# Analysis III
## 7. Übung

Martin Schmidt
Volker Eing 15. Oktober 2018

(Abgabe: A5, C, Eingang Ost, Postfach 46236, Montag, 22. Oktober 2018 bis 16 Uhr)

**1. Noch einmal über Untermannigfaltigkeiten.**

Es seien $X$ , $Y$ Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung von konstantem Rang. Dann ist bekanntlich für jedes $y \in f[X]$ das Urbild $M := f^{-1}[\{y\}]$ eine Untermannigfaltigkeit von $X$ . Zeige, dass für $x \in M$ gilt:

$$T_x M = \ker T_x(f) \ . \qquad \textit{(8 Punkte)}$$

[Tipp. Im Beweis von Korollar 1.46 kann man nachlesen wie's gemacht wird. – Alternative Beweismöglichkeit: Ist $v \in T_x M$ , so gibt es nach Definition eine glatte Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = v$ . Dann ist $f \circ \gamma = \ldots$ und deswegen ... .]

**2. Die Tangentialbündel der Sphären der Dimension $\leq 3$ .**

In dieser Aufgabe untersuchen wir das Tangentialbündel der $n$-dimensionale Sphäre

$$S^n := \{\, (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\big|\, x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1 \,\}$$

**(a)** *Zeige*, dass $S^n$ eine $n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, und dass für $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n$ gilt:

$$T_x S^n = \{\, v \in \mathbb{R}^{n+1} \,\big|\, v \cdot x = 0 \,\} \ . \qquad \textit{(3 Punkte)}$$

**(b)** *Finde* einen nullstellenfreien Schnitt des Tangentialbündels $TS^1$ , und *folgere*, dass das Vektorraumbündel $TS^1$ trivial ist. *(3 Punkte)*

**(c)** *Zeige*, dass das Vektorraumbündel $TS^3$ trivial ist. *(6 Punkte)*

[Tipp. Man benutze Lemma 1.55, und untersuche die folgenden Abbildungen auf $S^3$ :

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) := (-x_2, x_1, x_4, -x_3) \ , \quad f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) := (-x_3, -x_4, x_1, x_2)$$
$$\text{und} \quad f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) := (-x_4, x_3, -x_2, x_1) \ .$$

*Bemerkung.* Identifiziert man $S^3$ mit der Einheitssphäre im Raum $\mathbb{H}$ der *Quaternionen*, so entspricht die Anwendung von $f_1$ , $f_2$ bzw. $f_3$ mit der Multiplikation mit der rein-imaginären Einheitsquaternione $i$ , $j$ bzw. $k = ij$ .]

**(d)** Sei $x_N := (0, 0, 1) \in S^2$ und $x_S := (0, 0, -1) \in S^2$ . Mithilfe der stereographischen Projektion *bestimme* man lokale Trivialisierungen von $TS^2$ über $U_N := S^2 \setminus \{x_N\}$ und über $U_S := S^2 \setminus \{x_S\}$ , und *berechne* die Übergangsfunktion $\phi_{U_N, U_S} : S^2 \setminus \{x_N, x_S\} \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ . *(10 Punkte)*

*Bemerkung.* Man kann zeigen, dass das Vektorraumbündel $TS^2$ <u>nicht</u> trivial ist.

**3. Über triviale und nicht-triviale Vektorbündel.**

**(a) Das Tangentialbündel eines Vektorraums.** Es sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum. *Zeige,* dass das Tangentialbündel $TV$ trivial ist, und zwar mit der Faser $V$.

*(4 Punkte)*

**(b) Geradenbündel über $\mathbb{R}$.** *Beweise:* Jedes *Geradenbündel*, d.h. Vektorraumbündel der Faserdimension $1$, über einem offenen Intervall $(a,b) \in \mathbb{R}$ ist trivial. *(8 Punkte)*

[Tipp. Es sei $(E,(a,b),\pi)$ ein Geradenbündel über $(a,b)$ und $t_0 \in (a,b)$ fest. Man zeige zunächst, dass es ein $\varepsilon > 0$ mit $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \subset (a,b)$ gibt, so dass es einen nullstellenfreien Schnitt $f_0$ von $E$ auf $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ gibt. Dann betrachte man

$$J := \left\{ t \in (a,b) \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Es existiert eine Fortsetzung von } f_0 \text{ zu einem nullstellen-} \\ \text{freien Schnitt von } E \text{ auf } (t, t_0+\varepsilon) \text{ bzw. auf } (t_0-\varepsilon, t) \end{array} \right\},$$

wobei in der Definition von $J$ das Intervall $(t, t_0+\varepsilon)$ oder $(t_0-\varepsilon, t)$ zu wählen ist, je nachdem, ob $t \le t_0$ oder $t > t_0$ ist. Man zeige, dass $J \neq \varnothing$ ist, und dass $J$ in $(a,b)$ offen und abgeschlossen ist.]

**(c) Ein nicht-triviales Geradenbündel über $S^1$.** Auf dem Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ fixieren wir ein Paar von Antipodenpunkten $p \in S^1$ und $-p \in S^1$. Dann ist mit

$$U_1 := S^1 \setminus \{p\} \quad \text{und} \quad U_2 := S^1 \setminus \{-p\}$$

$(U_1, U_2)$ eine offene Überdeckung von $S^1$, und $U_1 \cap U_2$ zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten $V_+$ und $V_-$.

Man *zeige*, dass indem man die Konstruktion aus Satz 1.52 auf die Überdeckung $(U_1, U_2)$ von $S^1$, $F := \mathbb{R}$ und die Abbildung

$$\phi_{U_1,U_2} : U_1 \cap U_2 \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}),\ x \mapsto \begin{cases} \mathrm{id}_{\mathbb{R}} & \text{für } x \in V_+ \\ -\mathrm{id}_{\mathbb{R}} & \text{für } x \in V_- \end{cases}$$

anwendet, man ein Geradenbündel $(E, S^1, \pi)$ über $S^1$ erhält, das <u>nicht</u> trivial ist. $E$ hat die Gestalt eines (unendlich ausgedehnten) *Möbiusbandes.* *(8 Punkte)*

[Tipp zum Nachweis der Nicht-Trivialität von $E$: Man nehme an, dass $E$ einen nullstellenfreien Schnitt $f$ besitze, dann untersuche man $f$ mithilfe der beiden lokalen Trivialisierungen von $E$ auf $U_1$ bzw. $U_2$. Vielleicht möchte man dazu den Zwischenwertsatz auf eine auf $V_+$ oder $V_-$ definierte Funktion anwenden; das geht, weil $V_\pm$ diffeomorph zu einem reellen Intervall ist.]