Analysis III
5. Übung

Martin Schmidt
Volker Eing

01. Oktober 2018

(Abgabe: A5, C, Eingang Ost, Postfach 46236, Montag, 08. Oktober 2018 bis 16 Uhr)

1. Derivationen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Wir können Ω als Untermannigfaltigkeit vom $\mathbb{R}^n$ betrachten.
Wir definieren eine *Derivation* im algebraischem Sinne als eine Abbildung

$$D : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega),$$

die linear ist und die Leibniz Regel für $f, g \in C^\infty(\Omega)$

$$D(fg) = fD(g) + D(f)g$$

erfüllt.
(*Bemerkung:* Man gewinnt die Definition der Derivation an einer Stelle x aus der Vorlesung zurück, wenn man $D(f)$ auswertet an der Stelle x. Im Vorlesungsskript ist hierbei die gleiche Notation $D(f)$ zu finden, allerdings ist im obigen Sinne dann $D(f)(x)$ gemeint.)
Zeige, dass es eine glatte Abbildung $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ gibt, mit

$$D(f) = F \cdot \nabla f.$$

(*Tipp:* Verwende den Satz von Hadamard und Bohnenblust) *(10 Punkte)*

2. Zweitabzählbar.

Sei X ein toplogischer Raum. *(Zur Erinnerung:)* X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, wenn X eine höchstens abzählbare Basis der Topologie hat. Dabei ist eine Basis der Topologie ein Teilmengensystem $\mathscr{B} \subset \mathscr{O}$ der Toplogie $\mathscr{O}$ von X, sodass sich jede offene Menge U als Vereinigung von beliebig vielen Mengen aus $\mathscr{B}$ schreiben lässt.

Zeige

(a) Erfüellt X das zweite Abzählbarkeitsaxiom so ist X

- **(i)** Lindelöf.
- **(ii)** separabel. *(10 Punkte)*

(b) Ist X ein metrischer Raum, so sind äquivalent:

- **(i)** X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.
- **(ii)** X ist Lindelöf
- **(iii)** X ist separabel. *(10 Punkte)*

Für die folgenden zwei Aufgaben verwende: Sei $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltikgeiten und sei $y \in Y$ ein regulärer Wert, das heißt, dass das Differential von f an jeder Stelle im Urbild von y surjektiv ist. Dann ist $f^{-1}(y)$ eine Untermannigfaltigkeit von X.

3. Speziell.

Betrachte die Menge

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) := \left\{ A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \det(A) = 1 \right\}.$$

aller reelen $2 \times 2-$Matrizen mit Determinante 1 und fasse sie als Teilmenge des vierdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{M}^2$ aller 2×2-Matrizen auf. Zeige

(a) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist eine eingebette Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{M}^2$.

(b) Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(x) & 0 \\ 0 & \exp(-x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist eine Parametrisierung.

Bestimme das Bild vom Differential von f im Punkt $0 \in \mathbb{R}^3$. *(15 Punkte)*

4. Submersiv.

Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^{n+1} &\to \mathbb{R} \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto x_0^2 + \dots + x_n^2 \end{aligned}$$

Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ ist die obige Abbildung eine Submersion? Für diese Werte bestimme man die zugehörige Untermannigfaltigkeit vom $\mathbb{R}^{n+1}$. *(5 Punkte)*