

Kapitel 6

Äußere Geometrie räumlicher Flächen

Wie wir bereits wissen, werden bestimmte fundamentale „Messungen“ auf einer Fläche durch den Maßtensor einer Parametrisierung beschrieben. Insbesondere ermöglicht es der Maßtensor, Längen und Winkel auf der Fläche zu messen. Ein Ansatz für die Untersuchung der Geometrie von Flächen besteht daher darin, der Frage nachzugehen, welche Eigenschaften der Fläche man allein aus dem Maßtensor erschließen kann. (Dabei sollen auch Ableitungen des Maßtensors zugelassen sein.) In einem Bild ausgedrückt, entspricht dies der Geometrie der Fläche, wie sie von einer intelligenten Ameise wahrgenommen wird, die auf der Fläche herumkrabbelnd diese erkundet. Diese Art des Flächenstudiums nennt man *innere Geometrie von Flächen* oder — in einem allgemeineren Rahmen — *Riemannsche Geometrie*.

Wir wissen allerdings auch, dass durch den Maßtensor allein die Geometrie der im \mathbb{E}^3 eingebetteten Fläche nicht vollständig beschrieben wird, gibt es doch sehr unterschiedliche Flächen, die denselben Maßtensor besitzen (ein Beispiel haben wir in der Aufgabe 2 in Abschnitt 5.6 kennengelernt). Um die unterschiedliche Beschaffenheit dieser Flächen zu erfassen, müssen wir sie von „außen“ her ansehen, sie also als Objekt des umgebenden Raums untersuchen. Diese Betrachtungsweise heißt *äußere Geometrie*.

Noch eine Veranschaulichung: Unseren eigenen Lebensraum, die Erdoberfläche konnten wir bis zum Start des Sputnik am 4. Oktober 1957 nur mit den Mitteln der inneren Geometrie studieren. Das machte die Faszination der ersten, damals entstandenen Aufnahmen der Erde aus, sah man doch durch sie die Erdoberfläche zum ersten Mal mit den Augen der äußeren Geometrie.

Wir werden uns im Folgenden zunächst mit der äußeren Geometrie von Flächen befassen. In Kapitel 7 werden wir dann zum — in Abschnitt 5.6 begonnenen — Studium der inneren Geometrie zurückkehren.

Das ganze Kapitel hindurch sei $\mathbb{E} = \mathbb{E}^3$ ein 3-dimensionaler, orientierter euklidischer Raum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Determinantenform \det , $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $F : G \rightarrow \mathbb{E}$ eine (singularitätenfreie) C^r -Flächenparametrisierung. Dabei setzen wir nun stets $r \geq 2$ voraus. Wie in Abschnitt 5.6 beschrieben, sind uns durch F die folgenden Größen der inneren Geometrie gegeben: der *Maßtensor* g , das *Flächenelement* ρ_F , die *Volumenform* ω und die *komplexe Struktur* J .

6.1 Einheitsnormalenfelder von Flächenparametrisierungen

Nach Abschnitt 5.5 ist für jedes $p \in G$ der Normalenraum $\perp_p F$ eindimensional, enthält also genau zwei Einheitsvektoren. Die folgende Definition zeigt, dass durch die Parametrisierung F einer der beiden Normalenvektoren ausgezeichnet wird:

Definition. Unter „dem“ *Einheitsnormalenfeld* von F wird das C^{r-1} -Normalenfeld (siehe Abschnitt 5.5)

$$N_F := \frac{\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s}}{\left\| \frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s} \right\|} = \frac{1}{\rho_F} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s} \right)$$

verstanden.

Beispiele.

(a) **Einheitsnormalenfeld einer Graphenfläche.** Ist

$$F : G \rightarrow \mathbb{E}, (t, s) \mapsto p_0 + t a_1 + s a_2 + f(t, s) a_3$$

die Parametrisierung einer Graphenfläche wie in Abschnitt 5.2, so ist

$$\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s} = -\frac{\partial f}{\partial t} a_1 - \frac{\partial f}{\partial s} a_2 + a_3$$

und daher

$$N_F = \frac{1}{\rho_F} \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial t} a_1 - \frac{\partial f}{\partial s} a_2 + a_3 \right) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial t} a_1 - \frac{\partial f}{\partial s} a_2 + a_3}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2}}.$$

(b) **Einheitsnormalenfeld einer Rotationsfläche.** Ist

$$F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}, (t, s) \mapsto p_0 + r(t) \cdot \Gamma_{\mathbf{a}}(s) + b(t) \cdot a_3$$

eine Rotationsflächen-Parametrisierung wie in Abschnitt 5.2, so ist

$$\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s} = r(t) \cdot (r'(t) a_3 - b'(t) \Gamma_{\mathbf{a}}(s))$$

und daher

$$N_F = \frac{1}{v_{\alpha}(t)} \cdot (r'(t) a_3 - b'(t) \Gamma_{\mathbf{a}}(s)).$$

Ist insbesondere F die geographische Parametrisierung der zweifach punktierten Sphäre $S_R^2(p_0) \setminus \{N, S\}$ (also die Rotationsflächenparametrisierung zu $\alpha :] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto R(\cos(t), \sin(t))$), so ist daher $N_F = -\frac{1}{R} \cdot (F - p_0)$.

Aussage 1. Für jeden Punkt $p \in G$ und $u, v \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\omega_p(u, v) = \det(d_p F(u), d_p F(v), N_F(p)) .$$

Beweis. Die rechte Seite der zu beweisenden Formel beschreibt für jeweils festes $p \in G$ eine alternierende 2-Form μ_p des \mathbb{R}^2 . Daher gilt $\mu_p = c_p \cdot \omega_p$ mit einem $c_p \in \mathbb{R}$. Durch Einsetzen der Standardbasis (e_1, e_2) des \mathbb{R}^2 erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu_p(e_1, e_2) &= \det\left(\frac{\partial F}{\partial t}(p), \frac{\partial F}{\partial s}(p), N_F(p)\right) = \left\langle \left(\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s}\right)(p), N_F(p) \right\rangle \\ &= \left\| \left(\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s}\right)(p) \right\| = \rho_F(p) = \rho_F(p) \cdot \det(e_1, e_2) = \omega_p(e_1, e_2) \end{aligned}$$

und somit $c_p = 1$. Damit stimmen μ und ω überein. \square

Aussage 2. Ist $\tilde{F} : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine weitere C^r -Parametrisierung derselben Fläche $[F]$, und $\varphi : \tilde{G} \rightarrow G$ die zugehörige Parametertransformation, so sind die Einheitsnormalenfelder von \tilde{F} und von F durch die Gleichung $N_{\tilde{F}} = \varepsilon \cdot (N_F \circ \varphi)$ verbunden; hierbei ist $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$, je nachdem, ob φ orientierungserhaltend oder orientierungswechselnd ist.

Beweis. Mit Hilfe der Kettenregel ergibt sich

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_1} = \frac{\partial (F \circ \varphi)}{\partial x_1} = d_{\varphi(p)} F \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right) \circ \varphi$$

und entsprechend

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right) \circ \varphi ;$$

somit

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} \times \frac{\partial \tilde{F}}{\partial s} = \det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\right) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s}\right) \circ \varphi ,$$

woraus die Behauptung folgt. \square

6.2 Der Formoperator und die zweite Fundamentalform

In der ebenen Kurventheorie spielte die zeitliche Änderung des Normalenfeldes einer Kurve α , die gemäß der Frenetgleichung $\frac{d}{ds} N_\alpha = -\kappa_\alpha \cdot T_\alpha$ durch die orientierte Krümmung κ_α von α gemessen wird, eine wesentliche Rolle. In ähnlicher Weise untersuchen wir nun die Änderung des Einheitsnormalenfeldes N_F einer C^r -Flächenparametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$.

Satz 1 und Definition 1. Die Änderung des Einheitsnormalenfeldes N_F wird durch ein C^{r-2} -Tensorfeld auf G kontrolliert. Es gilt nämlich für $p \in G$ die *Weingarten-Gleichung*

$$d_p N_F = - (d_p F) \circ A_p$$

mit dem hierdurch eindeutig bestimmten C^{r-2} -Tensorfeld $A : G \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^2)$ vom Typ $(1,1)$ (siehe Definition 2 in Abschnitt 5.6). A heißt der *Formoperator* (engl. *shape operator*) von F ; andere Bezeichnungen sind *zweiter Fundamentaltensor*, *Weingartenabbildung* und *Gestaltoperator**. Da $d_p F : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p F$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist, beschreibt der „Wert“ $A_p v$ (bis auf das Vorzeichen) die Kippgeschwindigkeit des Einheitsnormalenfeldes N_F an der Stelle p

*Die Bezeichnung „Gestaltoperator“ kenne ich von Herrn Professor DOMBROWSKI aus Köln. Sie bringt die geometrische Bedeutung von A noch klarer zur Geltung, nur kommt sie mir nicht so glatt über die Lippen.

und in Richtung von v ; damit wird offenbar das „Sich-Biegen“ der Fläche $[F]$ in der Nähe von $F(p)$ erfaßt.

Beweis. Sei $p \in G$ und $v \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $\langle N_F, N_F \rangle \equiv 1$ und deshalb $0 = d_p(\langle N_F, N_F \rangle)(v) = 2\langle d_p N_F(v), N_F(p) \rangle$ und somit $d_p N_F(v) \in T_p F$. Daher existiert genau ein Vektor, den wir mit $A_p v \in \mathbb{R}^2$ bezeichnen, so dass $d_p N_F(v) = -d_p F(A_p v)$ gilt. Hierdurch wird eine Abbildung $A_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert, die wegen der Linearität von $d_p N_F$ und $d_p F$ linear ist. Somit erhalten wir ein Tensorfeld $A : G \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $p \mapsto A_p$ vom Typ $(1,1)$, und mit diesem Tensorfeld ist die Weingarten-Gleichung erfüllt.

Es verbleibt zu zeigen, dass A ein C^{r-2} -Tensorfeld ist. Dazu fixieren wir $v \in \mathbb{R}^2$ und wenden die Folgerung aus Abschnitt 5.5 auf das C^{r-2} -Tangentialfeld $Y := -d_p N_F(v)$ an. Nach dieser Folgerung existiert genau ein C^{r-2} -Vektorfeld $X : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $Y = F_* X$, also $d_p N_F(v) = -d_p F \circ X$. Damit erfüllt X die Weingarten-Gleichung; wegen der eindeutigen Bestimmtheit von A durch diese Gleichung folgt also, dass $X = A_p v$ ist. Damit ist $A_p v$ jeweils ein C^{r-2} -Vektorfeld; weil v beliebig war, folgt hieraus, dass A ein C^{r-2} -Tensorfeld ist. \square

Beispiele 1.

- (a) **Ebene Flächenparametrisierungen.** Eine Flächenparametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ heißt *eben*, wenn es ein $q_0 \in \mathbb{E}^3$ und einen Einheitsvektor $a \in \mathbb{E}_L^3$ gibt, so dass $F(G)$ in der Ebene $q_0 + (\mathbb{R}a)^\perp$ liegt. Eine C^2 -Flächenparametrisierung ist genau dann eben, wenn ihr Formoperator identisch verschwindet.

Beweis. Ist F eben, gilt also etwa $F(G) \subset q_0 + (\mathbb{R}a)^\perp$, so ist N_F konstant gleich $\pm a$, und deshalb $d_p N_F(v) = 0$ für $p \in G$ und $v \in \mathbb{R}^2$. Nach der Weingarten-Gleichung folgt $A_p v = 0$.

Gilt umgekehrt $A \equiv 0$, so folgt aus der Weingarten-Gleichung $d N_F \equiv 0$, und somit ist N_F dann konstant, etwa gleich einem Einheitsvektor $a \in \mathbb{E}_L^3$. Ist $p_0 \in G$ fixiert und $q_0 := F(p_0) \in \mathbb{E}^3$, so betrachten wir die Funktion

$$f : G \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \langle F(p) - q_0, a \rangle.$$

Nun gilt $d_p f(v) = \langle d_p F(v), a \rangle = \langle d_p F(v), N_F(p) \rangle = 0$, also ist f konstant, und zwar gleich $f(p_0) = 0$. Das bedeutet aber, dass $F(G) \subset q_0 + (\mathbb{R}a)^\perp$ ist. \square

- (b) **Sphärische Flächenparametrisierungen.** Wir nennen eine Parametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ *sphärisch*, wenn $F(G)$ in einer Sphäre $S_R^2(q_0) \subset \mathbb{E}^3$ ($q_0 \in \mathbb{E}^3$ und $R \in \mathbb{R}_+$) liegt, wenn also

$$\langle F - q_0, F - q_0 \rangle \equiv R^2 \quad (*)$$

ist. Ist in diesem Fall F zweimal stetig differenzierbar, so ist der Formoperator eine konstante Funktion $A : G \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^2)$, nämlich $A \equiv \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ mit $\lambda = \pm 1/R$; und zwar ist genau dann $\lambda = 1/R$, wenn das Einheitsnormalenfeld N_F in die Sphäre $S_R^2(q_0)$ weist.

Beweis. Durch Differentiation von $(*)$ erhalten wir jeweils $\langle d_p F(v), F(p) - q_0 \rangle = 0$; daher ist $F(p) - q_0 \in \perp_p F$, weswegen wir

$$F - q_0 = c \cdot N_F \quad \text{mit} \quad c := \langle F - q_0, N_F \rangle \quad (\dagger)$$

schreiben können. Dabei ist wegen $(*)$ die Funktion c konstant mit $c^2 = R^2$. Durch Differentiation von (\dagger) erhalten wir $d_p F(v) = c \cdot d_p N_F(v) = -c \cdot d_p F(A_p v)$, also $A_p v = \lambda \cdot v$ mit $\lambda = -\frac{1}{c} \in \{\pm 1/R\}$. Der Fall $\lambda = 1/R$ tritt genau dann ein, wenn $N_F = -\frac{1}{R} \cdot (F - q_0)$ gilt, d.h. wenn N_F in die Sphäre weist. \square

Aussage. Ist $\tilde{F} : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine zweite C^r -Parametrisierung derselben Fläche $[F]$ und $\varphi : \tilde{G} \rightarrow G$ eine dazugehörige Parametertransformation, so hängen die Formoperatoren A und \tilde{A} der beiden Parametrisierungen durch

$$d_p \varphi \circ \tilde{A}_p = \varepsilon \cdot A_{\varphi(p)} \circ d_p \varphi \quad \text{für alle} \quad p \in G$$

zusammen, wobei $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$ gilt, je nachdem, ob φ orientierungserhaltend oder orientierungswechselnd ist.

Beweis. Nach Aussage 2 aus Abschnitt 6.1 gilt $N_{\tilde{F}} = \varepsilon \cdot N_F \circ \varphi$. Durch Differentiation dieser Gleichung und Anwendung der Weingarten-Gleichung erhält man

$$-d_{\varphi(p)} F \circ d_p \varphi \circ \tilde{A}_p = -d_p(F \circ \varphi) \circ \tilde{A}_p = -d_p \tilde{F} \circ \tilde{A}_p = d_p \tilde{N}_F = \varepsilon \cdot d_p(N_F \circ \varphi) = \varepsilon \cdot d_{\varphi(p)} N_F \circ d_p \varphi = -\varepsilon \cdot d_{\varphi(p)} F \circ A_{\varphi(p)} \circ d_p \varphi$$

und damit die Behauptung. \square

Aufgabe 1. Es seien $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ und $\tilde{F} : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{E}^3$ zwei C^r -Flächenparametrisierungen, die sich längs einer C^r -Kurve $\alpha : I \rightarrow G$ berühren, d.h.

$$F \circ \alpha = \tilde{F} \circ \alpha \quad \text{und} \quad d_{\alpha(t)} F = d_{\alpha(t)} \tilde{F} \quad \text{für alle } t \in I.$$

Dann gilt für die Formoperatoren A und \tilde{A} der beiden Parametrisierungen

$$\tilde{A}_{\alpha(t)} \alpha'(t) = A_{\alpha(t)} \alpha'(t).$$

Satz 2 und Definition 2. Es gilt für alle $p \in G$ und $u, v \in \mathbb{R}^2$

$$h_p(u, v) := g_p(A_p u, v) = \langle d_p^2 F(u, v), N_F(p) \rangle.$$

Daher ist $h : G \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $p \mapsto h_p$ ein symmetrisches C^{r-2} -Tensorfeld vom Typ (0,2) und A ein selbstadjungiertes Tensorfeld. Das Tensorfeld h heißt die *zweite Fundamentalform* der Parametrisierung F .

Aufgrund dieses Satzes ist für jeden Punkt $p_0 \in G$ die zweite Fundamentalform h_{p_0} gerade die Hesseform der „Höhenfunktion“ $G \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto \langle F(p) - F(p_0), N_F(p_0) \rangle$.

Beweis. Es seien $p \in G$ und $u, v \in \mathbb{R}^2$. Da $\langle N_F, dF(v) \rangle \equiv 0$ ist, folgt mit der Leibnizschen Regel:

$$\begin{aligned} g_p(A_p u, v) &= \langle d_p F(A_p u), d_p F(v) \rangle = -\langle d_p N_F(u), d_p F(v) \rangle \\ &= -d_p(\langle N_F, dF(v) \rangle)(u) + \langle N_F(p), d_p^2 F(u, v) \rangle = \langle N_F(p), d_p^2 F(u, v) \rangle. \end{aligned}$$

\square

Darstellung der zweiten Fundamentalform. Für die zweite Fundamentalform der Parametrisierung F gilt in allen Punkten $p \in G$

$$\begin{aligned} h_p(u, v) &= \sum_{i,k=1}^2 h_{ik}(p) \cdot u_i \cdot v_k \quad \text{mit den Funktionen} \\ h_{ik} &:= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}, N_F \right\rangle = \frac{1}{\rho_F} \cdot \det \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} \right). \end{aligned}$$

Beweis. Wegen der Bilinearität von h_p gilt $h_p(u, v) = \sum_{i,k=1}^2 h_p(e_i, e_k) u_i v_k$. Aufgrund von Satz 2 und der Definition von N_F ergibt sich:

$$h_p(e_i, e_k) = \langle d^2 F(e_i, e_k), N_F \rangle = \frac{1}{\rho_F} \cdot \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}, \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} \right\rangle = \frac{1}{\rho_F} \cdot \det \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} \right).$$

\square

Beispiele 2.

- (a)
- Die zweite Fundamentalform einer Graphenfläche.**
- Es sei

$$F : G \rightarrow \mathbb{E}^3, (t, s) \mapsto p_0 + t a_1 + s a_2 + f(t, s) a_3$$

eine Graphenflächenparametrisierung wie in Abschnitt 5.2, wir setzen jedoch jetzt voraus, dass die Funktion f mindestens C^2 -differenzierbar ist. Dann gilt für $p \in G$

$$d_p^2 F(u, v) = d_p^2 f(u, v) \cdot a_3$$

und deswegen (siehe auch Beispiel (a) in Abschnitt 6.1)

$$h_p(u, v) = \langle d^2 F(u, v), N_F \rangle = \frac{1}{\rho_F} \cdot d^2 f(u, v) .$$

Gilt $d_{p_0} f = 0$ für ein $p_0 \in G$ (siehe das Theorem in Abschnitt 5.5), so ist $N_F(p_0) = a_3$ und $\rho_F(p_0) = 1$, und deswegen $h_{p_0} = d_{p_0}^2 f$.

- (b)
- Die zweite Fundamentalform einer Rotationsfläche.**
- Es sei

$$F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3, (t, s) \mapsto p_0 + r(t) \cdot \Gamma_{\mathbf{a}}(s) + b(t) \cdot a_3$$

eine Rotationsflächenparametrisierung wie in Abschnitt 5.2, jedoch setzen wir nun voraus, dass die Profilkurve $\alpha = (r, b)$ mindestens eine C^2 -Kurve ist und dass $r > 0$ gilt. Bezeichnen wir mit v_α bzw. \varkappa_α die Bahngeschwindigkeit bzw. die orientierte Krümmung von α , so gilt für die Komponenten h_{ik} der zweiten Fundamentalform von F

$$h_{11}(t, s) = (\varkappa_\alpha \cdot v_\alpha^2)(t) \quad , \quad h_{12} = 0 \quad \text{und} \quad h_{22}(t, s) = \frac{r \cdot b'}{v_\alpha}(t) .$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie von Rotationsflächen ist es nicht verwunderlich, dass die Funktionen h_{ik} ebenso wie die Komponenten g_{ik} des Maßtensors nicht von der Variablen s abhängen.

Aufgabe 2. In der Situation der Aussage dieses Abschnitts gilt für die zweite Fundamentalform \tilde{h} von \tilde{F} :

$$\tilde{h}_p(u, v) = \varepsilon \cdot h_{\varphi(p)}(d_p \varphi(u), d_p \varphi(v)) \quad \text{für alle } p \in \tilde{G} \text{ und } u, v \in \mathbb{R}^2 .$$

6.3 Die beiden Fundamentalformen bestimmen die Parametrisierung

Teil (b) des folgenden Satzes zeigt, dass eine Flächenparametrisierung durch ihre beiden Fundamentalformen — den Maßtensor und die zweite Fundamentalform — im Wesentlichen eindeutig bestimmt wird. Diese Aussage ist ein Analogon für die Flächentheorie zur entsprechenden Eindeutigkeitsaussage im Hauptsatz der Kurventheorie (siehe Abschnitt 3.2, Theorem (b); Abschnitt 4.3, Theorem (b) und Abschnitt 4.7, Hauptsatz der Kurventheorie (b)).

Satz.

- (a) (*Bewegungsinvarianz der Fundamentalformen.*) Sei $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine C^r -Flächenparametrisierung und $\Phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine orientierungserhaltende Isometrie (d.h. Φ ist eine affine Abbildung mit $\Phi_L \in \text{SO}(\mathbb{E}_L^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, siehe Abschnitt 1.6). Dann ist $\tilde{F} := \Phi \circ F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine weitere Flächenparametrisierung, und für die Maßstensoren g, \tilde{g} und die zweiten Fundamentalformen h, \tilde{h} von F bzw. von \tilde{F} gilt

$$\tilde{g} = g \quad \text{und} \quad \tilde{h} = h .$$

- (b) (*Die Fundamentalformen bestimmen die Flächenparametrisierung im Wesentlichen eindeutig.*) Es seien $F, \tilde{F} : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ zwei C^r -Flächenparametrisierungen. Für ihre Fundamentalformen g, h bzw. \tilde{g}, \tilde{h} gelte

$$\tilde{g} = g \quad \text{und} \quad \tilde{h} = h .$$

Dann existiert eine orientierungserhaltende Isometrie Φ von \mathbb{E}^3 mit $\tilde{F} = \Phi \circ F$.

Bemerkung. Der Satz bleibt richtig, wenn man jeweils an Stelle der zweiten Fundamentalform den Formoperator betrachtet.

Beweis. Zu (a). Für $p \in G$ und $u, v \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{g}_p(u, v) &= \langle d_p \tilde{F}(u), d_p \tilde{F}(v) \rangle = \langle d_p(\Phi \circ F)(u), d_p(\Phi \circ F)(v) \rangle = \langle \Phi_L(d_p F(u)), \Phi_L(d_p F(v)) \rangle \\ &= \langle d_p F(u), d_p F(v) \rangle = g_p(u, v) \end{aligned}$$

und somit $\tilde{g} = g$, daher auch $\rho_{\tilde{F}} = \rho_F$. Weiter ist

$$N_{\tilde{F}} = \frac{1}{\rho_{\tilde{F}}} \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} \times \frac{\partial \tilde{F}}{\partial s} \right) = \frac{1}{\rho_F} \left(\left(\Phi_L \circ \frac{\partial F}{\partial t} \right) \times \left(\Phi_L \circ \frac{\partial F}{\partial s} \right) \right) = \frac{1}{\rho_F} \Phi_L \left(\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s} \right) = \Phi_L \circ N_F$$

und daher nach Satz 2 aus Abschnitt 6.2

$$\tilde{h}_p(u, v) = \langle d_p^2 \tilde{F}(u, v), N_{\tilde{F}}(p) \rangle = \langle \Phi_L \circ d_p^2 F(u, v), \Phi_L \circ N_F(p) \rangle = \langle d_p^2 F(u, v), N_F(p) \rangle = h_p(u, v) .$$

Zu (b). Für $p \in G$ gilt wegen $g_p = \tilde{g}_p$ die Beziehung $\rho_F(p) = \rho_{\tilde{F}}(p)$ und daher $\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_i}, \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_j} \rangle = \langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \rangle$. Deswegen existiert jeweils ein $B_p \in \text{SO}(\mathbb{E}_L^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit

$$B_p \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \right) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_i}(p) \quad \text{und} \quad B_p N_F(p) = N_{\tilde{F}}(p) . \quad (1)$$

Man beachte, dass aus dem ersten Teil dieser Bedingung folgt: $d_p \tilde{F} = B_p \circ d_p F$. — Wir zeigen im Folgenden, dass B_p tatsächlich von p unabhängig ist.

Dazu beachten wir zunächst, dass für beliebige Vektoren $u, w \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\tilde{g}(u, w) = g(u, w)$, also $\langle d\tilde{F}(u), d\tilde{F}(w) \rangle = \langle dF(u), dF(w) \rangle$. Durch Differentiation dieser Gleichung in die Richtung von $v \in \mathbb{R}^2$ ergibt sich:

$$\langle d^2 \tilde{F}(u, v), d\tilde{F}(w) \rangle + \langle d\tilde{F}(u), d^2 \tilde{F}(v, w) \rangle = \langle d^2 F(u, v), dF(w) \rangle + \langle dF(u), d^2 F(v, w) \rangle .$$

Indem man in diese Gleichung für beliebige zueinander orthogonale Vektoren $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ einerseits $u = w = a_1$, $v = a_2$, andererseits $u = w = a_2$, $v = a_1$ setzt, sieht man, dass

$$\langle d^2 \tilde{F}(a_1, a_2), d\tilde{F}(a_k) \rangle = \langle d^2 F(a_1, a_2), dF(a_k) \rangle \quad \text{für } k \in \{1, 2\}$$

gilt, setzt man nun $u = v = a_k$ und $w = a_\ell$, so erhält man unter Verwendung dieser Gleichung auch

$$\langle d^2 \tilde{F}(a_k, a_k), d\tilde{F}(a_\ell) \rangle = \langle d^2 F(a_k, a_k), dF(a_\ell) \rangle \quad \text{für } k, \ell \in \{1, 2\} .$$

Insgesamt gilt daher für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^2$:

$$\langle d^2 \tilde{F}(u, v), d\tilde{F}(w) \rangle = \langle d^2 F(u, v), dF(w) \rangle ,$$

also in $p \in G$:

$$\langle d_p^2 \tilde{F}(u, v), d_p \tilde{F}(w) \rangle = \langle d_p^2 F(u, v), d_p F(w) \rangle = \langle B_p \circ d_p^2 F(u, v), B_p \circ d_p F(w) \rangle = \langle B_p \circ d_p^2 F(u, v), d_p \tilde{F}(w) \rangle .$$

Daraus ergibt sich, dass der \tilde{F} -Tangentialanteil von $d_p^2 \tilde{F}(u, v)$ gleich dem \tilde{F} -Tangentialanteil von $B_p(d_p^2 F(u, v))$ ist. Da außerdem nach Satz 2 aus Abschnitt 6.2

$$\langle d_p^2 \tilde{F}(u, v), N_{\tilde{F}}(p) \rangle = \tilde{h}_p(u, v) = h_p(u, v) = \langle d_p^2 F(u, v), N_F(p) \rangle = \langle B_p d_p^2 F(u, v), B_p N_F(p) \rangle = \langle (B_p d_p^2 F(u, v), N_{\tilde{F}}(p)) \rangle$$

gilt, ergibt sich

$$d_p^2 \tilde{F}(u, v) = B_p d_p^2 F(u, v) .$$

Andererseits ist nach der Leibnizregel (angewendet auf die bilineare Abbildung $O(\mathbb{E}_L^3) \times \mathbb{E}_L^3 \rightarrow \mathbb{E}_L^3, (L, v) \mapsto L(v)$)

$$d_p^2 \tilde{F}(u, v) = d_p(d\tilde{F}(u))(v) \stackrel{(1)}{=} d_p(B \circ dF(u))(v) = d_p B(v) \circ dF(u) + B_p \circ d_p^2 F(u, v) .$$

Durch Vergleich der letzten beiden Gleichungen erhält man

$$d_p B(v) \circ dF(u) = 0 . \quad (2)$$

Andererseits erhält man aus der Gleichung $N_{\tilde{F}}(p) = B_p \circ N_F(p)$ in (1) und der Weingarten-Gleichung (wobei A und \tilde{A} die Formoperatoren von F bzw. \tilde{F} bezeichnen):

$$\begin{aligned} -d_p \tilde{F}(\tilde{A}_p(v)) &= d_p N_{\tilde{F}}(v) = d_p(B \circ N_F)(v) = d_p B(v) \circ N_F(p) + B_p \circ d_p N_F(v) \\ &= d_p B(v) \circ N_F(p) - B_p \circ d_p F(A_p V) = d_p B(v) \circ N_F(p) - d_p \tilde{F}(A_p V) . \end{aligned}$$

Andererseits gilt wegen $g = \tilde{g}$ und $h = \tilde{h}$ auch $A = \tilde{A}$, deshalb ergibt sich aus der letzten Gleichung

$$d_p B(v) \circ N_F(p) = 0 . \quad (3)$$

Aus den beiden Gleichungen (2) und (3) folgt $d_p B = 0$. Also ist B_p konstant, etwa gleich einem $B \in \text{SO}(\mathbb{E}_L^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Wir fixieren nun ein $p_0 \in G$ und definieren die orientierungserhaltende Isometrie $\Phi \in I(\mathbb{E}^3)$ durch

$$\forall q \in \mathbb{E}^3 : \Phi(q) := \tilde{F}(p_0) + B(q - F(p_0)) .$$

Dann gilt

$$d(\tilde{F} - \Phi \circ F) = d\tilde{F} - \Phi_L(dF) = B \circ dF - B \circ dF = 0$$

und somit ist $\tilde{F} - \Phi \circ F$ konstant. Da $\Phi(F(p_0)) = \tilde{F}(p_0)$ gilt, ergibt sich $\tilde{F} = \Phi \circ F$. \square

Angesichts dieses Satzes ist es eine natürliche Frage, ob es auch für den Existenz-Teil des Hauptsatzes der Kurventheorie eine Entsprechung in der Flächentheorie gibt, ob also zu einem gegebenen Riemannschen Gebiet (G, g) und einem zusätzlichen Tensorfeld h vom Typ $(0, 2)$ auf G eine Flächenparametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ mit Maßtensor g und zweiter Fundamentalform h existiert. Da diese Forderung auf ein System partieller Differentialgleichungen für F führt, sollte es nicht überraschen, dass eine solche Parametrisierung F nur unter zusätzlichen Voraussetzungen an g und h existiert. Insofern ist die Situation komplizierter als in der Kurventheorie, wo Bahngeschwindigkeit und Frenet-Krümmungen der Kurve beliebig vorgegeben werden konnten. Wir werden auf diese Problematik in Kapitel 7 zurückkommen.

6.4 Normalkrümmung und geodätische Krümmung einer Flächenkurve

Es seien $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine Parametrisierung einer C^r -Fläche und $\gamma = F \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine reguläre C^s -Flächenkurve mit $2 \leq s \leq r$, siehe Definition 1 aus Abschnitt 5.6.

Wir wollen die Geometrie der Kurve γ in Beziehung zur Fläche $[F]$ untersuchen, und führen hierzu ein Orthonormalbasisfeld längs γ ein, das sowohl an die Kurve γ als auch an die Flächenparametrisierung F angepasst ist. Zu diesem Zweck beachten wir, dass T_γ und $N_F \circ \alpha$ zwei ausgezeichnete, zueinander orthogonale Einheitsvektorfelder längs γ sind. Durch Hinzunahme des Vektorfeldes $E := (N_F \circ \alpha) \times T_\gamma$ erhalten wir ein positiv orientiertes Orthonormalbasisfeld $(T_\gamma, E, N_F \circ \alpha)$, das sogenannte *begleitende Darboux'sche 3-Bein der Kurve γ* .

Da das Krümmungsvektorfeld $\frac{d}{ds}T_\gamma$ der Kurve γ senkrecht auf T_γ steht, besitzt es die Darstellung

$$\frac{d}{ds}T_\gamma = \kappa_g \cdot E + \kappa_n \cdot (N_F \circ \alpha)$$

mit den C^{s-2} -Funktionen

$$\kappa_g := \left\langle \frac{d}{ds}T_\gamma, E \right\rangle \quad \text{und} \quad \kappa_n := \left\langle \frac{d}{ds}T_\gamma, N_F \circ \alpha \right\rangle.$$

Diese Funktionen heißen die *geodätische Krümmung* und die *Normalkrümmung* der Flächenkurve γ (man beachte die folgende Aussage 4). Natürlich hängen diese beiden Funktionen mit der Krümmung $\kappa_\gamma = \left\| \frac{d}{ds}T_\gamma \right\|$ der „Raumkurve“ γ durch

$$\kappa_\gamma^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$$

zusammen. Insbesondere gilt daher

$$\kappa_\gamma \geq |\kappa_n|.$$

Diese Abschätzung ist besonders in Verbindung mit der folgenden Aussage 1 von Interesse. Für die geodätische Krümmung gilt

$$\kappa_g = \frac{1}{v_\gamma^3} \cdot \det(\gamma', \gamma'', N_F \circ \alpha). \quad (*)$$

Beweis. Es gilt $\frac{d}{ds}T_\gamma = \frac{1}{v_\gamma} \left(\frac{1}{v_\gamma} \gamma' \right)' = \frac{1}{v_\gamma} \left(\left(\frac{1}{v_\gamma} \right)' \gamma' + \frac{1}{v_\gamma} \gamma'' \right)$ und deswegen

$$\kappa_g = \left\langle \frac{d}{ds}T_\gamma, (N_F \circ \alpha) \times T_\gamma \right\rangle = \det(N_F \circ \alpha, T_\gamma, \frac{d}{ds}T_\gamma) = \frac{1}{v_\gamma^3} \det(N_F \circ \alpha, \gamma', \gamma'') = \frac{1}{v_\gamma^3} \det(\gamma', \gamma'', N_F \circ \alpha).$$

□

Genauere Auskunft über die Normalkrümmung gibt der folgende Satz. Darin bezeichnet N_γ das Hauptnormalenfeld von γ .

Satz von Meusnier. Besitzt die Flächenkurve γ positive Krümmung κ_γ , so berechnet sich die Normalkrümmung von γ durch

$$\kappa_n = \kappa_\gamma \cdot \cos(\angle(N_\gamma, N_F \circ \alpha)).$$

Beweis. $\kappa_n = \left\langle \frac{d}{ds}T_\gamma, N_F \circ \alpha \right\rangle = \left\langle \kappa_\gamma \cdot N_\gamma, N_F \circ \alpha \right\rangle = \kappa_\gamma \cdot \cos(\angle(N_\gamma, N_F \circ \alpha)).$

□

Außerdem können wir die Normalkrümmung von γ durch die zweite Fundamentalform h der Parametrisierung F ausdrücken; es gilt nämlich

Aussage 1. Für alle $t \in I$ ist

$$\kappa_n(t) = \frac{h_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))}{g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \kappa_n(t) &= \left\langle \frac{d}{ds} T_\gamma, N_F \circ \alpha \right\rangle(t) = \frac{1}{v_\gamma} \langle T'_\gamma, N_F \circ \alpha \rangle(t) = -\frac{1}{v_\gamma} \langle T_\gamma, (N_F \circ \alpha)' \rangle(t) \\ &= -\frac{1}{v_\gamma(t)^2} \langle \gamma'(t), d_{\alpha(t)} N_F(\alpha'(t)) \rangle = \frac{1}{v_\gamma(t)^2} \langle d_{\alpha(t)} F(\alpha'(t)), d_{\alpha(t)} F(A_{\alpha(t)} \alpha'(t)) \rangle \\ &= \frac{1}{v_\gamma(t)^2} g(\alpha'(t), A_{\alpha(t)}(\alpha'(t))) = \frac{1}{g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} h_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)). \end{aligned}$$

□

Dieses Ergebnis ist verblüffend, zeigt es doch, dass man die Normalkrümmung von γ durch *einmaliges* Differenzieren von α berechnen kann, andererseits ist für diese Berechnung die *zweifache* Differentiation von F nötig. κ_n gibt demnach weniger eine Auskunft über die Krümmung von γ als über die Krümmung von F in Richtung von α . Aus diesem Grund bezeichnet man für jedes $p \in G$ die Funktion

$$\text{NK}_p : v \mapsto h_p(v, v) \quad \text{für } v \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } g_p(v, v) = 1$$

als die *Normalkrümmung der Parametrisierung* F in p . Wir werden sie in dem folgenden Abschnitt weiter untersuchen.

Aufgabe 1. Unter Berücksichtigung von Aussage 1 mache man sich den Satz von Meusnier klar, indem man eine Wurst unter verschiedenem Neigungswinkel zerschneidet und die Krümmung der Schnittkurve betrachtet.

Natürlich ist es naheliegend nach den Kurven verschwindender geodätischer Krümmung bzw. verschwindender Normalkrümmung zu fragen. Dazu folgende

Definition. Es sei $\gamma = F \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine C^2 -Kurve der Fläche $[F]$.

- (a) γ heißt eine *geodätische Linie* (kurz: eine *Geodätische*) der Fläche $[F]$, wenn für alle $t \in I$ der Beschleunigungsvektor $\gamma''(t)$ in Richtung von $N_F \circ \alpha(t)$ weist, wenn also

$$\gamma'' = \langle \gamma'', N_F \circ \alpha \rangle \cdot (N_F \circ \alpha)$$

ist.

- (b) γ heißt eine *Asymptotenlinie* der Fläche $[F]$, wenn ihre Normalkrümmung κ_n überall verschwindet.
- (c) Ist $p \in G$, so sagt man, dass ein Vektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in p in *Asymptotenrichtung* der Parametrisierung F weist, wenn $h_p(v, v) = 0$ ist.

Asymptotenlinien werden durch folgende geometrische Tatsache charakterisiert:

Aussage 2. Hat die Kurve $\gamma = F \circ \alpha$ positive Krümmung, so ist sie genau dann eine Asymptotenlinie der Fläche $[F]$, wenn für alle $t \in I$ der Richtungsvektorraum $\text{Spann}\{T_\gamma(t), N_\gamma(t)\}$ der Schmiegeebene von γ mit dem Tangentialraum $T_{\alpha(t)}F$ der Parametrisierung F übereinstimmt.

Beweis. Man beachte den Satz von MEUSNIER. \square

Die Geodätischen einer Fläche sind gerade die Flächenkurven, die sich *innerhalb* der Fläche nicht krümmen. Denn es gilt:

Aussage 3. Die reguläre Kurve $\gamma = F \circ \alpha$ ist genau dann eine Geodätische der Fläche $[F]$, wenn

$$\|\gamma'\| \equiv \text{const.} \quad \text{und} \quad \kappa_g \equiv 0$$

ist.

Beweis. Aus $\gamma' = v_\gamma \cdot T_\gamma$ folgt $\gamma'' = v'_\gamma \cdot T_\gamma + v_\gamma^2 \cdot (\kappa_g \cdot E + \kappa_n \cdot N_F \circ \alpha)$. Daher ist γ genau dann eine Geodätische der Fläche $[F]$, wenn $v'_\gamma \equiv \kappa_g \equiv 0$ ist, woraus die Behauptung folgt. \square

Beispiel 1. Es seien $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ die kanonische Parametrisierung einer singularitätenfreien Rotationsfläche zu einer nach der Bogenlänge parametrisierten C^2 -Profilkurve $\alpha = (r, b)$ und $\gamma := F^s$ ein Meridian der Rotationsfläche zu einem festen Parameter $s \in \mathbb{R}$; es gilt $\gamma = F \circ \alpha_s$ mit $\alpha_s : t \mapsto (t, s)$. Wir zeigen nun, dass γ eine Geodätische der Rotationsfläche ist. Zunächst ist

$$v_\gamma^2 = \|\gamma'\|^2 = (r')^2 + (b')^2 \equiv 1.$$

Daher ist nach (*) die geodätische Krümmung von γ durch $\kappa_g = \det(\gamma', \gamma'', N_F \circ \alpha_s)$ gegeben. Nun ist

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= p_0 + r(t) \cdot \Gamma_{\mathbf{a}}(s) + b(t) \cdot a_3, \quad \text{also} \\ \gamma'(t) &= r'(t) \cdot \Gamma_{\mathbf{a}}(s) + b'(t) \cdot a_3, \quad \text{also} \\ \gamma''(t) &= r''(t) \cdot \Gamma_{\mathbf{a}}(s) + b''(t) \cdot a_3 \quad \text{und} \\ N_F \circ \alpha_s(t) &= r'(t) a_3 - b'(t) \Gamma_{\mathbf{a}}(s), \end{aligned}$$

womit $\kappa_g = 0$ folgt.

Beispiel 2. Eine reguläre Flächenkurve $\gamma = F \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ ist genau dann gleichzeitig eine Geodätische und eine Asymptotenlinie der Fläche, wenn es einen Punkt $p_0 \in \mathbb{E}^3$ und einen Vektor $a \neq 0$ in \mathbb{E}^3 gibt, so dass $\gamma(t) = p_0 + t \cdot a$ für alle $t \in I$ ist. Insbesondere sind die Erzeugenden einer Regelfläche sowohl Geodätische als auch Asymptotenlinien der Regelfläche.

Aussage 4. Es sei $\gamma = F \circ \alpha$ eine reguläre Flächenkurve der Fläche $[F]$. In der Situation der Aussage 2 aus Abschnitt 6.1 gilt mit $\tilde{\alpha} := \varphi^{-1} \circ \alpha$

$$\begin{aligned} \gamma &= \tilde{F} \circ \tilde{\alpha}, \quad N_{\tilde{F}} \circ \tilde{\alpha} = \varepsilon \cdot (N_F \circ \alpha), \quad \tilde{E} = \varepsilon \cdot E, \\ \tilde{\kappa}_g &= \varepsilon \cdot \kappa_g \quad \text{und} \quad \tilde{\kappa}_n = \varepsilon \cdot \kappa_n. \end{aligned}$$

Daher sind auch die Definitionen der Begriffe „geodätische Linie“ und „Asymptotenlinie“ von der Wahl der Parametrisierung der Fläche $[F]$ unabhängig.

Aufgabe 2. Es seien $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ die kanonische Parametrisierung einer singularitätenfreien Rotationsfläche zu einer nach der Bogenlänge parametrisierten C^2 -Profilkurve $\alpha = (r, b)$ und $\gamma := F_t$ ein Breitenkreis der Rotationsfläche zu einem festen Parameter $t \in I$; es gilt $\gamma = F \circ \alpha_t$ mit $\alpha_t : s \mapsto (t, s)$.

- (a) Man beweise, dass γ die konstante geodätische Krümmung $r'(t)/r(t)$ hat.
- (b) Man zeige, dass es (im Wesentlichen genau) eine singularitätenfreie Rotationsfläche gibt, deren Breitenkreise alle die geodätische Krümmung 1 haben, und bestimme die Profilkurve dieser Fläche. Man nennt diese Profilkurve eine *Traktrix*.

6.5 Die skalaren Krümmungsgrößen

Wir betrachten wie zuvor eine C^r -Flächenparametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ zusammen mit ihrem Maßtensor g , ihrer Volumenform ω , ihrem Formoperator A , und ihrer zweiten Fundamentalform h .

Um die Untersuchung des Formoperators A zu erleichtern, führen wir nun mehrere skalare Funktionen ein, die Aspekte des Krümmungstensors beschreiben. Diese heißen die *skalaren Krümmungsgrößen* von F . Wem die Menge der verschiedenen skalaren Krümmungsgrößen etwas unübersichtlich erscheint, der mache sich klar, dass es sich bei ihnen nicht um neuartige Objekte handelt, sondern sie alle aus ein-und-derselben Größe, nämlich dem Formoperator von F , hergeleitet sind.

Satz und Definition 1. Für $p \in G$ ist das charakteristische Polynom des selbstadjungierten Endomorphismus A_p

$$\lambda^2 - 2H_F(p) \cdot \lambda + K_F(p)$$

gegeben durch die Funktionen

$$H_F : G \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \frac{1}{2} \text{Spur}(A_p) \quad \text{und} \quad K_F : G \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \det(A_p).$$

K_F heißt die *Gaußsche Krümmung* von F und H_F die *mittlere Krümmung* von F . Weil A_p jeweils selbstadjungiert ist, gilt auf jeden Fall $H_F^2 - K_F \geq 0$, und die Eigenwerte von A_p werden durch $\lambda_1(p)$ und $\lambda_2(p)$ mit den Funktionen

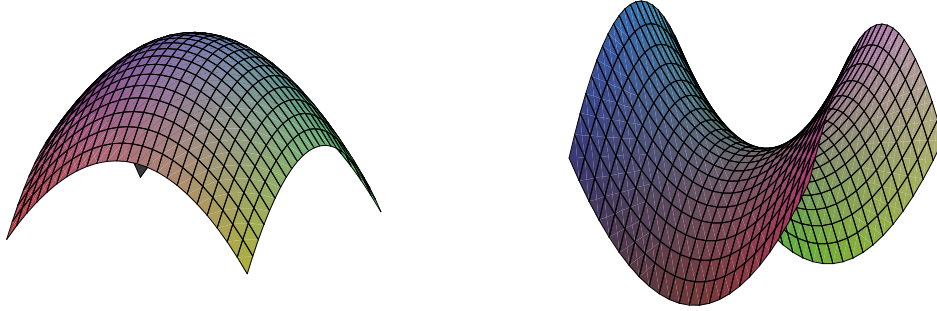
$$\lambda_1 := H_F - \sqrt{H_F^2 - K_F} \quad \text{und} \quad \lambda_2 := H_F + \sqrt{H_F^2 - K_F}$$

gegeben. λ_1 und λ_2 heißen die *Hauptkrümmungen* von F . Es gilt

$$K_F \equiv \lambda_1 \cdot \lambda_2, \quad H_F \equiv \frac{1}{2} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) \quad \text{und} \quad H_F^2 - K_F \equiv \frac{1}{4} \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)^2.$$

Die Funktionen K_F und H_F sind $(r-2)$ -mal stetig differenzierbar; hingegen sind die Funktionen λ_1 und λ_2 zwar stetig, aber im Allgemeinen nur in den „Nicht-Nabelpunkten“ (vgl. die folgende Definition 2 (b)) $(r-2)$ -mal stetig differenzierbar.

Die folgenden beiden Bilder zeigen die typische Gestalt von Flächen positiver bzw. negativer Gaußscher Krümmung. Eine Möglichkeit, sich dies klarzumachen, besteht darin, die gegebene Fläche lokal als Graphenfläche aufzufassen (siehe das Theorem aus Abschnitt 5.5), und dafür die Beschreibung der zweiten Fundamentalform von Graphenflächen aus Beispiel 2(a) in Abschnitt 6.2, sowie die Extremwerttheorie auszunutzen.



Beispiel 1. Ist F eine ebene Flächenparametrisierung (siehe Beispiel 1(a) aus Abschnitt 6.2), so verschwinden die Krümmungsfunktionen K_F, H_F, λ_1 und λ_2 . Ist F eine sphärische Flächenparametrisierung, sagen wir $F(G) \subset S_R(q_0)$ (siehe Beispiel 1(b) aus Abschnitt 6.2), so gilt $K_F = 1/R^2$ und $H_F = \lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1/R$.

Aussage 1. In der Situation der Aussage aus Abschnitt 6.2 hängen die skalaren Krümmungsgrößen der Parametrisierungen F und \tilde{F} durch folgende Beziehungen zusammen:

$$K_{\tilde{F}} = K_F \circ \varphi \quad , \quad H_{\tilde{F}} = \varepsilon \cdot (H_F \circ \varphi) \quad , \quad \tilde{\lambda}_1 = \varepsilon \cdot (\lambda_1 \circ \varphi) \quad \text{und} \quad \tilde{\lambda}_2 = \varepsilon \cdot (\lambda_2 \circ \varphi) \quad .$$

Man präge sich also ein: Wechselt man die Orientierung der Parametrisierung F , so bewirkt dies einen Vorzeichenwechsel bei der mittleren Krümmung und den Hauptkrümmungen; hingegen ist die Gaußsche Krümmung von der Orientierungswahl unabhängig.

Aufgabe 1. Die äußeren Krümmungsgrößen spezieller affiner Bilder von Flächen.

Ist $\Phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ ein C^r -Diffeomorphismus, so ist unter den Voraussetzungen dieses Abschnittes auch $\tilde{F} := \Phi \circ F$ eine Parametrisierung einer singularitätenfreien C^r -Fläche. In zwei Spezialfällen sollen die äußeren Krümmungsgrößen von \tilde{F} untersucht werden:

- (a) Ist Φ eine *orientierungstreue Isometrie* von \mathbb{E}^3 , so haben F und \tilde{F} dieselben Maßtensoren und Formoperatoren. Daher stimmen auch die zweiten Fundamentalformen, die Gaußschen Krümmungen, die mittleren Krümmungen und die Hauptkrümmungen der beiden Parametrisierungen überein.
- (b) Es sei Φ eine *Homothetie* von \mathbb{E}^3 , d.h.: Es existiert ein Punkt $q_0 \in \mathbb{E}^3$ und ein „Streckungsfaktor“ $c \in \mathbb{R}_+$, so dass für alle $q \in \mathbb{E}^3$

$$\Phi(q) = q_0 + c \cdot (q - q_0)$$

gilt. Kennzeichnen wir die zu \tilde{F} gehörigen Größen durch eine Schlange \sim , so gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= c^2 \cdot g \quad , \quad \tilde{\omega} = c^2 \cdot \omega \quad , \quad N_{\tilde{F}} = N_F \quad , \quad \tilde{A} = \frac{1}{c} \cdot A \quad , \quad \tilde{h} = c \cdot h \quad , \\ K_{\tilde{F}} &= \frac{1}{c^2} \cdot K_F \quad , \quad H_{\tilde{F}} = \frac{1}{c} \cdot H_F \quad \text{und} \quad \tilde{\lambda}_i = \frac{1}{c} \cdot \lambda_i \quad \text{für } i = 1, 2 \quad . \end{aligned}$$

Definition 2. Ein Punkt $p \in G$ bzw. sein Bildpunkt $F(p)$ heißt ein

- (a) *planarer Punkt* von F bzw. von $[F]$, wenn $A_p = 0$ ist,
- (b) *Nabelpunkt* von F bzw. von $[F]$, wenn $A_p = c \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ mit einem $c \in \mathbb{R}$ gilt,
- (c) *elliptischer Punkt* von F bzw. von $[F]$, wenn $K_F(p) > 0$ ist,
- (d) *hyperbolischer Punkt* von F bzw. von $[F]$, wenn $K_F(p) < 0$ ist, und ein
- (e) *parabolischer Punkt* von F bzw. von $[F]$, wenn $K_F(p) = 0$ ist.

Beispiel 2. Ist F eine ebene oder sphärische Flächenparametrisierung, so sind alle ihre Punkte Nabelpunkte; im ebenen Fall sind sie sogar planar (daher der Name „planarer Punkt“); siehe die Beispiele 1 aus Abschnitt 6.2 und vor allem den folgenden Satz.

Aussage 2.

- (a) Jeder planare Punkt von $[F]$ ist auch ein Nabelpunkt und ein parabolischer Punkt von $[F]$.
- (b) Jeder Nabelpunkt von $[F]$ ist entweder ein elliptischer oder ein planarer Punkt von $[F]$.

Satz. Eine singularitätenfreie C^3 -Flächenparametrisierung F ist genau dann eben oder sphärisch, wenn jeder ihrer Punkte ein Nabelpunkt ist.

Beweis. Für die Implikation „ \Rightarrow “ vergleiche man Beispiel 2. Zum Beweis der Implikation „ \Leftarrow “ gehen wir davon aus, dass $A = \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ mit einer geeigneten Funktion $\lambda : G \rightarrow \mathbb{R}$ gilt. Mit A ist auch λ eine C^1 -Funktion. Die Weingartengleichung lautet in diesem Fall

$$dN_F = -\lambda \cdot dF. \quad (*)$$

Durch Differentiation erhalten wir daraus jeweils $d_p^2 N_F(u, v) = -d_p \lambda(u) \cdot d_p F(v) - \lambda(p) \cdot d_p^2 F(u, v)$. Aufgrund der Symmetrie der Differentiale zweiter Ordnung folgt daher $d_p \lambda(u) \cdot d_p F(v) = d_p \lambda(v) \cdot d_p F(u)$ für alle $p \in G$ und $u, v \in \mathbb{R}^2$. Wäre nun $d_p \lambda \neq 0$, etwa $d_p \lambda(u) = 1$ für ein $u \in \mathbb{R}^2$, so würde für beliebiges $v \in \mathbb{R}^2$ folgen: $d_p F(v) = d_p \lambda(v) \cdot d_p F(u)$; somit wäre $d_p F(\mathbb{R}^2)$ höchstens eindimensional, im Widerspruch zur Injektivität von $d_p F$. Also gilt $d_p \lambda = 0$ und somit ist λ konstant. Im Falle $\lambda \equiv 0$ ist $A \equiv 0$ und somit F eben nach dem Beispiel 1(a) aus Abschnitt 6.2. Ist aber $\lambda \neq 0$, so differenzieren wir die Abbildung $Q : G \rightarrow \mathbb{E}^3$, $p \mapsto F(p) + \frac{1}{\lambda} \cdot N_F(p)$ und erhalten wegen $(*)$ $dQ \equiv 0$; d.h.: Es existiert ein Punkt $q_0 \in \mathbb{E}^3$, so dass $F - q_0 = -\frac{1}{\lambda} \cdot N_F$ ist. Somit ist $\langle F - q_0, F - q_0 \rangle \equiv R^2$ mit $R := |1/\lambda|$. \square

Definition 3. Die Eigenvektoren v des Formoperators A_p mit $g_p(v, v) = 1$ heißen *Hauptkrümmungsrichtungen* von F in p . Eine reguläre C^1 -Flächenkurve $\gamma = F \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ nennt man eine *Krümmungslinie* der Fläche $[F]$, wenn für alle $t \in I$ der Tangentenvektor $\alpha'(t)$ in eine Hauptkrümmungsrichtung von F weist, wenn also jeweils

$$A_{\alpha(t)} \alpha'(t) = \lambda_1(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \quad \text{oder} \quad A_{\alpha(t)} \alpha'(t) = \lambda_2(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$$

ist.

Obwohl in diese Definition der Krümmungslinie die Parametrisierung F wesentlich eingeht, ist der Begriff „Krümmungslinie“ von der speziellen Wahl der Parametrisierung unabhängig. Dies folgt aus der Aussage 4 aus Abschnitt 6.4 und aus

Aussage 3. Für eine reguläre C^1 -Flächenkurve $\gamma = F \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ mit Normalkrümmung κ_n sind die folgenden Aussagen paarweise äquivalent:

- (a) γ ist eine Krümmungslinie der Fläche $[F]$.
- (b) Für jedes $t \in I$ sind die Vektoren $(N_F \circ \alpha)'(t)$ und $\gamma'(t)$ linear abhängig.
- (c) $(N_F \circ \alpha)' = -\kappa_n \cdot \gamma'$
- (d) $\forall t \in I : A_{\alpha(t)} \alpha'(t) = \kappa_n(t) \cdot \alpha'(t)$

Für eine Krümmungslinie $\gamma = F \circ \alpha$ stimmt also die Normalkrümmung $\kappa_n(t)$ jeweils mit der zu der Krümmungslinie korrespondierenden Hauptkrümmung von F im Punkt $\alpha(t)$ überein.

Beweis. Wegen $\gamma'(t) = d_{\alpha(t)}F(\alpha'(t))$ und $(N_F \circ \alpha)'(t) = -d_{\alpha(t)}F(A_{\alpha(t)}\alpha'(t))$ gilt genau dann $(N_F \circ \alpha)'(t) = c \cdot \gamma'(t)$, wenn $A_{\alpha(t)}\alpha'(t) = -c \cdot \alpha'(t)$ ist, womit insbesondere die Äquivalenz (a) \Leftrightarrow (b) bewiesen ist. Im Falle (b) gilt $(N_F \circ \alpha)' = \|\gamma'\|^{-2} \cdot \langle (N_F \circ \alpha)', \gamma' \rangle \cdot \gamma'$. Wegen $\langle N_F \circ \alpha, \gamma' \rangle \equiv 0$ ist $\langle (N_F \circ \alpha)', \gamma' \rangle = -\langle N_F \circ \alpha, \gamma'' \rangle$; setzt man hier $\gamma'' = v_\gamma' \cdot T_\gamma + v_\gamma^2 \cdot (dT_\gamma/ds)$ ein, so folgt (c) mit der Definition von κ_n . Hieraus ergibt sich (d) mit den ersten beiden Zeilen dieses Beweises. (d) \Rightarrow (a) ist trivial. \square

Beispiele 3.

- (a) Ist F eine ebene oder sphärische C^r -Flächenparametrisierung, so ist jede reguläre Flächenkurve $\gamma = F \circ \alpha$ eine Krümmungslinie.
- (b) Es seien $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ und $\tilde{F} : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ zwei singularitätenfreie C^r -Parametrisierungen, die sich längs einer regulären C^1 -Kurve $\alpha : I \rightarrow G$ berühren oder unter einem konstanten Winkel schneiden, für die also gilt

$$F \circ \alpha = \tilde{F} \circ \alpha =: \gamma \quad \text{und} \quad \langle N_F \circ \alpha, N_{\tilde{F}} \circ \alpha \rangle \equiv \text{const.}$$

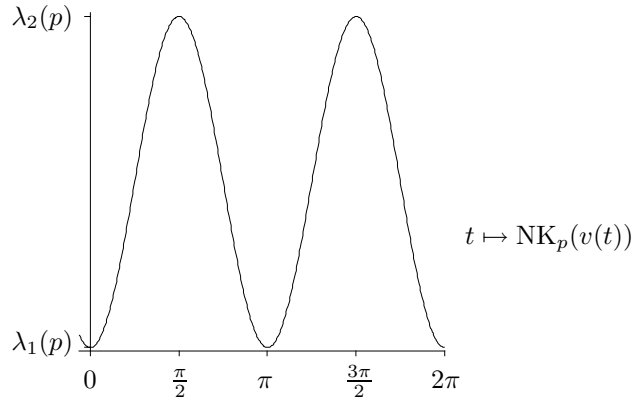
In dieser Situation gilt:

- (i) Die Kurve γ ist genau dann eine Krümmungslinie von $[F]$, wenn sie eine Krümmungslinie von $[\tilde{F}]$ ist.
- (ii) Ist \tilde{F} eben oder sphärisch, so ist γ auf jeden Fall eine Krümmungslinie auch von $[F]$.
- (c) Die Meridiane und Breitenkreise einer Rotationsfläche sind Krümmungslinien.

[Tipp: Wie kippt das Einheitsnormalenfeld, wenn man sich entlang eines Meridians bewegt? Wieso sind die Breitenkreise Krümmungslinien, wenn man weiß, dass die Meridiane es sind?]

Satz von Euler. Es sei (a_1, a_2) eine ONB von Hauptkrümmungsrichtungen von F in p , wobei die Orthonormalität bezüglich des Skalarproduktes g_p gemeint ist; und zwar sei $A_p a_i = \lambda_i(p) \cdot a_i$ für $i = 1, 2$. Dann gilt für die Normalkrümmung von F in p und in Richtung $v(t) := \cos(t) \cdot a_1 + \sin(t) \cdot a_2$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \text{NK}_p(v(t)) &= \lambda_1(p) \cdot \cos^2(t) + \lambda_2(p) \cdot \sin^2(t) \\ &= \lambda_1(p) + (\lambda_2(p) - \lambda_1(p)) \cdot \sin^2(t). \end{aligned}$$



Beweis. Man hat einfach $h_p(v(t), v(t))$ auszurechnen, indem man die Bilinearität von h_p und $h_p(a_i, a_k) = \lambda_i \cdot \delta_{ik}$ ausnutzt. \square

Feststellung. Für jedes $p \in G$ sind $\lambda_1(p)$ und $\lambda_2(p)$ das Minimum bzw. das Maximum der Normalkrümmungs-Funktion NK_p . (Aber klar doch: Die Existenz von Eigenwerten eines selbstadjungierten Operators beweist man doch gerade durch eine derartige Extremwertuntersuchung.)

Folgerung 1. Über die Anzahl von Asymptotenrichtungen. Es bezeichne

$$AR_F(p) := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid g_p(v, v) = 1 \text{ und } NK_p(v) = 0\}$$

die Menge der Asymptotenrichtungen einer singularitätenfreien C^r -Parametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ in einem Punkt $p \in G$. Natürlich ist $-v \in AR_F(p)$, wenn $v \in AR_F(p)$ ist. Es sind nun folgende und keine weiteren Fälle möglich:

- (a) $\#AR_F(p) = 0$, wenn nämlich p ein elliptischer Punkt von F ist,
- (b) $\#AR_F(p) = 2$, wenn nämlich p ein parabolischer, nicht-planarer Punkt von F ist,
- (c) $\#AR_F(p) = 4$, wenn nämlich p ein hyperbolischer Punkt von F ist,
- (d) $AR_F(p) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid g_p(v, v) = 1\}$, wenn nämlich p ein planarer Punkt von F ist.

Beweis. Es ist klar, dass für $p \in G$ genau einer der vier Fälle (a) p ist elliptischer Punkt von F , (b) p ist parabolischer, aber nicht planarer Punkt von F , (c) p ist hyperbolischer Punkt von F oder (d) p ist planarer Punkt von F vorliegt.

Ist p ein elliptischer Punkt von F , so gilt $0 < K_F(p) = \lambda_1(p) \cdot \lambda_2(p)$, und somit haben $\lambda_1(p)$ und $\lambda_2(p)$ dasselbe Vorzeichen. Nach dem Satz von Euler nimmt NK_p nur Werte zwischen $\lambda_1(p)$ und $\lambda_2(p)$ an, und ist daher nullstellenfrei. Damit gilt $AR_F(p) = \emptyset$.

Ist p ein parabolischer, aber nicht planarer Punkt von F , so ist eine der beiden Hauptkrümmungen $\lambda_1(p)$ und $\lambda_2(p)$ gleich Null, die andere von Null verschieden. Ist etwa $\lambda_1(p) = 0$, so ist nach dem Satz von Euler $AR_F(p) = \{v(0), v(\pi)\}$ (mit der Bezeichnung $v(t)$ wie im Satz von Euler) und damit $\#AR_F(p) = 2$.

Ist p ein hyperbolischer Punkt von F , so haben die beiden Hauptkrümmungen $\lambda_1(p)$ und $\lambda_2(p)$ entgegengesetztes Vorzeichen. Daher hat die Funktion $t \mapsto NK_p(v(t))$ in den Intervallen $]0, \frac{\pi}{2}[$, $]\frac{\pi}{2}, \pi[$, $]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ und $]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ nach dem Satz von Euler jeweils genau eine Nullstelle. Also ist $\#AR_F(p) = 4$.

Ist schließlich p ein planarer Punkt von F , so gilt $A_p = 0$ und somit auch $h_p = 0$. Somit ist $AR_F(p) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid g_p(v, v) = 1\}$. \square

Folgerung 2. Regelflächen haben in ihren regulären Punkten stets eine nicht-positive Gaußsche Krümmung.

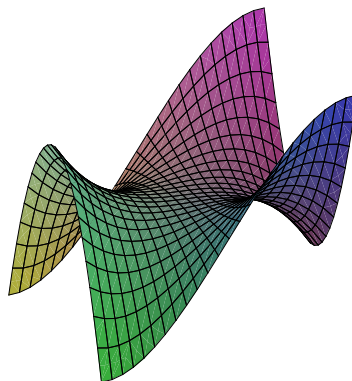
Beweis. Die Erzeugenden sind Asymptotenlinien. □

Aufgabe 2. Es sei p ein Punkt von G und v ein Einheitsvektor des euklidischen Vektorraumes (\mathbb{R}^2, g_p) , der in eine Asymptotenrichtung von F weist. In diesem Fall ist v genau dann auch eine Hauptkrümmungsrichtung von F , wenn p ein parabolischer Punkt von F ist.

Aufgabe 3. Als *Affensattel* wird die Graphenfläche zu der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (t, s) \mapsto s \cdot (s^2 - 3t^2)$$

bezeichnet. Man überlege, dass in dem Affensattel durch den Punkt $p_0 := (0, 0, 0)$ drei Geraden verlaufen, und begründe damit, dass der Punkt p_0 ein planarer Punkt des Affensattels ist.



6.6 Zur Berechnung der skalaren Krümmungsgrößen

Basis für das Folgende ist das

Lemma. Ist L ein Endomorphismus eines n -dimensionalen euklidischen Vektorraumes $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und sind $v_1, \dots, v_n \in V$, so gilt

$$\det(\langle L(v_i), v_k \rangle) = \det(L) \cdot \det(\langle v_i, v_k \rangle) .$$

Beweis. Man wende auf $\det(\langle L(v_i), v_k \rangle)$ und $\det(\langle v_i, v_k \rangle)$ die Formel der Aussage 2 aus Abschnitt 1.7 an und beachte, dass für jedes $\omega \in \text{Alt}^n(V)$ gilt

$$\omega(L(v_1), \dots, L(v_n)) = \det(L) \cdot \omega(v_1, \dots, v_n) .$$

□

Satz. Es seien $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine Parametrisierung einer singularitätenfreien C^2 -Fläche, g_{ik} und h_{ik} die Komponenten ihres Maßtensors bzw. ihrer zweiten Fundamentalform und ρ_F ihr Flächenelement. Dann sind die Gaußsche und die mittlere Krümmung durch

$$K_F = \frac{1}{\rho_F^2} \cdot \det(h_{ik}) \quad \text{und} \quad H_F = \frac{1}{2\rho_F^2} \cdot (g_{11} \cdot h_{22} - 2g_{12} \cdot h_{12} + g_{22} \cdot h_{11})$$

gegeben.

Beweis. Für jedweden Punkt $p \in G$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ erhält man durch Anwendung des obigen Lemmas auf $L = A_p - \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^2}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle = g_p$ und $(v_1, v_2) = (e_1, e_2)$

$$\begin{aligned} \det(h_{ik}(p) - \lambda \cdot g_{ik}(p)) &= \det(g_p(A_p e_i - \lambda \cdot e_i, e_k)) \\ &= \det(A_p - \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^2}) \cdot \det(g_p(e_i, e_k)) \\ &= (\lambda^2 - 2H_F(p) \cdot \lambda + K_F(p)) \cdot \rho_F(p)^2. \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \det(h_{ik} - \lambda \cdot g_{ik}) &= (h_{11} - \lambda g_{11}) \cdot (h_{22} - \lambda g_{22}) - (h_{12} - \lambda g_{12})^2 \\ &= h_{11} h_{22} - \lambda h_{11} g_{22} - \lambda g_{11} h_{22} + \lambda^2 g_{11} g_{22} - h_{12}^2 + 2\lambda h_{12} g_{12} - \lambda^2 g_{12}^2 \\ &= (g_{11} g_{22} - g_{12}^2) \lambda^2 + (-g_{11} h_{22} + 2g_{12} h_{12} - g_{22} h_{11}) \lambda + (h_{11} h_{22} - h_{12}^2) \\ &= \rho_F^2 \cdot \lambda^2 + (-g_{11} h_{22} + 2g_{12} h_{12} - g_{22} h_{11}) \lambda + \det(h_{ik}). \end{aligned}$$

Führt man nun einen Koeffizientenvergleich bezüglich λ durch, so erhält man die fraglichen Formeln. \square

Aufgabe 1. Gaußsche Krümmung von Graphenflächen. Die Graphenflächenparametrisierung F einer C^r -Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ ($G \subset \mathbb{R}^2$, $r \geq 2$) hat die Gaußsche Krümmung

$$K_F = \frac{1}{\rho_F^4} \cdot \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right).$$

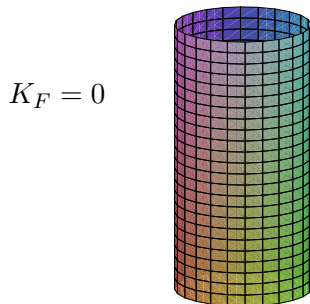
Aussage. Ist $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine singularitätenfreie C^2 -Flächenparametrisierung und gilt $g_{12}(p) = h_{12}(p) = 0$ für einen Punkt $p \in G$, so weisen die kanonischen Basisvektoren e_1 und e_2 in Hauptkrümmungsrichtungen von F in p , und $h_{11}(p)/g_{11}(p)$ bzw. $h_{22}(p)/g_{22}(p)$ sind die zugehörigen Hauptkrümmungen.

Ist sogar $g_{12} \equiv h_{12} \equiv 0$, so sind die Parameterlinien von F Krümmungslinien der Fläche.

Aufgabe 2. Ist F die kanonische Parametrisierung einer singularitätenfreien C^2 -Rotationsfläche, für welche die Profilkurve $\alpha = (r, b)$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist, so gilt für deren Gaußsche Krümmung

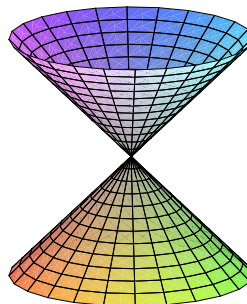
$$K_F(t, s) = -\frac{r''(t)}{r(t)}.$$

Man zeige, daß für Rotationsflächen konstanter Gaußscher Krümmung folgende (und keine weiteren) Typen vorkommen, und gebe die Profilkurven dieser Typen so explizit wie möglich an.

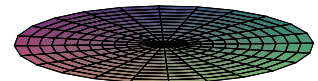


$K_F = 0$

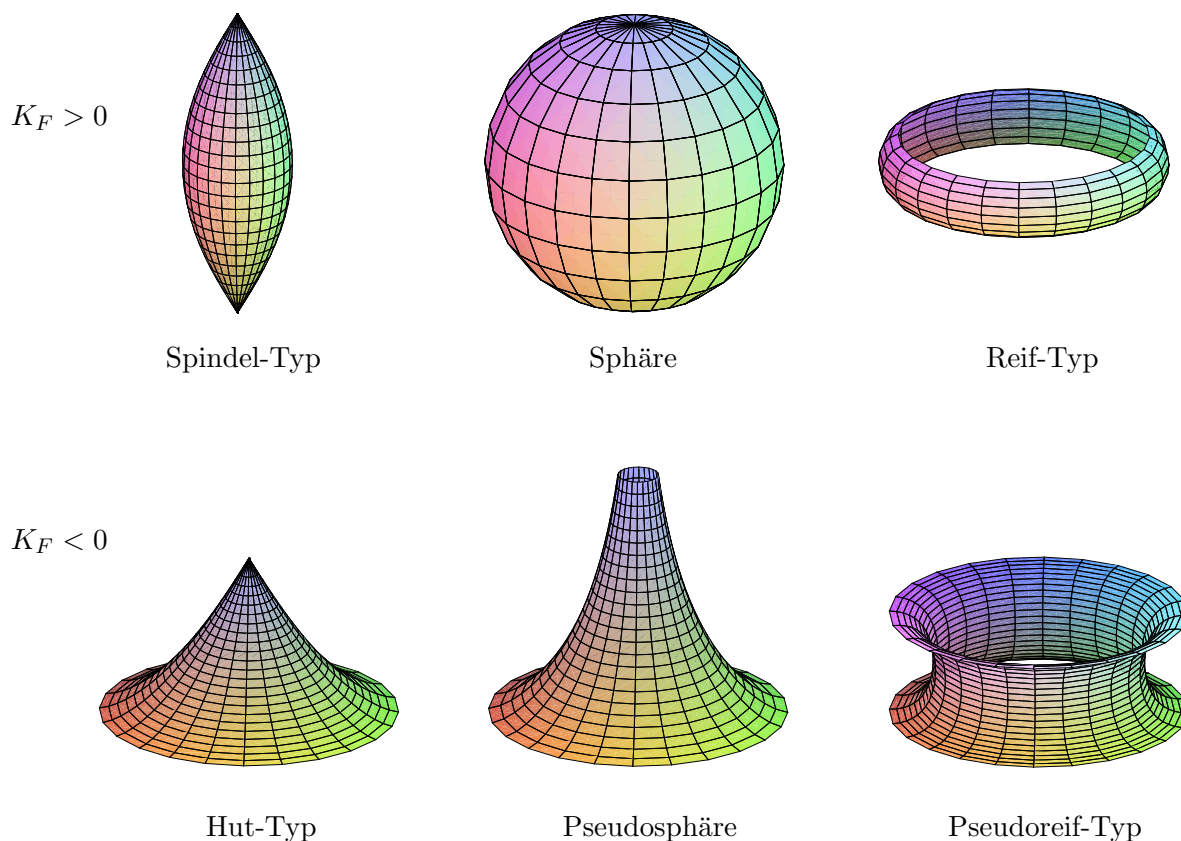
Kreiszyylinder



Kreisegel



Ebene in Polarkoordinaten



Wegen Aufgabe 1 (b) aus Abschnitt 6.5 kann man sich hierbei auf die Fälle $K_F \in \{0, 1, -1\}$ beschränken. Die allgemeinen Lösungen r für die Differentialgleichung

$$r'' + K_F \cdot r = 0$$

lautet bekanntlich

$$\begin{aligned} \text{für } K_F = 0 : \quad r(t) &= at + c, \\ \text{für } K_F = 1 : \quad r(t) &= a \cos(t) + c \sin(t), \\ \text{für } K_F = -1 : \quad r(t) &= a \cosh(t) + c \sinh(t). \end{aligned}$$

Bei bekanntem r ist dann die Funktion b mittels

$$(b')^2 = 1 - (r')^2$$

berechenbar. In fast allen Fällen muss der Definitionsbereich von (r, b) auf ein geeignetes Intervall I eingeschränkt werden, damit die Bedingungen $r(t) > 0$ und $|r'(t)| \leq 1$ erfüllt sind. [†]

Bemerkung. Die Profilkurve der Pseudosphäre ist übrigens die *Traktrix* (*Schleppkurve*) mit „Seillänge“ 1; siehe z.B. das *Taschenbuch der Mathematik* von BRONSTEIN/SEMENDJAJEW.

[†]Die Bezeichnungen „Spindel“, „Reif“, „Hut“ und „Pseudoreif“ gehören nicht zum allgemeinen mathematischen Sprachgebrauch.

Aufgabe 3. Die Gaußsche Krümmung von Regelflächen. Es sei $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ die Parametrisierung einer Regelfläche, wie sie in Abschnitt 5.3 beschrieben wurde (siehe diesen Abschnitt insbesondere für die Bedeutung von $S(t)$ und $\Delta(t)$); allerdings seien α und E nun als mindestens zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt. Im folgenden müssen die Singularitäten von F aus der Betrachtung ausgeschlossen werden. Daher setzen wir $R(t) := \mathbb{R} \setminus S(t)$ und $G_F := \bigcup (\{t\} \times R(t))$. Für jedes $t \in I$ sei $K_t : R(t) \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $s \mapsto K_F(t, s)$. Man zeige:

(a) Für alle $(t, s) \in G_F$ gilt

$$K_F(t, s) = - \frac{\det(\alpha'(t), E(t), E'(t))^2}{\rho_F(t, s)^4},$$

insbesondere erkennt man erneut $K_F \leq 0$.

(b) Tangentenflächen haben verschwindende Krümmung.

(c) Für jedes $t \in I$ gilt folgende Sequenz von Äquivalenzen:

$$K_F(t, s) = 0 \text{ für ein } s \in R(t) \iff \det(\alpha'(t), E(t), E'(t)) = 0 \iff K_t \equiv 0.$$

(d) Ist $t \in I$ ein Parameter, für den $K_t \equiv 0$ gilt, so ist F_t Krümmungslinie zur Hauptkrümmung 0, mit anderen Worten: $\frac{\partial}{\partial s} N_F(t, \cdot) \equiv 0$.

(e) Es sei $\det(\alpha'(t), E(t), E'(t)) \neq 0$ (dann ist also $R(t) = \mathbb{R}$ nach der Folgerung aus 5.3). Für die Funktion K_t gilt dann

$$K_t < 0, \quad \min K_t = -1/\Delta(t)^2 \quad \text{und} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} K_t(s) = \lim_{s \rightarrow -\infty} K_t(s) = 0.$$

Man skizziere den Funktionsverlauf von K_t . Ist α Striktionslinie, so hat man für K_t die besonders einfache Darstellung

$$K_t(s) = - \left(\frac{\Delta(t)}{s^2 + \Delta(t)^2} \right)^2.$$

Bemerkung. Parametrisiert F eine Regelfläche mit verschwindender Gaußscher Krümmung, so ist nach (c) die Identität $\det(\alpha', E, E') \equiv 0$ erfüllt. Beispiele hierfür sind Kegel und Zylinder (vgl. Abschnitt 5.3). Ist die Regelfläche nirgends zylindrisch und nirgends kegelförmig (letzteres soll heißen, dass die Striktionslinie regulär ist), so handelt es sich bei der betrachteten Regelfläche um eine Tangentenfläche (vgl. Aufgabe 3 aus 5.3). Es sei auch bemerkt, dass alle Kegel, Zylinder und Tangentenflächen lokal aus Papier modelliert werden können (vgl. Aufgabe 3 aus 5.6).

Aufgabe 4. Weitere Beispiele von Flächen verschwindender Krümmung. Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine reguläre C^3 -Kurve positiver Krümmung; weiterhin sei E ein paralleles Einheitsnormalenfeld von γ , vgl. Aufgabe 1 aus Abschnitt 4.1. Man zeige (unter Benutzung der zitierten Aufgabe), dass die durch die Kurve γ und das Einheitsvektorfeld E beschriebene Regelfläche verschwindende Gaußsche Krümmung hat. Man sollte also annehmen, dass diese „in der Regel“ die Tangentenfläche einer anderen Kurve β ist. Man

überprüfe dies, indem man „in der Regel“ durch eine exakte Bedingung ersetzt und die Kurve β gegebenenfalls bestimmt.

Man folgere auch: Ist $\gamma = F \circ \alpha$ eine Krümmungslinie einer C^2 -Fläche $[F]$, so hat die Regelfläche, die mit Hilfe von γ und $N_F \circ \alpha$ definiert ist, verschwindende Gaußsche Krümmung. Man mache sich diese Behauptung am Beispiel von Kurven klar, die auf einer Kugel verlaufen.

6.7 Die Gaußsche Krümmung als Maß der Flächenverzerrung der Gaußabbildung

Es sei $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine C^2 -Flächenparametrisierung. Das Einheitsnormalenfeld $N_F : G \rightarrow \mathbb{E}_L^3$ von F kann auch als Abbildung in die Einheitskugel $S_1(\mathbb{E}_L^3) := \{v \in \mathbb{E}_L^3 \mid \langle v, v \rangle = 1\}$ angesehen werden; betrachtet man N_F unter diesem Gesichtspunkt, so spricht man auch von der *Gauß-Abbildung der Flächenparametrisierung* F . Die Gauß-Abbildung ist also eine C^1 -mS-Flächenparametrisierung einer sphärischen Fläche in \mathbb{E}_L^3 .

Aufgabe 1. Die Flächenelemente der Parametrisierung F und der zugehörigen Gauß-Abbildung N_F sind miteinander durch

$$\rho_{N_F} = |K_F| \cdot \rho_F$$

verbunden. Insbesondere gilt: N_F hat genau dann in $p \in G$ eine Singularität, wenn p ein parabolischer Punkt von F ist.

[Tipp: Man wende das Lemma aus Abschnitt 6.6 auf das Quadrat des Formoperators an.]

Es sei $p \in G$ gegeben. Mit Hilfe des Maßensors g von F definieren wir

$$U_r(p) := \{q \in \mathbb{R}^2 \mid g_p(q - p, q - p) < r^2\} \quad \text{und} \quad B_r(p) := \overline{U_r(p)}.$$

Natürlich existiert ein $r \in \mathbb{R}_+$, so dass $U_r(p)$ in G liegt. Daher kann man für $0 < \varepsilon < r$ die Flächeninhalte

$$\begin{aligned} \text{Area}(F|B_\varepsilon(p)) &:= \int_{B_\varepsilon(p)} \rho_F \, d\lambda^2 \quad \text{des Flächenstückes } F|B_\varepsilon(p) \text{ und} \\ \text{Area}(N_F|B_\varepsilon(p)) &:= \int_{B_\varepsilon(p)} \rho_{N_F} \, d\lambda^2 \quad \text{des Flächenstückes } N_F|B_\varepsilon(p) \end{aligned}$$

definieren, vergleiche den Schluss von Abschnitt 5.1.

Aufgabe 2.

$$|K_F(p)| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Area}(N_F|B_\varepsilon(p))}{\text{Area}(F|B_\varepsilon(p))}.$$

Natürlich wird hier insbesondere die Existenz des Grenzwertes behauptet.

Aufgabe 3. Ist p ein nicht-parabolischer Punkt von F , so existiert ein $\varepsilon < r$, so dass $N_F|U_\varepsilon(p)$ eine C^{r-1} -Immersion in die Einheitskugel von \mathbb{E}_L^3 ist.

6.8 Minimalflächen

Einleitung. Taucht man eine irgendwie gebogene Drahtschleife in eine Seifenlösung, so wird sich beim Herausziehen der Drahtschleife in dieser ein Seifenhäutchen spannen, und zwar derartig, dass es einen möglichst kleinen Flächeninhalt hat. Zur Bestimmung dieser Fläche hat man den Raum \mathcal{R} aller Flächen, deren Rand mit der Drahtschleife zusammenfällt, einzuführen und eine solche Fläche $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{R}$ zu suchen, für welche die Funktion

$$\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{F} \mapsto \text{Flächeninhalt von } \mathcal{F}$$

ein Minimum hat. Diese Aufgabe der Variationsrechnung ist als *Plateausches Problem* bekannt. Natürlich denkt man dabei sofort an das notwendige Kriterium für lokale Extrema differenzierbarer Funktionen. Diese Idee wollen wir nun verfolgen.

Wir starten mit einer singularitätenfreien C^2 -Flächenparametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ und leiten eine notwendige Bedingung dafür her, dass bei lokalen (normalen) Deformationen von F , sich der Flächeninhalt von F nicht verkleinert. Um dies genauer auszuführen, zunächst eine

Definition 1. Unter dem *Träger* $\text{Tr}(\lambda)$ einer stetigen Funktion $\lambda : G \rightarrow \mathbb{R}$ versteht man die abgeschlossene Hülle von $\{p \in G \mid \lambda(p) \neq 0\}$, und zwar ist die abgeschlossene Hülle in dem Gebiet G zu bilden.

Mit $C_c^1(G)$ bezeichnen wir die Menge aller stetig differenzierbarer Funktionen $\lambda : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit *kompaktem* Träger $\text{Tr}(\lambda)$.

Ist nun $\lambda \in C_c^1(G)$, so sei $(F_r^\lambda)_{r \in \mathbb{R}}$ die C^1 -Einparameterfamilie der Abbildungen

$$F_r^\lambda : G \rightarrow \mathbb{E}^3, p \mapsto F(p) + r \lambda(p) \cdot N_F(p). \quad (*)$$

Diese Familie stellt über der Menge $\text{Tr}(\lambda)$ eine Deformation der Parametrisierung F in Normalenrichtung dar. (Deformationen in Tangentialrichtung braucht man nicht weiter zu untersuchen, weil diese zu keiner Flächeninhaltsänderung führen.)

Da $(r, p) \mapsto \rho_{F_r^\lambda}(p)$ eine stetige Funktion ist, ist $U_\lambda := \{(r, p) \mid \rho_{F_r^\lambda}(p) > 0\}$ eine offene Umgebung von $\{0\} \times \text{Tr}(\lambda)$. (Man beachte, dass F als singularitätenfrei vorausgesetzt wurde und $F_0^\lambda = F$ ist.) Wegen der Kompaktheit von $\text{Tr}(\lambda)$ existiert ein $\varepsilon_\lambda \in \mathbb{R}_+$, so dass $]-\varepsilon_\lambda, \varepsilon_\lambda[\times \text{Tr}(\lambda) \subset U_\lambda$ ist. Weil die Abbildungen F_r^λ über $G \setminus \text{Tr}(\lambda)$ mit $F|(G \setminus \text{Tr}(\lambda))$ übereinstimmen, sind also die Parametrisierungen F_r^λ für $r \in]-\varepsilon_\lambda, \varepsilon_\lambda[$ singularitätenfrei.

Theorem.

(a) Für jede Funktion $\lambda \in C_c^1(G)$ ist die Funktion

$$f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, r \mapsto \int_{\text{Tr}(\lambda)} \rho_{F_r^\lambda} d\lambda^2 = \text{Flächeninhalt von } F_r^\lambda|_{\text{Tr}(\lambda)}$$

in $r = 0$ differenzierbar und

$$f'_\lambda(0) = -2 \int_{\text{Tr}(\lambda)} \lambda \cdot H_F \cdot \rho_F d\lambda^2.$$

(b) Es gilt genau dann

$$f'_\lambda(0) = 0 \quad \text{für alle } \lambda \in C_c^1(G),$$

wenn die mittlere Krümmung H_F identisch verschwindet.

Ist der Flächeninhalt von F in der oben beschriebenen Weise minimal, so gilt nach diesem Theorem notwendigerweise $H_F \equiv 0$. Aus diesem Grund definiert man:

Definition 2. Eine C^2 -Fläche $[F]$ heißt eine *Minimalfläche*, wenn $H_F \equiv 0$ ist.

Beispiele. Die Flächen $[F_\tau]$ aus Aufgabe 2 des Abschnittes 5.6 sind Minimalflächen. Insbesondere sind also die Wendelfläche und das Katenoid Minimalflächen. Trivialerweise sind ebene Flächen minimal.

Beweis des Theorems. Zum Beweis von (a) fixieren wir ein $\lambda \in C_c^1(G)$. Die (nach obigem) positive Funktion

$$]-\varepsilon_\lambda, \varepsilon_\lambda[\times G \rightarrow \mathbb{R}, \quad (r, p) \mapsto \rho_{F_r^\lambda}(p)$$

ist nach r stetig partiell differenzierbar. Daher ist nach dem Satz über die differenzierbare Abhängigkeit eines Integrals von einem Parameter die Funktion f_λ in $r = 0$ differenzierbar und es gilt

$$f'_\lambda(0) = \int_{\text{Tr}(\lambda)} \left(\frac{\partial}{\partial r} \rho_{F_r^\lambda} \right)(0, p) \, d\lambda^2(p).$$

Um den Beweis von (a) zu beenden, haben wir daher

$$\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} \rho_{F_r^\lambda} = -2 \lambda \cdot H_F \cdot \rho_F \quad (1)$$

zu zeigen. Durch Differentiation von (*) nach p erhalten wir

$$d_p F_r^\lambda(v) = d_p F(v - r \lambda(p) \cdot A_p v) + r d_p \lambda(v) \cdot N_F(p)$$

und daher für den Maßtensor g_r von F_r^λ

$$\begin{aligned} g_{r,p}(u, v) &= g_p(u - r \lambda(p) A_p u, v - r \lambda(p) A_p v) + r^2 d_p \lambda(u) \cdot d_p \lambda(v) \\ &= g_p(u, v) - 2 r \lambda(p) \cdot h_p(u, v) + r^2 \cdot (\lambda(p)^2 \cdot g_p(A_p u, A_p v) + d_p \lambda(u) \cdot d_p \lambda(v)). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} g_{r,ik}(p) = -2 \lambda(p) \cdot h_{ik}(p),$$

also wegen $g_{r=0} = g$ und dem Satz aus 6.6

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} \det(g_{r,ik}(p)) &= \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} (g_{r,11}(p) \cdot g_{r,22}(p) - g_{r,12}(p)^2) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} g_{r,11}(p) \right) \cdot g_{22}(p) + g_{11}(p) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} g_{r,22}(p) \right) \\ &\quad - 2 g_{12}(p) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} g_{r,12}(p) \right) \\ &= -2 \lambda(p) \cdot (h_{11}(p) \cdot g_{22}(p) + g_{11}(p) \cdot h_{22}(p) - 2 g_{12}(p) \cdot h_{12}(p)) \\ &= -4 \lambda(p) \cdot \rho_F(p)^2 \cdot H_F(p). \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Definition von $\rho_{F_r^\lambda}$ in 5.1 ergibt sich somit

$$\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} \rho_{F_r^\lambda}(p) = \frac{1}{2 \rho_F(p)} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} \det(g_{r,ik}(p)) = -2 \lambda(p) \cdot H_F(p) \cdot \rho_F(p),$$

womit Formel (1) bewiesen ist.

Zu (b). Ist $H_F \equiv 0$, so gilt infolge von (a) natürlich $f'_\lambda(0) = 0$ für jede Funktion $\lambda \in C_c^1(G)$. Ist jedoch $H_F(p_0) \neq 0$ für ein $p_0 \in G$, so existiert ein Teilgebiet $U \subset G$ mit $p_0 \in U$, auf dem H_F keine Nullstelle hat. Dann kann man eine Funktion $\lambda \in C_c^1(G)$ mit folgenden Eigenschaften finden: $0 \leq \lambda \leq 1$, $\lambda(p_0) = 1$ und $\text{Tr}(\lambda) \subset U$. Es ist $\lambda \cdot H_F \cdot \rho_F$ eine stetige Funktion, die überall ≥ 0 oder überall ≤ 0 ist und nicht identisch verschwindet. Für diese Funktion λ gilt nach (a) $f'_\lambda(0) \neq 0$. \square

Aufgabe 1. Klassifikation der minimalen Rotationsflächen, Bonnet 1860. In dieser Aufgabe soll bewiesen werden, dass eine Parametrisierung einer singularitätenfreien Rotationsfläche genau dann minimal ist, wenn sie einen Teil einer Ebene oder eines Katenoids parametrisiert. Sei also

$$F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3, (t, s) \mapsto (r(t) \cdot \cos(s), r(t) \cdot \sin(s), b(t))$$

eine Parametrisierung einer singularitätenfreien minimalen C^2 -Rotationsfläche in \mathbb{E}^3 .

- (a) Gilt $b' \equiv 0$, so ist F eben.
- (b) Gilt $b'(t) \neq 0$ überall, so ist $F(I \times \mathbb{R})$ in einem Katenoid von \mathbb{E}^3 enthalten; siehe Aufgabe 2 aus Abschnitt 5.6.
 [Tipp: $\mathbb{E}(?)$ darf man $b(t) = t$ für alle $t \in I$ annehmen. Zur Behandlung der Differentialgleichung $yy'' = 1 + (y')^2$ vgl. z.B. W. WALTER, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, § 11.VI, oder man löse sie mit Maple.]
- (c) Gilt $b'(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in I$, so hat b' keine Nullstellen.
 [Tipp: $\mathbb{E} \ b'|]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[> 0$; dann beachte man (b).]

Aufgabe 2. Klassifikation der minimalen Regelflächen, Catalan 1842. In dieser Aufgabe soll bewiesen werden, dass eine C^2 -Regelfläche genau dann minimal ist, wenn sie eben oder Stück einer Wendelfläche ist. Wenn wir sagen, dass eine Regelfläche minimal ist, so meinen wir, dass auf ihrem singularitätenfreien Teil die mittlere Krümmung verschwindet. – Sei im folgenden $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ die Parametrisierung einer Regelfläche zu einem C^2 -Paar (α, E) ; siehe Abschnitt 5.3.

- (a) In *diesem* Teil werde angenommen, dass F nirgends zylindrisch ist. Dann können wir \mathbb{E} voraussetzen, dass $\langle E', E' \rangle = 1$ und $\langle \alpha', E \rangle = 0$ ist (warum eigentlich?). In dieser Situation beweise man:
- (i) $[F]$ ist genau dann minimal, wenn

$$\det(E, \alpha' + s E', \alpha'' + s E'') = 0 \quad \text{für alle } (t, s) \in I \times \mathbb{R} \quad (\dagger)$$

gilt. Aussage (\dagger) ist zu folgendem Gleichungssystem äquivalent

$$\begin{aligned} \det(E, \alpha', \alpha'') &\equiv 0, \quad \det(E, \alpha', E'') + \det(E, E', \alpha'') \equiv 0, \\ \det(E, E', E'') &\equiv 0. \end{aligned} \quad (\ddagger)$$

- (ii) Aus (\ddagger) folgt: Es ist $E'' = -E$ und es existiert ein Einheitsvektor $a_3 \in \mathbb{E}^3$, so dass $E \times E' \equiv a_3$ und $\langle \alpha', a_3 \rangle = \text{const.} =: c$ ist.

[Man betrachte E als Tangentenvektor einer Raumkurve γ (wie denn?) und folgere $\kappa_\gamma = 1$ und $\tau_\gamma = 0$. Somit(?) beschreibt γ einen Kreisbogen; folglich existiert eine positiv orientierte ONB (a_1, a_2, a_3) von \mathbb{E}^3 , so dass $E = \cos \cdot a_1 + \sin \cdot a_2$ ist. Daraus folgt unter anderem $\langle \alpha', a_3 \rangle = \det(\alpha', E, E') = \text{const.}$]

- (b) $[F]$ ist genau dann Stück einer Wendelfläche, wenn $[F]$ minimal ist und $\det(\alpha'(t), E(t), E'(t)) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt.
 [„ \Leftarrow “: $\alpha' = \lambda \cdot E' + c \cdot a_3$, wobei wegen (\ddagger) λ konstant ist. Daher(?) ist α eine Schraubenlinie.]

(c) $[F]$ ist genau dann eben, wenn $[F]$ minimal ist und $\det(\alpha', E, E') \equiv 0$ gilt.

[„ \Leftarrow “: Nach Aufgabe 3 aus 5.5 gilt dann neben $H_F = 0$ auch noch $K_F = 0$.]

Aus (b) und (c) folgere man nun: Ist $[F]$ minimal, so ist $[F]$ eben oder Stück einer Wendelfläche. Dass keine weiteren Fälle auftreten können, zeigt ein Blick auf die Gaußsche Krümmung K_F .

Eine mit der Frage nach der Gestalt der von einer Drahtschleife umschlossenen Seifenhaut eng verwandte Frage ist die Frage nach der Gestalt von Seifenhäuten, die frei im Raum schwebend ein festes Luftvolumen umschließen. Eine solche Seifenhaut spannt sich so, dass sie *unter der Nebenbedingung, dass das von ihr umschlossene Volumen konstant sein möge*, eine minimale Oberfläche hat. Um diese Fläche zu bestimmen, hat man den Raum $\tilde{\mathcal{R}}$ aller geschlossenen Flächen, die ein bestimmtes, fest vorgegebenes Raumvolumen umschließen, zu betrachten, und eine solche Fläche \mathcal{F}_0 zu suchen, für welche die Funktion

$$\tilde{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{F} \mapsto \text{Flächeninhalt von } \mathcal{F}$$

ein Minimum hat. Man kann dieses Problem ähnlich wie das vorherige behandeln; als die zur Bedingung des Teil (b) des obigen Theorems analoge lokale Charakterisierung ergibt sich in dieser Situation die Bedingung, dass die mittlere Krümmung H_F konstant ist. Aus diesem Grunde interessiert man sich für die wie folgt definierten Flächen:

Definition 3. Eine C^2 -Fläche $[F]$ ist eine Fläche *konstanter mittlerer Krümmung* (andere Namen: eine *constant mean curvature surface*, eine *CMC-Fläche*), wenn H_F konstant ist.

Beispiele. Einfache Beispiele für CMC-Flächen, die keine Minimalflächen sind, sind Sphären und Kreiszylinder.

Man kann zeigen, dass die Sphären die einzigen kompakten CMC-Flächen ohne Selbstdurchdringungen (d.h. derart, dass F injektiv ist) sind. Das entspricht ja auch unserer Anschauung: Jedes Kind weiß, dass Seifenblasen Kugelgestalt haben.

Lange Zeit war unklar, ob es neben den Sphären noch andere kompakte CMC-Flächen gibt; H. HOPF hatte Mitte des 20. Jahrhunderts die Vermutung aufgestellt, dass dem nicht so ist. Erst 1986 hat H. WENTE diese Vermutung widerlegt, in dem er Beispiele für kompakte CMC-Flächen konstruiert hat, die die Topologie eines Torus besitzen. 1991 hat dann KAPOULEAS gezeigt, dass es auch kompakte CMC-Flächen „vom Geschlecht g “ für jedes $g \geq 2$ gibt. Dabei benutzten sowohl Wente als auch Kapouleas für ihre Konstruktionen auf sehr anspruchsvolle Weise Methoden der Theorie partieller Differentialgleichungen. — Da alle diese CMC-Flächen Selbstdurchdringungen aufweisen, kommen sie als Seifenblasen nicht vor.

