Analysis III
10. Übung

Martin Schmidt
Volker Eing

05. November 2018

(Abgabe: A5, C, Eingang Ost, Postfach 46236, Montag, 12. November 2018 bis 16 Uhr)

1. Schnitte von Untervektorraumbündeln der Dimension 1.

Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

(a) Sei $F \in \mathrm{Vec}^\infty(X)$, $f, g \in C^\infty(X;\mathbb{R})$. Zeige, dass

$$\theta_{f\cdot F}(g) = f \cdot \theta_F(g)$$

gilt. (Also sind Vektorfelder sogar linear über $C^\infty(X;\mathbb{R})$.)

(b) Zeige für $F, G \in \mathrm{Vec}^\infty(X)$ und $f, g \in C^\infty(X;\mathbb{R})$, dass

$$[fF, gG] = f \cdot g[F,G] + f \cdot \theta_F(g)G - g \cdot \theta_G(f)F$$

gilt.

(c) Sei nun E ein 1-dimensionales Untervektorraumbündel von TX. Dann gilt für alle Schnitte F, G von E, dass auch $[F,G]$ ein Schnitt von E ist. Hierbei ist die Lieklammer als Kommutator bezüglich der Vektorfelder $\mathrm{Vec}^\infty(X)$ zu verstehen.

(Jeweils 3 Punkte)

2. Über Integralkurven.

Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, F ein glattes Vektorfeld auf X, $x_0 \in X$ und $\gamma : J \to X$ die maximale Integralkurve von F mit $\gamma(0) = x_0$ (siehe Satz 2.7).

Zeige:

(a) *Entweder* ist γ konstant, *oder* γ ist injektiv, *oder* γ ist periodisch, letzteres bedeutet: Es gilt $J = \mathbb{R}$, γ ist nicht konstant, aber es gibt mindestens eine Zahl $p > 0$ (eine *Periode* von γ), so dass

$$\gamma(t+p) = \gamma(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

gilt. Man beachte, dass p nicht eindeutig bestimmt ist. *(6 Punkte)*

(b) γ ist genau dann konstant, wenn $F(x_0) = 0$ gilt. *(2 Punkte)*

(c) Ist γ periodisch, so gibt es unter den Perioden von γ eine *minimale Periode* $p_0 > 0$, d.h. p_0 ist eine Periode von γ, so dass es keine andere Periode p von γ mit $0 < p < p_0$ gibt. Dann ist $\gamma|[0,p_0)$ injektiv, und die Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \to X$, die durch

$$f(\cos(t), \sin(t)) = \gamma\left(\frac{p_0}{2\pi} \cdot t\right) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

charakterisiert wird (dabei fassen wir den Kreis $\mathbb{S}^1$ als die Menge $\mathbb{S}^1 = \{\, (\cos(t), \sin(t)) \,|\, t \in \mathbb{R} \,\} \subset \mathbb{R}^2$ auf), ist eine Einbettung mit $f[\mathbb{S}^1] = \gamma[\mathbb{R}]$. Also ist das Bild $\gamma[\mathbb{R}]$ eine Untermannigfaltigkeit von X. *(4 Punkte)*

(d) Ist γ injektiv, und X außerdem kompakt, so ist $J = \mathbb{R}$ und $\gamma[\mathbb{R}]$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt in X. Daher ist die injektive Immersion $\gamma : \mathbb{R} \to X$ in diesem Fall sicher *keine* Einbettung, und $\gamma[\mathbb{R}]$ *keine* Untermannigfaltigkeit von X.

(6 Punkte)

3. Integralkurven auf Kreis und Torus.

Sei $\mathbb{S}^1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$ der Einheitskreis. Aus Aufgabe 2(b) Zettel 7 wissen wir, dass das Tangentialbündel $T\mathbb{S}^1$ von $\mathbb{S}^1$ trivial ist, und dass

$$\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to T\mathbb{S}^1, \ \big(s, (x,y)\big) \mapsto s \cdot (-y, x)$$

eine globale Trivialisierung von $T\mathbb{S}^1$ ist (hierbei wird für $(x,y) \in \mathbb{S}^1$ jeweils $T_{(x,y)}\mathbb{S}^1$ mit $\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \langle v, (x,y) \rangle = 0 \} = \mathbb{R} \cdot (-y, x)$ identifiziert, siehe Aufgabe 2(a) Zettel 7).

Für $\alpha > 0$ betrachten wir das nullstellenfreie, glatte Vektorfeld

$$F_\alpha : \mathbb{S}^1 \to T\mathbb{S}^1, \ (x,y) \mapsto \psi\big(\alpha, (x,y)\big)$$

und die maximale Integralkurve $\gamma_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ von F_α mit $\gamma_\alpha(0) = (1,0)$.

(a) Zeige, dass γ_α durch

$$\gamma_\alpha(t) = \big(\cos(\alpha \cdot t), \sin(\alpha \cdot t)\big)$$

gegeben ist; folgere, dass γ_α periodisch ist, und bestimme die minimale Periode von γ_α (siehe Aufgabe 2).

(5 Punkte)

Die 2-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ bezeichnet man als („flachen“) 2-Torus. Für $\alpha, \beta > 0$ betrachten wir das Vektorfeld

$$G_{\alpha,\beta} : \mathbb{T}^2 \to T\mathbb{T}^2, \ \big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) \mapsto \big(F_\alpha(x_1,y_1)\,,\ F_\beta(x_2,y_2)\big)\ .$$

Zeige:

(b) Die Kurve

$$\eta_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2, \ t \mapsto \big(\gamma_\alpha(t), \gamma_\beta(t)\big)$$

ist die maximale Integralkurve von $G_{\alpha,\beta}$ mit $\eta_{\alpha,\beta}(0) = \big((1,0),(1,0)\big) \in \mathbb{T}^2$.

(3 Punkte)

(c) Ist $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$, so ist $\eta_{\alpha,\beta}$ periodisch, und folglich $\eta_{\alpha,\beta}[\mathbb{R}]$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{T}^2$. Man bestimme die minimale Periode (siehe Aufgabe 2(c)) von $\eta_{\alpha,\beta}$. Das Bild eines derartigen $\eta_{\alpha,\beta}$ heißt *Torusknoten*.

(10 Punkte)

(d) Ist $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so ist $\eta_{\alpha,\beta}$ injektiv, und daher nach Aufgabe 2(d) $\eta_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$ sicher *keine* Einbettung.

(5 Punkte)