Analysis III
9. Übung

Martin Schmidt
Volker Eing

29. Oktober 2018

(Abgabe: A5, C, Eingang Ost, Postfach 46236, Montag, 05. November 2018 bis 16 Uhr)

1. Die Lieklammer im $\mathbb{R}^n$.

(a) Es seien $F, G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zwei Vektorfelder auf $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass dann gilt:

$$[F, G](x) = G'(x) \cdot F(x) - F'(x) \cdot G(x) \ .$$ *(8 Punkte)*

(b) Wir betrachten nun drei glatte Vektorfelder auf $\mathbb{R}^4$, deren Einschränkungen auf $\mathbb{S}^3$ schon eine Rolle spielten:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= (-x_2, x_1, x_4, -x_3) \ , \\ G(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= (-x_3, -x_4, x_1, x_2) \\ \text{und} \quad H(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= (-x_4, x_3, -x_2, x_1) \ . \end{aligned}$$

(i) Berechne $[F, G]$, $[G, H]$ und $[F, H]$. *(6 Punkte)*

(ii) Zeige, dass in dieser Situation die folgende Gleichung, die sogenannte *Jacobi-Identität*, erfüllt ist:

$$[F, [G, H]] + [G, [H, F]] + [H, [F, G]] = 0 \ .$$ *(3 Punkte)*

2. Rechenregeln für die Lieklammer. Es sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

(a) Zeige: Die Lieklammer auf $\mathrm{Vec}^\infty(X)$ ist $\mathbb{R}$-bilinear, schief-symmetrisch (d.h. für $F, G \in \mathrm{Vec}^\infty(X)$ gilt $[G, F] = -[F, G]$), und für $F, G, H \in \mathrm{Vec}^\infty(X)$ gilt die *Jacobi-Identität*

$$[F, [G, H]] + [G, [H, F]] + [H, [F, G]] = 0 \ .$$ *(6 Punkte)*

[Tipp. Will man für Vektorfelder $F_1, F_2 \in \mathrm{Vec}^\infty(X)$ die Gleichung $F_1 = F_2$ beweisen, genuegt es die Gleichung $\theta_{F_1} = \theta_{F_2}$ zu zeigen.]

(b) Es sei $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von X auf einer offenen Teilmenge $U \subset X$. Dann betrachten wir für $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Vektorfelder $F_i \in \mathrm{Vec}^\infty(U)$ mit

$$F_i(x) = T_x(\phi)^{-1}(e_i) \ ,$$

wobei $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ den i-ten Standardeinheitsvektor des $\mathbb{R}^n$ bezeichne.

Man zeige, dass für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: $[F_i, F_j] = 0$. *(7 Punkte)*

Bemerkung. Diese Aussage ist der Grund, warum einem in der Differentialrechnung auf dem $\mathbb{R}^n$ (Analysis II) keine Lieklammern begegnen. Wir versichern: In der Analysis auf Mannigfaltigkeiten spielen Lieklammern eine wesentliche Rolle.

3. Kommutativität von Flüssen.

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ Konstanten und die Vektorfelder $F, G \in \mathrm{Vec}^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ gegeben durch

$$F(x_1, x_2, x_3) = (1, x_3, -x_2) \quad \text{und} \quad G(x_1, x_2, x_3) = (a, b, c)\,.$$

(a) Bestimme die Flüsse ψ_F und ψ_G von F bzw. G, und bestimme, für welche Wahlen der Konstanten a, b, c die beiden Flüsse miteinander kommutieren, d.h. dass für alle $t, s \in \mathbb{R}$

$$\psi_F(t, \psi_G(s, x)) = \psi_G(s, \psi_F(t, x))$$

gilt. *(8 Punkte)*

(b) Berechne $[F, G]$, und bestimme, für welche Wahlen der Konstanten a, b, c die Gleichung $[F, G] = 0$ gilt. *(4 Punkte)*

4. Flüsse von Vektorfeldern.

(a) Es sei F das glatte Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$, das durch

$$F(x, y) = (y, -x)$$

gegeben ist. Bestimme den maximalen Fluss von F. *(5 Punkte)*

[Tipp. Es ist hilfreich, $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ zu identifizieren, und dann F mit Hilfe der komplexen Multiplikation umzuschreiben.]

(b) Es sei $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ die 2-Sphäre und $a \in \mathbb{R}$. Wir definieren $F : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$F(x, y, z) = (a\,y, -a\,x, 0)\,.$$

Zeige, dass F ein Vektorfeld auf $\mathbb{S}^2$ definiert. *(3 Punkte)*