine Umgebung von* 0*, da* $u(\sigma, \tau, .)$ *ein Homöomorphismus ist. Also gilt auch in diesem Fall* $u(t, \sigma, \eta) \in U$ *für* $(t, \eta) \in [\sigma, \infty) \times \tilde{V}$*.*

(iv) *Stabilität und Attraktivität sind unabhängige Begriffe. Z.B. ist ein Zentrum stabil, aber nicht attraktiv. Umgekehrt kann man zeigen, daß es ein autonomes in* $\mathbb{R}^2$ *gibt, dessen Nulllösung attraktiv und instabil ist.*

(v) *Ist* f *entweder unabhängig von* t *oder periodisch in* t*, so impliziert die Stabilität bzw. die asymptotische Stabilität die Gleichmäßigkeit der entsprechenden Eigenschaften. Der einfache Beweis ist dem Leser überlassen.*

(vi) *Ist* $\bar{u} = u(., \tau_0.\xi_0)$ *eine globale Lösung von* $\dot{x} = f(t, x)$*, so besitzt die Differentialgleichung*

$$\dot{y} = f(t, y + \bar{u}(t)) - f(t, \bar{u}(t))$$

die globale Nulllösung und y *mißt die Abweichung von* $\bar{u}$*. Deshalb heißt die Lösung* $\bar{u}$ *stabil bzw. attraktiv etc., wenn die triviale Lösung die entsprechenden Eigenschaften besitzt. Ist insbesondere* f *unabhängig von* t *und gilt* $f(x_0) = 0$*, d.h. ist* x_0 *ein kritischer Punkt, so heißt* x_0 *stabil bzw. attraktiv etc., wenn die konstante Lösung* $\bar{u}(t) = x_0, t \in \mathbb{R}$ *die entsprechenden Eigenschaften hat.*

(vii) *Die obigen Bemerkungen gelten auch im unendlichdimensionalen Fall.*

Wir studieren zuerst die Stabilität autonomer linearer Differentialgleichungen.

Satz 3.18. *Es sei* $A \in \mathcal{L}(E)$*. Dann ist die Nulllösung der linearen Differentialgleichung* $\dot{x} = Ax$ *genau dann stabil, wenn* $\sigma_u(A) = \emptyset$ *und für* $\lambda \in \sigma_n(A)$ *die Einschränkung von* A *auf den Eigenraum* $\{x \in E \mid A - \lambda)^{m(\lambda)} x = 0\}$ *diagonalisierbar ist.*

Die Nulllösung ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $\Re \sigma(A) < 0$ *gilt.*

Beweis: Es genügt den Fall $\tau = 0$, d.h. den Fluß $e^{tA}\xi, \xi \in E$, zu betrachten Es sei $\alpha = \sup\{\|e^{tA}\| \mid t \in \mathbb{R}_+\} < \infty$. Dann folgt für $\epsilon > 0$

$$\|e^{tA}\xi\| \leq \|e^{tA}\| \cdot \|\xi\| < \epsilon \quad \text{für alle } (t, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times B(0, \tfrac{\epsilon}{\alpha}),$$

d.h. die Stabilität der Nulllösung. Ist $x_1, \ldots, x_m$ eine Basis von E, so folgt mit $\xi = \sum \xi^i x_i$ aus $e^{tA}\xi = \sum \xi^i e^{tA} x_i$, der Äquivalenz der Normen und der Definition der Operatornorm, daß $a < \infty$ genau dann gilt, wenn jede der Lösungen $e^{tA}x_i, i = 1, \ldots, m$, beschränkt ist. Dies ist genau denn der Fall, wenn jede Lösung von $\dot{x} = Ax$ beschränkt ist, also beide Bedingungen erfüllt sind. Ist eine Bedingung verletzt, so folgt die Existenz eines $x \in E$ mit $\|e^{tA}x\| \to \infty$ für $t \to \infty$. Da dann auch $\|e^{tA}(\epsilon x)\|$ für jedes $\epsilon > 0$ unbeschränkt wächst, ist die Nulllösung instabil. Der zweite Teil der Behauptung folgt unmittelbar aus dem bereits Bewiesenen und dem Stabilitätskriterium. **q.e.d.**

Als nächstes betrachten wir "gestörte Systeme" der Gestalt

$$\dot{x} = Ax + g(t, x),$$

wobei g eine in einem geeigneten Sinne kleine Störung ist. Genauer soll im folgenden gezeigt werden, daß unter der Voraussetzung

$$g(t, x) = \mathrm{o}(\|x\|) \quad \text{für} \quad x \to 0,$$

gleichmäßig bzgl. $t \in J$, das gestörte System nahezu dasselbe asymptotische Stabilitätsverhalten wie die ungestörte "Linearisierung" $\dot{x} = Ax$ besitzt.

Wir beginnen mit einer einfachen aber wichtigen Bemerkung. Ist $g \in C(J \times \Omega, E)$ in der zweiten Variablen lokal Lipschitz stetig und $u(t) = u(t, \tau, \xi)$ die maximale Lösung der Differentialgleichung auf $t \in J(\tau, \xi)$, so besitzt die inhomogene lineare Gleichung

$$\dot{x} = Ax + g(t, u(t)) \qquad \text{für } t \in J(\tau, \xi),$$

die eindeutig bestimmte Lösung u auf $J(\tau, \xi)$ mit $u(\tau) = \xi$. Also folgt aus der Variation der Konstanten, daß u folgender nichtlinearen Integralgleichung genügt:

$$u(t) = e^{(t-\tau)A}\xi + \int_\tau^t e^{(t-s)A} g(s, u(s))ds, \qquad \text{für } t \in J(\tau, \xi).$$

Diese Integralgleichung ist die Grundlage für den folgenden - im wesentlichen auf Ljapunov zurückgehenden - Stabilitätssatz (sowie für zahlreiche Existenzbeweise im analogen Fall unendlichdimensionaler Evolutionsgleichungen, z.B. bei parabolischen Systemen).

Satz 3.19 (Asymptotische Stabilität)**.** *Für $A \in \mathcal{L}(E)$ gelte $\Re\sigma(A) < 0$. Ferner sei $g \in C(J \times \Omega, E)$ in der zweiten Variablen lokal Lipschitz stetig mit*

$$g(t,x) = \mathrm{o}(\|x\|) \quad \textit{für } x \to 0 \textit{ gleichmäßig bzgl. } t \in J.$$

Dann ist die Nulllösung der gestörten Gleichung gleichmäßig asymptotisch stabil:

$$\dot{x} = Ax + g(t,x).$$

Beweis: Es existieren positive Konstanten α und β mit $\|e^{tA}\| \leq \beta e^{-at}$ für alle $t \geq 0$, wobei wir $\beta > 1$ annehmen dürfen. Also folgt die Abschätzung

$$\|u(t)\| \leq \beta e^{-\alpha(t-\tau)}\|\xi\| + \beta \int_\tau^t e^{-\alpha(t-s)}\|g(s,u(s))\|ds \quad \text{für } \tau \leq t < t^+(\tau,\xi).$$

Es sei nun $\epsilon \in (0,\alpha)$ beliebig. Es existiert ein $\delta \in (0,\epsilon)$ mit

$$\|g(t,x)\| \leq \frac{\epsilon}{\beta}\|x\| \quad \text{für } \|x\| \leq \delta \text{ und } t \geq \tau.$$

Für $\|\xi\| < \frac{\delta}{\beta}$ und $t \in [\tau, t^+(\tau,\xi))$ gilt dann $\|u(t)\| < \delta < \epsilon$ und die Nulllösung ist gleichmäßig stabil. Andernfalls gibt es $\xi \in B(0,\frac{\delta}{\beta})$ und $\bar{t} \in (\tau, t^+(\tau,\xi))$ mit

$$\bar{t} = \inf\{t \in [\tau, t^+(\tau,\xi))\|u(t)| = \delta\}.$$

Dann folgt für $\tau \leq t \leq \bar{t}$

$$\|u(t)\| \leq \delta e^{-\alpha(t-\tau)} + \epsilon \int_\tau^t e^{-\alpha(t-s)}\|u(s)\|ds \quad \Leftrightarrow \quad e^{\alpha t}\|u(t)\| \leq \delta e^{\alpha\tau} + \epsilon \int_\tau^t e^{\alpha s}\|u(s)\|ds$$

Mithilfe von Lemma 1.62 erhalten wir die Abschätzung

$$\|u(t)\| \leq \delta e^{-(\alpha-\epsilon)(t-\tau)} \text{ für } \tau \leq t \leq \bar{t}, \quad \text{also insbesondere } \delta = |u(\bar{t})| \leq \delta e^{-(\alpha-\epsilon)(\bar{t}-\tau)} < \delta,$$

was unmöglich ist. Dann ist die Nulllösung gleichmäßig attraktiv ist. **q.e.d.**

Zum Beweis des entsprechenden Instabilitätssatzes benötigen wir das folgende

Lemma 3.20. *Für $A \in \mathcal{L}(E)$ gelte $\alpha < \Re\sigma(A) < \beta$. Dann existiert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf E, so daß für das zugehörige innere Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$*

$$\alpha\|x\|^2 \leq \Re\langle Ax, x\rangle \leq \beta\|x\|^2 \quad \textit{für alle } x \in E \textit{ gilt.}$$

Beweis: Wir betrachten zuerst den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wie in dem Beweis von Lemma 3.2 gezeigt hat A die Form $A = D + N$ mit $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_m)$, wobei $\mu_1, \ldots, \mu_m$ die mit Vielfachheit gezählten Eigenwerte von A sind. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es außerdem eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf E gibt mit $\|N\| \leq \epsilon$. Wir wählen $\epsilon > 0$ und $\|\cdot\|$ mit

$$\epsilon \leq \min\{\beta - \max(\Re\sigma(A)), \min(\Re\sigma(A)) - \alpha\}.$$

Wegen $\langle Dx, x\rangle = \sum \mu_j |x^j|^2$, wobei $x^1, \ldots, x^m$ die Koordinaten von x bzgl. der (zur Konstruktion der Norm) verwendeten Orthonormalbasis sind, gilt

$$\min[\Re\sigma(A)]\|x\|^2 \leq \Re\langle Dx, x\rangle \leq \max[\Re\sigma(A)]\|x\|^2.$$

Da ferner $\Re\langle Ax, x\rangle = \Re\langle Dx, x\rangle + \Re\langle Nx, x\rangle$ und $|\Re\langle Nx, x\rangle| \leq \|N\| \cdot \|x\|^2 \leq \epsilon\|x\|^2$ ist, folgt die Behauptung aus der Wahl von ϵ und aus

$$\Re\langle Dx, x\rangle - \epsilon\|x\|^2 \leq \Re\langle Ax, x\rangle \leq \Re\langle Dx, x\rangle + \epsilon\|x\|^2.$$

Es sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann können wir das eben Bewiesene auf die Komplexifizierung $A_{\mathbb{C}}$ in $E_{\mathbb{C}}$ anwenden. Die Hilbertnorm $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ auf $E_{\mathbb{C}}$ induziert (durch Restriktion auf $E \subset E_{\mathbb{C}}$) eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf E (vgl. den Beweis von Lemma 3.2). Für die zugehörigen Skalarprodukte erhalten wir

$$\begin{aligned} \Re(\xi|\eta)_{\mathbb{C}} &= \frac{\|\xi+\eta\|_{\mathbb{C}}^2 - \|\xi-\eta\|_{\mathbb{C}}^2}{4} \qquad \text{für alle } \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}} \quad \text{bzw.} \\ \langle x, y\rangle &= \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} \qquad \text{für alle } x, y \in E. \quad \text{Hieraus folgt} \\ \alpha\|x\|^2 = \alpha\|x\|_{\mathbb{C}}^2 &\leq \Re\langle A_{\mathbb{C}}x, x\rangle_{\mathbb{C}} = \langle Ax, x\rangle \leq \beta\|x\|_{\mathbb{C}}^2 = \beta\|x\|^2 \qquad \text{für alle } x \in E. \end{aligned}$$ **q.e.d.**

Satz 3.21 (Instabilität)**.** *Der Operator $A \in \mathcal{L}(E)$ besitze mindestens einen Eigenwert mit positivem Realteil und $g \in C(J \times \Omega, E)$ sei lokal Lipschitzstetig, so dass*

$$g(t, x) = o(\|x\|) \text{ für } x \to 0 \qquad \text{gleichmäßig für } t \in J \text{ gilt.}$$

Dann ist die Nulllösung der gestörten Gleichung $\dot{x} = Ax + g(t, x)$ instabil.

Beweis: Nach Voraussetzung ist das instabile Spektrum $\sigma_u(A)$ nicht leer. Folglich existiert ein γ mit $0 < \gamma < \Re\sigma_u(A)$. Wegen $\sigma(A - \gamma) = \sigma(A) - \gamma$ ist das neutrale Spektrum $\sigma_n(A_\gamma)$ von $A_\gamma = A - \gamma$ leer und A_γ erzeugt einen hyperbolischen linearen Fluß e^{tA_γ}. Wegen Satz 3.6 gibt es eine direkte Summenzerlegung $E = E_- \oplus E_+$, welche A_γ in $A_\gamma = (A_\gamma)_- \otimes (A_\gamma)_+$ zerlegt, so daß $\sigma_s(A_\gamma) = \sigma((A_\gamma)_-)$ und $\sigma_u(A_\gamma) = \sigma((A_\gamma)_+)$ gelten. Offensichtlich zerlegt diese Zerlegung auch den Operator A, $A = A_- \oplus A_+$, und $\sigma(A_+) = \sigma_u(A)$ sowie $\sigma(A_-) = \sigma_s(A) \cup \sigma_n(A)$. Es gilt also $\Re\sigma(A_-) \leq 0$ und

$\Re\sigma(A_+) > \alpha > 0$ für ein geeignetes $\alpha > 0$. Wir wählen nun $\beta \in (0, \alpha)$ fest. Dann existieren nach Lemma 3.2 Hilbertnormen $\|\cdot\|_+$ auf E_+ und $\| - \|_-$ auf E_- so daß

$$\begin{aligned} \Re(A_- x_- | x_-)_- &\leq \beta \|x_-\|_-^2 \quad \text{für alle } x_- \in E_- \quad \text{und} \\ \Re(A_+ x_+ | x_+)_+ &\geq \alpha \|x_+\|_+^2 \quad \text{für alle } x_+ \in E_+ \end{aligned}$$

gilt. Offensichtlich wird durch

$$\langle x_- + x_+, y_- + y_+ \rangle = \langle x_-, y_- \rangle_- + \langle x_+, y_+ \rangle_+$$

ein inneres Produkt auf $E = E_- \oplus E_+$ definiert und somit eine Norm $\|\cdot\|$ mit

$$\|x\|^2 = \|x_- + x_+\|^2 = \|x_-\|_-^2 + \|x_+\|_+^2 \quad \text{für alle } x = x_- + x_+ \in E.$$

Schließlich setzen wir

$$\Psi(x) = \frac{\|x_+\|^2 - \|x_-\|^2}{2} = \frac{\|Px\|^2 - \|Qx\|^2}{2} \quad \text{für alle } x \in E,$$

wobei $P : E \to E_+$ und $Q : E \to E_-$ die natürlichen Projektionen sind, und $\gamma = \frac{\alpha - \beta}{4}$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\|g(t, x)\| \leq \gamma \|x\| \quad \text{für} \quad \|x\| \leq \delta.$$

Es sei u eine Lösung mit $\|u(0)\| < \delta$ und $\Psi(u(0)) > 0$. Dann erfüllt $\varphi(t) = \Psi(u(t))$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \Re\langle Pu(t), P\dot{u}(t) \rangle - \Re\langle Qu(t), Q\dot{u}(t) \rangle \\ &= \Re\langle A_+ u_+(t), u_+(t) \rangle - \Re\langle A_- u_-(t), u_-(t) \rangle \\ &\quad + \Re\langle Pu(t), Pg(t, u(t)) \rangle - \Re\langle Qu(t), Qg(t, u(t)) \rangle \\ &\geq \alpha \|Pu(t)\|^2 - \beta \|Qu(t)\|^2 - \gamma \|P\| \cdot \|Pu(t)\| \cdot \|u(t)\| - \gamma \|Q\| \cdot \|Qu(t)\| \cdot \|u(t)\| \end{aligned}$$

für $t \geq 0$ mit $\|u(t)\| \leq \delta$. Weil für alle $x \in E$

$$\|Px\| \leq \|x\| \qquad \|Qx\| \leq \|x\| \qquad \text{gilt, folgt } \|P\| \leq 1 \qquad \|Q\| \leq 1, \qquad \text{und}$$

$$\dot{\varphi}(t) \geq \alpha \|Pu(t)\|^2 - \beta \|Qu(t)\|^2 - \gamma(\|Pu(t)\| + \|Qu(t)\|)\|u(t)\|.$$

Für kleine $t \geq 0$ folgt $\varphi(t) = \Psi(u(t)) \geq 0$ aus $\varphi(0) > 0$ und damit auch

$$\|Qu(t)\| \leq \|Pu(t)\| \qquad\qquad \|u(t)\| \leq 2\|Pu(t)\|.$$

Also erhalten wir

$$\dot{\varphi}(t) \geq (\alpha - 4\gamma)\|Pu(t)\|^2 - \beta \|Qu(t)\|^2 = 2\beta\varphi(t)$$

für alle $t \geq 0$ mit $\|u(t)\| \leq \delta$ und $\varphi(t) \geq 0$. Durch Integration folgt

$$\varphi(t) \geq \varphi(0)e^{2\beta t}$$

für die obigen Werte von t. Hieraus liest man insbesondere ab, daß $\varphi(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ mit $\|u(t)\| \leq \delta$ gilt. Mit anderen Worten: keine Lösung mit Anfangswert in $B(0,\delta) \cap \Psi^{-1}[0,\infty)$ verläßt den "Doppelkegel" $\Psi^{-1}[0,\infty)$, bevor sie den Ball $\bar{B}(0,\delta)$ verläßt. Also erreicht jede Lösung mit von Null verschiedenem Anfangswert in $B(0,\delta) \cap \Psi^{-1}[0,\infty)$ den Rand von $B(0,\delta)$, was die Instabilität der Nulllösung beweist. **q.e.d.**

Als Korollar der beiden vorangehenden Sätze erhalten wir das folgende Prinzip der linearisierten Stabilität für kritische Punkte autonomer Differentialgleichungen. Dieses fundamentale Prinzip ist eines der bekanntesten Stabilitäts- bzw. Instabilitätskriterien, das besonders in den angewandten Naturwissenschaften unzählige Anwendungen hat.

Korollar 3.22. *Es sei $f \in C^1(\Omega, E)$ mit $f(x_0) = 0$. Gilt dann $\Re\sigma(f'(x_0)) < 0$, so ist der kritische Punkt x_0 der autonomen Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ asymptotisch stabil. Hat $f'(x_0)$ einen Eigenwert λ mit $\Re\lambda > 0$, so ist x_0 instabil.*

Beweis: Mit $A = f'(x_0) \in \mathcal{L}(E)$ und $g(y) = f(y + x_0) - f'(x_0)y$ gilt $g(y) = \mathrm{o}(\|y\|)$ für $y \to 0$ und $\dot{y} = f(y + x_0) = Ay + g(y)$. Also folgt die Behauptung unmittelbar aus den beiden vorangehenden Sätzen. **q.e.d.**

Beispiel 3.23. (i) *Wir betrachten das Räuber-Beute-Modell*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (\alpha - \beta y - \lambda x)x \\ \dot{y} &= (\delta x - \gamma - \mu y)y\end{aligned}$$

mit beschränktem Wachstum und positiven Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$. Dieses System besitzt die kritischen Punkte $(0,0), (0, -\frac{\gamma}{\mu}), (\frac{\alpha}{\lambda}, 0)$ und $\left(\frac{\alpha\mu+\beta\gamma}{\lambda\mu+\beta\delta}, \frac{\alpha\delta-\lambda\gamma}{\lambda\mu+\beta\delta}\right)$, wobei der letzte Punkt der Schnittpunkt z der beiden Geraden L und M ist. Mit den offensichtlichen Identifikationen gilt

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} a - \beta y - 2\lambda x & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma - 2\mu y \end{bmatrix}, \quad \textit{also}$$

$$f'(0,0) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix} \quad f'\left(0, -\frac{\gamma}{\mu}\right) = \begin{bmatrix} \alpha + \beta\frac{\gamma}{\mu} & 0 \\ * & \gamma \end{bmatrix} \quad f'\left(\frac{\alpha}{\lambda}, 0\right) = \begin{bmatrix} -\alpha & * \\ 0 & a\frac{\delta}{\lambda} - \gamma \end{bmatrix}$$

$$f'(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} -\lambda\xi & -\beta\xi \\ \delta\eta & -\mu\eta \end{bmatrix}$$

mit $z = (\xi, \eta)$. Hieraus und aus dem Satz liest man ab, daß die kritischen Punkte $(0,0)$ und $(0, -\frac{\gamma}{\mu})$ stets instabil sind. Der kritische Punkt $(\frac{\alpha}{\lambda}, 0)$ ist asymptotisch *stabil für* $\frac{\alpha}{\lambda} < \frac{\gamma}{\delta}$ *und instabil für* $\frac{\alpha}{\lambda} > \frac{\gamma}{\delta}$. *Für die Eigenwerte* $\lambda_{\frac{1}{2}}$ *von* $f'(\xi,\eta)$ *errechnet man leicht*

$$\lambda_{\frac{1}{2}} = \frac{-(\lambda\xi + \mu\eta) \pm \sqrt{(\lambda\xi + \mu\eta)^2 - 4\xi\eta + \delta\beta)}}{2}.$$

Für den für die Anwendungen interessanten Fall, daß die Geraden L und M sich im positiven Quadranten schneiden, also $\xi > 0$ *und* $\eta > 0$ *sind, liest man aus dieser Formel ab, daß* $\Re\sigma(f'(\xi,\eta)) < 0$ *gilt. Aus der expliziten Formel für* (ξ,η) *folgt somit, daß für* $\frac{\alpha}{\lambda} > \frac{\gamma}{\delta}$ *der kritische Punkt* z *asymptotisch stabil ist.*

(ii) *Setzen wir in (2=)* $\lambda = \mu = 0$, *so erhalten wir die Volterra- Lotka-Gleichungen von 1:*

$$\dot{x} = (\alpha - \beta y)x$$
$$\dot{y} = (\delta x - \gamma)y$$

Dieses System besitzt die kritischen Punkte $(0,0)$ *und* $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$. *Aus den obigen Berechnungen (mit* $\lambda = \mu = 0$*) folgt wieder, daß* $(0,0)$ *instabil ist. Ferner gilt*

$$f'\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \alpha\delta & 0 \end{bmatrix}.$$

also $\lambda_{\frac{1}{]2}} 0 \pm i\sqrt{\alpha\gamma}$. *In diesem Fall ist der kritische Punkt* $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ *ein Zentrum für die linearisierte Gleichung, aber für das nichtlineare System ist mit dem Satz keine Aussage möglich.*

Bemerkung 3.24. (i) *Der Satz macht keine Aussagen über das Stabilitätsverhalten im Fall* $\sigma(f'(x_0)) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$. *In diesem Fall hängt das Stabiltätsverhalten von den Termen höherer Ordnung ab. Um dies zu sehen, betrachten wir das System*

$$\dot{x} = -y + x^3$$
$$\dot{y} = x + y^3$$

mit $(0,0)$ *als einzigen kritischen Punkt, der ein Zentrum für die Linearisierung ist. Für* $r^2 = x^2 + y^2$ *folgt* $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = -xy + x^4 + xy + y^4 = x^4 + y^4$, *also*

$$\dot{r} = \frac{x^4 + y^4}{r} \text{ für } r > 0.$$

Folglich ist $\dot{r} > 0$ *und die Orbits laufen von* (0.0) *weg, d.h.* $(0,0)$ *ist instabil.*

Das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - x^3 \\ \dot{y} &= x - y^3\end{aligned}$$

hat dieselbe Linearisierung im kritischen Punkt $(0,0)$. *Nun folgt* $\dot{r} = -\frac{x^4+y^4}{r} < 0$ *für* $r > 0$. *Folglich "laufen die Orbits in* $(0,0)$ *hinein", d.h.* $(0,0)$ *ist stabil. Es ist leicht zu sehen, daß das Phasenporträt bei allgemeineren Störungen höherer Ordnung wesentlich komplizierte aussehen kann.*

(ii) *Das zentrale in dem Satz enthaltene Stabilitätsresultat ist eine lokale Aussage. Es enthält keine Angaben über den Einzugsbereich eines asymptotisch stabilen kritischen Punktes. Einige Aussagen in dieser Richtung werden wir in den folgenden Paragraphen kennenlernen.*

(iii) *Offensichtlich bleibt der Satz richtig, wenn* $f \in C(\Omega, E)$ *lokal Lipschitz stetig und in* x_0 *differenzierbar ist.*

(iv) *Unter geeigneten Voraussetzungen an den Evolutionsoperator* U *der nichtautonomen linearen Gleichung* $\dot{x} = A(t)x$ *lassen sich verwandte Resultate auch für gestörte nichtautonome Gleichungen*

$$\dot{x} = A(t) + g(t, x)$$

beweisen. Da solche Voraussetzungen in praktischen Fällen jedoch kaum zu verifizieren sind, werden wir uns im folgenden in erster Linie mit dem besonders wichtigen Fall autonomer Gleichungen befassen.

(v) *Wenn wir in Beispiel nur die in den kritischen Punkten linearisierten Gleichungen betrachten, so liegen im Fall* $(0,0)$ *ein Sattel, im Fall* $(0, -\frac{\gamma}{\mu})$ *eine Quelle, im Fall* $(\frac{\alpha}{\lambda}, 0)$ *eine Senke für* $\frac{\alpha}{\lambda} < \gamma\delta$ *und ein Sattel für* $\frac{\alpha}{\lambda} > \frac{\gamma}{\delta}$, *sowie im Fall* $(\xi, \eta) \in (0, \infty)^2$ *eine Senke vor. Die Abbildungen von 1 zeigen, daß - anschaulich gesprochen - diese qualitativen Strukturen der Phasenporträts auch im nichtlinearen Fall in der Nähe der kritischen Punkte erhalten bleiben. Aus diesem Grund sagt man auch, der kritische Punkt* x_0 *des autonomen System* $\dot{x} = f(x)$ *sei eine Senke bzw. eine Quelle bzw. ein Sattelpunkt, wenn der Nullpunkt eine Senke bzw. eine Quelle bzw. ein Sattelpunkt für die linearisierte Gleichung*

$$\dot{y} = f'(x_0)y$$

ist. Im letzten Abschnitt werden wir diese Ausdrucksweise mittels eines wichtigen allgemeinen "Linearisierungssatzes" rechtfertigen.

(vi) *Um die obigen Stabilitätssätze praktisch anwenden zu können, benötigt man Kriterien, welche es erlauben festzustellen, ob $\Re\sigma(A) < 0$ gilt. Da die Eigenwerte die Wurzeln des charakteristischen Polynoms*

$$det(\lambda - A) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + a_2\lambda^{m-2} + \ldots + a_{m-1}\lambda + a_m$$

sind (im Fall $dim(E) = m$)), möchte man möglichst aus den Koeffizienten eines Polynoms ablesen, ob alle Wurzeln in der negativen Halbebene liegen.

Es gibt eine Reihe von Kriterien dieser Art. Das bekannteste dürfte das folgende Routh-Hurwitz-Kriterium sein. Es sei

$$p_m(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1}z + a_m$$

ein Polynom mit reellen Koeffizienten, und für $k = 1, \ldots, m$ sei

$$D_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & \ldots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \ldots & \ldots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & \ldots & a_{2k-3} \\ & 1 & a_2 & a_4 & \ldots & a_{2k-4} \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bigcirc & & & & \vdots & \end{bmatrix}$$

mit $a_j = 0$ für $j > m$. Dann haben alle Wurzeln von p_m genau dann negative Realteile, wenn folgende Ungleichungen erfüllt sind:

$$a_k > 0 \text{ und } D_k > 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots, m.$$

Übungsaufgabe 3.25. (i) *Zeigen sie, daß das Phasenporträt des gestörten linearen Systems*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + xr^2 sin\frac{\pi}{r} \\ r^2 &= x^2 + y^2 \\ \dot{y} &= x + yr^2 sin\frac{\pi}{r} \end{aligned}$$

folgende Eigenschaft hat: Es gibt eine Folge von konzentrischen Kreisen um $(0, 0)$ mit Radien $\frac{1}{n}$, so daß sich "die Orbits abwechselnd im mathematisch positiven Sinn zu diesen Kreisen hin- bzw. von ihnen wegdrehen".

Hinweis: Leiten Sie ein Differentialgleichung für die Polarkoordinaten (r, φ) her.

(ii) *Das folgende, von Field und Noyes aufgestellte System*

$$(F-N)\qquad \begin{aligned} \epsilon\dot{x} &= x + y - xy - qx^2 \\ \dot{y} &= 2fz - y - xy \\ p\dot{z} &= x - z \end{aligned}$$

ist ein mathematisches Modell zur Beschreibung einer chemischen Oszillation, der sog. Belousov-Zhabotinsky-Reaktion (vgl. z.B. Spektrum der Wissenschaften, 5(1980), 131-137, für eine Beschreibung dieser Reaktion, insbesondere die dortigen Bilder!). Hierbei sind f, p, q und ϵ positive Konstanten (mit $\epsilon < 1$) und die Gleichungen sind bereits dimensionslos geschrieben. Die Größen x, y und z entsprechen chemischen Konzentrationen. Folglich sind nur "nichtnegative Lösungen". d.h. Lösungen im positiven Oktanden $\mathbb{R}^3_+$ von Interesse.

3.4 Linearisierungen

In diesem Abschnitt sind $(E, \|\cdot\|)$ ein endlichdimensionaler Banachraum, $\Omega \subset E$ eine offene Teilmenge und $f \in C^1(\Omega, E)$. Wir wollen den von f erzeugten Fluß Φ in der Nähe eines kritischen Punktes x_0 in Situationen studieren, in denen das Prinzip der linearisierten Stabilität Korollar 3.22 nicht anwendbar ist. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß $f'(x_0)$ einen hyperbolischen linearen Fluß erzeugt. Wir zeigen, daß lokal d.h. in der Nähe von x_0, der Fluß Φ flußäquivalent zum linearen Fluß $e^{tf'(x_0)}$ ist, d.h., daß die Sattelpunktstruktur qualitativ erhalten bleibt. Außerdem werden wir präzise Aussagen über die "stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten" W_s und W_u herleiten.

Sind X und Y metrische Räume und $\Phi : W \to X$ sowie $\tilde{\Phi} : \tilde{W} \to Y$ Flüsse auf X bzw. Y, so sagen wir, Φ ist in $x_0 \in X$ zu $\tilde{\Phi}$ in $y_0 \in Y$ (lokal) C^k-flußäquivalent, oder kurz: $\Phi|x_0$ ist zu $\tilde{\Phi}|y_0$ C^k-flußäquivalent, $0 \le k \le \infty$, wenn es Umgebungen U von x_0 und V von y_0 gibt, derart, daß der von Φ auf U (durch Restriktion) induzierte lokale Flußzu dem von $\tilde{\Phi}$ auf V induzierten lokalen Fluß C^k-flußäquivalent ist.

Im folgenden sei $\Phi : W \to \Omega$ stets der von f auf Ω erzeugte Fluß, und wir schreiben wieder $t \cdot x$ für $\Phi(t, x)$. Wir wollen den Flusses in der Nähe eines hyperbolischen kritischen Punktes x_0 studieren. Hierbei heißt der kritische Punkt x_0 des von f erzeugten Flusses hyperbolisch, wenn $\sigma_n(f'(x_0)) = \emptyset$ ist, d.h. wenn der lineare Fluß $e^{tf'(x_0)}$ ist.

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen Flüssen und Homöomorphismen. Nach Lemma1.34 ist nämlich $\Phi(t, \cdot)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein lokaler Homöomorphismus. Insbesondere ist für den linearen Fluß e^{tA} für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein Automorphismus von E. Aus diesen Gründen ist es sinnvoll (und für Anwendungen auf andere Probleme nützlich), zuerst den Fall von Homöomorphismen zu betrachten. Zur Motivierung der folgenden Definition beweisen wir zuerst den folgenden Spezialfall des Spektralabbildungssatzes.

Lemma 3.26. *Für $A \in \mathcal{L}(E)$ gilt $\sigma(e^A) = e^{\sigma(A)} = \{e^\lambda | \lambda \in \sigma(A)\}$.*

Beweis: Wegen $\sigma(A) = \sigma(A)_\mathbb{C})$ können wir - durch Übergang zur Komplexifizierung - annehmen, daß E ein komplexer Banachraum ist. Sind dann $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die paareweise verschiedenen Eigenwerte von A, so besitzt E die direkte Summenzerlegung $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_k$ besitzt, die sowohl A als auch e^A reduziert. Es genügt also, $\sigma(e^{A_j}) = e^{\sigma(A_j)}$ mit $A_j = A|E_j$ für $j = 1, \ldots, k$ zu beweisen. Wir können somit annehmen, daß $\sigma(A) = \{\lambda\}$ und $A = \lambda + N$ mit einem nilpotenten Operator $N \in \mathcal{L}(E)$ gilt. Es gibt folglich ein $x \in E \setminus \{0\}$ mit $Ax = \lambda x$, d.h. $Nx = 0$. Hieraus folgt

$$e^A x = e^\lambda e^N x = e^\lambda x,$$

d.h. $\sigma(e^A) \supset e^{\sigma(A)}$. Gilt umgekehrt $e^A y = \mu y$ für ein $\mu \in \mathbb{C}$ und $y \in E \setminus \{0\}$, so folgt

$$\mu y = e^\lambda e^N y = e^\lambda \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} N^k y.$$

Dann gibt es einen kleinsten Index l mit $0 \leq l \leq m$ und $N^{l+1} y = 0$. Durch Anwenden von N^l auf (2) erhalten wir

$$\mu N^l y = e^\lambda N^l y,$$

also $\mu = e^\lambda$ wegen $N^l y \neq 0$, was $\sigma(e^a) \subset e^{\sigma(A)}$ impliziert. **q.e.d.**

Es sei nun $A \in \mathcal{L}(E)$, und A erzeuge einen hyperbolischen linearen Fluß e^{tA}, d.h. $\sigma_n(A) = \sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Dann folgt aus dem vorangehenden Lemma, daß $\sigma(e^A) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$ gilt, wobei $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ die Einheitskreislinie der komplexen Ebene ist. Mit anderen Worten $e^A \in \mathcal{L}(E)$ besitzt keine Eigenwerte vom Betrag 1. Allgemein heißt nun ein Automorphismus $T \in \mathcal{L}(E)$ hyperbolisch, wenn T keine Eigenwerte vom Betrag 1 besitzt, d.h. wenn $\sigma(T) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$ gilt. Ist $T \in \mathcal{GL}(E)$ hyperbolisch, so gilt

$$\begin{array}{ll} \sigma(T) = \sigma_0(T) \cup \sigma_\infty(T) & \text{mit} \\ \sigma_0(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \mid |\lambda| < 1\} & \sigma_\infty(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \mid |\lambda| > 1\}. \end{array}$$

Bezeichnen wir wieder mit $m(\lambda)$ die algebraische Multiplizität des Eigenwertes $\lambda \in \sigma(T)$, dann sind für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$E_0 = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_0(T)} \{x \in E \mid (\lambda - T)^{m(\lambda)} x = 0\} \quad E_\infty = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_\infty(T)} \{x \in E \mid (\lambda - T)^{m(\lambda)} x = 0\}.$$

invariante Untervektorräume von E, die T reduzieren, d.h.

$$E = E_0 \oplus E_\infty \quad \text{und } T = T_0 \oplus T_\infty \quad \text{und } \sigma(T_0) = \sigma_0(T) \quad \text{und } \sigma(T_\infty) = \sigma_\infty(T).$$

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so wenden wir diese Zerlegung auf die Komplexifizierung an und restringieren anschließend auf die reellen Teilräume, d.h.

$$E_0 = (E_\mathbb{C})_0 \cap E \quad \text{und } E_\infty = (E_\mathbb{C})_\infty \cap E \quad \text{sowie } T_0 = (T)_0|E_0 \quad \text{und } T_\infty = (T_\mathbb{C})\infty|E_\infty.$$

Dann verifiziert man leicht, daß die Relationen auch im reellen Fall gelten.

Das folgende Lemma stellt ein Analogon zu Lemma 3.2 dar. Zur einfacheren Formulierung verwenden wir die anschauliche Schreibweise

$$|\sigma(A)| < \alpha \Leftrightarrow |\lambda| < \alpha \quad \text{für alle } \lambda \in \sigma(A).$$

Andere Ungleichungen sind analog zu interpretieren.

Satz 3.27. *Es sei $T \in \mathcal{L}(E)$ invertierbar und hyperbolisch, und für $\alpha \in \mathbb{R}_+$ gelte*

$$|\sigma(T_0)| < \alpha \textit{ und } |\sigma((T_\infty)^{-1})| < \alpha.$$

Dann gibt es eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf E so daß E_0 und E_∞ orthogonal sind und mit

$$\max\{\|T_0\|, \|(T_\infty)^{-1}\|\} \leq \alpha.$$

Beweis: Wegen $\|A_\mathbb{C}\| = \|A\|$ (vgl. den Beweis von Lemma 3.2 können wir o.B.A. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ annehmen. Nach dem Beweis von Lemma 3.2 wissen wir dann, daß $T_0 = D + N$ ist, mit einem nilpotenten Operator $N \in \mathcal{L}(E_0)$ und einem Diagonaloperator (bzgl. einer geeigneten Basis) $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_k)$, wobei $\mu_1, \ldots, \mu_k$ die gemäß ihrer Vielfachheit gezählten Eigenwerte von T_0 sind. Außerdem wissen wir, daß wir die Basis so wählen können, daß für die zugehörige euklidische Norm $\|\cdot\|_0$ auf E_0 gilt

$$\|N\|_0 \leq \alpha - \max\{|\mu_j| \mid j = 1, \ldots, k\}.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$\|T_0\|_0 \leq \|D\|_0 + \|N\|_0 \leq \max\{|\mu_j| \mid 1 \leq j \leq k\} + \|N\|_0 \leq \alpha.$$

Analog finden wir eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf E_∞, so daß für die zugehörige Operatornorm gilt: $\|T_\infty^{-1}\|_\infty \leq \alpha$. Dann wird durch

$$\|x\|^2 = \|x_0\|_0^2 + \|x_\infty\|_\infty^2 \quad \text{für alle } x = x_0 + x_\infty \in E_0 \oplus E_\infty = E$$

die gewünschte Hilbertnorm auf E definiert. **q.e.d.**

Bemerkung 3.28. *Ist $T \in \mathcal{L}(E)$ invertierbar und hyperbolisch, so ist*

$$|\sigma_0(T)| < 1 < |\sigma_\infty(T)|.$$

Da für jedes invertierbare $B \in \mathcal{L}(E)$ trivialerweise

$$\sigma(B^{-1}) = (\sigma(B))^{-1} = \left\{ \frac{1}{\lambda} \middle| \lambda \in \sigma(B) \right\}$$

gilt, folgt $|\sigma(T_\infty^{-1})| < 1$. Also existieren ein $\alpha < 1$ und eine Norm $\| \cdot \|$ auf E mit

$$T_0\| \leq \alpha < 1 \text{ und } \|T_\infty^{-1}\| \leq \alpha < 1.$$

Für $x \in E_0$ folgt hieraus

$$T^k x = (T_0)^k x \to 0 \text{ für } k \to \infty,$$

und für $y \in E_\infty$ ergibt sich

$$T^{-k} y = (T_\infty)^{-k} y \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

In Analogie zu linearen Flüssen nennt man deshalb E_0 den stabilen und E_0 den instabilen Untervektorraum von T (oder genauer: des von T erzeugten diskreten Flusses).

Für einen topologischen Raum sei $C_b(X, E)$ der Banachraum der beschränkten stetigen Funktionen von X nach E mit der Supremumsnorm. Ist X kompakt, so ist natürlich $C_b(X, E) = C(X, E)$ und

$$\|u\|_\infty = \max_{x \in X} |u(x)| = \|u\|_C.$$

Außerdem ist es klar, daß wir eine äquivalente Norm auf $C_b(X, E)$ erhalten, wenn wir die Norm in E durch eine äquivalente Norm ersetzen. Es sei nun $E = E_1 \oplus E_2$ eine direkte Summenzerlegung von E, und für die zugehörigen Projektionen $P_i : E \to E_i$ gelte $\|P_i\| \leq 1$. Dann läßt sich jedes Element $u \in E$ als $u = P_1 u + P_2 u$ schreiben, mit $P_i u \in C_b(X, E_i)$. Außerdem gilt trivialerweise

$$\|P_i u\|_{C_b(X, E_i)} = \sup_{x \in X} \|P_i u(x)\| \leq \|P_i\| \cdot \|u\|_\infty \leq \|u\|_\infty$$

für $i = 1, 2$. Folglich werden durch $(P_i u)(x) = P_i u(x)$ für alle $x \in X$ stetige Projektionen $P_i : C_b(X, E) \to C_b(X, E_i)$, mit $P_1 + P_2 = \mathbb{1}_B$ definiert, d.h. es gilt $C_b(X, E) = C_b(X, E_1) \oplus C_b(X, E_2)$, und $P_i : C_b(X, E) \to C_b(X, E_i)$ sind die zugehörigen Projektionen. Setzen wir

$$\|u\|_{C_b(X,E)} = \max\{\|P_i u\|_{C_b(X,E_1)}, \|P_2 u\|_{C_b(X,E_2)}\},$$

so folgt aus

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u\|_\infty &= \frac{1}{2}\|P_1u + P_2u\|_\infty \le \frac{1}{2}(\|P_1u\|_\infty + \|P_2u\|_\infty) \\ &=]\frac{1}{2}\{\|P_1u\|_{C_b(X,E_1)} + \|P_2u\|_{C_b(X,E_2)}\} \le \|u\|_{C_b(X,E)} \le \|u\|_\infty,\end{aligned}$$

daß $\|\cdot\|_{C_b(X,E)}$ eine äquivalente Norm auf $C_b(X,E)$ ist.

Schließlich benötigen wir noch das Analogon zum Begriff der "Flußäquivalenz" für den Fall topologischer Abbildungen. Sind X und Y topologische Räume und $A : X \to X$ sowie $B : Y \to Y$ Homöomorphismen, so heißt ein Homöomorphismus $\Psi : X \to Y$ eine topologische Konjugation von A nach B, falls $\Psi \circ A = B \circ \Psi$ gilt. Sind X und Y offene Teilmengen von Banachräumen und sind A, B und Ψ C^k-Diffeomorphismen, $1 \le k \le \infty$, so heißt Ψ eine C^k-Konjugation. Schließlich heißen A und B topologisch (bzw. C^k-)konjugiert, falls eine topologische (bzw. C^k-)Konjugation von A nach B existiert. Hierdurch wird trivialerweise eine Äquivalenzrelation in der Klasse der Homöomorphismen (bzw. der C^k-Diffeomorphismen) definiert. Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den globalen Hartmannschen Linearisierungssatz beweisen.

Satz 3.29. *Für ein invertierbares und hyperbolisches $T \in \mathcal{L}(E)$, und für jede Lipschitz stetige Funktion $g \in C_b(E,E)$ mit genügend kleiner Lipschitzkonstanten, sind die Abbildungen T und $T+g$ topologisch konjugiert.*

Beweis: Wegen dem vorangehenden Lemma und der Bemerkung danach gibt es eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf E mit

$$\max\{\|T_0\|, \|T_\infty^{-1}\|\} \le \alpha < 1.$$

Da beim Übergang zu einer äquivalenten Norm auf E die Lipschitzkonstante von g mit einem positiven Faktor multipliziert wird, können wir die Norm $\|\cdot\|$ auf E verwenden und annehmen, daß für Folgendes für ein $2\lambda < \min\{1-\alpha, \|T^{-1}\|^{-1}\}$ gilt:

$$\|g(x) - g(y)\| \le \lambda\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in E.$$

(i) Wir zeigen zuerst, daß $T + g \in C(E,E)$ ein Homöomorphismus ist. Da, für jedes $z \in E$, die Gleichung $Tx + g(x) = z$ äquivalent zur Fixpunktgleichung

$$x = T^{-1}(z - g(x)) = f_z(x)$$

ist, ist $T+g$ bijektiv, falls $f_z : E \to E$ genau einen Fixpunkt $x(z)$ hat. Wegen

$$\begin{aligned}\|f_z(x) - f_z(y)\| \le \|T^{-1}\| \cdot \|g(y) - g(x)\| & \qquad \le \lambda\|T^{-1}\| \cdot \|x - y\| \\ \le \frac{1}{2}\|x - y\| & \qquad \text{für alle } x, y \in E\end{aligned}$$

folgt dies aus dem Banachschen Fixpunktsatz. Wir erhalten für $z, \tilde{z} \in E$

$$\begin{aligned}\|x(z) - x(\tilde{z})\| &= \|f_z(x(z)) - f_{\tilde{z}}(x(\tilde{z}))\| \\ &\leq \|f_z(x(z)) - f_z(x(\tilde{z}))\| + \|f_z(x(\tilde{z})) - f_{\tilde{z}}(x(\tilde{z}))\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|x(z) - x(\tilde{z})\| + \|T^{-1}\| \cdot \|z - \tilde{z}\|,\end{aligned}$$

also $\|x(z)-x(\tilde{z})\| \leq 2\|T^{-1}\|\|z-\tilde{z}\|$. Also ist $x(\cdot) = (T+g)^{-1} : E \to E$ Lipschitz stetig.
(ii) Es sei nun $h \in C_b(E, E)$ eine zweite Lipschitz stetige Funktion mit der Lipschitzkonstanten λ. Ferner nehmen wir an, daß es zu jedem Paar (g, h) solcher Funktionen genau ein $H = H(g, h) \in C(E, E)$ gibt mit

$$H - \mathbb{1}_E \in C_b(E, E) \qquad \text{und } (T + g) \circ H = H \circ (T + h).$$

Dann gilt für $a = H(g, 0)$

$$(T + g) \circ a = a \circ T,$$

und für $b = H(0, g)$

$$T \circ b = b \circ (T + g).$$

Es folgt

$$(T + g) \circ a \circ b = a \circ T \circ b = a \circ b \circ (T + g).$$

Wegen $a = \mathbb{1}_E + u$ und $b = \mathbb{1}_E + v$ mit $u, v \in C_b(E, E)$ folgt $a \circ b = \mathbb{1}_E + w$ mit $w = v + u \circ b \in C_b(E, E)$. Wegen der Eindeutigkeit von H ist $a \circ b = H(g, g) = \mathbb{1}_E$ ist. Analog folgt $b \circ a = \mathbb{1}_E$. Folglich ist a ein Homömorphismus von E auf sich, also eine topologische Konjugation von $T + g$ nach T.
(iii) Mit $H = \mathbb{1}_E + u$ bleibt zu zeigen, daß es genau ein $u \in C_b(E, E)$ gibt mit

$$(T + g) \circ (\mathbb{1}_E + u) = (\mathbb{1}_E + u) \circ (T + h).$$

Da nach (i) $T + h$ ein Homöomorphismus ist, ist das äquivalent zu

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_E + u &= (T + g) \circ (\mathbb{1}_E + u) \circ (T + h)^{-1} \\ &= g \circ (\mathbb{1}_E + u) \circ (T + h)^{-1} + T \circ (T + h)^{-1} + T \circ u \circ (T + h)^{-1}.\end{aligned}$$

Wegen $\mathbb{1}_E = (T + h) \circ (T + h)^{-1}$ ist die letzte Gleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned}u = \tilde{F}(u) &= T \circ u \circ (T + h)^{-1} + G(u) \quad \text{mit} \\ G(u) &= g \circ (\mathbb{1}_E + u) \circ (T + h)^{-1} - h \circ (T + h)^{-1}.\end{aligned}$$

Offensichtlich bildet $\tilde{F}$ den Banachraum $C_b(E, E)$ in sich ab. Es bleibt zu zeigen, daß $\tilde{F}$ genau einen Fixpunkt in $C_b(E, E)$ hat.

Wegen $E = E_0 \oplus E_\infty$ und da E_0 und E_∞ orthogonal sind, folgt $\|P_0\|, \|P_\infty\| \leq 1$ für die zugehörigen Projektionen (vgl. den Beweis von Theorem). Die Fixpunktgleichung für $\tilde{F}$ ist somit äquivalent zu dem Paar von Gleichungen

$$\begin{aligned} P_0 \circ u = F_0(u) &= T_0 \circ P_0 \circ u \circ (T+h)^{-1} + P_0 \circ G(u) \\ P_\infty \circ u &= T_\infty \circ P_\infty \circ u \circ (T+h)^{-1} + P_\infty \circ G(u). \end{aligned}$$

Da die letzte Gleichung durch Multiplikation von links mit T_∞^{-1} und von rechts mit $T+h$ in die äquivalente Gleichung

$$P_\infty \circ u = F_\infty(u) = T_\infty^{-1} \circ P_\infty \circ u \circ (T+h) - T_\infty^{-1} \circ P_\infty \circ G(u) \circ (T+h)$$

übergeht, ist die Fixpunktgleichung für $\tilde{F}$ äquivalent zu der letzten und der vorvorletzten Gleichung. Nach den den vorangehenden Betrachtungen induziert die Zerlegung $E = E_0 \oplus E_\infty$ die Zerlegung $C_b(E,E) = C_b(E,E_0) \oplus C_b(E,E_\infty)$ mit

$$\begin{aligned} \|u\|_{C_b(E,E)} &= \max\{\|P_0 u\|_\infty, \|P_\infty u\|_\infty\} \\ \frac{1}{2}\|u\|_\infty &\leq \|u\|_{C_b(E,E)} \leq \|u\|_\infty \quad \text{für alle } u \in B. \end{aligned}$$

Also wird durch $F = F_0 + F_\infty$ eine Abbildung von $C_b(E,E)$ in sich definiert, derart, daß die Fixpunktgleichung $u = F(u)$ zur Fixpunktgleichung $u = \tilde{F}(u)$ äquivalent ist. Für $u, v \in B$ und $x \in E$ erhalten wir mit $y = (T+h)^{-1}(x)$ und $z = (T+h)(x)$ und unter Verwendung von der Abschätzung an die Normen von T_0 und T_∞ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} &\|F_0(u)(x) - F_0(v)(x)\| \\ &\qquad \leq \alpha\|P_0 u(y) - P_0 v(y)\| + \|g(y+u(y)) - g(y+v(y))\| \\ &\qquad \leq \alpha\|P_0(u-v)\|_\infty + \lambda\|u-v\|_\infty \quad \text{und} \\ &\|F_\infty(u)(x) = F_\infty(v)(x)\| \\ &\qquad \leq \alpha\|P_\infty u(z) - P_\infty v(z)\| + \|g(x+u(x)) - g(x+v(x))\| \\ &\qquad \leq \alpha\|P_\infty(u-v)\|_\infty + \lambda\|u-v\|_\infty, \quad \text{also} \\ \|F_0(u) - F_0(v)\|_\infty &\leq \alpha\|P_0(u-v)\|_\infty + 2\lambda\|u-v\|_{C_b(E,E)} \\ &\leq (\alpha+2\lambda)\|u-v\|_{C_b(E,E)} \quad \text{und} \\ \|F_\infty(u) - F_\infty(v)\|_\infty &\leq (\alpha+2\lambda)\|u-v\|_{C_b(E,E)}, \end{aligned}$$

woraus wegen $F_0(C_b(E,E)) \subset C_b(E,E_0)$ und $F_\infty(C_b(E,E)) \subset C_B(E,E_\infty)$

$$\|F(U) - F(v)\|_{C_b(E,E)} \leq (\alpha+2\lambda)\|u-v\|_{C_b(E,E)} \quad \text{für alle } u,v \in C_b(E,E)$$

folgt. Wegen $\alpha + 2\lambda < 1$ folgt die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes von F aus dem Banachschen Fixpunktsatz. **q.e.d.**

Bemerkung 3.30. **(i)** *Der obige Beweis zeigt, daß es genau eine topologische Konjugation h von T nach $T+g$ gibt, welche $h - \mathbb{1}_E \in C_b(E,E)$ erfüllt (falls natürlich die Lipschitzkonstante von g hinreichend klein ist).*

(ii) *Wenn es $g \in C^k(E,E), 1 \leq k \leq \infty$, so gilt, ist es natürlich zu erwarten, daß die topologische Konjugation von $T+g$ nach g auch die entsprechenden Differenzierbarkeitseigenschaften hat, d.h. daß $T+g$ und T C^k-konjugiert sind. Dies ist jedoch im allgemeinen nicht richtig. Für weitere Untersuchungen in dieser Richtung sei auf Hartmann verwiesen.*

Zur Lokalisierung des obigen Linearisierungssatzes benötigen wir das folgende

Lemma 3.31. *Es sei F ein beliebiger normierter Vektorraum, und $r_\alpha : F \to \bar{B}(0,\alpha)$ sei die radiale Retraktion:*

$$r_\alpha(x) = \begin{cases} x & \text{für } \|x\| \leq \alpha \\ \alpha \frac{x}{\|x\|} & \text{für } \|x\| \leq \alpha \end{cases}.$$

Dann ist r_α gleichmsig Lipschitz stetig mit der Lipschitzkonstanten 2.

Beweis: Für $\|x\| > \alpha \geq \|y\|$ gilt

$$\begin{aligned} \|r_\alpha(x) - r_\alpha(y)\| &= \left\|\alpha\|x\|^{-1}x - y\right\| \leq \alpha\|x\|^{-1}\|x-y\| + \left\|\alpha\|x\|^{-1}y - x\right\| \\ &=\leq \|x-y\| + \|x\|^{-1}\|y\|(\|x\| - \alpha) \\ &=\leq \|x-y\| + \|x\| - \|y\| \leq 2\|x-y\|. \end{aligned}$$

Sind $\|x\| > \alpha$ und $\|y\| > \alpha$, erhalten wir

$$\begin{aligned} \|r_\alpha\|x\| - r_\alpha(y)\| &= \left\|\alpha\|x\|^{-1}x - \alpha\|y\|^{-1}y\right\| \\ &\leq \alpha\|x\|^{-1}\|x-y\| + \alpha\|y\| \cdot \left|\|x\|^{-1} - \|y\|^{-1}\right| \\ &\leq \|x-y\| + |\|x\| - \|y\|| \leq 2\|x-y\|. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. **q.e.d.**

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun das Hauptresultat dieses Abschnittes beweisen. Dazu erinnern wir daran, daß E ein endlichdimensionaler Banachraum ist, daß Ω offen ist in E und daß $f \in C^1(\Omega, E)$ gilt.

Satz 3.32 (Grobman, Hartmann)**.** *Es sei x_0 ein hyperbolischer kritischer Punkt von Φ_f. Dann sind $\Phi_f|_{x_0}$ und $e^{tf'(x_0)}|_0$ isochron flußäquivalent.*

Beweis: (i) Da die Translation offensichtlich eine isochrone Flußäquivalenz darstellt, können wir o.B.d.A. $x_0 = 0$ annehmen. Für alle $\lambda > 0$ existiert ein $\alpha > 0$ mit $\|f'(x) - f'(0)\| \leq \frac{\lambda}{2}$ für alle $x \in \bar{B}(0,\alpha)$. Aufgrund des Mittelwertsatzes ist die Funktion $x \mapsto f(x) - f'(0)x$ auf $\bar{B}(0,\alpha)$ Lipschitz stetig mit der Lipschitzkonstanten $\frac{\lambda}{2}$. Wir definieren $g \in C_b(E,E)$ mittels der radialen Retraktion $r_\alpha : E \to \bar{B}(0,\alpha)$ durch

$$g = (f - f'(0)) \circ r_\alpha.$$

Wegen dem vorangehenden Lemma ist g Lipschitz stetig ist mit der Lipschitzkonstanten λ. Mit $A = f'(0) \in \mathcal{L}(E)$ gilt

$$(A+g)|_{B(0,\alpha)} = f|_{B(0,\alpha)}.$$

Ist Φ_{A+g} der von $A+g$ auf E erzeugte Fluß, so stimmt Φ_{A+g} auf $B(0,\alpha)$ also mit Φ_f überein. Es genügt also zu zeigen, daß Φ_{A+g} und e^{tA} isochron flußäquivalent sind.
(ii) Mit g ist auch $A+g$ Lipschitz stetig ist. Also ist Φ_{A+g} nach Satz 1.40 (v) ein globaler Fluß. Wegen $\dot{x} = Ax + g(x)$ folgt aus der Variation der Konstanten

$$\Phi_{A+g}(t,x) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-\tau)}g(\Phi_{A+g}(\tau,x))d\tau \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\|\Phi_{A+g}(t,x) - \Phi_{A+g}(t,y)\| \leq e^{t\|A\|}\|x-y\| + \int_0^t e^{(t-\tau)\|A\|}\lambda \|\Phi_{A+g}(\tau,x) - \Phi_{A+g}(\tau,y)\| \, d\tau$$

für $t \geq 0$ und $x,y \in E$. Nach Multiplikation dieser Ungleichung mit $e^{-t|A|}$ erhalten wir mithilfe von Lemma 1.62 die Ungleichung

$$\|\Phi_{A+g}(t,x) - \Phi_{A+g}(t,y)\| \leq \|x-y\|e^{(\lambda+\|A\|)t} \quad \text{für alle } x,y \in E \text{ und } t \geq 0.$$

Wegen $g \in C_b(E,E)$ erhalten wir $$\|\Phi_{A+g}(t,x) - e^{tA}x\| \leq \|g\|_\infty \left| \int_0^t e^{|t-\tau|\|A\|}d\tau \right|$$
für $t \in \mathbb{R}$ und $x \in E$, also $$\Phi_{A+g}(t,\cdot) - e^{tA} \in C_b(E,E) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$
Schließlich folgt

$$\|(\Phi^1_{A+g} - e^{tA}(x) - (\Phi_{A+g}(t,\cdot) - e^{tA})(y)\| \leq \int_0^t e^{t-\tau\|A\|}\lambda\|\Phi_{A+g}(\tau,x) - \Phi_{A+g}(\tau,y)\|d\tau$$

$$\leq \lambda\|x-y\|e^{t\|A\|}\int_0^t e^{\lambda\tau}d\tau = \|x-y\|e^{t\|A\|}(e^{\lambda t} - 1) \quad \text{für } t \geq 0 \text{ und } x,y \in E.$$

(iii) Da 0 nach Voraussetzung ein hyperbolischer kritischer Punkt ist, ist $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Also folgt aus Lemma 3.26, daß $T = e^A$ ein hyperbolischer Automorphismus von E ist. Da wir λ beliebig klein wählen können, folgt, daß die Lipschitzkonstante von $\tilde{g} = \Phi^1_{A+g} - T$ beliebig klein gemacht werden kann. Da $\tilde{g} \in C_b(E, E)$ gilt, können wir nach dem Hartmannschen Linearisierungssatz annehmen, daß T und $\Phi_{A+g}(1, \cdot) = T + \tilde{g}$ topologisch konjugiert sind. Wir wissen außerdem, daß es genau eine topologische Konjugation Ψ von T nach $\Phi_{A+g}(1, \cdot)$ gibt mit $\Psi - \mathbb{1}_E \in C_b(E, E)$.

Aus $\Psi \circ T = \Phi_{A+g}(1, \cdot) \circ \Psi$ folgt für jedes $t \in \mathbb{R}$ (mit $T^t = e^{tA}$)

$$\begin{aligned} \Phi_{A+g}(1, \cdot) \circ (\Phi_{A+g}(t, \cdot) \circ \Psi \circ T^{-t}) &= \Phi_{A+g}(t, \cdot) \circ \Phi_{A+g}(1, \cdot) \circ \Psi \circ T^{-t} \\ &= \Phi_{A+g}(t, \cdot) \circ \Psi \circ T \circ T^{-t} \\ &= (\Phi_{A+g}(t, \cdot) \circ \Psi \circ T^{-t}) \circ T. \end{aligned}$$

Also ist $\Phi_{A+g}(t, \cdot) \circ \Psi \circ T^{-t}$ eine topologische Konjugation von T nach $\Phi_{A+g}(1, \cdot)$. Wegen

$$\Phi_{A+g}(1, \cdot) \circ \Psi \circ T^{-t} - \mathbb{1}_E = (\Phi_{A+g}(t, \cdot) - T^t) \circ \Psi \circ T^{-t} + T^t \circ (\Psi - \mathbb{1}_E) \circ T^{-t}$$

folgt wegen $\Phi_{A+g}(t, \cdot) - e^{tA} \in C_b(E, E)$, daß $\Phi_{A+g}(t, \cdot) \circ \Psi \circ T^{-t} - \mathbb{1}_E \in C_b(E, E)$ gilt. Also ist $\Phi_{A+g}(t, \cdot) \circ \Psi \circ T^{-t} = \Psi$ und somit $\Phi_{A+g}(t, \cdot) \circ \Psi = \Psi \circ e^{tA}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$, d.h. Φ_{A+g} und e^{tA} sind isochron flußäquivalent. **q.e.d.**

3.5 Stabile Mannigfaltigkeiten

Der obige Satz besagt, daß in der Nähe eines hyperbolischen kritischen Punktes x_0 das Phasenporträt des Flusses Φ_f die gleiche topologische Struktur wie das Phasenporträt der Linearisierung in der Nähe von 0 hat. In Analogie zum stabilen Untervektorraum E_s bzw. instabilen Untervektorraum E_u eines linearen Flusses definiert man die stabile Mannigfaltigkeit $W_s(x_0)$ bzw. die instabile Mannigfaltigkeit $W_u(x_0)$ von Φ_f in x_0 als

$$\begin{aligned} W_s(x_0) &= \{x \in E \mid t \mapsto \Phi_f(t, x) \text{ existiert für } t \in [0, \infty) \text{ und } \lim_{t \to \infty} \Phi_f(t, x) = x_0\} \\ W_u(x_0) &= \{x \in E \mid t \mapsto \Phi_f(t, x) \text{ existiert für } t \in (-\infty, 0] \text{ und } \lim_{t \to -\infty} \Phi_f(t, x) = x_0\}. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $x_0 \in W_s(x_0) \cap W_u(x_0)$. Wir wollen nun zeigen, daß, in der Nähe von x_0, die Mengen $W_s(x_0)$ und $W_u(x_0)$ tatsächlich differenzierbare Untermannigfaltigkeiten von E sind, die sich in x_0 transversal schneiden, und daß die Tangentialräume an $W_s(x_0)$ bzw. $W_u(x_0)$ parallel zu E_s bzw. E_u sind:

$$T_{x_0} W_s(x_0) = x_0 + E_s \qquad\qquad T_{x_0} W_u(x_0) = x_0 + E_u.$$

Zum Beweis dieses Sachverhaltes betrachten wir wieder Homöomorphismen von E auf sich. Ist $h : E \to E$ ein Homöomorphismus mit $h(0) = 0$, so nennen wir die Menge

$$W_0 := \{x \in E \mid h^n(x) \to 0 \text{ für } n \to \infty\}$$

die stabile Menge von h in 0, wobei h^n die n-fache Iterierte von h bezeichnet. Analog definiert man die instabile Menge von h in 0 durch

$$W_\infty := \{x \in E \mid h^{-n}(x) \to 0 \text{ für } n \to \infty\},$$

wobei $h^{-n} := (h^{-1})^n$ gesetzt ist. Offensichtlich gehen W_0 und W_∞ ineinander über, wenn wir h durch h^{-1} ersetzen. Folglich genügt es, W_0 zu betrachten.

Sei $T \in \mathcal{L}(E)$ invertierbar und hyperbolisch, und $E = E_0 \oplus E_\infty, T = T_0 \oplus T_\infty$ sei die oben eingeführte Zerlegung in den stabilen und den instabilen Untervektorraum.

Satz 3.33. *Sei $g : E \to E$ Lipschitz stetig mit $g(0) = 0$. Besitzt g eine genügend kleine Lipschitzkonstante, so existiert eine eindeutig bestimmte gleichmäßig Lipschitz stetige Funktion $h : E_0 \to E_\infty$, so daß der Graph von h die stabile Menge W_0 von $T + g$ in 0 ist. Gehört g in einer Umgebung von 0 zur Klasse $C^k, 1 \leq k \leq \infty$, so auch die Funktion h. In diesem Fall gibt es eine Umgebung V von 0 in E_0, derart, daß*

$$W_0^V = \{(x, h(x)) \mid x \in V\}$$

eine C^k-Mannigfaltigkeit ist. Gilt außerdem $g'(0) = 0$, so ist $T_0 W_0^v = E_0$.

Beweis: Es sei

$$B_0 = \{u : \mathbb{N} \to E \mid u(k) \to 0 \text{ für } k \to \infty\}.$$

Offenbar ist B_0 ein abgeschlossener Untervektorraum des Banachraums $B(\mathbb{N}, E)$ aller beschränkten Folgen in E mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Also ist B_0 selbst ein Banachraum mit der Supremumsnorm. Es sei

$$\mathbb{W}_0 = \{u \in B_0 \mid u(k) = (T + g)^k x \text{ für ein } x \in E \text{ und alle } k \in \mathbb{N}\}.$$

Dann gilt offensichtlich $W_0 = \{u(0) \mid u \in \mathbb{W}_0\}$. Ferner ist

$$u \in \mathbb{W}_0 \Leftrightarrow u(k+1) = (T + g)(u(k)) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Mit den Projektionen $P_0 : E \to E_0$ und $P_\infty : E \to E_\infty$ ist das äquivalent zu

$$P_0 u(k+1) = T_0 P_0 u(k) + P_0 g(u(k)) \quad P_\infty u(k+1) = T_\infty P_\infty u(k) + P_\infty g(u(k)), \text{ und}$$

$$P_0 u(k+1) = T_0 P_0 u(k) + P_0 g(u(k)) \quad P_\infty u(k) = T_\infty^{-1} P_\infty u(k+1) - T_\infty^{-1} P_\infty g(u(k))$$

für $k \in \mathbb{N}$. Setzen wir für $x \in E$ und $u \in B_0$:

$$F(x,u)(k) = \begin{cases} T_0 P_0 u(k-1) + T_\infty^{-1} P_\infty u(k+1) + P_0 g(u(k-1)) - T_\infty^{-1} P_\infty g(u(k)) \\ P_0 x + T_\infty^{-1}(P_\infty u(1) - P_\infty g(u(0))) \text{ für } k = 0, \end{cases}$$

so sehen wir, daß $x \in E_0$ genau dann zu W_0 gehört, wenn u ein Fixpunkt von $F(x,\cdot)$ in B_0 ist. Wie im Beweis des Hartmannschen Linearisierungssatzes sei für ein $2\lambda < 1-\alpha$

$$\max\{\|T_0\|, \|T_\infty^{-1}\|\} \leq \alpha < 1 \quad \max\{\|P_0\|, \|P_\infty\|\} \leq 1 \quad \|g(x) - g(y)\| \leq \lambda \|x-y\|$$

für alle $x, y \in E$. Außerdem benutzen wir in B_0 die äquivalente Norm

$$\|u\|_B = \max\{\|P_0 u\|_\infty, \|P_\infty u\|_\infty\} \qquad \text{mit } \frac{1}{2}\|u\|_\infty \leq \|u\|_B \leq \|u\|_\infty$$

für alle $u \in B_0$. Für $x \in E$ und $u, v \in B_0$ erhalten wir die Abschätzungen

$$\begin{aligned} &\|F(x,u) - F(x,v)\|_B \leq (\alpha + 2\lambda)\|u - v\|_B \\ &\qquad \|F(x,u)(k)\| \leq (\alpha+\lambda)\|u(k-1)\| + \alpha\lambda\|u(k)\| + \alpha\|u(k+1)\| \quad \text{für } k \geq 1. \end{aligned}$$

Es folgt, daß $F(x,\cdot)$ den Banachraum B_0 in sich abbildet, und $F(x,\cdot): B_0 \to B_0$ eine Kontraktion mit der von $x \in E$ unabhängigen Kontraktionskonstanten $\alpha + 2\lambda < 1$ ist. Der Banachsche Fixpunktsatz impliziert die Existenz eines eindeutig bestimmten Fixpunktes $U(x)$ von $F(x,\cdot)$ in B_0. Aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} \|U(x) - U(y)\|_B &= \|F(x, U(x)) - F(y, U(y))\|_B \\ &\leq \|F(x, U(x)) - F(x, U(y))\|_B + F(x, U(y)) - F(y, U(y))\|_B \\ &\leq (\alpha + 2\lambda)\|U(x) - U(y)\|_B + \|P_0 x - P_0 y\| \quad \text{folgt} \\ \|U(x) - U(y)\|_B &\leq \frac{\|P_0 x - P_0 y\|}{1 - \alpha - 2\lambda} \quad \text{für alle } x, y \in E \quad \text{Wir setzen nun} \\ h(x) &= P_\infty U(x)(0) \quad \text{für alle } x \in E_0. \end{aligned}$$

Dann bildet h den Raum E_0 Lipschitz stetig in E_∞ ab, und

$$W_0 = \{x, h(x)) \mid x \in E_0\} = \text{graph}(h).$$

Wir bezeichnen mit $S_1, S_{-1}: B_0 \to B_0$ die "Verschiebungsoperatoren"

$$(S_{-1}u)(k) = u(k+1) \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \quad (S_1 u)(k) = \begin{cases} u(k-1) & \text{für alle } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } k = 0. \end{cases}$$

Offensichtlich sind S_{-1} und S_1 stetig mit $\max\{\|S_{-1}\|_B, \|S_1\|_B\} \leq 1$.
Schließlich definieren wir $G : B_0 \to B_0$ durch

$$G(u)(k) = g(u(k)) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Gilt dann $g \in C^k(B_E(0,\beta), E)$ für ein $\beta > 0$ und ein $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, so folgt $G \in C^k(B_{B_0}(0,\beta), B_0)$ und für $g'(0) = 0$ auch $G'(0) = 0$. Mit dem "Einheitsvektor" $e_0 = (1, 0, \ldots) \in B_0$ kann $F(x, \cdot)$ in folgender Form geschrieben werden:

$$F(x,\cdot) = (P_0x)e_0 + T_0P_0(S_1 + G \circ S_1) + T_\infty^{-1}P_\infty(S_{-1} - G)$$

$$\text{Mit } H(x,u) = u - F(x,u) \quad \text{erhalten wir} \quad H \in C^k(E \times B_{B_0}(0,\beta), B_0)$$

$$K = \mathbb{1}_{B_0} - \frac{\partial H}{\partial u}(0,0) = T_0P_0S_1 + T_\infty^{-1}P_\infty S_{-1}.$$

Mithilfe von $\max\{\|S_{-1}\|_B, \|S_1\|_B\} \leq 1$ folgt die Abschätzung

$$\|K\|_{\mathcal{L}(B_0)} \leq \alpha < 1.$$

Dann ist $\frac{\partial H}{\partial u}(0,0) \in \mathcal{L}(B_0)$ invertierbar. Wegen $H(0,0) = 0$, und da für jedes $x \in E_0$ das Element $U(x) \in B_0$ eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung

$$H(x,u) = 0$$

ist, folgt aus dem Satz über implizite Funktionen daß in einer Umgebung von $x = 0$ die Funktion

$$E_0 \to B_0, \quad x \mapsto U(x)$$

zur Klasse C^k gehört. Da die "Evaluationsabbildung" $B_0 \to E, u \mapsto u(0)$ offensichtlich linear und stetig ist, ist die Funktion $h : E_0 \to E_\infty$ in einer Umgebung V von 0 in der Klasse C^k. Folglich ist W_0^V als Graph einer C^k-Funktion eine C^k-Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim_{\mathbb{R}} E_0$. Da durch

$$V \ni x \mapsto (x, h(x)) \in E$$

eine Parametrisierung von W_0^V gegeben wird, ist der Tangentialraum $T_0W_0^V$ das Bild von E_0 unter $(\mathbb{1}_{E_0} \times h'(0)$ in $E_0 \times E_\infty$, wobei wir o.B.d.A. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ annehmen können. Durch Differenzieren der Identität $H(x, U(x)) = 0$ im Punkt $x = 0$ folgt

$$\frac{\partial H}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial H}{\partial u}(0,0)U'(0) = 0 \qquad \text{mit}$$

$$U'(0) \in \mathcal{L}(E_0, B_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial x}(0,0)\xi = -(P_0\xi)e_0 \quad \text{für alle } \xi \in E.$$

Wir erhalten $P_\infty \frac{\partial H}{\partial x}(0,0)\xi = 0$ und mit der Definition von K und Anwenden von P_∞

$$P_\infty U'(0) - T_\infty^{-1} S_{-1} U'(0) = 0, \text{ d.h. } \qquad P_\infty (U'(0)x)(k) = T_\infty^{-1}(U'(0)x)(k+1)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x \in E_0$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \|P_\infty(U'(0)x)(k)\| &\le \alpha \|P_\infty U'(0)\|_{\mathcal{L}(E_0,B_0)} \|x\|_E \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \\ \|P_\infty U'(0)\|_{\mathcal{L}(E_0,B_0)} &\le \alpha \|P_\infty U'(0)\|_{\mathcal{L}(E_0,B_0)}, \end{aligned}$$

d.h. $P_\infty U'(0) = 0$, da $\alpha < 1$ ist. Wegen $h'(0)\xi = P_\infty(U'(0)\xi)(0)$ für alle $\xi \in E_0$ erhalten wir $h'(0) = 0$ und somit die Behauptung. **q.e.d.**

Ist V eine Umgebung eines kritischen Punktes x_0 des Flusses Φ_f, so definieren wir die lokalen stabilen bzw. instabilen Mannigfaltigkeiten von Φ_f in x_0 bzgl. V durch

$$\begin{aligned} W_s^V(x_0) &= \{x \in W_s(x_0) \mid \Phi_f(t,x) \in V \text{ für } t \ge 0\} \\ W_u^V(x_0) &= \{x \in W_u(x_0) \mid \Phi_f(t,x) \in V \text{ für } t \le 0\}. \end{aligned}$$

I.a. gilt $W_s^V(x_0) \ne W_s(x_0) \cap V$ und $W_u^V(x_0) \ne W_u(x_0) \cap V$. Nach diesen Vorbereitungen können wir den angekündigten Satz über die lokalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten beweisen, der im Wesentlichen auf Hadamard und Perron zurückgeht.

Satz 3.34. *Es sei $\Omega \subset E$ eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Banachraums und $f \in C^k(\Omega, E)$ für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ferner sei x_0 ein hyperbolischer kritischer Punkt des von f erzeugten Flusses Φ_f. Dann gibt es eine Umgebung V von x_0, derart, daß $W_u^V(x_0)$ C^k-Mannigfaltigkeiten sind. Außerdem gilt*

$$T_{x_0} W_s^V(x_0) = x_0 + E_s \text{ und } T_{x_0} W_u^V(x_0) = x_0 + E_u,$$

Wobei E_s und E_u die stabilen und instabilen Untervektorräume von $e^{tf'(x_0)}$ sind.

Beweis: O.B.d.A. können wir $x_0 = 0$ annehmen. Wir setzen wieder

$$g = (f - f'(0)) \circ r_\alpha,$$

wobei $r_\alpha : E \to \bar{B}(0,\alpha)$ die radiale Retraktion bezeichnet. Dann ist g gleichmäßig Lipschitz stetig, $g(0) = 0$, und $g \in C^k(B(0,\alpha), E)$ mit $g'(0) = 0$. Durch geeignete Wahl von $\alpha > 0$ wird die Lipschitzkonstante von g beliebig klein. Mit $A = f'(0) \in \mathcal{L}(E)$ gilt

$$(A + g)|_{B(0,\alpha)} = f|_{B(0,\alpha)},$$

Also stimmt auf $B(0,\alpha)$ der von $A + g$ erzeugte globale Fluß Φ_{A+g} mit dem von f erzeugten Fluß Φ_f überein. Wir setzen nun $T = e$. Dann ist T ein hyperbolischer

Automorphismus, und wie im Beweis vom Satz von Grobman und Hartmann folgt, daß $\tilde{g} = \Phi_{A+g}(1,\cdot) - T$ global Lipschitz stetig ist, wobei die Lipschitzkonstante von $\tilde{g}$ durch geeignete Wahl von α beliebig klein wird. Außerdem gehört $\tilde{g}$ in einer Umgebung von 0 zur Klasse C^k. Offensichtlich ist $\tilde{g}(0) = 0$, und da $\frac{\partial}{\partial x}\Phi_{A+g}(\cdot,0)$ die Lösung des Anfangswertproblems für die linearisierte Gleichung

$$\dot{z} = (A + g'(\Phi_{A+g}(t,0)))z, \quad z(0) = \mathbb{1}_E$$

ist, folgt aus $\Phi_{A+g}(t,0) = 0$ und $g'(0) = 0$, daß $\frac{\partial}{\partial x}\Phi_{A+g}(t,0) = e^{tA}$, also $\tilde{g}'(0) = 0$, gilt. Folglich erfüllen T und $\tilde{g}$ die Voraussetzungen des vorangehenden Satzes. Somit ist die stabile Menge W_0 von $\Phi_{A+g}(1,\cdot) = T + \tilde{g}$ als Graph einer global Lipschitz stetigen Abbildung $h : E_0 \to E_\infty$ darstellbar. Außerdem gibt es eine Umgebung V_0 von 0 in E_0 mit $h \in C^k(V_0, E_\infty)$, derart, daß

$$W_0^{V_0} = \{(x, h(x)) \in E \mid x \in V_0\}$$

eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $T_0 W_0^{V_0} = E_0 = E_s$ ist. Wir behaupten nun, daß $W_0 = \tilde{W}_s(0)$ gilt, wobei $\tilde{W}_s(0)$ die stabile Mannigfaltigkeit von Φ_{A+g} im Punkt 0 ist. Da aus $\lim\limits_{t-\infty} \Phi_{A+g}(t,x) = 0$ stets $\Phi_{A+g}(k,x) \to 0$ für $k \to \infty$ folgt, ist $\tilde{W}_s(0) \subset W_0$. Zum Beweis der umgekehrten Inklusion bemerken wir, daß zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\|\Phi_{A+g}(t,x)\| \leq \epsilon \text{ für } |t| \leq 1 \text{ und } |x| \leq \delta.$$

Andernfalls gäbe es für ein $\epsilon > 0$ eine Folge (t_k, x_k) in $[-1,1] \times E$ mit $x_k \to 0$ und $\|\Phi_{A+g}(t_k, x_k)\| \geq \epsilon$. Durch Übergang zu einer geeigneten Teilfolge könnten wir $t_k \to \bar{t} \in [-1,1]$ annehmen, was $\|\Phi_{A+g}(\bar{t},0)\| \geq \epsilon$ implizierte, im Widerspruch zu $\Phi_{A+g}(\cdot,0) = 0$.

Es sei $\epsilon > 0$ beliebig und es gelte $\lim_{k\to\infty} \Phi_f(k,x) = 0$. Dann existiert ein $k(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\|\Phi_{A+g}(k,x)\| \leq \beta$ für $k \geq k(\epsilon)$, wobei $\delta > 0$ wie oben gewählt ist. Also folgt

$$\|\Phi_{A+g}(t,x)\| = \|\Phi_{A+g}(t-k, \Phi_{A+g}(k,x))\| \leq \epsilon \quad \text{für } t \geq k(\epsilon) \text{ und } t \in [k, k+1),$$

d.h. $\Phi_{A+g}(t,x) \to 0$ für $t \to \infty$, und somit $W_0 \subset \tilde{W}_s(0)$.

Nach dem Beweis von dem vorangehenden Satz ist $h(x) = P_\infty U(x)(0)$ für $x \in E_0$, wobei die Funktion

$$E \to B_0, \quad y \mapsto U(y)$$

stetig ist, in $y = 0$ verschwindet und $U(y)(k) = (T+\tilde{g})^k(y) = \Phi_{A+g}(k,y)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt. Also existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\{(x, h(x)) \mid \|x\| \leq \delta\} \subset \{y \in W_0 \mid \|\Phi_{A+g}(k,y)\| \leq \epsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}\}.$$

Aus $\|\Phi_{A+g}(t,x)\| \leq \epsilon$ für $|t| \leq 1$ und $|x| \leq \delta$ folgt wie im Beweis der Inklusion $W_0 \subset \tilde{W}_s(0)$, daß wir zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ die Zahl $\delta > 0$ so wählen können, daß

$$\{(x, h(x)) \mid \|x\| \leq \delta\} \subset \{y \in W_0 \mid \|\Phi_{A+g}(t,y)\| \leq \epsilon \quad \text{für alle } t \in \mathbb{N}\}.$$

gilt. Wegen $W_0 = \tilde{W}_s(0)$ existieren also Nullumgebungen V in E und $\hat{V} \subset V_0$ in E_0 mit $W_0^{\hat{V}} \subset \tilde{W}_s^V(0)$. Da in der Nähe von 0 die Flüsse übereinstimmen, können wir V so klein wählen, daß $\tilde{W}_s^V(0) = W_s^V(0)$ gilt. Insbesondere ist $W_s^V(0) \subset W_0$, und da W_0 der Graph einer auf E_0 definierten Funktion ist, gilt $W_s^V(0) \subset W_0^{V_0}$ für eine genügend kleine Umgebung V von 0. Also ist $W_s^V(0)$ eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $T_{x_0}W_s^V(0) = E_s$. Die Behauptung für $W_u^V(0)$ folgt nun durch "Zeitumkehr". **q.e.d.**