Analysis III
6. Übung

Martin Schmidt
Volker Eing

08. Oktober 2018

(Abgabe: A5, C, Eingang Ost, Postfach 46236, Montag, 15. Oktober 2018 bis 16 Uhr)

1. Über Untermannigfaltigkeiten und Einbettungen.

(a) Man untersuche mit Beweis, für genau welche $t \in \mathbb{R}$

$$A := \{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_1^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = t \}$$

eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. *(11 Punkte)*

[Nicht vergessen: Falls für ein $t \in \mathbb{R}$ die Voraussetzungen eines Satzes aus Abschnitt 1.6 *nicht* erfüllt sind, muss trotzdem untersucht werden, ob das entsprechende A eine Mannigfaltigkeit ist oder nicht.]

(b) Sei $S := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 3 \}$ und $f : S \to \mathbb{R}^5$ definiert durch

$$f(x, y, z) = \Big(xy, xz, yz, \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2), \tfrac{1}{2\sqrt{3}}(x^2 + y^2 - 2z^2) \Big) .$$

(i) Zeige, dass f eine Immersion ist. *(5 Punkte)*

(ii) Zeige, dass für $(x, y, z), (\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \in S$ gilt:

$$f(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = f(x, y, z) \iff (\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = \pm(x, y, z) . \qquad (*)$$

Daher ist $f : S \to \mathbb{R}^5$ keine Einbettung. *(7 Punkte)*

[Tipp. Man betrachte die komplexen Zahlen $w := x + iy$ und $\widetilde{w} := \widetilde{x} + i\widetilde{y}$, und untersuche die Gleichung $w^2 - \widetilde{w}^2 = 0$.]

Bemerkung. Identifiziert man in S jeweils die Antipodenpunkte (d.h. $\pm(x, y, z)$) miteinander, so erhält man den sogenannten 2-*dimensionalen reell-projektiven Raum* $\mathbb{RP}^2$. Aus $(*)$ ergibt sich, dass f eine *injektive* Immersion $\widetilde{f} : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^5$ induziert, von der man zeigen kann, dass es sich tatsächlich sogar um eine Einbettung handelt. $\widetilde{f}$ ist eine Variante der sogenannten *Veronese-Einbettung*.

2. Über Karten, die an Abbildungen von konstantem Rang angepasst sind.

Es seien X und Y Mannigfaltigkeiten der Dimension n bzw. m und $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung von konstantem Rang r.

Zeige: Für jedes $p \in X$ existieren Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ von X und $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ von Y mit $p \in U$, $f[U] \subset V$, $\phi(p) = 0$ und $\psi(f(p)) = 0$, so dass $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ gegeben ist durch

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi[U] \to \mathbb{R}^m,\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-r}) . \qquad (10\ Punkte)$$

[Tipp. Um die Bedingung $f[U] \subset V$ zu erreichen, wähle man zunächst irgendwelche Karten $\phi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ von X um p und $\psi_1 : V_1 \to \mathbb{R}^m$ von Y um $f(p)$, und schränke dann ϕ_1 auf $f^{-1}[V_1] \cap U_1$ ein. Im Weiteren wende man Satz 1.43 an, sowie die Aussage aus der Linearen Algebra, dass jede lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vom Rang r konjugiert zu $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ ist.]

Bemerkung. Diese Aussage zeigt, dass Abbildungen von konstantem Rang *lokal* die Komposition von einer Submersion mit einer Immersion sind. Aus diesem Grund nennt man sie manchmal auch *Subimmersionen*.

3. Ein Differenzierbarkeitstest.

Es seien X, Y und Z Mannigfaltigkeiten, und $f : Y \to Z$ eine Immersion.

Zeige, dass für jede *stetige* Abbildung $g : X \to Y$ gilt: Wenn $f \circ g$ glatt ist, so auch g. *(8 Punkte)*

[Tipp. Aufgabe 2.]

4. Über Schnitte von Vektorbündeln.

Es sei (E, B, π) ein differenzierbares $\mathbb{K}$-Vektorraumbündel, $f, f_1, f_2 : B \to E$ seien glatte Schnitte von (E, B, π), und $g : B \to \mathbb{K}$ sei eine glatte Funktion. Zeige:

(a) Der *Nullschnitt* $O : B \to E$, $b \mapsto 0 \in \pi^{-1}[\{b\}]$ ist ein glatter Schnitt. *(2 Punkte)*

(b) $f_1 + f_2$ und $g \cdot f$ sind glatte Schnitte von (E, B, π). *(2 Punkte)*

(c) Das Bild $f[B]$ ist eine Untermannigfaltigkeit von E. *(5 Punkte)*