Kapitel 1

Der euklidische Raum

1.1 Der affine Raum

Definition. Ein (reeller) *n-dimensionaler affiner Raum* ist ein Tupel $(\mathbb{E}, \mathbb{V}, \varphi)$ bestehend aus einer Menge $\mathbb{E}$ (deren Elemente wir *Punkte* nennen), einem n-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{V}$ (dem sogenannten *Richtungsvektorraum* von $\mathbb{E}$) und einer Abbildung $\varphi : \mathbb{V} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, so dass die folgenden Axiome erfüllt sind:

(A0) $\varphi(0, p) = p$ für alle $p \in \mathbb{E}$

(A1) $\varphi(v + w, p) = \varphi(v, \varphi(w, p))$ für alle $p \in \mathbb{E}$ und $v, w \in \mathbb{V}$

(A2) $\forall p, q \in \mathbb{E}\ \exists! v \in \mathbb{V} \ : \ q = \varphi(v, p)$.

Das Axiom (A2) besagt in Worten: Von p aus erreicht man einen jeden Punkt $q \in \mathbb{E}$ durch *Antragen* eines ganz bestimmten Vektors $v \in \mathbb{V}$.

Für $v \in \mathbb{V}$ bezeichnen wir mit

$$\varphi_v : \mathbb{E} \to \mathbb{E},\ p \mapsto \varphi(v, p)$$

die *Translation* um v, und für $p \in \mathbb{E}$ bezeichnen wir

$$\varphi^p : \mathbb{V} \to \mathbb{E},\ v \mapsto \varphi(v, p) \ .$$

Bezeichnungen.

(a) Gilt $\varphi(v, p) = q$, so schreibt man üblicherweise auch $q = p + v$ und $v = q - p$. Man nennt $q - p$ den *Verbindungsvektor* von p nach q; er ist wegen des Axioms (A2) eindeutig bestimmt. Man beachte, dass $+$ und $-$ hier *nicht* für „Rechenoperationen“ stehen, und dass der Ausdruck $v + p$ keinen Sinn macht.

(b) Statt „$(\mathbb{E}, \mathbb{V}, \varphi)$ ist ein affiner Raum“ werden wir oft auch kurz sagen: „$\mathbb{E}$ ist ein affiner Raum“. Wir bezeichnen dann den Richtungsvektorraum von $\mathbb{E}$ mit $\mathbb{E}_L$. Wollen wir betonen, dass n die Dimension von $\mathbb{E}$ ist, schreiben wir auch $\mathbb{E}^n$ statt $\mathbb{E}$.

Beispiel. Jeder n-dimensionale Vektorraum V (z.B. $V = \mathbb{R}^n$) kann auf kanonische Weise als affiner Raum aufgefasst werden, nämlich mit $\mathbb{E} = V$, $\mathbb{E}_L = V$ und

$$\varphi : (v, w) \mapsto v + w \,.$$

Dieses Beispiel sollte man nicht zu sehr als Leitbild für den Umgang mit affinen Räumen verwenden, denn der Grund, warum wir uns mit affinen Räumen beschäftigen, ist gerade, dass wir den anschaulichen Raum mathematisch so modellieren wollen, dass Punkte und Vektoren (Richtungen) durch *unterschiedliche* mathematische Objekte dargestellt werden, um diese beiden Konzepte begrifflich besser auseinander halten zu können.

Rechenregeln. Sei $\mathbb{E}$ ein affiner Raum, $p, p_1, p_2, p_3, q_1, q_2 \in \mathbb{E}$ und $v, w \in \mathbb{E}_L$. Dann gilt:

(a) $p + 0 = p$

(b) $p + (v + w) = (p + v) + w$

(c) $q = p + v \iff p = q + (-v)$

(d) $p + v = q + w \implies (p = q \iff v = w)$ *(Eliminationsregel I)*
Insbesondere gilt: Die Abbildungen $\varphi_v : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ und $\varphi^p : \mathbb{E}_L \to \mathbb{E}$ sind Bijektionen.

(e) $p_2 - p_1 = q_2 - q_1 \implies (p_2 = q_2 \iff p_1 = q_1)$ *(Eliminationsregel II)*

(f) $(p_3 - p_2) + (p_2 - p_1) = p_3 - p_1$ *(Dreiecksregel)*

(g) $p_2 - p_1 = q_2 - q_1 \iff q_2 - p_2 = q_1 - p_1$ *(Parallelogrammregel)*

Beweis. (a) und (b) sind bloß Umformulierungen von (A0) bzw. (A1). *Zu (c).* Gilt $q = p + v$, so hat man nach (a),(b): $p = p + 0 = p + (v + (-v)) = (p + v) + (-v) = q + (-v)$. Die umgekehrte Implikation geht ganz genauso. *Zu (d).* Gilt neben $p + v = q + w$ auch $p = q$, so hat man $p + v = p + w$, woraus mit der Eindeutigkeitsaussage in (A2) folgt: $v = w$. Gilt umgekehrt $v = w$, so hat man $p + v = q + v = (p + (q - p)) + v = p + ((q - p) + v)$ und somit nach der zuvor bewiesenen Richtung $v = (q - p) + v$, d.h. $q - p = 0$ und somit $q = p + 0 = p$. *Zu (e).* Gilt neben $p_2 - p_1 = q_2 - q_1$ auch $p_2 = q_2$, so haben wir $q_1 = q_2 + (q_1 - q_2) = q_2 + (p_1 - p_2) = p_2 + (p_1 - p_2) = p_1$. Die umgekehrte Inplikation geht genauso. *Zu (f).* Es gilt $p_1 + ((p_3 - p_2) + (p_2 - p_1)) = (p_1 + (p_2 - p_1)) + (p_3 - p_2) = p_2 + (p_3 - p_2) = p_3$ und somit $p_3 - p_1 = (p_3 - p_2) + (p_2 - p_1)$. *Zu (g).* Gelte $p_2 - p_1 = q_2 - q_1$. Dann ergibt sich $p_2 + (q_1 - p_1) = p_2 + ((q_1 - p_2) + (p_2 - p_1)) = p_2 + ((q_1 - p_2) + (q_2 - q_1)) = p_2 + (q_2 - p_2)$ und somit nach (d): $q_1 - p_1 = q_2 - p_2$. Die umgekehrte Implikation geht wieder genauso. □

1.2 Affine Abbildungen

Im vorherigen Abschnitt haben wir affine Räume eingeführt. Nun lernen wir die dazugehörigen „Morphismen“ (strukturerhaltenden Abbildungen) kennen.

$\mathbb{E}$ und $\mathbb{F}$ seien affine Räume.

Definition. Eine Abbildung $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ heißt *affin*, wenn es einen Punkt $p_0 \in \mathbb{E}$ und eine lineare Abbildung $A : \mathbb{E}_L \to \mathbb{F}_L$ mit

$$f(p_0 + v) = f(p_0) + Av \quad \text{für alle } v \in \mathbb{E}_L$$

gibt. Ist dies der Fall, so gilt allgemeiner

$$f(p+v) = f(p) + Av \quad \text{für alle } p \in \mathbb{E} \text{ und } v \in \mathbb{E}_L \quad .$$

Die lineare Abbildung A ist daher durch f eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen sie mit f_L und nennen sie die *Linearisierung* von f.

Beispiele.

(a) Die identische Abbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ ist eine affine Bijektion mit $(\mathrm{id}_{\mathbb{E}})_L = \mathrm{id}_{\mathbb{E}_L}$. Außerdem sind alle möglichen Kompositionen $g \circ f$ von affinen Abbildungen wieder affin, und es gilt $(g \circ f)_L = g_L \circ f_L$. Ist $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ eine bijektive affine Abbildung (ein *affiner Isomorphismus*), so ist $f^{-1} : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ ebenfalls eine bijektive affine Abbildung, und es gilt: $(f^{-1})_L = (f_L)^{-1}$. Abstrakter formuliert: Die „Zuordnung“ $f \mapsto f_L$ ist ein *Funktor* von der Kategorie der affinen Räume in die Kategorie der Vektorräume.

(b) Die Translationen φ_v von $\mathbb{E}$ sind affine Bijektionen mit $(\varphi_v)_L = \mathrm{id}_{\mathbb{E}_L}$. Fasst man den Vektorraum $\mathbb{E}_L$ auf die kanonische Weise auch als affinen Raum auf, so sind die Abbildungen $\varphi^p : \mathbb{E}_L \to \mathbb{E}$ ebenfalls affine Bijektionen mit $\varphi^p_L = \mathrm{id}_{\mathbb{E}_L}$.

(c) Sind V und W Vektorräume, so ist eine Abbildung $f : V \to W$ genau dann affin bezüglich der kanonischen affinen Strukturen von V und W, wenn es eine lineare Abbildung $A : V \to W$ und einen Vektor $b \in W$ mit

$$f(v) = Av + b \quad \text{für alle } v \in V$$

gibt, und zwar ist dann $f_L = A$. Insbesondere sind lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen affin.

Aussage. Die Menge $\mathrm{GA}(\mathbb{E})$ der affinen Bijektionen $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ ist eine Untergruppe der Gruppe $\mathrm{Bij}(\mathbb{E})$ aller Bijektionen $\mathbb{E} \to \mathbb{E}$, die sogenannte *allgemeine affine Gruppe (general affine group)* von $\mathbb{E}$. Die Abbildung

$$\mathrm{GA}(\mathbb{E}) \to \mathrm{GL}(\mathbb{E}_L),\ f \mapsto f_L$$

ist ein Gruppen-Homomorphismus, dessen Kern die Menge

$$H := \{ \varphi_v \mid v \in \mathbb{E}_L \}$$

ist; daher ist H ein Normalteiler von $\mathrm{GA}(\mathbb{E})$ (also eine Untergruppe mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$\forall f \in \mathrm{GA}(\mathbb{E}),\ h \in H \ :\ f \circ h \circ f^{-1} \in H\ ).$$

1.3 Affine Unterräume

Definition. Eine Teilmenge M eines affinen Raums $\mathbb{E}$ heißt *affiner Unterraum* von $\mathbb{E}$, wenn es einen Punkt $p_0 \in \mathbb{E}$ und einen Untervektorraum U von $\mathbb{E}_L$ mit

$$M = p_0 + U := \varphi^{p_0}(U) = \{ p_0 + u \mid u \in U \}$$

gibt. Dann gilt notwendigerweise $p_0 \in M$, und es gilt $M = p + U$ für alle $p \in M$. Daher ist $U = (\varphi^p)^{-1}(M)$ durch M eindeutig festgelegt. M ist in kanonischer Weise ein affiner Raum: Sein Richtungsvektorraum ist U und seine Translationen sind die Einschränkungen $\varphi_u|M : M \to M$ (mit $u \in U$) der Translationen φ_u von $\mathbb{E}$.

Die *Punkte* von $\mathbb{E}$ bilden die 0-dimensionalen affinen Unterräume von $\mathbb{E}$. Die 1-dimensionalen, 2-dimensionalen bzw. die $(n-1)$-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{E}$ heißen *Geraden*, *Ebenen* bzw. *Hyperebenen* von $\mathbb{E}$.

Aufgabe. Es sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ eine affine Abbildung.

(a) Ist M ein affiner Unterraum von $\mathbb{E}$, so ist $f(M)$ ein affiner Unterraum von $\mathbb{F}$.

(b) Ist N ein affiner Unterraum von $\mathbb{F}$ und gilt $f^{-1}(N) \neq \varnothing$, so ist $f^{-1}(N)$ ein affiner Unterraum von $\mathbb{E}$.

(c) Ist $\mathbb{F} = \mathbb{E}$ und gilt $\mathrm{Fix}(f) := \{p \in \mathbb{E} \,|\, f(p) = p\} \neq \varnothing$, so ist $\mathrm{Fix}(f)$ ein affiner Unterraum von $\mathbb{E}$.

Beispiel. Sind V und W Vektorräume, $A : V \to W$ eine lineare Abbildung und $b \in W$, so ist der Lösungsraum der linearen Gleichung $Ax = b$ (bezüglich der kanonischen affinen Struktur von V) ein affiner Unterraum von V. Dies ist ein Spezialfall von Teil (b) der letzten Aufgabe, und zwar mit $f = A$ und $N = \{b\}$.

1.4 Affine Koordinatensysteme

Es sei $\mathbb{E}$ ein n-dimensionaler affiner Raum und $\mathbb{V} := \mathbb{E}_L$. Durch die Wahl eines Punktes $p_0 \in \mathbb{E}$ wird ein Isomorphismus $(\mathbb{E}; p_0) \cong \mathbb{V}$ induziert, nämlich die affine Bijektion $\varphi^{p_0} : \mathbb{V} \to \mathbb{E}$. Weiter wird bekanntlich durch die Wahl einer Basis $a := (a_1, \ldots, a_n)$ von $\mathbb{V}$ ein Isomorphismus $(\mathbb{V}; a_1, \ldots, a_n) \cong \mathbb{R}^n$ induziert, nämlich durch den Vektorraum-Isomorphismus

$$\Phi_a : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^n,\ \sum_{k=1}^{n} c_k\, a_k \mapsto (c_1, \ldots, c_n)\ .$$

Somit ist $(\mathbb{E}, p_0, a_1, \ldots, a_n)$ zum $\mathbb{R}^n$ „isomorph“, und zwar vermittels der affinen Bijektion $x := \Phi_a \circ (\varphi^{p_0})^{-1} : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n$.

Definition. In der zuvor beschriebenen Situation heißt $(p_0; a_1, \ldots, a_n)$ ein *affines Koordinatensystem* oder *AKS* für den affinen Raum $\mathbb{E}$. Die affine Bijektion $x : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n$ heißt auch (zum AKS $(p_0; a_1, \ldots, a_n)$ gehörende) *affine Karte* für $\mathbb{E}$, die Komponentenfunktionen $x_i : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ von $x = (x_1, \ldots, x_n)$ werden die zugehörigen *Koordinatenfunktionen* genannt. Mit ihnen gilt

$$\forall p \in \mathbb{E}\ :\ p = p_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k(p) \cdot a_k\ .$$

Aussage. (Koordinaten-Transformationen) Sind $x, y : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n$ zwei affine Karten (von zwei verschiedenen AKS induziert) so ist $f := y \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (so dass also das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{E} \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\ \mathbb{R}^n \arrow[rr, "f"] & & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

kommutiert) eine bijektive affine Abbildung; f heißt die *Koordinatentransformation* oder der *Koordinatenwechsel* von x zu y. Also existieren eine invertierbare $(n \times n)$-Matrix $A = (a_{ik})$ und ein Vektor $b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$\forall u \in \mathbb{R}^n \; : \; f(u) = Au + b \, ,$$

also

$$\forall i \; : \; y_i = \sum_k a_{ik} \cdot x_k + b_i$$

gilt.

Einsicht. Wir sehen, dass es zu jedem n-dimensionalen affinen Raum AKSe und damit auch affine Karten gibt; deshalb ist jeder solche Raum zum $\mathbb{R}^n$ „affin-isomorph“, und auch je zwei n-dimensionale affine Räume sind zueinander affin-isomorph. Es existieren jedoch keine *kanonischen* Isomorphismen zwischen diesen Räumen. Der Übergang von $\mathbb{E}$ zu $\mathbb{R}^n$ bedeutet daher stets die Auszeichnung eines bestimmten AKS von $\mathbb{E}$. Aus diesem Grunde ist es trotz der Isomorphie zum $\mathbb{R}^n$ sinnvoll, allgemeine affine Räume zu betrachten, wenn man diese Auszeichnung eines speziellen Koordinatensystems vermeiden möchte.

1.5 Differentialrechnung in einer Variablen

Um in affinen Räumen *Differential*geometrie betreiben zu können, muss man die Differentialrechnung für affine Räume beherrschen. Wir erläutern hier, wie man die eindimensionale Differentialrechnung für Funktionen (einer Veränderlichen) mit Werten in einem affinen Raum auf die Differentialrechnung für $\mathbb{R}^n$-wertige Funktionen zurückführt. In ähnlicher Weise läßt sich die mehrdimensionale Differentialrechnung auf Abbildungen zwischen affinen Räumen anwenden; davon wird zu einem späteren Zeitpunkt die Rede sein.

In diesem Abschnitt sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\mathbb{E}$ ein affiner Raum, $\alpha : I \to \mathbb{E}$ eine Funktion (später werden wir *Kurven* durch derartige Funktionen modellieren) und $t_0 \in I$.

Definition. α heißt in t_0 *differenzierbar*, wenn der Grenzwert von $\frac{\alpha(t)-\alpha(t_0)}{t-t_0}$ für $t \to t_0$ in $\mathbb{E}_L$ existiert; in diesem Falle heißt $\alpha'(t_0) := \lim_{t\to t_0} \frac{\alpha(t)-\alpha(t_0)}{t-t_0} \in \mathbb{E}_L$ die *Ableitung* oder der *Geschwindigkeitsvektor* von α in t_0.

Rechenregeln. Sei α in $t_0 \in I$ differenzierbar.

(a) *Verträglichkeit mit affinen Abbildungen.* Sei $\mathbb{E}'$ ein weiterer affiner Raum und $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ eine affine Abbildung. Dann ist auch $f \circ \alpha$ in t_0 differenzierbar und es gilt $(f \circ \alpha)'(t_0) = f_L(\alpha'(t_0))$.

(b) *Kettenregel.* Ist $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $g : J \to I$ eine Funktion, die in $s_0 \in J$ differenzierbar ist, und gilt $g(s_0) = t_0$, so ist $\alpha \circ g$ in s_0 differenzierbar, und es gilt $(\alpha \circ g)'(s_0) = g'(s_0) \cdot \alpha'(g(s_0))$.

(c) *Leibnizregel.* Sind V_1, V_2, V Vektorräume, $\alpha_i : I \to V_i$ für $i \in \{1, 2\}$ in $t_0 \in I$ differenzierbare Wege, und $B : V_1 \times V_2 \to V$ eine bilineare Abbildung, so ist auch der Weg $B(\alpha_1, \alpha_2) : I \to V, t \mapsto B(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ in t_0 differenzierbar, und es gilt

$$(B(\alpha_1, \alpha_2))'(t_0) = B(\alpha_1'(t_0), \alpha_2(t_0)) + B(\alpha_1(t_0), \alpha_2'(t_0)) \; .$$

Aufgabe. Ist $\alpha : I \to \mathbb{E}$ eine Abbildung und sind $x_1, \ldots, x_n$ die Koordinatenfunktionen eines AKS $(p_0; a_1, \ldots, a_n)$ von $\mathbb{E}$, so ist α in $t_0 \in I$ genau dann differenzierbar, wenn $x_k \circ \alpha$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ in t_0 differenzierbar ist. In diesem Falle gilt:

$$\alpha'(t_0) = \sum_{k=1}^{n} (x_k \circ \alpha)'(t_0) \cdot a_k \; .$$

1.6 Euklidische Räume

Ein wichtiger Aspekt der Geometrie ist die Messung von Längen und Winkeln. Um dies in einem Vektorraum tun zu können, benötigt man ein Skalarprodukt. In diesem Abschnitt übertragen wir die entsprechenden Begriffe auf affine Räume. Doch zuvor eine wichtige

Erinnerung. Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum $\mathbb{V}$, und $\| \cdot \|$ die dazugehörige Norm (d.h. $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ für $v \in \mathbb{V}$), so gilt die folgende *Polarisationsformel*

$$\forall v, w \in \mathbb{V} \; : \; \langle v, w \rangle = \pm\tfrac{1}{2} \left(\|v \pm w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 \right)$$

(wobei an beiden Stellen dasselbe Vorzeichen zu wählen ist). Aus diesem Grund ist ein Endomorphismus von $\mathbb{V}$, der normtreu ist, schon skalarprodukttreu.

Definition.

(a) Ein n-dimensionaler *euklidischer Raum* ist ein n-dimensionaler affiner Raum $\mathbb{E}$, dessen Richtungsvektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ versehen ist. Die hierzu gehörige Norm werde mit $\| \cdot \|$ bezeichnet. Für $v, w \in \mathbb{E}_L \setminus \{0\}$ nennen wir

$$\measuredangle(v, w) := \arccos \left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \right) \; \in \; [0, \pi]$$

den *Winkel* zwischen v und w. Durch

$$d : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}, \; (p, q) \mapsto \|q - p\|$$

wird auf $\mathbb{E}$ eine Abstandsfunktion (eine *Metrik*) definiert.

(b) Sind $\mathbb{E}$ und $\mathbb{E}'$ euklidische Räume, so heißt eine Abbildung $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ eine *Isometrie*, wenn sie bijektiv und *abstandstreu* ist; letzteres bedeutet

$$\forall p, q \in \mathbb{E} \ : \ d'(f(p), f(q)) = d(p, q) \ .$$

(c) Ein AKS $(p_0; a_1, \dots, a_n)$ eines euklidischen Raums $\mathbb{E}$ heißt ein *kartesisches Koordinatensystem* oder kurz *KKS*, wenn $(a_1, \dots, a_n)$ eine Orthonormalbasis (ONB) des Richtungsvektorraums $\mathbb{E}_L$ ist. Dann ist die zugehörige affine Karte $x : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie bezüglich des kanonischen Skalarproduktes von $\mathbb{R}^n$. Mehr noch: die linearisierte Karte $x_L : \mathbb{E}_L \to \mathbb{R}^n$ ist skalarprodukt-treu.

Beachte: Je zwei n-dimensionale euklidische Räume sind zueinander affin und metrisch „isomorph“. Diese Isomorphie ist aber nicht kanonisch.

Beispiele.

(a) Der $\mathbb{R}^n$ ist mit dem kanonischen Skalarprodukt ein euklidischer Raum.

(b) Die Translationen φ_v eines jeden euklidischen Raums sind Isometrien.

(c) Für jede affine Abbildung $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ gilt

$$d'(f(p), f(q)) = \|f_L(q - p)\| \ .$$

Aus diesem Grunde ist eine bijektive, affine Abbildung $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ genau dann eine Isometrie, wenn f_L normtreu ist, und das ist (wegen der Polarisationsformel) genau dann der Fall, wenn f_L skalarprodukttreu ist.

Theorem. Isometrien eines euklidischen Raums. Sei $\mathbb{E}$ ein euklidischer Raum. Dann gilt für die Gruppe $I(\mathbb{E})$ der Isometrien von $\mathbb{E}$:

$$I(\mathbb{E}) = \{ \, f : \mathbb{E} \to \mathbb{E} \text{ affin} \mid f_L \text{ ist orthogonale Abbildung in } \mathbb{E}_L \, \} \ .$$

Insbesondere sind Isometrien affine Abbildungen.

Beweisstrategie. Für den Beweis der „schwierigen“ Inklusion „$\subset$“ sei eine Isometrie $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ gegeben. Man fixiere $p_0 \in \mathbb{E}$ und betrachte die Abbildung

$$g : \mathbb{E}_L \to \mathbb{E}_L, \ v \mapsto f(p_0 + v) - f(p_0) \ .$$

Dann zeige man der Reihe nach die folgenden Punkte (1)–(5). **(1)** $\|g(w) - g(v)\| = \|w - v\|$ für $v, w \in \mathbb{E}_L$. Aus (1) folgere man **(2)** $\|g(v)\| = \|v\|$ für $v \in \mathbb{E}_L$ (d.h.: g ist normtreu). Aus (1), (2) und der Polarisationsformel ergibt sich **(3)** $\langle g(v), g(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ (d.h.: g ist skalarprodukttreu). Nun folgt der entscheidende Schritt **(4)**: g ist eine orthogonale, insbesondere lineare Abbildung. Dazu betrachte man ein KKS $(p_0; a_1, \dots, a_n)$, beachte, dass wegen (3) $(p_0; g(a_1), \dots, g(a_n))$ ebenfalls ein KKS ist, und stelle $g(v)$ bezüglich der ONB $(g(a_1), \dots, g(a_n))$ dar, wobei $v \in \mathbb{E}_L$ variabel ist. Schließlich sieht man leicht **(5)**: f ist affin mit $f_L = g$. □

Folgerung. Freie Beweglichkeit in euklidischen Räumen. Sei $\mathbb{E}$ ein euklidischer Raum und $(p_0; a_1, \dots, a_n)$ bzw. $(q_0; b_1, \dots, b_n)$ zwei KKSe von $\mathbb{E}$. Dann existiert genau eine Isometrie f von $\mathbb{E}$ mit

$$f(p_0) = q_0 \quad \text{und} \quad f_L(a_i) = b_i \text{ für alle } i \ .$$

„In $\mathbb{E}$ kann man jeden Körper in jede beliebige Lage bringen.“

1.7 Orientierung eines euklidischen Vektorraums; Vierteldrehung und Kreuzprodukt

Es sei $\mathbb{V}$ ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Der Vektorraum $\mathrm{Alt}^n(\mathbb{V})$ der alternierenden n-Formen auf $\mathbb{V}$ ist 1-dimensional, weswegen $\mathrm{Alt}^n(\mathbb{V}) \setminus \{0\}$ bezüglich der Äquivalenzrelation

$$\omega_1 \sim \omega_2 \;:\Longleftrightarrow \big(\exists c \in \mathbb{R}_+ \,:\, \omega_2 = c \cdot \omega_1\big)$$

in zwei Klassen zerfällt. Diese beiden Äquivalenzklassen werden als die beiden *Orientierungen* von $\mathbb{V}$ bezeichnet; fixiert man eine von ihnen und bezeichnet sie mit $\mathrm{Alt}^n_+(\mathbb{V})$, so sagt man, dass $\mathbb{V}$ hierdurch zu einem *orientierten* euklidischen Vektorraum wird. Dann existiert genau eine n-Form $\det \in \mathrm{Alt}^n_+(\mathbb{V})$, die sogenannte *Determinantenform* von $\mathbb{V}$, so dass für jede ONB $(a_1, \ldots, a_n)$ von $\mathbb{V}$ gilt:

$$\det(a_1, \ldots, a_n) \in \{\pm 1\} \;.$$

Ist in dieser Situation $\det(a_1, \ldots, a_n) = 1$, so heißt die ONB $(a_1, \ldots, a_n)$ *positiv orientiert.*

Aussage 1. Ist $(a_1, \ldots, a_n)$ eine positiv orientierte ONB eines orientierten euklidischen Vektorraums $\mathbb{V}$, so gilt

$$\forall \omega \in \mathrm{Alt}^n(\mathbb{V}) \;:\; \omega = \omega(a_1, \ldots, a_n) \cdot \det \;.$$

Beweis. Die Aussage folgt aus der Tatsache, dass $\mathrm{Alt}^n(\mathbb{V}) \to \mathbb{R},\; \omega \mapsto \omega(a_1, \ldots, a_n)$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist. □

Definition. Ist der Richtungsvektorraum $\mathbb{E}_L$ eines euklidischen Raums $\mathbb{E}$ orientiert, so nennt man $\mathbb{E}$ einen *orientierten euklidischen Raum.*

Aussage 2. Ist $\mathbb{V}$ ein orientierter euklidischer Vektorraum und sind $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{V}$, so gilt

$$\det(u_1, \ldots, u_n) \cdot \det(v_1, \ldots, v_n) = \det\big(\langle u_i, v_k \rangle\big)_{i,k} \;,$$

wobei auf der rechten Seite die übliche Determinante einer Matrix steht.

Beweis. Wir wählen eine positiv orientierte ONB $(a_1, \ldots, a_n)$ von $\mathbb{V}$ und definieren damit die n-Form

$$\nu : (u_1, \ldots, u_n) \mapsto \det\big(\langle u_i, a_k \rangle\big) \;.$$

Nach Aussage 1 gilt $\nu = \det\big(\langle a_i, a_k \rangle\big) \cdot \det = \det$, also

$$\forall\, (u_1, \ldots, u_n) \;:\quad \det(u_1, \ldots, u_n) \;=\; \det\big(\langle u_i, a_k \rangle\big) \;. \qquad (*)$$

Nun zu der fraglichen Formel: Zu $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{V}^n$ definieren wir die n-Form

$$\omega_{\boldsymbol{u}} : (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \det\big(\langle u_i, v_k \rangle\big) \;.$$

Wieder nach Aussage 1 gilt $\omega_{\boldsymbol{u}} = c_{\boldsymbol{u}} \cdot \det$ mit $c_{\boldsymbol{u}} = \omega_{\boldsymbol{u}}(a_1, \ldots, a_n) = \det\big(\langle u_i, a_k \rangle\big) \overset{(*)}{=} \det(u_1, \ldots, u_n)$, also $\det(u_1, \ldots, u_n) \cdot \det(v_1, \ldots, v_n) = c_{\boldsymbol{u}} \cdot \det(v_1, \ldots, v_n) = \omega_{\boldsymbol{u}}(v_1, \ldots, v_n) = \det\big(\langle u_i, v_k \rangle\big)$. □

In den beiden Fällen $\dim(\mathbb{V}) = 2$ und $\dim(\mathbb{V}) = 3$ werden durch die Wahl einer Orientierung auf $\mathbb{V}$ besonders anschauliche Objekte induziert. Wir betrachten diese beiden Fälle daher nun genauer.

Aussage 3. (Vierteldrehung) Sei $\mathbb{V}$ ein orientierter euklidischer Vektorraum mit $\dim(\mathbb{V}) = 2$. Dann existiert genau ein $J \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$ mit

$$\forall v, w \in \mathbb{V} \ : \ \langle Jv, w \rangle = \det(v, w) \ .$$

Ist (a_1, a_2) eine positiv orientierte ONB von $\mathbb{V}$, so gilt für alle $v \in \mathbb{V}$

$$Jv = \langle v, a_1 \rangle \cdot a_2 - \langle v, a_2 \rangle \cdot a_1 \ ,$$

deshalb nennt man J die *Vierteldrehung* von $\mathbb{V}$.

Ferner ist $J \in \mathrm{End}_-(\mathbb{V}) \cap \mathrm{SO}(\mathbb{V})$ und es gilt $J \circ J = -\mathrm{id}_{\mathbb{V}}$. Insbesondere ist für jeden Einheitsvektor $a \in \mathbb{V}$ das Paar (a, Ja) eine positiv orientierte ONB von $\mathbb{V}$.

Beweis. Ist $v \in \mathbb{V}$ gegeben, so ist $\det(v, \cdot\,)$ eine Linearform auf $\mathbb{V}$, daher existiert genau ein Vektor $Jv \in \mathbb{V}$ mit $\langle Jv, \cdot\,\rangle = \det(v, \cdot\,)$, und die so definierte Abbildung $J : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ ist offensichtlich linear. Ist (a_1, a_2) eine positiv orientierte ONB, so gilt $\langle Ja_1, a_1 \rangle = \det(a_1, a_1) = 0 = \langle a_2, a_1 \rangle$ und $\langle Ja_1, a_2 \rangle = \det(a_1, a_2) = 1 = \langle a_2, a_2 \rangle$ und somit

$$Ja_1 = a_2 \,, \quad \text{entsprechend } Ja_2 = -a_1 \,. \tag{†}$$

Die positiv orientierte ONB (a_1, a_2) wird also durch J in eine andere positiv orientierte ONB, nämlich $(a_2, -a_1)$ überführt, weswegen $J \in \mathrm{SO}(\mathbb{V}; \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ gilt. Außerdem gilt für $v \in \mathbb{V}$

$$Jv = J(\langle v, a_1 \rangle\, a_1 + \langle v, a_2 \rangle)\, a_2 \overset{(†)}{=} \langle v, a_1 \rangle\, a_2 - \langle v, a_2 \rangle\, a_1 \ ,$$

ebenfalls aus (†) folgt die Gleichung $J \circ J = -\mathrm{id}_{\mathbb{V}}$. Mit dieser Gleichung und der Orthogonalität von J ergibt sich schließlich auch $J \in \mathrm{End}_-(\mathbb{V})$. □

Aussage 4. (Kreuzprodukt) Sei $\mathbb{V}$ ein orientierter euklidischer Vektorraum mit $\dim(\mathbb{V}) = 3$. Dann existiert genau eine Abbildung $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V},\ (u, v) \mapsto u \times v$ mit

$$\forall u, v, w \in \mathbb{V} \ : \ \langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w) \ ;$$

sie ist bilinear und schief-symmetrisch; man nennt sie das *Kreuzprodukt* von $\mathbb{V}$. Das Kreuzprodukt hat die folgenden Eigenschaften: ($u, v, w \in \mathbb{V}$)

(a) $\langle u \times v, u \rangle = \langle u \times v, v \rangle = 0$.

(b) Ist (a_1, a_2, a_3) eine ONB von $\mathbb{V}$, so gilt für $u, v \in \mathbb{V}$

$$u \times v = \sum_{k=1}^{3} \det(u, v, a_k)\, a_k \ .$$

(c) $(u \times v) \times w = \langle u, w \rangle \cdot v - \langle v, w \rangle \cdot u$. Damit ist das Kreuzprodukt insbesondere nicht assoziativ.

(d) Die *Lagrangesche Identität*: $\langle v_1 \times v_2, w_1 \times w_2 \rangle = \det\big(\langle v_i, w_k \rangle\big)_{i,k}$
$= \langle v_1, w_1 \rangle \cdot \langle v_2, w_2 \rangle - \langle v_1, w_2 \rangle \cdot \langle v_2, w_1 \rangle$

(e) Sind $a_1, a_2 \in \mathbb{V}$ zwei zueinander orthogonale Einheitsvektoren, so ist $(a_1, a_2, a_1 \times a_2)$ eine positiv orientierte ONB von $\mathbb{V}$.

(f) Für alle Transformationen $A \in \mathrm{SO}(\mathbb{V}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ und alle $v, w \in \mathbb{V}$ gilt

$$(Av) \times (Aw) = A(v \times w) \ .$$

Beweis. Für gegebene $u, v \in \mathbb{V}$ ist $\det(u, v, \cdot)$ eine Linearform auf $\mathbb{V}$, weswegen es genau einen Vektor $u \times v \in \mathbb{V}$ mit $\langle u \times v, \cdot \rangle = \det(u, v, \cdot)$ gibt, und weil det eine alternierende Trilinearform ist, ist die so definierte Abbildung $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V},\ (u, v) \mapsto u \times v$ bilinear und schief-symmetrisch.

Zu (a). Nach Definition gilt $\langle u \times v, u \rangle = \det(u, v, u) = 0$ und entsprechend $\langle u \times v, v \rangle = 0$. *Zu (b).* Durch Fourier-Entwicklung von $u \times v$ ergibt sich $u \times v = \sum_k \langle u \times v, a_k \rangle\, a_k = \sum_k \det(u, v, a_k)\, a_k$. *Zu (c).* Da beide Seiten der Gleichung in u, v, w linear sind, genügt es, die Gleichung bei Einsetzen von Vektoren einer positiv orientierten ONB (a_1, a_2, a_3) zu prüfen. Da beide Seiten in u, v schief-symmetrisch sind, genügt es sogar, $(u, v) \in \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_1)\}$ zu untersuchen. Die Zahl der zu untersuchenden Fälle kann noch weiter reduziert werden: Da mit (a_1, a_2, a_3) auch (a_2, a_3, a_1) und (a_3, a_1, a_2) positiv orienterte ONBen sind, genügt es sogar, die Gleichung für $(u, v, w) = (a_1, a_2, a_k)$ mit $k \in \{1, 2, 3\}$ zu bestätigen. Nun rechnet man leicht mit Hilfe von (b) nach: $(a_1 \times a_2) \times a_1 = a_2 = \langle a_1, a_1 \rangle a_2 - \langle a_2, a_1 \rangle a_1$, $(a_1 \times a_2) \times a_2 = -a_1 = \langle a_1, a_2 \rangle a_2 - \langle a_2, a_2 \rangle a_1$, $(a_1 \times a_2) \times a_3 = 0 = \langle a_1, a_3 \rangle a_2 - \langle a_2, a_3 \rangle a_1$. *Zu (d).* Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \langle v_1 \times v_2, w_1 \times w_2 \rangle &= \det(v_1, v_2, w_1 \times w_2) = \det(w_1 \times w_2, v_1, v_2) = \langle (w_1 \times w_2) \times v_1, v_2 \rangle \\ &\overset{(c)}{=} \big\langle \langle w_1, v_1 \rangle \cdot w_2 - \langle w_2, v_1 \rangle \cdot w_1\,,\, v_2 \big\rangle = \langle v_1, w_1 \rangle \langle v_2, w_2 \rangle - \langle v_1, w_2 \rangle \langle v_2, w_1 \rangle\,. \end{aligned}$$

Zu (e). Aus (a) ergibt sich, dass $a_1 \times a_2$ auf a_1 und auf a_2 senkrecht steht, nach (d) gilt $\|a_1 \times a_2\|^2 = \det(\langle a_i, a_k \rangle)_{i,k} = \det(\mathbb{1}) = 1$, also ist $(a_1, a_2, a_1 \times a_2)$ eine ONB von $\mathbb{V}$; diese ist wegen $\det(a_1, a_2, a_1 \times a_2) = \langle a_1 \times a_2, a_1 \times a_2 \rangle = 1$ positiv orientiert. *Zu (f).* Diese Aussage ist nicht überraschend: Da das Kreuzprodukt mittels der Struktur eines orientierten euklidischen Vektorraums definiert ist, sollte es unter den diese Struktur erhaltenden Automorphismen von $\mathbb{V}$ — das sind gerade die $A \in \mathrm{SO}(\mathbb{V}; \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ — invariant sein. Im Konkreten folgt die Aussage aus

$$\begin{aligned} \langle (Au) \times (Av), Aw \rangle &= \det(Au, Av, Aw) = \det(A) \cdot \det(u, v, w) = \det(u, v, w) \\ &= \langle u \times v, w \rangle = \langle A(u \times v), Aw \rangle\,. \end{aligned}$$

□

Beispiele.

(a) Auf dem $\mathbb{R}^n$ existiert genau eine Struktur eines orientierten euklidischen Vektorraums, so dass seine Standard-Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ eine positiv orientierte ONB ist. Diesbezüglich stimmt die Determinantenform det mit der üblichen Determinante überein. Im Falle $n = 2$ ist die Vierteldrehung der Endomorphismus $(v_1, v_2) \mapsto (-v_2, v_1)$, und im Falle $n = 3$ wird das Kreuzprodukt zwischen $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ und $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ durch

$$v \times w = (v_2 w_3 - v_3 w_2\,,\ v_3 w_1 - v_1 w_3\,,\ v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

gegeben.

(b) Sei nun $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ ein beliebiges anderes Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$. Mit Hilfe der Standard-Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ definieren wir dann jeweils $g_{ik} := \langle e_i, e_k \rangle$. Dann können wir das Skalarprodukt und die Determinantenfunktion $\det^{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ dieses orientierten euklidischen Vektorraums auf die folgende Weise beschreiben:

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n \ :\ \langle v, w \rangle = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\, v_i\, w_k$$

und

$$\forall v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n \ :\ \det^{\langle \cdot, \cdot \rangle}(v_1, \ldots, v_n) = \sqrt{\det(g_{ik})} \cdot \det(v_1, \ldots, v_n)\,,$$

wobei det die übliche Determinantenfunktion des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Im Falle $n = 2$ wird die Vierteldrehung des euklidischen Vektorraums $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ durch die Matrix

$$\frac{1}{\sqrt{\det(g_{ik})}} \cdot \begin{pmatrix} -g_{12} & -g_{22} \\ g_{11} & g_{21} \end{pmatrix}$$

beschrieben. — Beispiel (b) wird später eine zentrale Rolle in der Flächentheorie des $\mathbb{E}^3$ spielen.

Beweis zu (b). Da det und $\det^{\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle}$ beide zur kanonischen Orientierung des $\mathbb{R}^n$ gehören, gilt $\det^{\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle} = c \cdot \det$ mit einem $c \in \mathbb{R}_+$. Zu dessen Bestimmung berechnen wir mittels der Standard-Basis $(e_1, \ldots, e_n)$

$$c^2 = (c \cdot \det(e_1, \ldots, e_n))^2 = \det^{\langle\cdot,\cdot\rangle}(e_1, \ldots, e_n)^2 = \det(\langle e_i, e_k\rangle) = \det(g_{ik}) ,$$

wobei das vorletzte Gleichheitszeichen aus Aussage 2 folgt. Daher gilt $\det(g_{ik}) > 0$, weswegen der Ausdruck $\sqrt{\det(g_{ik})}$ wohldefiniert ist, und es folgt $\det^{\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle} = \sqrt{\det(g_{ik})} \cdot \det$. □

1.8 Drehungen und orientierte Winkel in zwei Dimensionen

Es sei $\mathbb{V}$ ein orientierter, 2-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Wir bezeichnen die Vierteldrehung von $\mathbb{V}$ mit $J : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$.

Drehungen: Die 1-Parametergruppe $(R_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist der Endomorphismus

$$R_t := \cos(t) \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{V}} + \sin(t) \cdot J$$

eine orientierungserhaltende, orthogonale Transformation, d.h. $R_t \in \mathrm{SO}(\mathbb{V}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$. Ist (a_1, a_2) irgendeine positiv orientierte ONB von $\mathbb{V}$, so wird R_t diesbezüglich durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

dargestellt, deshalb nennt man R_t die *Drehung um den Winkel* t. Für $t, s \in \mathbb{R}$ gilt

$$R_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{V}}, \quad R_t \circ R_s = R_{t+s} \quad \text{und} \quad R_{-t} = R_t^{-1} ,$$

anders gesagt: Die Abbildung $(\mathbb{R}, +) \to \mathrm{SO}(\mathbb{V}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$, $t \mapsto R_t$ ist ein Gruppen-Homomorphismus. Man sagt auch: Die Familie $(R_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ist eine *Ein-Parameter-Untergruppe* von $\mathrm{SO}(\mathbb{V}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$. Der Kern des genannten Gruppenhomomorphismus ist $2\pi\,\mathbb{Z}$.

Der orientierte Winkel. Sind $v, w \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$, so ist

$$\measuredangle_{or}(v, w) := \{\, \varphi \in \mathbb{R} \mid \langle v, w\rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\varphi) \text{ und } \det(v, w) = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin(\varphi) \,\}$$

eine nicht-leere Menge, die man die *Menge der orientierten Winkel* zwischen v und w nennt. Ist $\varphi \in \measuredangle_{or}(v, w)$ (man sagt: φ ist *ein orientierter Winkel* zwischen v und w) und $a := v/\|v\|$, so gilt

$$w = \frac{\|w\|}{\|v\|} \cdot R_\varphi(v) = \|w\| \cdot (\cos(\varphi) \cdot a + \sin(\varphi) \cdot Ja)$$

und

$$\measuredangle_{or}(v, w) = \varphi + 2\pi\mathbb{Z} := \{\, \varphi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \,\} .$$

Beweis. Zum Beweis der Aussagen benutzen wir die gleichförmige Kreisbewegung

$$\gamma_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t)) .$$

Sie ist 2π-periodisch, ihr Bild ist der Einheitskreis $S^1 = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}$, und für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ ist die Einschänkung $\gamma_0|]t_0 - \pi, t_0 + \pi[$ ein Homöomorphismus auf $S^1 \setminus \{\gamma_0(t_0 + \pi)\}$, also eine bijektive, stetige Abbildung mit stetiger Umkehrabbildung.

Da (a, Ja) eine ONB von $\mathbb{V}$ ist, gilt

$$w = \langle w, a\rangle \cdot a + \langle w, Ja\rangle \cdot Ja = \langle w, a\rangle \cdot a + \det(a, w) \cdot Ja$$

und somit

$$\|w\|^2 = \langle w, a\rangle^2 + \det(a, w)^2 = \frac{1}{\|v\|^2} \cdot (\langle v, w\rangle^2 + \det(v, w)^2) .$$

Daher ist $p := \left(\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} , \frac{\det(v,w)}{\|v\|\cdot\|w\|} \right) \in S^1$, und nach Definition des orientierten Winkels gilt $\measuredangle(v, w) = \gamma_0^{-1}(\{p\})$. Die Aussagen folgen nun aus den angegebenen Eigenschaften von γ_0 . □

Wir übertragen nun die Kreisbewegung γ_0 im $\mathbb{R}^2$, die in obigem Beweis eine wesentliche Rolle spielte, in einen beliebigen 2-dimensionalen orientierten, euklidischen Vektorraum. Dieser Vorgang ist mathematisch trivial, wird es uns aber in der elementaren Kurventheorie ermöglichen, wesentliche Sachverhalte elegant zu formulieren.

Definition. Für jeden Einheitsvektor $a \in \mathbb{V}$ definieren wir das „Einheitsvektorfeld“

$$\Gamma_a : \mathbb{R} \to \mathbb{V},\ t \mapsto R_t(a) = \cos(t) \cdot a + \sin(t) \cdot Ja .$$

Γ_a besitzt mutatis mutandis dieselben Eigenschaften, die für γ_0 im vorherigen Beweis aufgeführt worden sind.

Aussage. Für das soeben definierte Einheitsvektorfeld Γ_a gilt $\Gamma_a' = J\Gamma_a$, also ist $(\Gamma_a(t), \Gamma_a'(t))$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine positiv orientierte ONB von $\mathbb{V}$.

Beweis. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt $\Gamma_a'(t) = -\sin(t) \cdot a + \cos(t) \cdot Ja = J(\cos(t) \cdot a + \sin(t) \cdot Ja) = J\Gamma_a(t)$. □

Satz. (Stetige bzw. differenzierbare Abhängigkeit des orientierten Winkels.) Sei $a \in \mathbb{V}$ ein Einheitsvektor, $r \in \{0, 1, \ldots, \infty\}$, und $E : I \to \mathbb{V}$ eine C^r-Funktion auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $\|E\| = 1$. Dann existiert eine C^r-Funktion $\vartheta : I \to \mathbb{R}$, so dass

$$\forall t \in I \ : \ \vartheta(t) \in \measuredangle_{or}(a, E(t))$$

und somit

$$E = \Gamma_a \circ \vartheta$$

gilt. Sind ϑ_1, ϑ_2 zwei stetige derartige Funktionen, so gilt

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 \equiv \text{const.} \in 2\pi\mathbb{Z} .$$

Wir werden später sehen, dass dieser Satz ein zentrales Hilfsmittel sowohl für die lokale als auch für die globale ebene Kurventheorie ist.

Beweis. Zur Eindeutigkeitsaussage: Sind ϑ_1, ϑ_2 wie im Satz, so ist $\vartheta_2 - \vartheta_1$ eine stetige Funktion auf dem Intervall I , deren Werte in der diskreten Menge $2\pi\mathbb{Z}$ liegt, und deshalb konstant.

Zur Existenz: Im Falle $r = 0$ folgt die Existenz von ϑ aus der Tatsache, dass $\Gamma_a : \mathbb{R} \to \mathbb{V}$ ein lokaler Homöomorphismus mit $\Gamma_a^{-1}(E(t)) = \measuredangle_{or}(a, E(t))$ für alle $t \in I$ ist. Betrachten wir also nun den Fall $r \geq 1$. Wir fixieren ein $t_0 \in I$ und bezeichnen mit $\vartheta : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion der Funktion $f := \langle E', JE\rangle$ mit dem „Anfangswert“ $\vartheta(t_0) \in \measuredangle_{or}(a, E(t_0))$; nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist ϑ eine C^r-Funktion.

Wir werden nun zeigen, dass $X := \Gamma_a \circ \vartheta$ und E Lösungen desselben gewöhnlichen Differentialgleichungs-Anfangswertproblems sind; deshalb gilt nach dem Satz von Picard/Lindelöf (Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen) $X = E$, woraus die Behauptung folgt.

Wir stellen dazu zunächst fest, dass $X(t_0) = E(t_0)$ gilt, und zeigen dann, dass X und E beide Lösungen der linearen, homogenen Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t) \cdot Jy(t)$$

sind. Für X rechnet man einfach: $X'(t) = \Gamma_a'(\vartheta(t)) \cdot \vartheta'(t) = J\Gamma_a(\vartheta(t)) \cdot f(t) = JX(t) \cdot f(t)$. Für E schreibt man die Fourier-Entwicklung von E' bezüglich des ONB-Feldes (E, JE) hin:

$$E' = \langle E', E\rangle \cdot E + \langle E', JE\rangle \cdot JE = \langle E', E\rangle \cdot E + f \cdot JE \ .$$

Nun gilt $\langle E, E\rangle = 1$ und deshalb $0 = (\langle E, E\rangle)' = \langle E', E\rangle + \langle E, E'\rangle = 2\,\langle E', E\rangle$. Also ergibt sich $E' = f \cdot JE$. $\square$