Kapitel 7

Innere Geometrie räumlicher Flächen

Wir wenden uns nun dem Studium der inneren Geometrie von Flächen zu, das heißt, der Untersuchung der Geometrie Riemannscher Gebiete. Anschaulich gesprochen entspricht das der Untersuchung der Flächen unter alleiniger Verwendung von „Messungen“ (etwa Längen- und Winkelmessung) *innerhalb* der Fläche. (Dabei sollen auch Ableitungen derartiger Größen inbegriffen sein.)

Das Ziel unserer Untersuchungen ist es, die Mittel zur *Berechnung von Geodätischen* zur Verfügung zu stellen, sowie das *Theorema egregium* herzuleiten, welches zeigt, dass die Gaußsche Krümmung, die wir in Abschnitt 6.5 zunächst mit den Mitteln der äußeren Geometrie eingeführt haben, tatsächlich eine Größe der inneren Geometrie ist. Das heißt also, dass zwei Flächen mit demselben Maßtensor auch dieselbe Gaußsche Krümmung besitzen.

Ein grundlegender Schritt zur Erreichung dieser Ziele ist die Einführung einer *Differentiation für Vektorfelder eines Riemannschen Gebiets*, die der zugrundeliegenden Riemannschen Metrik angepasst ist. Ihre Definition beruht auf dem sogenannten *Christoffelsymbol* eines Riemannschen Gebietes, dem wir uns deshalb als erstes zuwenden.

7.1 Das Christoffelsymbol eines Riemannschen Gebiets

Um die im folgenden Satz 2 beschriebene Konstruktion des Christoffelsymbols eines Riemannschen Gebiets zu motivieren, betrachten wir zunächst die Situation, dass das Riemannsche Gebiet von einer Flächenparametrisierung $F : G \to \mathbb{E}^3$ bestimmt wird.

Wir interessieren uns in dieser Situation für das zweite Differential d^2F der Parametrisierung F. Ihr Normalenanteil wird gemäß Satz 2 aus Abschnitt 6.2 durch die zweite Fundamentalform von F gegeben. Über ihren Tangentialanteil gibt der folgende Satz Auskunft:

Satz 1. Es sei $F : G \to \mathbb{E}^3$ eine C^r-Flächenparametrisierung mit $r \geq 2$, N_F ihr Einheitsnormalenfeld, g ihr Maßtensor und h ihre zweite Fundamentalform. Für $p \in G$ gilt dann die Gleichung

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^2 \; : \; d_p^2 F(u, v) = d_p F(\Gamma_p(u, v)) + h_p(u, v) \cdot N_F(p) \tag{$*$}$$

mit der hierdurch bestimmten Abbildung $\Gamma_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; sie ist bilinear und symmetrisch, und die Abbildung

$$\Gamma : G \to L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2),\ p \mapsto \Gamma_p$$

ist eine C^{r-2}-Abbildung, die man das *Christoffelsymbol der Parametrisierung* F nennt. Bezeichnen wir für festes $u, v \in \mathbb{R}^2$ mit $g(u,v)$ die Funktion $G \to \mathbb{R},\ p \mapsto g_p(u,v)$, so gilt für jedes $(p,w) \in G \times \mathbb{R}^2$

$$d_p\big(g(u,v)\big)(w) = g_p(\Gamma_p(w,u),v) + g_p(u,\Gamma_p(w,v)) \ . \tag{†}$$

Bemerkungen.

(a) Da für festes $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ die Abbildung $L^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}),\ b \mapsto b(u,v)$ linear ist, gilt $\big(d_p g(w)\big)(u,v) = d_p\big(g(u,v)\big)(w)$, daher wird das Differential der Riemannschen Metrik g vermittels der Formel (†) durch das Christoffelsymbol beschrieben.

(b) Ist die Riemannsche Metrik g nicht vom Punkt abhängig, das heißt, eine konstante Funktion $G \to L^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, so gilt $\Gamma = 0$. Das ist der Grund, warum uns die Christoffelsymbole nicht schon in den Analysis-Vorlesungen begegnet sind.

(c) Wie der folgende Satz 3 zeigt, ist das Transformationsverhalten des Christoffelsymbols unter Isometrien nicht das Transformationsverhalten eines Tensorfelds. Aus diesem Grunde ist das Christoffelsymbol <u>kein Tensorfeld der Fläche</u>, sondern ein andersartiges Objekt, nämlich ein sogenannter *kovarianter Ableitungsprozeß*. Das wird besser zu verstehen sein, wenn wir *Riemannsche Geometrie*, das heißt, Geometrie für Mannigfaltigkeiten betreiben.

Beweis von Satz 1. Wir verwenden die Formel (∗) als Definition von Γ . Aufgrund der Bilinearität und Symmetrie des zweiten Differentials d_p^2F ist klar, dass Γ_p jeweils bilinear und symmetrisch ist. Für vorgegebene $u, v \in \mathbb{R}^2$ ist $p \mapsto d_pF(\Gamma_p(u,v)) = d_p^2F(u,v) - h_p(u,v) \cdot N_F(p)$ ein C^{r-2}-Tangentialvektorfeld an F ; nach der Folgerung in Abschnitt 5.5 ist daher $p \mapsto \Gamma_p(u,v)$ ein C^{r-2}-Vektorfeld auf G . Daraus folgt, das die Abbildung $\Gamma : p \mapsto \Gamma_p$ eine C^{r-2}-Abbildung ist. Es verbleibt, die Formel (†) zu zeigen. Dazu: Es gilt:

$$\begin{aligned} d_p\big(g(u,v)\big)(w) &= d_p\big(q \mapsto \langle d_qF(u), d_qF(v)\rangle\big)(w) \\ &= \langle d_p^2F(u,w), d_pF(v)\rangle + \langle d_pF(u), d_p^2F(v,w)\rangle \\ &\overset{(*)}{=} \langle d_pF(\Gamma_p(u,w)) + h_p(u,w)\,N_F(p), d_pF(v)\rangle + \langle d_pF(u), d_pF(\Gamma_p(v,w)) + h_p(v,w)\,N_F(p)\rangle \\ &= \langle d_pF(\Gamma_p(u,w)), d_pF(v)\rangle + \langle d_pF(u), d_pF(\Gamma_p(v,w))\rangle \\ &= g(\Gamma_p(u,w),v) + g(u,\Gamma_p(v,w)) \ . \end{aligned}$$

□

Wir imitieren nun diese Konstruktion des Christoffelsymbols für beliebige Riemannsche Gebiete:

Satz 2. Ist (G,g) ein n-dimensionales Riemannsches C^r-Gebiet mit $r \geq 1$, so existiert genau eine C^{r-1}-Abbildung $\Gamma : G \to L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, welche über die Gleichung (†) aus Satz 1 das Differential der Riemannschen Metrik g beschreibt (man beachte die obige Bemerkung (a)); Γ ist durch die folgende Formel festgelegt: Für $p \in G$ und $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$2 \cdot g_p(\Gamma_p(u,v),w) = d_p\big(g(v,w)\big)(u) + d_p\big(g(u,w)\big)(v) - d_p\big(g(u,v)\big)(w) \ . \tag{‡}$$

Das Christoffelsymbol einer Flächenparametrisierung F im Sinne von Satz 1 ist offenbar genau dasjenige Γ , das in der in Satz 2 beschriebenen Weise durch den Maßtensor g von F bestimmt wird. Aus diesem Grunde bezeichnet man das in Satz 2 definierte Γ das *Christoffelsymbol des Riemannschen Gebiets* (G, g).

Satz 2 zeigt auch, dass das Christoffelsymbol einer Flächenparametrisierung F tatsächlich eine Größe der inneren Geometrie der Fläche $[F]$ ist, obwohl es in Satz 1 zunächst mit Hilfe der äußeren Geometrie, d.h. unter Heranziehung des Einheitsnormalenfeldes N_F und der zweiten Fundamentalform h, definiert worden ist.

Beweis von Satz 2. Wir verwenden die Formel (‡) zur Definition von Γ_p. Weil die rechte Seite der Formel (‡) in u, v jeweils linear und symmetrisch ist, wird hierdurch eine bilineare, symmetrische Abbildung $\Gamma_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, und damit eine Abbildung $\Gamma : G \to L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $p \mapsto \Gamma_p$ definiert. Da aufgrund der Formel (‡) für jeweils feste $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ $p \mapsto g_p(\Gamma_p(u, v), w)$ ein C^{r-1}-Vektorfeld ist, ist auch Γ selbst eine C^{r-1}-Abbildung.

Zum Beweis der Formel (†) in dieser Situation sei $p \in G$ und $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} & g_p(\Gamma_p(w, u), v) + g_p(u, \Gamma_p(w, v)) \\ \overset{(\ddagger)}{=} & \tfrac{1}{2}\cdot\big(d_p(g(u, v))(w) + d_p(g(w, v))(u) - d_p(g(w, u))(v) \quad + \quad d_p(g(v, u))(w) + d_p(g(w, u))(v) - d_p(g(w, v))(u)\big) \\ = & \, d_p(g(u, v))(w) \, . \end{aligned}$$

Zur Eindeutigkeit von Γ: Es sei $\widetilde{\Gamma}$ eine weitere derartige Abbildung, die (†) erfüllt. Dann gilt

$$\begin{aligned} 2\, g_p(\Gamma_p(u, v), w) & \overset{(\ddagger)}{=} d_p(g(v, w))(u) + d_p(g(u, w))(v) - d_p(g(u, v))(w) \\ & \overset{(\tilde{\dagger})}{=} g_p(\widetilde{\Gamma}_p(u, v), w) + g_p(v, \widetilde{\Gamma}(u, w)) + g_p(\widetilde{\Gamma}(v, u), w) + g_p(u, \widetilde{\Gamma}_p(v, w)) - g_p(\widetilde{\Gamma}(w, u), v) - g_p(u, \widetilde{\Gamma}_p(w, v)) \\ & = 2\, g_p(\widetilde{\Gamma}_p(u, v), w) \end{aligned}$$

und damit $\widetilde{\Gamma} = \Gamma$. □

Satz 3. Verhalten der Christoffelsymbole unter Isometrien. Seien (G, g) und $(\widetilde{G}, \widetilde{g})$ zwei n-dimensionale Riemannsche Gebiete mit Christoffelsymbol Γ bzw. $\widetilde{\Gamma}$ und $\varphi : (G, g) \to (\widetilde{G}, \widetilde{g})$ eine Isometrie (siehe Abschnitt 5.6, Definition 3). Dann gilt für $p \in G$:

$$(d_p\varphi) \circ \Gamma_p = \widetilde{\Gamma}_{\varphi(p)} \circ (d_p\varphi \times d_p\varphi) + d_p^2\varphi \, .$$

Beweis. Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Aufgrund der Isometrie-Eigenschaft von φ haben wir die Gleichung $g_p(u, v) = \widetilde{g}_{\varphi(p)}(d_p\varphi(u), d_p\varphi(v))$. Durch Differentiation dieser Gleichung nach $p \in G$ ergibt sich

$$\begin{aligned} d_p(g(u, v))(w) & = d_{\varphi(p)}(\widetilde{g}(d_p\varphi(u), d_p\varphi(v)))(d_p\varphi(w)) + \widetilde{g}_{\varphi(p)}(d_p^2\varphi(u, w), d_p\varphi(v)) + \widetilde{g}_{\varphi(p)}(d_p\varphi(u), d_p^2\varphi(v, w)) \\ & \overset{(\dagger)}{=} \widetilde{g}_{\varphi(p)}(\widetilde{\Gamma}_p(d_p\varphi(w), d_p\varphi(u)), d_p\varphi(v)) + \widetilde{g}_{\varphi(p)}(d_p\varphi(u), \widetilde{\Gamma}_p(d_p\varphi(w), d_p\varphi(v))) \\ & \qquad + \widetilde{g}_{\varphi(p)}(d_p^2\varphi(u, w), d_p\varphi(v)) + \widetilde{g}_{\varphi(p)}(d_p\varphi(u), d_p^2\varphi(v, w)) \\ & = g_p((d_p\varphi)^{-1}\, \widetilde{\Gamma}_p(d_p\varphi(w), d_p\varphi(u)), v) + g_p(u, (d_p\varphi)^{-1}\, \widetilde{\Gamma}_p(d_p\varphi(w), d_p\varphi(v))) \\ & \qquad + g_p((d_p\varphi)^{-1}\, d_p^2\varphi(u, w), v) + g_p(u, (d_p\varphi)^{-1}\, d_p^2\varphi(v, w)) \\ & = g_p(\widehat{\Gamma}_p(w, u), v) + g_p(u, \widehat{\Gamma}_p(w, v)) \end{aligned}$$

mit der Abbildung $\widehat{\Gamma} : p \mapsto \widehat{\Gamma}_p := (d_p\varphi)^{-1} \circ \big(\widetilde{\Gamma}_{\varphi(p)} \circ (d_p\varphi \times d_p\varphi) + d_p^2\varphi\big)$. Da $\widehat{\Gamma}$ somit die Gleichung (†) für das Riemannsche Gebiet (G, g) erfüllt, gilt nach der Eindeutigkeitsaussage aus Satz 2 $\widehat{\Gamma} = \Gamma$, und damit die behauptete Formel. □

Die Komponenten des Christoffelsymbols Γ. Sei (G, g) ein n-dimensionales Riemannsches Gebiet mit Christoffelsymbol Γ. Bezeichnen wir mit $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standard-Basis des

$\mathbb{R}^n$, so können wir Γ durch die insgesamt n^3 Funktionen

$$\Gamma_{ik}^j : G \to \mathbb{R},\ p \mapsto \langle \Gamma_p(e_i, e_k), e_j \rangle$$

beschreiben, wobei allerdings aufgrund der Symmetrie von Γ_p

$$\Gamma_{ik}^j = \Gamma_{ki}^j \quad \text{für alle } i, k, j \in \{1, \ldots, n\}$$

gilt. Mit diesen Funktionen gilt nämlich

$$\forall p \in G,\ u, v \in \mathbb{R}^n \ :\ \Gamma_p(u, v) = \sum_{i,k,j} \Gamma_{ik}^j(p) \cdot u_i \cdot v_k \cdot e_j\ .$$

Die Funktionen Γ_{ik}^j werden in der Literatur als *die* Christoffelsymbole der Riemannschen Metrik g bezeichnet. Man berechnet sie folgendermaßen mit Hilfe der zu $(g_{ik}(p))$ inversen Matrix $(g^{ik}(p))$:

$$\Gamma_{ik}^j = \sum_m \Gamma_{ikm} \cdot g^{mj} \quad \text{mit} \quad \Gamma_{ikm} := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_m} \right)\ . \qquad (\diamond)$$

Ist g der Maßtensor einer Flächenparametrisierung $F : G \to \mathbb{E}^3$ (also insbesondere $n = 2$), so gilt aufgrund der Formel $(*)$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial x_k} = \Gamma_{ik}^1 \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1} + \Gamma_{ik}^2 \cdot \frac{\partial F}{\partial x_2} + h_{ik} \cdot N_F\ ,$$

woraus man die Γ_{ik}^j ebenfalls berechnen kann.

Beweis für die Formel $(\diamond)$. Für $p \in G$ gilt $\Gamma_p(e_i, e_k) = \sum_j \Gamma_{ik}^j(p) \cdot e_j$ und daher

$$g_p(\Gamma_p(e_i, e_k), e_m) = \sum_j \Gamma_{ik}^j(p) \cdot g_p(e_j, e_m) = \sum_j \Gamma_{ik}^j(p) \cdot g_{jm}(p)\ .$$

Andererseits ist wegen der Formel $(\ddagger)$

$$g_p(\Gamma_p(e_i, e_k), e_m) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x_i}(p) + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_k}(p) - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_m}(p) \right) = \Gamma_{ikm}(p)\ .$$

Durch Vergleich dieser beiden Gleichungen ergibt sich: Die „Unbekannten" $\Gamma_{ik}^j(p)$ werden für jeweils feste $i, k \in \{1, \ldots, n\}$ durch das lineare Gleichungssystem

$$\forall m\ :\ \sum_j g_{jm}(p) \cdot \Gamma_{ik}^j(p) = \Gamma_{ikm}(p)$$

bestimmt; durch Multiplikation mit der zur Koeffizientenmatrix $(g_{jm}(p))$ inversen Matrix $(g^{jm}(p))$ ergibt sich die behauptete Formel $(\diamond)$. □

Beispiele.

(a) Gilt jeweils $g_{ik} = 0$ für $i \neq k$, so erhalten wir aus der Formel $(\diamond)$

$$\Gamma_{ik}^j = \frac{1}{g_{jj}} \cdot \Gamma_{ikj}$$

und damit für $i, k = 1, \ldots, n$ mit $i \neq k$ insbesondere

$$\Gamma_{ii}^i = \frac{1}{2g_{ii}} \cdot \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_i}\ , \quad \Gamma_{ik}^i = \Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2g_{ii}} \cdot \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_k} \quad \text{und} \quad \Gamma_{ii}^k = -\frac{1}{2g_{kk}} \cdot \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_k}\ .$$

Ist außerdem $g_{11} = \ldots = g_{nn} = \lambda^2$ mit einer Funktion $\lambda : G \to \mathbb{R}_+$ (ist also g konform äquivalent zur kanonischen Riemannschen Metrik des $\mathbb{R}^n$), so vereinfacht sich der letztere Sachverhalt beträchtlich, nämlich zu

$$\Gamma^i_{ii} = \Gamma^k_{ik} = \Gamma^k_{ki} = -\Gamma^i_{kk} = \frac{\partial(\ln \circ \lambda)}{\partial x_i} \ .$$

Natürlich sind diese Formeln insbesondere auf das Christoffelsymbol einer orthogonalen bzw. konformen Flächenparametrisierung anwendbar (siehe die Abschnitte 5.7 und 5.8).

(b) Ist $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ die Rotationsflächenparametrisierung zu einer nach der Bogenlänge parametrisierten C^2-Profilkurve $\alpha = (r, b)$ (siehe Abschnitt 5.2 und das Beispiel 2(b) in Abschnitt 5.6), so ergibt sich aus dem ersten Teil von (a):

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0 \ , \quad \Gamma^1_{22} = -(r \cdot r') \circ x_1 \quad \text{und} \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{r'}{r} \circ x_1 \ .$$

Hierbei bezeichnet $x_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die erste Komponente von $\mathbb{R}^2$.

7.2 Die Levi-Civita-Ableitung einer Riemannschen Metrik

Sei (G, g) ein Riemannsches Gebiet. Wir wollen nun das Christoffelsymbol von (G, g) verwenden, um einen an die Riemannsche Metrik g angepassten „Ableitungsprozeß“ für Vektorfelder auf G zu definieren, die sogenannte *(kovariante) Levi-Civita-Ableitung*.

Dabei wollen wir auch Vektorfelder *längs* einer weiteren C^1-Abbildung $f : M \to G$ (wobei $M \subset \mathbb{R}^d$ ein weiteres Gebiet ist) betrachten. Ein solches C^s-Vektorfeld längs f ist dann einfach eine C^s-Abbildung $X : M \to \mathbb{R}^n$, wobei wir $X_p := X(p)$ für $p \in M$ jeweils als einen in $f(p) \in G$ angetragenen Vektor denken. Den Raum derartiger Vektorfelder bezeichnen wir mit $\mathfrak{X}_f(G)$.

Wir werden solche Vektorfelder hauptsächlich in den folgenden beiden Situationen verwenden:

- $M = G$ und $f = \mathrm{id}_G$. Dann stimmen die Vektorfelder längs f mit den üblichen Vektorfeldern auf G überein.
- $d = 1$, M ist ein Intervall I und f eine C^1-Kurve $\alpha : I \to G$.

Beispiele.

(a) Ist $Y \in \mathfrak{X}^s(M)$ und ist $f : M \to G$ eine C^{s+1}-Abbildung, so ist $f_*Y : p \mapsto d_pf(Y_p)$ (vergleiche das Beispiel in Abschnitt 5.4) ein Vektorfeld in $\mathfrak{X}^s_f(G)$.

(b) Ist $X \in \mathfrak{X}^s(G)$ und ist $f : M \to G$ eine C^s-Abbildung, so ist $X \circ f \in \mathfrak{X}^s_f(G)$.

(c) Ist $\alpha : I \to G$ eine C^{s+1}-Kurve, so ist $\alpha' \in \mathfrak{X}^s_\alpha(G)$.

Um die Definition der Levi-Civita-Ableitung zu motivieren, betrachten wir zunächst wieder die Situation der äußeren Geometrie, d.h. den Fall, wo g der Maßtensor einer C^2-Flächenparametrisierung $F : G \to \mathbb{E}^3$ ist. Sei $X \in \mathfrak{X}^1(G)$. Wir wollen den tangentialen Anteil der Ableitung von $F_*X \in \mathfrak{X}^1_F(\mathbb{E}^3)$ als ein Vektorfeld auf G ausdrücken. Dazu rechnen wir für $p \in G$ und $v \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} d_p(F_*X)(v) &= d_p(q \mapsto d_qF(X_q))(v) = d_p^2F(X_p, v) + d_pF(d_pX(v)) \\ &\overset{(*)}{=} d_pF(\Gamma_p(X_p, v)) + h_p(X_p, v) \cdot N_F(p) + d_pF(d_pX(v)) \\ &= d_pF(d_pX(v) + \Gamma_p(X_p, v)) + h_p(X_p, v) \cdot N_F(p) \; , \end{aligned}$$

wobei das mit $(*)$ bezeichnete Gleichheitszeichen aus Satz 1 in Abschnitt 7.1 folgt, und Γ das Christoffelsymbol zu F bezeichnet. Wir sehen also, dass der Tangentialanteil von $d_p(F_*X)(v)$, auf G zurückgezogen, den folgenden Wert hat:

$$d_pX(v) + \Gamma_p(X_p, v) \; .$$

Bemerkenswert ist hierbei, dass es sich um eine Größe der inneren Geometrie handelt. Durch diese Rechnung inspririert, definieren wir deshalb:

Definition. Sei (G, g) ein Riemannsches C^r-Gebiet, Γ sein Christoffelsymbol (siehe Satz 2 in Abschnitt 7.1) $f : M \to G$ eine C^1-Abbildung, $X \in \mathfrak{X}^1_f(G)$, $p \in M$ und $v \in \mathbb{R}^d$. Dann definieren wir die *Levi-Civita-Ableitung* von X an der Stelle p und in Richtung von v bezüglich der Riemannschen Metrik g durch

$$\nabla_{(p,v)}X := d_pX(v) + \Gamma_{f(p)}(d_pf(v), X_p) \;\in\; \mathbb{R}^n \; .$$

Im Falle einer C^1-Kurve $\alpha : I \to G$ und einem Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}^1_\alpha(G)$ schreiben wir

$$\nabla_{\partial_t}X := \nabla_{(t,1)}X \quad \text{für alle } t \in I \, .$$

Ist α eine C^s-Kurve mit $s \le r$ und $X \in \mathfrak{X}^s_\alpha(G)$, so ist also

$$\big(\, \nabla_\partial X : t \mapsto \nabla_{\partial_t}X = X'(t) + \Gamma_{\alpha(t)}(\alpha'(t), X(t)) \,\big) \;\in\; \mathfrak{X}^{s-1}_\alpha(G) \; .$$

Wir nennen ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}^1_f(G)$ *parallel*, wenn $\nabla_{(p,v)}X = 0$ für alle $p \in G$ und $v \in \mathbb{R}^d$ ist.

Wichtiger Hinweis. Natürlich können wir die Levi-Civita-Ableitung insbesondere bezüglich des Maßtensors einer Flächenparametrisierung F bilden; dies ist sogar einer der wichtigsten Anwendungsfälle. Für diese Situation sollte festgehalten werden, dass dieser Ableitungsprozeß aus alleiniger Kenntnis des Maßtensors „abgeleitet" ist, es sich also um einen Prozeß der inneren Geometrie von $[F]$ handelt. Die in Abschnitt 7.3 folgende Gaußsche Ableitungsgleichung zeigt – in Verallgemeinerung der obigen Motivationsrechnung – auf welche Weise die Levi-Civita-Ableitung in dieser Situation mit der äußeren Geometrie von $[F]$ zusammenhängt.

Satz 1. Rechenregeln für die Levi-Civita-Ableitung. Für die Levi-Civita-Ableitung ∇ des Riemannschen Gebiets (G, g) gilt:

(a) Für jede C^1-Abbildung $f : M \to G$ und jedes $p \in M$ ist die Abbildung

$$\mathbb{R}^d \times \mathfrak{X}_f(G) \to \mathbb{R}^n,\ (v, X) \mapsto \nabla_{(p,v)} X$$

$\mathbb{R}$-bilinear; zusätzlich gilt hinsichtlich der Multiplikation von X mit C^1-Funktionen $\lambda : M \to \mathbb{R}$ die „Produktregel"

$$\nabla_{(p,v)}(\lambda \cdot X) = \mathrm{d}_p\lambda(v) \cdot X_p + \lambda(p) \cdot \nabla_{(p,v)} X \ .$$

(b) Sind die Größen $f : M \to G$ und $X \in \mathfrak{X}^s_f(G)$ C^s-differenzierbar mit $1 \leq s \leq r$, so ist für jedes $v \in \mathbb{R}^d$

$$\Big(\nabla_{(\dots,v)} X \ : \ M \to \mathbb{R}^n \ , \ p \mapsto \nabla_{(p,v)} X \Big) \ \in \ \mathfrak{X}^{s-1}_f(G) \ .$$

(c) Die sog. *Torsionsfreiheit* der Levi-Civita-Ableitung: Für je zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}^1(G)$ und jeden Punkt $p \in G$ gilt

$$\nabla_{(p,X_p)} Y - \nabla_{(p,Y_p)} X \ = \ \mathrm{d}_p Y(X_p) - \mathrm{d}_p X(Y_p) \ .$$

(d) Für jede C^1-Abbildung $f : M \to G$ und je zwei C^1-Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}^1_f(G)$ gilt die sog. *Ricci-Identität*

$$\forall\, (p, v) \in M \times \mathbb{R}^n \ : \quad \mathrm{d}_p\big(g(X,Y)\big)(v) \ = \ g_{f(p)}(\nabla_{(p,v)} X, Y_p) + g_{f(p)}(X_p, \nabla_{(p,v)} Y) \ .$$

wobei wir mit $g(X, Y)$ die Funktion $p \mapsto g_{f(p)}(X_p, Y_p)$ bezeichnen.

Beweis. Die Aussagen (a) und (b) folgen direkt aus der Definition, und (c) folgt aus der Symmetrie von Γ_p. Zu (d): Mit Hilfe der Bemerkung (a) und der Formel (†) aus Abschnitt 7.1 berechnen wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_p\big(g(X,Y)\big)(v) &= \big(\mathrm{d}_p(g \circ f)(v)\big)(X_p, Y_p) + g_{f(p)}(\mathrm{d}_p X(v), Y_p) + g_p(X_p, \mathrm{d}_p Y(v)) \\
&= \big(\mathrm{d}_{f(p)} g(d_p f(v))\big)(X_p, Y_p) + g_{f(p)}(\mathrm{d}_p X(v), Y_p) + g_p(X_p, \mathrm{d}_p Y(v)) \\
&= g_{f(p)}(\Gamma_{f(p)}(d_p f(v), X_p), Y_p) + g_{f(p)}(X_p, \Gamma_{f(p)}(d_p f(v), Y_p)) + g_{f(p)}(\mathrm{d}_p X(v), Y_p) + g_p(X_p, \mathrm{d}_p Y(v)) \\
&= g_{f(p)}\big(\mathrm{d}_p X(v) + \Gamma_{f(p)}(d_p f(v), X_p)\,,\ Y_p\big) + g_{f(p)}\big(X_p\,,\ \mathrm{d}_p Y(v) + \Gamma_{f(p)}(d_p f(v), Y_p)\big) \\
&= g_{f(p)}(\nabla_{(p,v)} X, Y_p) + g_{f(p)}(X_p, \nabla_{(p,v)} Y) \ .
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 1. In der Situation von Satz 1 gilt für jede C^1-Abbildung $f : M \to G$, $X \in \mathfrak{X}^1(G)$, $p \in M$ und $v \in \mathbb{R}^d$

$$\nabla_{(p,v)}(X \circ f) = \nabla_{(f(p), d_p f(v))} X \ .$$

(Siehe auch Beispiel (b) aus diesem Abschnitt.) Insbesondere gilt für jede C^1-Kurve $\alpha : I \to G$

$$\forall t \in I \ : \ \nabla_{\partial_t}(X \circ \alpha) = \nabla_{(\alpha(t), \alpha'(t))} X \ .$$

Satz 2. Verhalten der Levi-Civita-Ableitung unter Isometrien. Ist $\varphi : (G, g) \to (\widetilde{G}, \widetilde{g})$ eine C^2-Isometrie zwischen zwei n-dimensionalen Riemannschen Gebieten und sind ∇ bzw. $\widetilde{\nabla}$ die Levi-Civita-Ableitungen der Riemannschen Metriken g bzw. $\widetilde{g}$, so gilt für jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}^1(G)$ und das dadurch induzierte Vektorfeld $\varphi_* X \in X^1_\varphi(\widetilde{G})$,

$$\varphi_* X : G \to \mathbb{R}^n \,,\; p \mapsto \mathrm{d}_p\varphi(X_p)$$

die Beziehung

$$\forall\, (p, v) \in G \times \mathbb{R}^n \;:\quad \mathrm{d}_p\varphi\big(\nabla_{(p,v)} X\big) \;=\; \widetilde{\nabla}_{(p,v)}(\varphi_* X)\;.$$

Die Beziehung zwischen den beiden Levi-Civita-Ableitungen ist also die denkbar einfachste.

Beweis. Gemäß Satz 3 aus Abschnitt 7.1 sind die Christoffelsymbole Γ und $\widetilde{\Gamma}$ der beiden Riemannschen Gebiete durch die Beziehung

$$\forall\, p \in G \;:\; (\mathrm{d}_p\varphi) \circ \Gamma_p = \widetilde{\Gamma}_{\varphi(p)} \circ (\mathrm{d}_p\varphi \times \mathrm{d}_p\varphi) + \mathrm{d}_p^2\varphi$$

miteinander verbunden. Unter Ausnutzung dieser Formel berechnen wir

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{(p,v)}\varphi_* X &= \mathrm{d}_p\big(q \mapsto \mathrm{d}_q\varphi(X_q)\big)(v) + \widetilde{\Gamma}_{\varphi(p)}\big(\mathrm{d}_p\varphi(v)\,,\, \mathrm{d}_p\varphi(X_p)\big)\\ &= \mathrm{d}_p^2\varphi(v, X_p) + \mathrm{d}_p\varphi(\mathrm{d}_p X(v)) + \widetilde{\Gamma}_{\varphi(p)}\big(\mathrm{d}_p\varphi(v)\,,\, \mathrm{d}_p\varphi(X_p)\big)\\ &= \mathrm{d}_p\varphi(\mathrm{d}_p X(v)) + \mathrm{d}_p\varphi\big(\Gamma_p(v, X_p)\big) \;=\; \mathrm{d}_p\varphi\big(\nabla_{(p,v)} X\big)\;.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2. In der Situation obiger Definition sei $\alpha : I \to G$ eine C^1-Kurve.

(a) Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}^1_\alpha(G)$ ist genau dann parallel, wenn es die lineare Differentialgleichung

$$\forall\, t \in I \;:\; X'(t) = -\Gamma_{\alpha(t)}(\alpha'(t), X(t))$$

erfüllt.

(b) Sind $X, Y \in \mathfrak{X}^1_\alpha(G)$ Parallelfelder, so gilt $g(X, Y) \equiv \text{const.}$, also insbesondere $\|X\| := \sqrt{g(X, X)} \equiv \text{const.}$

(c) Zu jedem $t_0 \in I$ und jedem Anfangswert $v \in \mathbb{R}^n$ gibt es genau ein Parallelfeld $X \in \mathfrak{X}^1_\alpha(G)$ mit $X(t_0) = v$. [Man verwende die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen.]

7.3 Die Gaußsche Ableitungsgleichung erster Ordnung

Ist die Riemannsche Metrik des Riemannschen Gebiets (G, g) der Maßtensor einer Flächenparametrisierung $F : G \to \mathbb{E}^3$, so besteht ein Zusammenhang zwischen der Levi-Civita-Ableitung von (G, g) und der äußeren Geometrie von F. Dieser wird durch die Gaußsche Ableitungsgleichung gegeben:

Satz. Es sei $F : G \to \mathbb{E}^3$ eine C^2-Flächenparametrisierung, deren Maßtensor bzw. zweite Fundamentalform wir mit g bzw. h bezeichnen, und $X \in \mathfrak{X}^1_f(G)$ ein Vektorfeld längs der C^1-Abbildung $f : M \to G$. Dann ist das Differential des Vektorfelds $F_* X \in \mathfrak{X}^1_{F\circ f}(\mathbb{E}^3)$ mit der Levi-Civita-Ableitung von X durch die *Ableitungsgleichung erster Ordnung von Gauß* verbunden: Für alle $p \in M$ und $v \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$d_p(F_* X)(v) = d_{f(p)}F(\nabla_{(p,v)} X) + h_{f(p)}(d_p f(v), X_p) \cdot N_F(f(p))\;;$$

demzufolge ist $d_{f(p)}F(\nabla_{(p,v)}X)$ die Tangentialkomponente und $h_{f(p)}(d_p f(v), X_p)\cdot N_F(f(p))$ die Normalkomponente von $d_p(F_*X)(v)$.

Die beiden wichtigsten Spezialfälle notieren wir nocheinmal ausdrücklich:

- Ist $X \in \mathfrak{X}^1(G)$ (also $M = G$, $f = \mathrm{id}_G$), so gilt für $p \in G$ und $v \in \mathbb{R}^2$
$$d_p(F_*X)(v) = d_pF(\nabla_{(p,v)}X) + h_p(v, X_p)\cdot N_F(p)\ .$$
- Ist $\gamma = F \circ \alpha$ eine C^2-Flächenkurve, so gilt (für die Situation $X = \alpha' \in \mathfrak{X}^1_\alpha(G)$)
$$\forall t\ :\ \gamma''(t) = d_{\alpha(t)}F(\nabla_{\partial_t}\alpha') + h_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))\cdot N_F(\alpha(t))\ ,$$
somit
$$\forall t\ :\ d_{\alpha(t)}F(\nabla_{\partial_t}\alpha') = \gamma''(t) - \langle \gamma''(t), N_F(\alpha(t))\rangle \cdot N_F(\alpha(t))\ .$$

Bemerkung. Damit entpuppt sich unsere „Motivationsrechnung“ am Anfang von Abschnitt 7.2 als nichts anderes als die Gaußsche Ableitungsgleichung für den Spezialfall $M = G$, $f = \mathrm{id}_G$. Ferner sehen wir rückblickend, dass die Definition des Christoffelsymbols in Satz 1 in Abschnitt 7.1 (in Verbindung mit der Definition der Levi-Civita-Ableitung in Abschnitt 7.2) gerade die Gaußsche Ableitungsgleichung im Spezialfall $X = \text{const.} \in \mathfrak{X}^\infty(G)$ ist.

Beweis des Satzes. Wir adaptieren die Motivationsrechnung am Anfang von Abschnitt 7.2 für Vektorfelder längs f: Für $p \in M$ und $v \in \mathbb{R}^d$ gilt
$$\begin{aligned} d_p(F_*X)(v) &= d_p(q \mapsto d_{f(q)}F(X_q))(v) = d^2_{f(p)}F(X_p, d_pf(v)) + d_{f(p)}F(d_pX(v)) \\ &\overset{(*)}{=} d_{f(p)}F(\Gamma_{f(p)}(X_p, d_pf(v))) + h_{f(p)}(X_p, d_pf(v))\cdot N_F(f(p)) + d_{f(p)}F(d_pX(v)) \\ &= d_{f(p)}F(d_pX(v) + \Gamma_{f(p)}(X_p, d_pf(v))) + h_{f(p)}(X_p, d_pf(v))\cdot N_F(f(p)) \\ &= d_{f(p)}F(\nabla_{(p,v)}X) + h_{f(p)}(X_p, d_pf(v))\cdot N_F(f(p))\ , \end{aligned}$$
wobei das mit $(*)$ bezeichnete Gleichheitszeichen wieder aus Satz 1 in Abschnitt 7.1 folgt. □

7.4 Geodätische Linien

Wir haben geodätische Linien einer Fläche $[F]$ in Abschnitt 6.4 als Flächenkurven, deren Beschleunigungsvektor in Richtung der Flächennormalen weist, eingeführt und gezeigt, dass eine Flächenkurve genau dann eine Geodätische ist, wenn sie konstante Bahngeschwindigkeit und verschwindende geodätische Krümmung besitzt (siehe Aussage 3 in Abschnitt 6.4).

Die folgende Aussage zeigt, dass Geodätische tatsächlich ein Konzept der inneren Flächengeometrie sind:

Aussage. Es sei $F : G \to \mathbb{E}^3$ eine C^r-Flächenparametrisierung und ∇ die Levi-Civita-Ableitung zu ihrem Maßtensor. Eine reguläre C^2-Flächenkurve $\gamma = F \circ \alpha$ ist genau dann eine Geodätische, wenn $\nabla_\partial \alpha' \equiv 0$ ist.

Beweis. Nach der Gaußschen Ableitungsgleichung, angewendet auf das Vektorfeld $\alpha' \in \mathfrak{X}^1_\alpha(G)$, gilt für $t \in I$ jeweils
$$\gamma''(t) = d_{\alpha(t)}F(\nabla_{\partial_t}\alpha') + h_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))\cdot N_F(\alpha(t))\ .$$

Wir sehen daher, dass $\gamma''(t)$ genau dann in die Richtung der Flächennormalen $N_F(\alpha(t))$ zeigt, wenn $\nabla_{\partial_t}\alpha' = 0$ ist. $\square$

Durch diese Aussage motiviert, definieren wir:

Definition. Sei (G, g) ein n-dimensionales Riemannsches C^1-Gebiet mit Levi-Civita-Ableitung ∇. Dann heißt eine C^2-Kurve $\alpha : I \to G$ eine *Geodätische* des Riemannschen Gebiets (G, g), wenn α' ein Parallelfeld längs α ist, wenn also $\nabla_\partial \alpha' = 0$ gilt.

Man beachte, dass wir damit für den Fall, dass die Riemannsche Metrik Maßtensor einer Flächenparametrisierung ist, die Definition einer Geodätischen im Vergleich mit Abschnitt 6.4 dahingehend verallgemeinert haben, dass wir nun auch nicht-reguläre Kurven als Geodätische zulassen. Die nicht-regulären Geodätischen sind gerade die Kurven $\alpha \equiv \text{const.}$ (Dies ist eine Konsequenz der Folgerung aus dem nächsten Satz.)

Satz. Sei (G, g) ein n-dimensionales Riemannsches C^1-Gebiet und Γ das Christoffelsymbol von g. Dann ist eine C^2-Kurve $\alpha : I \to G$ genau dann eine Geodätische von (G, g), wenn sie eine Lösung der gewöhnlichen, nicht-linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\forall\, t \in I \;:\; \alpha''(t) = -\Gamma_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))$$

ist. Diese Differentialgleichung kann man mittels der Komponentendarstellung $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ der Kurve α auch in der Form

$$\alpha_j'' = -\sum_{i,k=1}^{n} (\Gamma_{ik}^j \circ \alpha) \cdot \alpha_i' \cdot \alpha_k' \quad \text{für } j \in \{1, \dots, n\}$$

schreiben.

Beweis. Nach der Definition der Levi-Civita-Ableitung gilt für $t \in I$

$$\nabla_{\partial_t}\alpha' = \alpha''(t) + \Gamma_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))\;;$$

der Satz folgt aus dieser Gleichung unmittelbar in Verbindung mit der Definition der Geodätischen. $\square$

Folgerung. Ist (G, g) ein n-dimensionales Riemannsches C^2-Gebiet, so existiert zu jeder „Anfangsbedingung“ $(p, v) \in G \times \mathbb{R}^n$ genau eine maximale, auf dem Intervall $I_{(p,v)} \subset \mathbb{R}$ definierte, Geodätische

$$\alpha_{(p,v)} : I_{(p,v)} \to G$$

mit

$$0 \in I_{(p,v)}\,, \quad \alpha_{(p,v)}(0) = p \quad \text{und} \quad \alpha_{(p,v)}'(0) = v\,.$$

Beweis. Dies folgt, indem man man den Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichung (Satz von Picard/Lindelöf) auf die im Satz angegebene Differentialgleichung anwendet. $\square$

Aufgabe. Sei $\alpha : I \to G$ eine Geodätische, und seien $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\widetilde{I} := \{\, t \in \mathbb{R} \,|\, at + b \in I \,\} \neq \varnothing$$

gilt. Dann ist

$$\beta : \widetilde{I} \to G,\ t \mapsto \alpha(at + b)$$

ebenfalls eine Geodätische. Insbesondere gilt für $p \in G$ und $v \in \mathbb{R}^n$:

(a) Ist $a \in \mathbb{R}_+$, so ist $I_{(p,a\cdot v)} = \frac{1}{a} \cdot I_{(p,v)}$ und $\alpha_{(p,a\cdot v)}(t) = \alpha_{(p,v)}(a \cdot t)$ für $t \in I_{(p,a\cdot v)}$.

(b) Ist $s \in I_{(p,v)}$ und setzen wir $q := \alpha_{(p,v)}(s)$ und $w := \alpha'_{(p,v)}(s)$, so gilt $I_{(q,w)} = I_{(p,v)} - s$ und $\alpha_{(q,w)}(t) = \alpha_{(p,v)}(t + s)$ für $t \in I_{(q,w)}$.

Beispiel 1. Geodätische auf Rotationsflächen. Sei F die übliche Parametrisierung der C^2-Rotationsfläche zur nach Bogenlänge parametrisierten Profilkurve $\alpha = (r, b) : I \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Wie wir in Abschnitt 6.4 (Beispiel 1 und Aufgabe 2) gesehen haben, sind sämtliche Meridiane, sowie die Breitenkreise zu Parametern $t \in I$ mit $r'(t) = 0$, Geodätische von F . Wir wollen nun die Geodätischen von F allgemein untersuchen.

Aus dem Satz dieses Abschnittes folgt in Verbindung mit Beispiel (b) aus Abschnitt 7.1: Eine C^2-Flächenkurve $\gamma = F \circ y$ mit $y = (y_1, y_2)$ ist genau dann eine Geodätische von F , wenn sie das folgende Differentialgleichungssystem erfüllt:

$$y_1'' = ((r \cdot r') \circ y_1) \cdot (y_2')^2 \tag{1}$$

$$y_2'' = -2 \cdot \left(\frac{r'}{r} \circ y_1\right) \cdot y_1' \cdot y_2' \ . \tag{2}$$

Wir können an diesem Differentialgleichungssystem erneut unsere bisherigen Ergebnisse zu Geodätischen auf F ablesen:

(a) Für jedes $s_0 \in \mathbb{R}$ ist $y : I \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ t \mapsto (t, s_0)$ eine Lösung des Differentialgleichungssystems; die dazugehörigen Flächenkurven $F \circ y$ sind die Meridiane von F , die wir schon in Abschnitt 6.4 als Geodätische erkannt haben.

(b) Ist $t_0 \in I$ mit $r'(t_0) = 0$, so ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ s \mapsto (t_0, s)$ ebenfalls eine Lösung des Differentialgleichungssystems; die hierzu gehörige Flächenkurve $F \circ y$ ist ein Breitenkreis von F .

Gleichung (2) ist zu

$$(r^2 \circ y_1) \cdot y_2' \equiv \text{const.} \tag{2'}$$

äquivalent. Bei der folgenden Betrachtung dürfen wir wegen Aufgabe 1 ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass die Geodätische γ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Bezeichnen wir mit $\vartheta(t)$ den Winkel zwischen $\gamma'(t)$ und dem durch $\gamma(t)$ verlaufenden Breitenkreis, so gilt, weil γ nach Bogenlänge parametrisiert ist,

$$\cos\vartheta(t) = \frac{\langle \gamma'(t), d_{y(t)}F(e_2)\rangle}{\|d_{y(t)}F(e_2)\|} = \frac{g_{y(t)}(y'(t), e_2)}{\sqrt{g_{22}(y(t))}} = (r \circ y_1(t)) \cdot y_2'(t) \ ;$$

für das letzte Gleichheitszeichen siehe Beispiel 2(b) in Abschnitt 5.6. Daher ist die Gleichung (2′) zu der geometrisch aussagekräftigen *Clairautschen Gleichung*

$$(r \circ y_1(t)) \cdot (\cos \circ \vartheta) \equiv \text{const.} =: c \tag{2''}$$

äquivalent. Dabei ist der Wert der Konstanten c natürlich durch die Anfangsbedingung für die Geodätische γ eindeutig bestimmt.

Die Clairautsche Gleichung besagt insbesondere, dass die Kurve γ sich nur in einer solchen Zone auf der Rotationsfläche bewegen kann, in der $r \geq |c|$ ist. Für $c = 0$ erhalten wir erneut die Meridiane der Fläche; für $c \neq 0$ sehen wir insbesondere, dass die Geodätische die Rotationsachse stets in einer Richtung umläuft.

Setzen wir die Gleichung (2′) in der Gestalt $(r^2 \circ y_1) \cdot y_2' = c \in \mathbb{R}$ in die Beziehung $1 = \langle \gamma', \gamma' \rangle = g(y', y') = (y_1')^2 + (r^2 \circ y_1) \cdot (y_2')^2$ ein, so erhalten wir den „Energie-Erhaltungssatz"

$$\tfrac{1}{2}(y_1')^2 + U \circ y_1 = \tfrac{1}{2} \equiv \text{const.}$$

mit dem „Potential"

$$U := \tfrac{c^2}{2} \cdot r^{-2} : I \to \mathbb{R} .$$

Dies ist die Gleichung eines konservativen mechanischen Systems mit einem Freiheitsgrad, und als solche bestens bekannt. Siehe beispielsweise den Abschnitt 2.6 aus V. I. Arnold, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer 1980. Aufgrund der dort beschriebenen Theorie bekommt man in einfacher Weise eine qualitative Übersicht über die Geodätischen einer jeden Rotationsfläche.

Beispiel 2. Die hyperbolische Halbebene. Die *hyperbolische Halbebene* ist das Riemannsche Gebiet $\mathbb{H} := (G, g)$ mit $G := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ und der Riemannschen C^∞-Metrik g, die durch

$$g_{(t,s)} := \frac{1}{s^2} \cdot \langle \cdot\,, \cdot \rangle \quad \text{für } (t, s) \in G$$

gegeben ist (siehe auch Beispiel 3(a) in Abschnitt 5.6).

Nach Beispiel (a) aus Abschnitt 7.1 gilt für die Komponenten Γ_{ik}^j des Christoffelsymbols von $\mathbb{H}$

$$-\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = \frac{\partial\big(\ln \circ \frac{1}{y}\big)}{\partial y} = -\frac{1}{y} \quad \text{und} \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0 .$$

Daher ist nach dem Satz dieses Abschnittes eine Kurve $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : I \to \mathbb{H}$ genau dann eine Geodätische, wenn

$$\alpha_1'' = -\frac{2\alpha_1' \cdot \alpha_2'}{\alpha_2} \quad \text{und} \quad \alpha_2'' = \frac{(\alpha_2')^2 - (\alpha_1')^2}{\alpha_2}$$

gilt.

Daran liest man ab: Die Geodätischen von $\mathbb{H}$ sind, abgesehen von den konstanten Kurven, genau die vertikalen Geraden $\mathbb{R} \to \mathbb{H},\ t \mapsto (c, \exp(t))$ (sie sind nach Bogenlänge parametrisiert) und die Halbkreise, deren Mittelpunkt auf dem „Horizont" $\mathbb{R} \times \{0\}$ liegt (sie müssen allerdings geeignet parametrisiert werden).

Dieses Beispiel ist von großem historischen Interesse. Betrachtet man nämlich die Geodätischen als die „Geraden" der hyperbolischen Halbebene, so sind in der so definierten *hyperbolischen*

Geometrie alle Axiome der euklidischen Geometrie erfüllt, mit Ausnahme des Parallelenaxioms. Diese Tatsache lieferte den Beweis, dass man das Parallelenaxiom nicht aus den anderen Axiomen der euklidischen Geometrie herleiten kann. Die Entdecker dieses Tatbestandes waren unabhängig voneinander J. Bolyai (1823), N. I. Lobatschewsky (1825) und Gauss, wobei letzterer seine diesbezüglichen Notizen nie veröffentlicht hat.

7.5 Differentialformen in zwei Dimensionen

In den Abschnitten 7.6–7.7 werden wir den Zusammenhang zwischen der Gaußschen Krümmung einer Flächenparametrisierung und den Größen der inneren Geometrie beschreiben. Dazu müssen wir mit Differentialformen auf 2-dimensionalen Gebieten, und deren Cartanschen Ableitungen arbeiten. Wir stellen daher die Theorie derartiger Differentialformen kurz dar.

Definition 1. Es sei G ein Gebiet des $\mathbb{R}^2$ und $r \geq 1$.

(a) Eine *C^r-Differentialform α vom Grad 1 auf G* ist eine C^r-Abbildung $\alpha : G \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $p \mapsto \alpha_p$. Für $p \in G$ ist α_p also jeweils eine Linearform auf $\mathbb{R}^2$.

(b) Eine *C^r-Differentialform μ vom Grad 2 auf G* ist eine C^r-Abbildung $\mu : G \to \mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^2)$, $p \mapsto \mu_p$. Für $p \in G$ ist α_p also jeweils eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$, die *alternierend* ist, d.h. es gilt

$$\mu_p(v, w) = -\mu_p(w, v) \quad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^2 .$$

Beispiele 1.

(a) Sei (G, g) ein Riemannsches C^r-Gebiet und $E \in \mathfrak{X}^s(G)$ mit $s \leq r$. Dann ist $g(E, \cdot\,) : p \mapsto g_p(E_p, \cdot\,)$ eine C^s-Differentialform vom Grad 1 auf G. Die Volumenform ω von (G, g) ist eine C^{r-1}-Differentialform vom Grad 2 auf G.

(b) Sei $f : G \to \mathbb{R}$ eine C^r-Funktion. Dann ist das Differential df von f eine C^{r-1}-Differentialform vom Grad 1 auf G.

(c) Sind $x, y : G \to \mathbb{R}$ die üblichen Koordinatenfunktionen auf $G \subset \mathbb{R}^2$, so sind insbesondere ihre Differentiale dx und dy C^∞-Differentialformen vom Grad 1 auf G. Ist α eine andere C^r-Differentialform vom Grad 1 auf G, so existieren C^r-Funktionen $f_1, f_2 : G \to \mathbb{R}$ mit $\alpha = f_1 \cdot dx + f_2 \cdot dy$, das soll heißen:

$$\forall p \in G \;:\; \alpha_p = f_1(p) \cdot d_p x + f_2(p) \cdot d_p y .$$

Definition 2. Seien α, β zwei C^r-Differentialformen vom Grad 1 auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$. Dann wird durch

$$(\alpha \wedge \beta)_p(v, w) := \alpha(v) \cdot \beta(w) - \alpha(w) \cdot \beta(v) \quad \text{für alle } p \in G \text{ und } v, w \in \mathbb{R}^2$$

eine C^r-Differentialform $\alpha \wedge \beta$ vom Grad 2 auf G definiert. $\alpha \wedge \beta$ heißt das *äußere Produkt* oder das *Wedge-Produkt* von α mit β.

Beispiel 2. Ist in der Situation von Beispiel 1(c) eine C^r-Differentialform μ vom Grad 2 auf G gegeben, so existiert eine C^r-Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ mit $\mu = f \cdot (dx \wedge dy)$, d.h.

$$\forall p \in G \; : \; \mu_p = f(p) \cdot (dx \wedge dy)_p \; .$$

In Verallgemeinerung von Beispiel 1(c) und Beispiel 2 gilt:

Aussage 1. Es sei (E_1, E_2) ein C^r-Basisfeld auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ und (θ_1, θ_2) das zu (E_1, E_2) duale Basisfeld, das heißt, θ_1 und θ_2 seien die C^r-Differentialformen vom Grad 1, die durch

$$\theta_1(E_1) \equiv \theta_2(E_2) \equiv 1 \quad \text{und} \quad \theta_1(E_2) \equiv \theta_2(E_1) \equiv 0 \tag{$*$}$$

charakterisiert sind. Dann gilt:

(a) Für jede Differentialform α vom Grad 1 auf G gilt $\alpha = \alpha(E_1) \cdot \theta_1 + \alpha(E_2) \cdot \theta_2$.

(b) Für jede Differentialform μ vom Grad 2 auf G gilt $\mu = \mu(E_1, E_2) \cdot (\theta_1 \wedge \theta_2)$.

Beweis. Für (a). Es genügt, die Gleichung bei Einsetzung von E_k ($k \in \{1, 2\}$) zu überprüfen. Aufgrund von $(*)$ gilt

$$\alpha(E_1) \cdot \theta_1(E_k) + \alpha(E_2) \cdot \theta_2(E_k) = \alpha(E_k) \; .$$

Für (b). Man beachte, dass $\mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^2)$ eindimensional ist, und daher $\mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto \omega((E_1)_p, (E_2)_p)$ für $p \in G$ jeweils ein Vektorraum-Isomorphismus ist. Deshalb genügt es, die behauptete Gleichung bei Einsetzung von (E_1, E_2) zu überprüfen. Es gilt

$$\big(\mu(E_1, E_2) \cdot (\theta_1 \wedge \theta_2)\big)(E_1, E_2) = \mu(E_1, E_2) \cdot (\theta_1(E_1) \cdot \theta_2(E_2) - \theta_1(E_2) \cdot \theta_2(E_1) \overset{(*)}{=} \mu(E_1, E_2) \; .$$

□

Definition 3. Es seien $G, \widetilde{G} \subset \mathbb{R}^2$ zwei Gebiete und $f : \widetilde{G} \to G$ eine C^{r+1}-Abbildung.

(a) Ist α eine C^r-Differentialform vom Grad 1 auf G, so wird durch

$$(f^*\alpha)_p(v) := \alpha_{f(p)}(d_p f(v)) \quad \text{für alle } p \in \widetilde{G} \text{ und } v \in \mathbb{R}^2$$

eine C^r-Differentialform $f^*\alpha$ vom Grad 1 auf $\widetilde{G}$ definiert.

(b) Ist μ eine C^r-Differentialform vom Grad 2 auf G, so wird durch

$$(f^*\mu)_p(v, w) := \mu_{f(p)}(d_p f(v), d_p f(w)) \quad \text{für alle } p \in \widetilde{G} \text{ und } v, w \in \mathbb{R}^2$$

eine C^r-Differentialform $f^*\mu$ vom Grad 2 auf $\widetilde{G}$ definiert.

Man nennt $f^*\alpha$ bzw. $f^*\mu$ den *Pullback* von α bzw. μ unter f.

Wir wollen nun für Differentialformen α vom Grad 1 einen *Differentiationsprozeß* einführen. Dabei denkt man natürlich zuerst an das übliche Differential $d\alpha$. Dieses ordnet jedem $p \in G$ eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $v \mapsto d_p\alpha(v)$ zu. Das hierdurch definierte Tensorfeld vom Typ $(0, 2)$ $(d_p\alpha(v))(w)$ ist jedoch *keine* Differentialform, weil es in den Einträgen (v, w) nicht alternierend ist. Betrachten wir von diesem Tensorfeld jedoch nur den „alternierenden Anteil“, so erhalten wir eine Differentialform vom Grad 2, die sogenannte *Cartansche Ableitung* von α:

Definition 4. Sei α eine C^r-Differentialform vom Grad 1 auf G mit $r \geq 1$. Dann heißt die durch

$$(\underline{\mathrm{d}}\alpha)_p(v,w) := \underline{\mathrm{d}}_p\alpha(v,w) := (d_p\alpha(v))(w) - (d_p\alpha(w))(v) \quad \text{für } p \in G \text{ und } v,w \in \mathbb{R}^2$$

definierte C^{r-1}-Differentialform $\underline{\mathrm{d}}\alpha$ vom Grad 2 auf G die *Cartansche Ableitung* oder *äußere Ableitung* von α.

Aussage 2. Berechnung der Cartanschen Ableitung in Riemannschen Gebieten. Es sei (G,g) ein 2-dimensionales Riemannsches C^1-Gebiet mit Levi-Civita-Ableitung ∇, α eine C^1-Differentialform vom Grad 1 auf G, und $X, Y \in \mathfrak{X}^1(G)$. Dann gilt für $p \in G$

$$\underline{\mathrm{d}}_p\alpha(X_p, Y_p) = d_p(\alpha(Y))(X_p) - d_p(\alpha(X))(Y_p) - \alpha_p(\nabla_{(p,X_p)}Y - \nabla_{(p,Y_p)}X) .$$

Beweis. Es gilt nach der Leibniz-Regel

$$d_p(\alpha(Y))(X_p) = (d_p\alpha(X_p))(Y_p) + \alpha_p(d_pY(X_p))$$

und daher

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{d}}_p\alpha(X_p, Y_p) &= (d_p\alpha(X_p))(Y_p) - (d_p\alpha(Y_p))(X_p) \\
&= d_p(\alpha(Y_p))(X_p) - d_p(\alpha(X_p))(Y_p) \\
&= d_p(\alpha(Y))(X_p) - \alpha_p(d_pY(X_p)) - d_p(\alpha(X))(Y_p) + \alpha_p(d_pX(Y_p)) \\
&= d_p(\alpha(Y))(X_p) - d_p(\alpha(X))(Y_p) - \alpha_p(d_pY(X_p) - d_pX(Y_p)) \\
&= d_p(\alpha(Y))(X_p) - d_p(\alpha(X))(Y_p) - \alpha_p(\nabla_{(p,X_p)}Y - \nabla_{(p,Y_p)}X) ,
\end{aligned}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen aus der Torsionsfreiheit von ∇ folgt, siehe Satz 1(c) in Abschnitt 7.2. □

Aussage 3. Vertauschbarkeit von Cartanscher Ableitung und Pullback. Seien $G, \widetilde{G}$ zwei Gebiete in $\mathbb{R}^2$, $f : \widetilde{G} \to G$ eine C^2-Abbildung und α eine C^1-Differentialform vom Grad 1 auf G. Dann gilt

$$\underline{\mathrm{d}}(f^*\alpha) = f^*(\underline{\mathrm{d}}\alpha) .$$

Beweis. Es seien $\widetilde{p} \in \widetilde{G}$ und $\widetilde{v}, \widetilde{w} \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Wir setzen $p := f(\widetilde{p}) \in G$, $v := d_{\widetilde{p}}f(\widetilde{v})$ und $w := d_{\widetilde{p}}f(\widetilde{w})$. Dann gilt aufgrund der Kettenregel

$$\underline{\mathrm{d}}_{\widetilde{p}}(f^*\alpha)(\widetilde{v},\widetilde{w}) = d_{\widetilde{p}}((f^*\alpha)(\widetilde{v}))(\widetilde{w}) - d_{\widetilde{p}}((f^*\alpha)(\widetilde{w}))(\widetilde{v}) = d_p(\alpha(v))(w) - d_p(\alpha(w))(v) = \underline{\mathrm{d}}_p\alpha(v,w) = (f^*(\underline{\mathrm{d}}\alpha))_{\widetilde{p}}(\widetilde{v},\widetilde{w}) .$$

□

7.6 Die Zusammenhangsform eines 2-dimensionalen Riemannschen Gebiets

Voraussetzungen. Wir machen für die nächsten beiden Abschnitte die folgenden Generalvoraussetzungen: Es sei (G,g) ein <u>2-dimensionales</u> Riemannsches C^r-Gebiet mit $r \geq 2$, und ∇ dessen Levi-Civita-Ableitung. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Alt}^2_+(\mathbb{R}^2)$ die kanonische Orientierung von $\mathbb{R}^2$, siehe Abschnitt 1.7; es seien ω und J die induzierte Volumenform bzw. komplexe Struktur von (G,g), siehe Abschnitt 5.6.

Wir fixieren nun ein normiertes Vektorfeld $E \in \mathfrak{X}^r(G)$. Dabei soll sich die „Normierung“ auf die Riemannsche Metrik g beziehen, d.h. es soll gelten

$$\forall p \in G \;:\; g_p(E_p, E_p) = 1 .$$

Außerdem betrachten wir das Vektorfeld

$$JE : G \to \mathbb{R}^2,\ p \mapsto J_p(E_p)\ .$$

Damit ist offenbar $JE \in \mathfrak{X}^r(G)$ ein weiteres Einheitsvektorfeld, und (E, JE) ein positiv orientiertes C^r-ONB-Feld bezüglich g.

Satz. Es existiert genau eine C^{r-1}-Differentialform $\zeta : G \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),\ p \mapsto \zeta_p$ vom Grad 1 auf G, so dass

$$\forall\, p \in G,\ v \in \mathbb{R}^2\ :\ \nabla_{(p,v)}E = \zeta_p(v) \cdot JE_p \quad \text{und} \quad \nabla_{(p,v)}(JE) = -\zeta_p(v) \cdot E_p$$

gilt. Diese Differentialform nennen wir die *Zusammenhangsform der Konfiguration* (G, g, E). Sie misst die infinitesimale Änderung von E und JE relativ zum ONB-Feld (E, JE) (siehe auch die Frenet-Gleichungen der Kurventheorie).

Beweis. Für $p \in G$ und $v \in \mathbb{R}^2$ setzen wir

$$\zeta_p(v) := g_p(\nabla_{(p,v)}E, JE_p)\ ;$$

hierdurch wird offenbar eine C^{r-1}-Differentialform ζ vom Grad 1 auf G definiert. Damit gilt, weil (E_p, JE_p) eine g_p-ONB von $\mathbb{R}^2$ ist,

$$\nabla_{(p,v)}E = g_p(\nabla_{(p,v)}E, E_p)\, E_p + g_p(\nabla_{(p,v)}E, JE_p)\, JE_p = \zeta_p(v)\, JE_p\ ;$$

hierbei ergibt sich das zweite Gleichheitszeichen aus der Differentiation der Gleichung $g(E, E) \equiv 1$ und der Anwendung der Ricci-Identität (Abschnitt 7.2, Satz 1(d)):

$$0 = d_p\big(g(E, E)\big)(v) = 2\, g_p(\nabla_{(p,v)}E, E_p)\ .$$

In entsprechender Weise folgt aus $g(E, JE) \equiv 0$:

$$0 = d_p\big(g(E, JE)\big)(v) = g_p(\nabla_{(p,v)}E, JE_p) + g_p(E_p, \nabla_{(p,v)}(JE)) = g_p(E_p, \nabla_{(p,v)}(JE)) + \zeta_p(v)$$

und aus $g(JE, JE) \equiv 1$:

$$0 = d_p\big(g(JE, JE)\big)(v) = 2\, g_p(\nabla_{(p,v)}(JE), JE_p)\ .$$

Mit diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$\nabla_{(p,v)}(JE) = g_p(\nabla_{(p,v)}(JE), E_p)\, E_p + g_p(\nabla_{(p,v)}(JE), JE_p)\, JE_p = -\zeta_p(v)\, E_p\ .$$

□

Aussage 1. Es sei (θ_1, θ_2) das zu (E, JE) duale Basisfeld (siehe Aussage 1 in Abschnitt 7.5). Dann gilt:

(a) $\forall p \in G\ :\ \theta_{1,p} = g_p(E_p, \cdot\,)$ und $\theta_{2,p} = g_p(JE_p, \cdot\,)$

(b) $\omega = \theta_1 \wedge \theta_2$.

(c) $\zeta = \sum_i \underline{\mathrm{d}}\theta_i(E, JE) \cdot \theta_i$

(d) Die Zusammenhangsform ζ ist durch die Gleichungen

$$\underline{\mathrm{d}}\theta_1 = \zeta \wedge \theta_2 \quad \text{und} \quad \underline{\mathrm{d}}\theta_2 = -\zeta \wedge \theta_1$$

charakterisiert.

Beweis. (a) ist klar. *Zu (b).* Nach Aussage 1(b) aus Abschnitt 7.5 gilt $\omega = \omega(E, JE) \cdot (\theta_1 \wedge \theta_2) = \theta_1 \wedge \theta_2$. *Zu (c).* Aufgrund von Aussage 2 aus Abschnitt 7.5 und der Definition der Zusammenhangsform ζ im Satz dieses Abschnitts gilt für $p \in G$

$$\begin{aligned}
\sum_i \underline{\mathrm{d}}_p\theta_i(E, JE) \cdot \theta_{i,p} &= \sum_i \big(d_p(\theta_i(JE))(E_p) - d_p(\theta_i(E))(JE_p) - \theta_{i,p}(\nabla_{(p,E_p)}(JE) - \nabla_{(p,JE_p)}E)\big) \cdot \theta_{i,p} \\
&= -\sum_i \theta_{i,p}(\nabla_{(p,E_p)}(JE) - \nabla_{(p,JE_p)}E) \cdot \theta_{i,p} \\
&= -\sum_i \theta_{i,p}(-\zeta_p(E_p) \cdot E_p - \zeta_p(JE_p) \cdot JE_p) \cdot \theta_{i,p} \\
&= \sum_i \big(\zeta_p(E_p) \cdot \theta_{i,p}(E_p) + \zeta_p(JE_p) \cdot \theta_{i,p}(JE_p)\big) \cdot \theta_{i,p} \\
&= \zeta_p(E_p) \cdot \theta_{1,p} + \zeta_p(JE_p) \cdot \theta_{2,p} = \zeta_p \ ,
\end{aligned}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen aus Aussage 1(a) in Abschnitt 7.5 folgt.

Zu (d). Nach (c) gilt

$$\zeta \wedge \theta_2 = (\underline{\mathrm{d}}\theta_1(E, JE) \cdot \theta_1 + \underline{\mathrm{d}}\theta_2(E, JE) \cdot \theta_2) \ \wedge \ \theta_2 = \underline{\mathrm{d}}\theta_1(E, JE) \cdot (\theta_1 \wedge \theta_2) = \underline{\mathrm{d}}\theta_1 \ ,$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen aus Aussage 1(b) in Abschnitt 7.5 folgt. Die zweite behauptete Gleichung folgt auf entsprechende Weise. □

Beispiel. In der hyperbolischen Halbebene $\mathbb{H}$ (siehe das Beispiel 2 in Abschnitt 7.4) ist $E := y \cdot e_2$ ein C^∞-Einheitsvektorfeld. Es gilt $JE = -y \cdot e_1$, $\theta_1 = (1/y) \cdot dy$, $\theta_2 = -(1/y) \cdot dx$ und daher $\omega = \theta_1 \wedge \theta_2 = (1/y^2) \cdot dx \wedge dy$. Weiter gilt für $p = (x, y) \in \mathbb{H}$

$$\underline{\mathrm{d}}_p\theta_1(e_1, e_2) = (d_p\theta_1(e_1))(e_2) - (d_p\theta_1(e_2))(e_1) = 0 + (\tfrac{1}{y^2}\, d_p y)(e_1) = 0$$

und deshalb $\underline{\mathrm{d}}\theta_1 = 0$. Entsprechend ist

$$\underline{\mathrm{d}}_p\theta_2(e_1, e_2) = (d_p\theta_2(e_1))(e_2) - (d_p\theta_2(e_2))(e_1) = 0 - \tfrac{1}{y^2}\, d_p x(e_1) = -\tfrac{1}{y^2} = -\tfrac{1}{y^2} \cdot (dx \wedge dy)(e_1, e_2)$$

und deshalb $\underline{\mathrm{d}}\theta_2 = -\frac{1}{y^2} \cdot (dx \wedge dy) = -\omega$. Damit ergibt sich nach Aussage 1(c)

$$\zeta = \underline{\mathrm{d}}\theta_1(E, JE) \cdot \theta_1 + \underline{\mathrm{d}}\theta_2(E, JE) \cdot \theta_2 = -\omega(E, JE) \cdot \theta_2 = -\theta_2 = \tfrac{1}{y} \cdot dx \ .$$

Aussage 2. Verhalten der Zusammenhangsform unter Isometrien. Sei $(\widetilde{G}, \widetilde{g})$ ein weiteres 2-dimensionales Riemannsches C^r-Gebiet, die vermittels der orientierungserhaltenden C^{r+1}-Isometrie $\varphi : (\widetilde{G}, \widetilde{g}) \to (G, g)$ zu (G, g) isometrisch ist. Dann existiert genau ein C^r-Einheitsvektorfeld $\widetilde{E}$ des Riemannschen Gebietes $(\widetilde{G}, \widetilde{g})$ mit

$$\forall p \in \widetilde{G}, \ v \in \mathbb{R}^2 \ : \ d_p\varphi(\widetilde{E}_p) = E_{\varphi(p)} \ .$$

Die Volumen- und Zusammenhangsformen $\widetilde{\omega}$ und $\widetilde{\zeta}$ der Konfiguration $(\widetilde{G}, \widetilde{g}, \widetilde{E})$ stehen mit den entpsrechenden Größen der Konfiguration (G, g, E) durch die folgenden einfachen Formeln in Verbindung:

$$\widetilde{\omega} = \varphi^*\omega \ , \quad \widetilde{\zeta} = \varphi^*\zeta \quad \text{und deshalb auch} \quad \underline{\mathrm{d}}\widetilde{\zeta} = \varphi^*(\underline{\mathrm{d}}\zeta) \ .$$

Beweis. Die Existenz und Eindeutigkeit von $\widetilde{E}$ folgt aus der Tatsache, dass $d_p\varphi : (\mathbb{R}^2, g_p) \to (\mathbb{R}^2, g_{\varphi(p)})$ jeweils ein skalarprodukttreuer Vektorraum-Isomorphismus ist. Ferner gilt $d_p\varphi \circ \widetilde{J}_p = J_{\varphi(p)} \circ d_p\varphi$ und deshalb auch $d_p\varphi(\widetilde{J}\widetilde{E}_p) = JE_{\varphi(p)}$. Daraus ergibt sich $\widetilde{\theta}_k = \varphi^*\theta_k$ für $k \in \{1, 2\}$ und daher nach Aussage 1(b)

$$\widetilde{\omega} = \widetilde{\theta}_1 \wedge \widetilde{\theta}_2 = (\varphi^*\theta_1) \wedge (\varphi^*\theta_2) = \varphi^*(\theta_1 \wedge \theta_2) = \varphi^*\omega \ .$$

Außerdem gilt nach Aussage 1(c) unter Verwendung von Aussage 3 aus Abschnitt 7.5

$$\begin{aligned}\widetilde{\zeta} &= \sum_i \underline{\mathrm{d}}\widetilde{\theta}_i(\widetilde{E}, J\widetilde{E}) \cdot \widetilde{\theta}_i = \sum_i \underline{\mathrm{d}}(\varphi^*\theta_i)(\widetilde{E}, J\widetilde{E}) \cdot (\varphi^*\theta_i) = \sum_i \varphi^*(\underline{\mathrm{d}}\theta_i)(\widetilde{E}, J\widetilde{E}) \cdot (\varphi^*\theta_i) \\ &= \sum_i (\underline{\mathrm{d}}\theta_i)_{\varphi(p)}(d_p\varphi(\widetilde{E}), d_p\varphi(J\widetilde{E})) \cdot (\varphi^*\theta_i) = \sum_i (\underline{\mathrm{d}}\theta_i(E, JE) \circ \varphi) \cdot \varphi^*\theta_i = \varphi^*\zeta\,.\end{aligned}$$

Die Gleichung $\underline{\mathrm{d}}\widetilde{\zeta} = \varphi^*(\underline{\mathrm{d}}\zeta)$ folgt nun aus Aussage 3 aus Abschnitt 7.5. □

7.7 Die Gaußsche Krümmung als Größe der inneren Geometrie

Aussage 1. Die Cartansche Ableitung $\underline{\mathrm{d}}\zeta$ der Zusammenhangsform ζ der Konfiguration (G, g, E) hängt *nicht* von der Wahl des Einheitsvektorfeldes E ab. Wir nennen $\underline{\mathrm{d}}\zeta$ die *Krümmungsform* des Riemannschen Gebiets (G, g). Da sie eine Differentialform vom Grad 2 ist, kann man sie mit Hilfe einer – eindeutig bestimmten – Funktion $K : G \to \mathrm{I\!R}$ durch

$$\underline{\mathrm{d}}\zeta = -K \cdot \omega$$

beschreiben. K heißt die *Krümmung* des 2-dimensionalen Riemannschen Gebiets (G, g).

Beweis. Ist $\widetilde{E}$ ein zweites Einheitsvektorfeld von (G, g), so gilt $\widetilde{E} = a \cdot E + b \cdot JE$ mit $a := g(\widetilde{E}, E)$ und $b := g(\widetilde{E}, JE)$. Dabei ist $a^2 + b^2 \equiv 1$, also

$$a \cdot \mathrm{d}a + b \cdot \mathrm{d}b \equiv 0\,. \qquad (*)$$

Durch Anwendung von J auf die Formel für $\widetilde{E}$ erhalten wir auch $J\widetilde{E} = -b \cdot E + a \cdot JE$. Daher folgt nach dem Satz aus Abschnitt 7.6 für die Zusammenhangsform $\widetilde{\zeta}$ der Konfiguration $(G, g, \widetilde{E})$

$$\begin{aligned}\widetilde{\zeta}_p(v) &= g_p(\nabla_{(p,v)}\widetilde{E}, J\widetilde{E}_p) \\ &= g_p(\nabla_{(p,v)}(a \cdot E + b \cdot JE), -b(p) \cdot E_p + a(p) \cdot JE_p) \\ &= g_p(\mathrm{d}_p a(v) \cdot E_p + a(p) \cdot \nabla_{(p,v)}E + \mathrm{d}_p b(v) \cdot JE_p + b(p) \cdot \nabla_{(p,v)}(JE)\ ,\ -b(p) \cdot E_p + a(p) \cdot JE_p) \\ &= g_p(\mathrm{d}_p a(v) \cdot E_p + a(p) \cdot \zeta_p(v) \cdot JE_p + \mathrm{d}_p b(v) \cdot JE_p - b(p) \cdot \zeta_p(v) \cdot E_p\ ,\ -b(p) \cdot E_p + a(p) \cdot JE_p) \\ &= -\mathrm{d}_p a(v) \cdot b(p) + a(p)^2 \cdot \zeta_p(v) + \mathrm{d}_p b(v) \cdot a(p) + b(p)^2 \cdot \zeta_p(v) \\ &= a(p) \cdot \mathrm{d}_p b(v) - b(p) \cdot \mathrm{d}_p a(v) + \zeta_p(v)\ ,\end{aligned}$$

und deswegen

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{d}}\widetilde{\zeta}_p(v, w) &= \mathrm{d}_p(a \cdot \mathrm{d}b(v) - b \cdot \mathrm{d}a(v))(w) - \mathrm{d}_p(a \cdot \mathrm{d}b(w) - b \cdot \mathrm{d}a(w))(v) + \underline{\mathrm{d}}\zeta_p(v, w) \\ &= \mathrm{d}_p a(w) \cdot \mathrm{d}_p b(v) + a(p) \cdot \mathrm{d}_p^2 b(v, w) - \mathrm{d}_p b(w) \cdot \mathrm{d}_p a(v) - b(p) \cdot \mathrm{d}_p^2 a(v, w) \\ &\qquad - \mathrm{d}_p a(v) \cdot \mathrm{d}_p b(w) - a(p) \cdot \mathrm{d}_p^2 b(w, v) + \mathrm{d}_p b(v) \cdot \mathrm{d}_p a(w) + b(p) \cdot \mathrm{d}_p^2 a(w, v)\ +\ \underline{\mathrm{d}}\zeta_p(v, w) \\ &= 2\,(\mathrm{d}_p b(v) \cdot \mathrm{d}_p a(w) - \mathrm{d}_p b(w) \cdot \mathrm{d}_p a(v)) + \underline{\mathrm{d}}\zeta_p(v, w)\ ,\end{aligned}$$

also $\underline{\mathrm{d}}\widetilde{\zeta} = 2\,\mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}a + \underline{\mathrm{d}}\zeta$. Wegen $(*)$ sind $\mathrm{d}_p a$ und $\mathrm{d}_p b$ jeweils linear abhängig. Daher ist $\mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}a \equiv 0$ und somit $\underline{\mathrm{d}}\widetilde{\zeta} = \underline{\mathrm{d}}\zeta$. □

Wir wollen nun die Krümmung des Riemannschen Gebiets (G, g) für den Spezialfall bestimmen, dass g der Maßtensor einer C^{r+1}-Flächenparametrisierung $F : G \to \mathrm{I\!E}^3$ ist. Als Vorbereitung führen wir eine Betrachtung durch, die der in Abschnitt 4.1 beschriebenen Herleitung der Frenet-Gleichungen für eine Kurve im $\mathrm{I\!E}^3$ sehr ähnelt:

Aussage 2. Es seien $E_1, E_2, E_3 : G \to \mathrm{I\!E}^3_L$ drei C^r-Funktionen derart, dass für jedes $p \in G$ $(E_1(p), E_2(p), E_3(p))$ eine ONB von $\mathrm{I\!E}^3_L$ ist. Dann existieren C^{r-1}-Differentialformen ω_{ik} vom

Grad 1 auf G (mit $i,k \in \{1,2,3\}$), so dass

$$\forall\, p \in G,\ v \in \mathbb{R}^2\ :\ d_pE_i(v) = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik,p}(v) \cdot E_k(p) \quad \text{für } i \in \{1,2,3\}$$

gilt. Diese Differentialformen besitzen die Symmetrien

$$\omega_{ik} = -\omega_{ki} \quad \text{für } i,k \in \{1,2,3\}\,, \quad \text{also insbesondere } \omega_{ii} = 0$$

und erfüllen die *Strukturgleichungen*

$$\underline{\mathrm{d}}\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}\ , \quad \underline{\mathrm{d}}\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23} \quad \text{und} \quad \underline{\mathrm{d}}\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13}\ .$$

Beweis. Die Existenz der ω_{ik} ist klar. Für $i,k \in \{1,2,3\}$ gilt $\langle E_i, E_k\rangle \equiv \delta_{ik}$ und somit

$$0 = d_p(\langle E_i, E_k\rangle)(v) = \langle d_pE_i(v), E_k(p)\rangle + \langle E_i(p), d_pE_k(v)\rangle = \omega_{ik,p}(v) + \omega_{ki,p}(v)\ .$$

Hieraus folgen die Symmetriegleichungen.

Zum Beweis der Strukturgleichungen: Für $i \in \{1,2,3\}$ und $u,v \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}
d_p^2E_i(u,v) &= d_p(q \mapsto d_qE_i(u))(v)\\
&= d_p\left(\sum_{k=1}^{3} \omega_{ik}(u) \cdot E_k\right)(v)\\
&= \sum_{k=1}^{3} \big(d_p(\omega_{ik}(u))(v) \cdot E_k(p) + \omega_{ik,p}(u) \cdot d_pE_k(v)\big)\\
&= \sum_{k=1}^{3} \big(d_p(\omega_{ik}(u))(v) \cdot E_k(p) + \omega_{ik,p}(u) \cdot \sum_{j=1}^{3} \omega_{kj,p}(v)\, E_j(p)\big)\\
&= \sum_{k=1}^{3} \left(d_p(\omega_{ik}(u))(v) + \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij,p}(u)\, \omega_{jk,p}(v)\right) \cdot E_k(p)\\
&= \sum_{k=1}^{3} \left((d_p\omega_{ik}(v))(u) + \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij,p}(u)\, \omega_{jk,p}(v)\right) \cdot E_k(p)
\end{aligned}$$

und daher wegen der Symmetrie des zweiten Differentials $d_p^2E_i$

$$\begin{aligned}
0 &= d_p^2E_i(u,v) - d_p^2E_i(v,u)\\
&= \sum_{k=1}^{3} \left((d_p\omega_{ik}(v))(u) - (d_p\omega_{ik}(u))(v) + \sum_{j=1}^{3} (\omega_{ij,p}(u)\, \omega_{jk,p}(v) - \omega_{ij,p}(v)\, \omega_{jk,p}(u))\right) \cdot E_k(p)\\
&= \sum_{k=1}^{3} \left(-\underline{\mathrm{d}}_p\omega_{ik}(u,v) + \sum_{j=1}^{3} (\omega_{ij} \wedge \omega_{jk})_p(u,v)\right) \cdot E_k(p)\ .
\end{aligned}$$

Da die $E_k(p)$ (mit $k \in \{1,2,3\}$) linear unabhängig sind, ergibt sich hieraus

$$\forall i,k \in \{1,2,3\}\ :\ \underline{\mathrm{d}}\omega_{ik} = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \omega_{jk}$$

und somit für $i = 1$, $k = 2$ wegen $\omega_{jj} = 0$

$$\underline{\mathrm{d}}\omega_{12} = \sum_{j=1}^{3} \omega_{1j} \wedge \omega_{j2} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}$$

und analog die anderen beiden Strukturgleichungen. □

Anwendung. Wir benutzen die vorhergehende Aussage 2 nun, um eine C^{r+1}-Flächenparametrisierung $F : G \to \mathbb{E}^3$ zu untersuchen. Hierfür sei g der Maßtensor von F, $E \in \mathfrak{X}^s(G)$ ein Einheitsvektorfeld bezüglich g, und N_F das Einheitsnormalenfeld von F. Wir wenden Aussage 2 auf das positiv orientierte ONB-Feld (E_1, E_2, E_3) längs F an, das durch

$$E_1 := F_*E : p \mapsto d_pF(E_p) \ , \quad E_2 := F_*(JE) \quad \text{und} \quad E_3 := N_F$$

definiert ist. In diesem Fall haben die Differentialformen ω_{ik} aus Aussage 2 die folgende geometrische Bedeutung:

(a) ω_{12} ist mit der Zusammenhangsform ζ der Konfiguration (G, g, E) identisch, also eine Größe der *inneren Geometrie* von F.

(b) ω_{13} und ω_{23} beschriben den Formoperator A von F, und werden umgekehrt durch diesen bestimmt; sie sind in diesem Sinne Größen der *äußeren Geometrie* von F. Genauer gesagt, es gilt:

$$A = \omega_{13} \otimes E + \omega_{23} \otimes JE \ ,$$

das soll per Definition bedeuten:

$$\forall p \in G, \ v \in \mathbb{R}^2 \ : \ A_p v = \omega_{13,p}(v) \cdot E_p + \omega_{23,p}(v) \cdot JE_p \ . \qquad (\dagger)$$

Beweis. Für $p \in G$ und $v \in \mathbb{R}^2$ gilt einerseits nach Aussage 2

$$d_pE_1(v) = \omega_{12,p}(v)\, E_2(p) + \omega_{13,p}(v)\, E_3(p) \ ,$$

andererseits gilt nach der Gaußschen Ableitungsgleichung (Abschnitt 7.3) und dem Satz in Abschnitt 7.6

$$\begin{aligned} d_pE_1(v) &= d_p(F_*E)(v) \\ &= d_pF(\nabla_{(p,v)}E) + h_p(v, E_p) \cdot N_F(p) \\ &= \zeta_p(v) \cdot JE_p + g_p(A_p v, E_p) \cdot N_F(p) \\ &= \zeta_p(v) \cdot E_2(p) + g_p(A_p v, E_p) \cdot E_3(p) \ . \end{aligned}$$

Durch „Koeffizientenvergleich“ in diesen beiden Gleichungen ergibt sich einerseits

$$\omega_{12,p}(v) = \zeta_p(v) \ ,$$

andererseits

$$\omega_{13,p}(v) = g_p(A_p v, E_p) \ .$$

Durch eine analoge Rechnung für $d_pE_2(v)$ erhält man auch

$$\omega_{23,p}(v) = g_p(A_p v, JE_p)$$

und damit die behauptete Gleichung (†). □

Theorem. Die Krümmungsgleichung von Gauß. Sei g der Maßtensor einer C^3-Parametrisierung $F : G \to \mathbb{E}$ und K_F ihre Gaußsche Krümmung. Weiter sei ω die Volumenform des Riemannschen Gebiets (G, g). Dann gilt für die Krümmungsform $\underline{d}\zeta$ von (G, g)

$$\underline{d}\zeta = -K_F \cdot \omega \ .$$

Mit anderen Worten: Die Krümmung des Riemannschen Gebiets (G, g) (siehe Aussage 1) stimmt mit der Gaußschen Krümmung von F überein.

Als Folge dieses Theorems sehen wir:

$\boxed{\text{Die Gaußsche Krümmung einer Flächenparametrisierung ist eine Größe ihrer inneren Geometrie.}}$

Beweis. Nach Aussage 1 gilt für die Krümmung K des Riemannschen Gebiets (G, g): $\underline{d}\zeta = -K \cdot \omega$. Verwenden wir nun die Aussage 2 in der in der vorhergehenden Anwendung beschriebenen Situation, so gilt $\zeta = \omega_{12}$ und deshalb $\underline{d}\zeta = \omega_{13} \wedge \omega_{32}$ und somit

$$\begin{aligned} K &= -\underline{d}\zeta(E, JE) = -(\omega_{13} \wedge \omega_{32})(E, JE) \\ &= -\omega_{13}(E)\,\omega_{32}(JE) + \omega_{13}(JE)\,\omega_{32}(E) \\ &= g(AE, E)\,g(AJE, JE) - g(AJE, E)\,g(AE, JE) \\ &\overset{(\diamond)}{=} \det(A) = K_F\ , \end{aligned}$$

wobei das mit $(\diamond)$ gekennzeichnete Gleichheitszeichen aus der Tatsache folgt, dass (E, JE) ein positiv orientiertes ONB-Feld auf G ist. □

Aufgabe. Gaußsche Krümmung in orthogonalen und konformen Koordinaten. Es sei (G, g) ein 2-dimensionales Riemannsches C^2-Gebiet.

(a) Die Riemannsche Metrik g sei *orthogonal*, das soll heißen, dass es zwei C^2-Funktionen $f, h : G \to \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall p \in G,\ u, v \in \mathbb{R}^2\ :\ g_p(u, v) = f(p)^2 \cdot u_1 \cdot v_1 + h(p)^2 \cdot u_2 \cdot v_2$$

gibt. Dann zeige man:

$$E := (1/f) \cdot e_1$$

ist bezüglich g ein Einheitsvektorfeld auf G, die Zusammenhangsform ζ der Konfiguration (G, g, E) ist durch

$$\zeta = -\frac{f_y}{h} \cdot dx + \frac{h_x}{f} \cdot dy$$

gegeben, und die Krümmung K des Riemannschen Gebiets (G, g) ist durch

$$K = -\frac{\left(\frac{h_x}{f}\right)_x + \left(\frac{f_y}{h}\right)_y}{f \cdot h}$$

gegeben. Dabei bezeichnet der Index $_x$ bzw. $_y$ die partielle Ableitung nach x bzw. y.

(b) Ist die Riemannsche Metrik g *konform*, das soll heißen, dass es eine C^2-Funktion $\lambda : G \to \mathbb{R}_+$ mit

$$g = \lambda^2 \cdot \langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$$

gibt, so hat das Riemannsche Gebiet (G, g) die Krümmung

$$K = -\frac{1}{\lambda^2} \cdot \triangle(\ln \circ \lambda)\ .$$

Dabei bezeichnet $\triangle$ den *Laplace-Operator*, d.h. $\triangle f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

(c) Man verwende (a), um erneut zu zeigen, dass die Gaußsche Krümmung der Rotationsflächenparametrisierung zur nach der Bogenlänge parametrisierten Profilkurve $\alpha = (r, b)$ gleich $K = -(r''/r) \circ x_1$ ist.

(d) Man verwende (b), um zu zeigen, dass der hyperbolische Raum $\mathbb{H}$ (siehe Beispiel 2 in Abschnitt 7.4 und das Beispiel in Abschnitt 7.6) die konstante Krümmung -1 besitzt.

Mitteilung. Der Vollständigkeit halber gebe ich auch an, wie man die Krümmung eines Riemannschen Gebiets (G, g) mittels seiner Christoffelsymbole Γ_{ik}^{j} berechnen kann:

$$g_{11} \cdot K = \tfrac{\partial}{\partial x_2}\Gamma_{11}^2 - \tfrac{\partial}{\partial x_1}\Gamma_{21}^2 + \Gamma_{21}^2 \cdot (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2) + \Gamma_{11}^2 \cdot (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{21}^1) \ .$$

Theorema egregium. (Gauß 1827) Es seien (G, g) und $(\widetilde{G}, \widetilde{g})$ zwei 2-dimensionale Riemannsche Gebiete mit der Krümmung K bzw. $\widetilde{K}$. Dann gilt für jede C^3-Isometrie $\varphi : (G, g) \to (\widetilde{G}, \widetilde{g})$

$$K = \widetilde{K} \circ \varphi \ .$$

Beweis. Wir wissen $\omega = \varphi^*\widetilde{\omega}$ und $\zeta = \varphi^*\widetilde{\zeta}$. Hieraus ergibt sich

$$-K \cdot \omega = \underline{\mathrm{d}}\zeta = \underline{\mathrm{d}}(\varphi^*\widetilde{\zeta}) = \varphi^*(\underline{\mathrm{d}}\widetilde{\zeta}) = \varphi^*(-\widetilde{K} \cdot \widetilde{\omega}) = -(\widetilde{K} \circ \varphi) \cdot \varphi^*\widetilde{\omega} = -(\widetilde{K} \circ \varphi) \cdot \omega$$

und damit die Behauptung. □

Das Theorema egregium ist das zentrale Ergebnis der berühmten Arbeit *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (Allgemeine Untersuchung von gekrümmten Flächen) von Gauss aus dem Jahre 1827. 12 Jahre später hat F. A. Minding eine gewisse Umkehrung dieses Satzes gefunden.

Satz von Minding. Sind (G, g) und $(\widetilde{G}, \widetilde{g})$ zwei 2-dimensionale Riemannsche C^r-Gebiete mit $r \geq 2$, und haben diese beiden Riemannschen Gebiete dieselbe *konstante* Krümmung, so existiert zu jedem Punktepaar $(p_0, \widetilde{p}_0) \in G \times \widetilde{G}$ eine C^{r-1}-Isometrie φ von einer Umgebung U von p_0 in G auf eine Umgebung $\widetilde{U}$ von $\widetilde{p}_0$ in $\widetilde{G}$ mit $\varphi(p_0) = \widetilde{p}_0$.

Der Satz von Minding zeigt unter anderem, dass jede Fläche mit verschwindender Gaußscher Krümmung lokal isometrisch zur Ebene ist. Er zeigt ebenfalls, dass die Pseudosphäre (siehe Aufgabe 2 in Abschnitt 6.6) *lokal* isometrisch zum hyperbolischen Raum $\mathbb{H}$ (siehe Aufgabe (d) in diesem Abschnitt) ist. Jedoch kann man zeigen, dass der hyperbolische Raum *global* nicht durch eine Flächenparametrisierung realisiert werden kann.

7.8 Der Fundamentalsatz der Flächentheorie

Die Codazzi-Gleichung. Es sei A der Formoperator einer singularitätenfreien Flächenparametrisierung $F : G \to \mathbb{E}$ einer singularitätenfreien C^r-Fläche mit $r \geq 3$ und $X, Y : G \to \mathbb{R}^2$ zwei C^1-Vektorfelder auf G. Bezeichnen wir mit AX und $\nabla_X Y$ die Vektorfelder

$$AX : p \mapsto A_p X_p \quad \text{bzw.} \quad \nabla_X Y : p \mapsto \nabla_{(p, X_p)} Y \ ,$$

so gilt

$$\nabla_X(AY) - A(\nabla_X Y) = \nabla_Y(AX) - A(\nabla_Y X) \ .$$

In der Literatur erscheint diese Symmetrie-Beziehung des Formoperators auch unter dem Namen Gleichung von Mainardi-Codazzi; sie wurde unabhängig voneinander 1856 von Mainardi und 1860 von Codazzi gefunden. – Den folgenden Satz publizierte 1867 O. Bonnet.

Der Fundamentalsatz der Flächentheorie. Es sei G ein Gebiet von $\mathbb{R}^2$. Dann gilt:

(a) Sind F, $\widetilde{F} : G \to \mathbb{E}^3$ Parametrisierungen zweier singularitätenfreier C^3-Flächen und sind die Maßtensoren und Formoperatoren dieser beiden Parametrisierungen gleich, so sind die beiden Flächen zueinander kongruent, d.h.: Es existiert eine Isometrie Φ des $\mathbb{E}^3$, so dass $\widetilde{F} = \Phi \circ F$ ist. [Siehe Abschnitt 6.3.]

(b) Es sei $g : G \to L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ eine Riemannsche C^2-Metrik und $A : G \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ ein C^1-Tensorfeld vom Typ (1,1), welches mit g folgendermaßen verbunden ist:

 (i) für jedes p ist A_p bezüglich g_p selbstadjungiert,
 (ii) $\det(A)$ ist die Krümmung des Riemannschen Gebietes (G, g) ,
 (iii) A erfüllt die Codazzi-Gleichung bezüglich der Levi-Civita-Ableitung von (G, g).

 Ist G einfach zusammenhängend, so existiert eine Parametrisierung einer singularitätenfreien C^3-Fläche, deren Maßtensor und Formoperator gerade g bzw. A sind.

Diesen Satz sollte man mit dem Hauptsatz der ebenen Kurventheorie (siehe Abschnitt 3.2) vergleichen. Dem Maßtensor g und dem Formoperator A entsprechen in der ebenen Kurventheorie die Bahngeschwindigkeit v_α und die orientierte Krümmung $\varkappa_\alpha$. Dass in der Flächentheorie für die Existenzaussage (b) zusätzliche Bedingungen gefordert werden müssen, sollte nicht wundern. Zur Bestimmung der fraglichen Parametrisierung muss nämlich eine partielle Differentialgleichung gelöst werden; und bei partiellen Differentialgleichungen existieren nur dann Lösungen, wenn die Gleichungen eine „Integrabilitätsbedingung“ erfüllen, in der vorliegenden Situation gerade die Bedingungen (ii) – (iii).

Aufgabe. Es sei $F : G \to \mathbb{E}^3$ eine singularitätenfreie C^3-Flächenparametrisierung mit Formoperator A. Hierzu seien die 1-Formen ω_{ik} wie in der „Anwendung“ in Abschnitt 7.7 definiert. Aus dem Beweis der Krümmungsgleichung von Gauss (siehe Abschnitt 7.7) weiß man, dass $\det(A) \cdot \omega = -\omega_{13} \wedge \omega_{32}$ ist. Man zeige nun, dass die Codazzi-Gleichung zu den Gleichungen

$$\underline{d}\omega_{13} \;=\; \omega_{12} \wedge \omega_{23} \quad \text{und} \quad \underline{d}\omega_{23} \;=\; \omega_{21} \wedge \omega_{13} \tag{$*$}$$

äquivalent ist. (Man beachte, dass $\omega_{12} = -\omega_{21}$ die Zusammenhangsform der Konfiguration (G, g, E) ist.)

Bemerkung. Teil (b) des Fundamentalsatzes der Flächentheorie wirft unmittelbar die Frage auf, ob jedes einfach zusammenhängende, 2-dimensionale Riemannsche Gebiet (G, g) von einer Flächenparametrisierung erzeugt werden kann. Diese Frage wurde erstmals von L. Schlaefli um 1872 formuliert. In zwei Arbeiten mit dem gleichlautenden Titel *“Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien”* (vgl. Annales Soc. Pol. Math. **5** bzw. **6**, 1926 bzw. 1927) haben M. Janet und E. Cartan mit unterschiedlichen Methoden eine Antwort gegeben: Sie finden, dass das Problem *lokal* eine Lösung besitzt, allerdings unter der sehr starken Voraussetzung, dass die Riemannsche Metrik reell-analytisch (d.h. lokal in Potenzreihen entwickelbar) ist. Mit der letzten Aufgabe haben wir Cartans Beweismethode eingeleitet. Wie hat man danach zu verfahren? Bezeichnen ω und K die Volumenform bzw. Krümmung von (G, g), so hat man Differentialformen ω_{13} und ω_{23} zu suchen, die obige Gleichungen $(*)$ und $K \cdot \omega =$

$-\omega_{13} \wedge \omega_{32}$ erfüllen. *Wenn das möglich ist*, so kann man mithilfe eines Einheitsvektorfeldes E des Riemannschen Gebietes (G, g) den Operator $A := \omega_{13} \otimes E + \omega_{23} \otimes JE$ definieren (vgl. das „Anwendung“ aus 7.7); dieser erfüllt dann nach obiger Aufgabe die Voraussetzungen des Teiles (b) des Fundamentalsatzes der Flächentheorie, weswegen also das Riemannsche Gebiet von einer Flächenparametrisierung erzeugt wird.

Im Jahr 1950 konnten Ph. Hartman/A. Wintner in der Arbeit *“On the embedding problem in differential geometry”* (Amer. J. Math. **72**, 1950) die lokale Lösbarkeit des Problems für Riemannsche C^3-Metriken beweisen, allerdings unter der Zusatzvoraussetzung, dass $K(p) \neq 0$ ist oder dass K in einer Umgebung von p identisch verschwindet. (Der letzte Teil wird bereits durch den Satz von Minding abgedeckt.) Tatsächlich sind die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen von Hartman/Wintner noch etwas schwächer als C^3.