Martin Schmidt
Volker Eing

# Analysis III
# 8. Übung

23. Oktober 2018

(Abgabe: A5, C, Eingang Ost, Postfach 46236, Montag, 29. Oktober 2018 bis 16 Uhr)

**1.** Es sei $(E, B, \pi)$ ein Vektorraumbündel.

**(a) Extrapolation von Schnitten eines Vektorraumbündels.**
Sei $b_0 \in B$ und $v \in \pi^{-1}[\{b_0\}]$. Zeige: Es existiert ein globaler Schnitt $f : B \to E$ mit $f(b_0) = v$.

*(6 Punkte)*

[Tipp. Man verwende eine lokale Trivialisierung von $\pi$ in der Nähe von $b_0$, sowie eine Zerlegung der Eins auf $B$.]

**(b) Noch ein Differenzierbarkeitstest.**
Zeige, dass für jede Mannigfaltigkeit $Z$ und jede *beliebige* Abbildung $g : B \to Z$ gilt: Wenn $g \circ \pi$ glatt ist, so auch $g$. *(4 Punkte)*

**2. Trivialität von Homomorphismenbündeln.**

Es seien $(E, B, \pi)$ und $(E', B, \pi')$ zwei Vektorraumbündel über der differenzierbaren Mannigfaltigkeit $B$. Wir betrachten das Homomorphismenbündel $(\mathrm{Hom}(E, E'), B, \pi'')$ zu diesen beiden Bündeln.

**(a)** Zeige: Wenn die Bündel $E$ und $E'$ beide trivial sind, so ist auch $\mathrm{Hom}(E, E')$ trivial.
*(5 Punkte)*

**(b)** Beweise oder widerlege: Wenn $\mathrm{Hom}(E, E')$ trivial ist, so sind auch $E$ und $E'$ trivial.
*(5 Punkte)*

[Tipp. Man untersuche das „Möbiusband“ aus Aufgabe 3(c) Zettel 7 als Vektorraumbündel über $B = \mathbb{S}^1$.]

**3. Das duale Bündel zu einem Vektorraumbündel.**

Es sei $(E, B, \pi)$ ein Vektorraumbündel über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $B$ vom Fasertyp $F := \mathbb{K}^n$. Weiter sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $B$, so dass $\pi$ über jedem $U \in \mathcal{U}$ trivial ist; wir bezeichnen für $U, V \in \mathcal{U}$ mit $\phi_{U,V} : U \cap V \to \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$ den zugehörigen Kozykel für $(E, B, \pi)$.

Zeige, dass das duale Bündel $(E', B, \pi')$ zu $\pi$ bezüglich $\mathcal{U}$ durch die Kozykel $(\phi'_{U,V})_{U,V \in \mathcal{U}}$ mit

$$\phi'_{U,V} : U \cap V \to \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n),\ x \mapsto \big((\phi_{U,V}(x))^t\big)^{-1}$$

beschrieben wird, wobei wir für $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$ mit $A^t$ die transponierte Matrix zu $A$ bezeichnen. *(8 Punkte)*

**4. Klassifikation der reellen Geradenbündel über $\mathbb{S}^1$.**

Wir wollen in dieser Aufgabe beweisen, dass jedes reelle Geradenbündel (d.h. Vektorraumbündel der reellen Faserdimension 1) über dem Einheitskreis $\mathbb{S}^1$ entweder trivial, oder aber zum Möbiusband (Vergleiche Aufgabe 3(c) Zettel 7) isomorph ist.

Dazu sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $(E, \mathbb{S}^1, \pi)$ ein Geradenbündel über $\mathbb{S}^1$. Wir fixieren $p_0 \in \mathbb{S}^1$. Dann ist $(U_1, U_2)$ mit $U_1 := \mathbb{S}^1 \setminus \{p_0\}$ und $U_2 := \mathbb{S}^1 \setminus \{-p_0\}$ offensichtlich eine offene Überdeckung von $\mathbb{S}^1$, und $U_1 \cap U_2 = \mathbb{S}^1 \setminus \{p_0, -p_0\}$ zerfällt in die beiden Zusammenhangskomponenten $V_+$ und $V_-$. Nun gehe man wie folgt vor:

**(a)** Mittels Aufgabe 3(b) (ebenfalls Zettel 7) zeige man, dass es lokale Trivialisierungen $\phi_k : \mathbb{R} \times U_k \to \pi^{-1}[U_k]$ von $\pi$ gibt, und dass damit $f_k : U_k \to E,\ p \mapsto \phi_k(1,p)$ ein nullstellenfreier Schnitt von $\pi$ über $U_k$ ist. *(4 Punkte)*

**(b)** Man überlege sich, dass es genau eine Funktion $\chi : U_1 \cap U_2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\forall p \in U_1 \cap U_2 \ : \ \phi_2(\chi(p), p) = f_1(p)$$

gibt, und begründe, dass diese nullstellenfrei ist, und auf $V_+$ bzw. auf $V_-$ ihr Vorzeichen nicht wechselt. *(4 Punkte)*

**(c)** Wenn $\chi$ auf $V_+$ und auf $V_-$ dasselbe Vorzeichen hat, dann zeige man, dass das Bündel $\pi$ trivial ist. *(6 Punkte)*

[Tipp. Man konstruiere einen globalen Schnitt für $\pi$, indem man $f_1$ und $f_2$ mittels einer Zerlegung der Eins auf $\mathbb{S}^1$ zu einem globalen Schnitt für $\pi$ zusammenfügt.]

**(d)** Wir betrachten nun den Fall, dass $\chi$ auf $V_+$ und $V_-$ unterschiedliche Vorzeichen annimmt; ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\chi|V_+ > 0$ und $\chi|V_- < 0$. Dann bezeichnen wir mit $(E_M, \mathbb{S}^1, \pi_M)$ das Möbiusband aus Aufgabe 3(c) Zettel 7, und mit $\phi_{M,k} : \mathbb{R} \times U_k \to \pi_M^{-1}[U_k]$ dessen Trivialisierungen über $U_k$, so dass die Übergangsabbildung die in Aufgabe 3(c) Zettel 7 gegeben ist. Man zeige, dass es genau einen Isomorphismus von Vektorraumbündeln $g : E \to E_M$ mit

$$\forall p \in U_1 \ : \ g(f_1(p)) = \phi_{M,1}(1,p) \quad \text{und} \quad \forall p \in U_2 \ : \ g(f_2(p)) = \frac{1}{|\chi(p)|} \cdot \phi_{M,2}(1,p)$$

gibt. *(8 Punkte)*