Analysis III
3. Übung

Martin Schmidt
Volker Eing

17. September 2018

(Abgabe: A5, C, Eingang Ost, Postfach 46236, Montag, 24. September 2018 bis 16 Uhr)

1. Regulär.

Sei X topologischer Raum. Zeige, dass abgeschlossene Teilmengen von kompakten Mengen selbst wieder kompakt sind.

Sei X ein Hausdorffraum. Zeige, dass jede kompakte Menge auch abgeschlossen ist.

Sei nun X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Zeige, dass X regulär ist, d.h. dass jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ und jeder Punkt $x \notin A$ durch offene Mengen getrennt werden können. Genauer: es existieren offene Umgebungen U um A und V um x, sodass $U \cap V = \emptyset$.

(10 Punkte)

2. Lokalendlich.

Sei X eine Mannigfaltigkeit. Zeige, dass eine abzählbare, lokalendliche Familie von offenen, relativ kompakten Karten gibt, die M überdecken. Dabei heisst eine Famile von Mengen “lokalendlich”, wenn jede kompakte Menge nur endlich viele Mengen dieser Famile schneidet.

(10 Punkte)

3. Vertragen diese hier sich?

Sei $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis. Erkläre die folgenden vier Karten auf S^1:

$$\begin{aligned}\varphi_\pm : \{(x,y) \in S^1 \,|\, \pm\, y > 0\} &\to \mathbb{R}\\ (x,y) &\mapsto x\\ \psi_\pm : \{(x,y) \in S^1 \,|\, \pm\, x > 0\} &\to \mathbb{R}\\ (x,y) &\mapsto y.\end{aligned}$$

Sind diese Karten verträglich mit den stereographischen Projektionen aus der Vorlesung?

(15 Punkte)

4. Kompakt.

Seien X und Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeige, dass das Bild $f(A)$ für jede kompakte Teilmenge $A \subset X$ selbst kompakt ist.

(7 Punkte)

5. Eine Zerlegung.

Betrachte $X := (0,4)$ als 1−dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann sind

$$U_1 := (0,2), \quad U_2 := (1,3) \quad \text{und} \quad U_3 := (2,4)$$

offene Teilmengen von X, die gemeinsam eine offene Überdeckung von X bilden.

Man finde eine dieser Überdeckung angepasste Zerlegung der Eins in folgendem Sinne: Man bestime Funktionen $f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(X)$ mit

$$0 \leq f_k \leq 1, \quad \operatorname{supp}(f_k) \subset U_k \quad \text{für} \quad k \in \{1,2,3\}$$

(wobei $\operatorname{supp}(f_k) := \overline{\{x \in X \mid f_k(x) \neq 0\}}$) und

$$f_1 + f_2 + f_3 = 1.$$

(8 Punkte)