Kapitel 2

Grundlegendes über Kurven

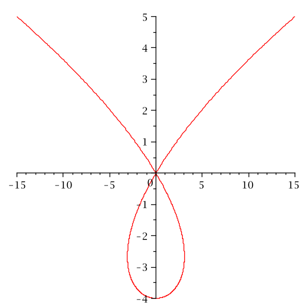
2.1 Wege und ihre Länge

Es sei $\mathbb{E}$ ein affiner Raum. Wir wollen uns mit Kurven in $\mathbb{E}$ befassen. Grundsätzlich gibt es zwei unterschiedliche Sichtweisen, was man unter einer Kurve in $\mathbb{E}$ anschaulich verstehen will. Die eine Sichtweise ist, eine Kurve als einen „geometrischen Ort“, das heißt als eine durch eine gewisse Eigenschaft charakterisierte Menge von Punkten von $\mathbb{E}$ aufzufassen. Die zweite Sichtweise ist, eine Kurve als den Weg eines bewegten Massepunktes zu verstehen, mathematisch modelliert als eine Funktion eines (Zeit-)Parameters nach $\mathbb{E}$.

Hier wollen wir die zweite Sichtweise in den Mittelpunkt stellen, weil sie es uns leichter macht, die Mittel der Analysis anzuwenden. Dennoch interessieren wir uns in erster Linie für Eigenschaften von Kurven, die nur von ihrer Bildmenge, das heißt, von ihrer *geometrischen Gestalt* abhängen.

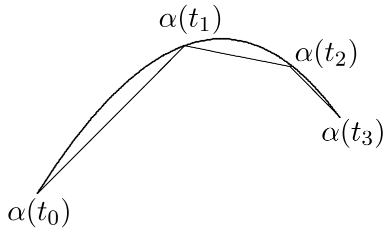
Definition 1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Ein *Weg* (in $\mathbb{E}$) ist eine stetige Abbildung $\alpha : I \to \mathbb{E}$.

Bemerkung. Wir setzen nicht voraus, dass unsere Wege injektiv sind. Das bedeutet u.a., dass ein Weg *Selbstdurchdringungen* haben kann. Beispielsweise gilt für den Weg $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^3 - 4t, t^2 - 4)$: $\alpha(2) = (0,0) = \alpha(-2)$.



Den ersten „intrinsischen“ Begriff für Wege, den wir untersuchen wollen, ist ihre *Länge*. Es ist klar, dass wir, um die Länge von Wegen in $\mathbb{E}$ messen zu können, einen Abstandsbegriff in $\mathbb{E}$ benötigen. Daher setzen wir nun voraus, dass $\mathbb{E}$ ein euklidischer Raum ist, dann wird durch $d(p,q) := \|p - q\|$ für $p, q \in \mathbb{E}$ bekanntlich eine Metrik auf $\mathbb{E}$ definiert.

Es sei nun ein Weg $\alpha : [a,b] \to \mathbb{E}$ gegeben mit $a < b$. Um die Länge von α zu bestimmen, folgen wir einer Idee von ARCHIMEDES, und approximieren den Weg durch Streckenzüge:



Wir wählen also eine Zerlegung $a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_m = b$ des Intervalls $[a,b]$, und betrachten den Streckenzug, der dadurch entsteht, dass wir $\alpha(t_0)$ geradlinig mit $\alpha(t_1)$ verbinden, diesen Punkt dann geradlinig mit $\alpha(t_2)$ verbinden, und so fort, bis wir schließlich $\alpha(t_{m-1})$ mit $\alpha(t_m)$ verbunden haben. Die Länge dieses Streckenzugs, die wir als eine Approximation für die Länge von α auffassen wollen, beträgt dann offenbar

$$\sum_{k=0}^{m-1} d(\alpha(t_k), \alpha(t_{k+1})) \ .$$

Betrachten wir eine Verfeinerung dieser Zerlegung, so wird der Weg durch den feineren Streckenzug im Allgemeinen besser approximiert, und die Länge des feineren Streckenzugs wird aufgrund der Dreiecksungleichung höchstens länger. Berücksichtigen wir außerdem, dass es zu je zwei beliebigen Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$ eine gemeinsame Verfeinerung gibt, werden wir auf die folgende Definition geführt:

Definition 2. Unter der *Länge* des Weges $\alpha : [a,b] \to \mathbb{E}$ versteht man die „Zahl"

$$L(\alpha) := \sup \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} d(\alpha(t_k), \alpha(t_{k+1})) \;\middle|\; m \in \mathbb{N}, a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_m = b \right\} \in [0, \infty] \ .$$

Ist $L(\alpha) < \infty$, so heißt α *rektifizierbar.*

Beispiel. Sind $p, q \in \mathbb{E}$ und ist $\alpha : [0,1] \to \mathbb{E},\ t \mapsto p + t(q-p)$ die Parametrisierung der Verbindungsstrecke von p nach q, so gilt $L(\alpha) = d(p,q)$.

Bemerkung. Es gibt nicht-rektifizierbare Wege.

(a) Ein einfaches Beispiel eines nicht-rektifizierbaren Weges ist

$$\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \ , \ t \mapsto \begin{cases} (0,0) & \text{für } t = 0 \\ (t, t \cdot \cos(1/t)) & \text{für } t > 0 \end{cases} \ .$$

(b) Ist $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ (mit $n \geq 2$) ein rektifizierbarer Weg, so ist $\alpha([0,1])$ bezüglich des üblichen Volumenmaßes eine Menge vom Maß Null.

(c) Andererseits gibt es *Peano-Wege* $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, das sind solche (stetige!) Wege, für die $\alpha([0,1]) = [0,1] \times [0,1]$ gilt. Diese sind nach dem Vorangegangenen nicht rektifizierbar.

Aufgabe 1. Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{E}$ ein rektifizierbarer Weg und $f \in I(\mathbb{E})$. Dann gilt $L(f \circ \alpha) = L(\alpha)$, insbesondere ist der Weg $f \circ \alpha$ ebenfalls rektifizierbar.

Aufgabe 2. Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{E}$ ein rektifizierbarer Weg. Dann ist die Funktion

$$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R},\ t \mapsto L(\alpha|[a,t])$$

monoton wachsend und stetig.

[Tipp für den Stetigkeitsbeweis in einem Parameter $t^* \in]a,b[$: Man überlege sich, dass es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ Parameter $t_0 = a < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$ gibt, so dass einerseits der Streckenzug β mit den Eckpunkten $\alpha(t_i)$ $(0 \le i \le m)$ länger als $L(\alpha) - \varepsilon/3$ ist und dass andererseits für ein geeignetes $k \in \{1, \dots, m-1\}$ gilt: $t^* = t_k$ und $d(\alpha(t_{k-1}), \alpha(t_k))$, $d(\alpha(t_k), \alpha(t_{k+1})) < \varepsilon/3$. In dieser Situation zeige man $L(\alpha|[t_{k-1}, t_{k+1}]) < \varepsilon$ und schließe daraus $|\varphi(t) - \varphi(t^*)| < \varepsilon$ für alle $t \in [t_{k-1}, t_{k+1}]$ mit der Monotonie von φ.]

Satz 1. (Invarianz der Weglänge unter Parametertransformation.) Es sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{E}$ ein Weg und $\varphi : [a',b'] \to [a,b]$ eine *Parametertransformation*: das soll heißen, dass φ surjektiv, monoton wachsend und stetig* ist. Dann gilt $L(\alpha \circ \varphi) = L(\alpha)$. Insbesondere ist $\alpha \circ \varphi$ genau dann rektifizierbar, wenn α rektifizierbar ist.

Beweis. Wir zeigen, dass die Mengen

$$M := \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} d(\alpha(t_k), \alpha(t_{k+1})) \,\middle|\, m \in \mathbb{N}, a = t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_m = b \right\}$$

und

$$M' := \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} d((\alpha \circ \varphi)(t'_k), (\alpha \circ \varphi)(t'_{k+1})) \,\middle|\, m \in \mathbb{N}, a' = t'_0 \le t'_1 \le \ldots \le t'_m = b' \right\}$$

übereinstimmen, dann gilt auch $L(\alpha) = \sup M = \sup M' = L(\alpha \circ \varphi)$.

Dazu: Ist $a' = t'_0 \le t'_1 \le \ldots \le t'_m = b'$ eine Zerlegung des Intervalls $[a', b']$, so ist mit $t_k := \varphi(t'_k)$ eine Zerlegung $a = t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_m = b$ des Intervalls $[a,b]$ gegeben, und offenbar gilt

$$\sum_{k=0}^{m-1} d(\alpha(t_k), \alpha(t_{k+1})) = \sum_{k=0}^{m-1} d((\alpha \circ \varphi)(t'_k), (\alpha \circ \varphi)(t'_{k+1})) \,. \qquad (*)$$

Daraus folgt $M' \subset M$. Ist umgekehrt eine Zerlegung $a = t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_m = b$ des Intervalls $[a,b]$ gegeben, so setzen wir $t'_0 := a'$, $t'_m := b'$ und wählen $t'_k \in \varphi^{-1}(\{t_k\})$ beliebig für $k \in \{1, \dots, m-1\}$. Dann ist $a' = t'_0 \le t'_1 \le \ldots \le t'_m = b'$ eine Zerlegung des Intervalls $[a', b']$, und es gilt wieder (*), woraus $M \subset M'$ folgt. □

Als nächstes wollen wir uns vergewissern, dass unsere anschauliche Vorstellung von Strecken als die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten, die unserer Definition der Weglänge zugrunde lag, tatsächlich korrekt ist. Dies erfordert etwas Vorbereitung:

Lemma. Sind $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{E}$ und gilt „Gleichheit in der Dreiecksungleichung", d.h. $d(p_1, p_3) = d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3)$, so gilt $p_2 \in [p_1, p_3] := \{\, p_1 + t(p_3 - p_1) \mid t \in [0,1] \,\}$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $p_3 \ne p_1$. Dann setzen wir $v := p_3 - p_1 \ne 0$, und es gilt:

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \langle v, v\rangle = |\langle v, v\rangle| = |\langle (p_3 - p_2) + (p_2 - p_1), v\rangle| \le |\langle p_3 - p_2, v\rangle| + |\langle p_2 - p_1, v\rangle| \\ &\overset{(*)}{\le} \|p_3 - p_2\| \cdot \|v\| + \|p_2 - p_1\| \cdot \|v\| = (d(p_2, p_3) + d(p_1, p_2)) \cdot \|v\| = d(p_1, p_3) \cdot \|v\| = \|v\|^2 \,, \end{aligned}$$

*Tatsächlich kann man zeigen, dass die Stetigkeit von φ schon aus der Surjektivität und Monotonie folgt.

wobei die Ungleichung $(*)$ aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt. Wir sehen also, dass in dieser Rechnung tatsächlich überall Gleichheit gilt. Daher ergibt sich, indem man die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für $(p_3 - p_2, v)$ bzw. $(p_2 - p_1, v)$ berücksichtigt:

$$|\langle p_3 - p_2, v\rangle| = \|p_3 - p_2\| \cdot \|v\| \quad \text{und} \quad |\langle p_2 - p_1, v\rangle| = \|p_2 - p_1\| \cdot \|v\| ,$$

das heißt, für die beiden letzteren Konstellationen gilt in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung Gleichheit. Daraus ergibt sich, dass $s, t \geq 0$ existieren mit $p_3 - p_2 = sv$ und $p_2 - p_1 = tv$. Damit haben wir $p_2 = p_1 + (p_2 - p_1) = p_1 + tv$; ferner gilt $p_2 = p_1 + ((p_3 - p_1) + (p_2 - p_3)) = p_1 + (1 - s)v$, somit ist $t = 1 - s \leq 1$. □

Folgerung. Ist $\alpha : [a, b] \to \mathbb{E}$ ein Weg, und gilt $L(\alpha) = d(\alpha(a), \alpha(b))$, so ist $\alpha(t) \in [\alpha(a), \alpha(b)]$ für alle $t \in [a, b]$.

Beweis. Für $t \in [a, b]$ gilt

$$L(\alpha) = d(\alpha(a), \alpha(b)) \leq d(\alpha(a), \alpha(t)) + d(\alpha(t), \alpha(b)) \leq L(\alpha)$$

und somit $d(\alpha(a), \alpha(b)) = d(\alpha(a), \alpha(t)) + d(\alpha(t), \alpha(b))$. Durch Anwendung des Lemmas (mit $p_1 := \alpha(a)$, $p_2 := \alpha(t)$ und $p_3 := \alpha(b)$) ergibt sich $\alpha(t) \in [\alpha(a), \alpha(b)]$. □

Satz 2. (Strecken sind Kürzeste.) Es seien $p, q \in \mathbb{E}$ zwei verschiedene Punkte, $W(p, q)$ die Menge aller Wege $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{E}$ mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha(1) = q$, und $\alpha_0 : [0, 1] \to \mathbb{E}$, $t \mapsto p + t(q - p)$ die kanonische Parametrisierung der Verbindungsstrecke von p nach q. Dann gilt:

(a) $L(\alpha_0) = d(p, q)$.

(b) $\forall \alpha \in W(p, q) \ : \ L(\alpha) \geq L(\alpha_0)$.

(c) Ist $\alpha \in W(p, q)$ mit $L(\alpha) = L(\alpha_0)$, so existiert eine Umparametrisierung $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ (siehe Satz 1) mit $\alpha = \alpha_0 \circ \varphi$.

Beweis. Zu (a). Ist eine Zerlegung $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_m = 1$ des Intervalls $[0, 1]$ vorgegeben, so gilt offenbar $d(\alpha(t_k), \alpha(t_{k+1})) = (t_{k+1} - t_k) \cdot \|q - p\|$ und somit $\sum_k d(\alpha(t_k), \alpha(t_{k+1})) = \|q - p\| = d(p, q)$. Es folgt $L(\alpha_0) = \sup\{\ldots\} = d(p, q)$. *Zu (b).* $0 = t_0 \leq t_1 = 1$ ist eine Zerlegung des Intervalls $[0, 1]$, deshalb gilt $L(\alpha) \geq d(\alpha(t_0), \alpha(t_1)) = d(p, q) = L(\alpha_0)$. *Zu (c).* Gilt $L(\alpha) = L(\alpha_0)$, so ergibt sich aus der Folgerung dieses Abschnitts, dass es zu jedem $t \in [0, 1]$ ein $\varphi(t) \in [0, 1]$ mit $\alpha(t) = p + \varphi(t)(q - p)$ gibt; mit der hierdurch definierten Funktion $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ gilt offenbar $\alpha = \alpha_0 \circ \varphi$. Außerdem gilt $\varphi(t) = \frac{\langle \alpha(t) - p, q - p\rangle}{\|q - p\|^2}$ und daher ist φ mit α stetig. Zum Beweis der Monotonie von φ sei $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} L(\alpha) \geq d(p, \alpha(t_1)) + d(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) + d(\alpha(t_2), q) &= |\underbrace{\varphi(t_1)}_{\geq 0}| \cdot \|q - p\| + |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \cdot \|q - p\| + |\underbrace{1 - \varphi(t_2)}_{\geq 0}| \cdot \|q - p\| \\ &= \big(\varphi(t_1) + |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| + 1 - \varphi(t_2)\big) \cdot \|q - p\| . \end{aligned}$$

Wäre nun $\varphi(t_2) < \varphi(t_1)$, so würde sich ergeben: $L(\alpha) \geq \big(1 + 2(\varphi(t_1) - \varphi(t_2))\big) \cdot \|q - p\| > \|q - p\| = L(\alpha_0)$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Deshalb ist φ monoton wachsend. Schließlich gilt $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$ (wegen $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$), woraus wegen des Zwischenwertsatzes die Surjektivität von $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ folgt. □

Aufgabe 3. (Der Schwarzsche Stiefel.) Hermann Armandus Schwarz — lange ist es her (1843 - 1921) — sitzt am Fenster und überlegt, ob man den Inhalt einer Fläche per Approximation durch viele Dreiecke bestimmen kann, analog zur Bestimmung der Länge rektifizierbarer Wege per Approximation durch Strecken.

Draußen geht ein Soldat vorbei und Schwarzens Blick fällt auf dessen verknautschten Stiefel. Und da hat er ihn, den „SCHWARZschen Stiefel“:

Wir betrachten einen Kreiszylinder vom Radius r und mit Höhe h, zerlegen die Mantelfläche durch $m-1$ Kreise, die alle zum Grundkreis parallel sind und voneinander den Abstand h/m haben. Dann wählen wir auf jedem dieser Kreis n äquidistante Punkte, und zwar so, dass bei jedem Kreis die Punkte mitten zwischen die des darüber liegenden Nachbarkreises zu liegen kommen. Wir betrachten die Menge der Dreiecke, die diese Punkte als Ecken haben.

(a) Man zeige, dass die Anzahl dieser Dreiecke $2mn$ und

(b) der Gesamtflächeninhalt aller Dreiecke

$$F_{(m,n)} := 2 \cdot m \cdot n \cdot r \cdot \sin(\pi/n) \cdot \sqrt{r^2(1-\cos(\pi/n))^2 + h^2/m^2}$$

ist.

(c) Man bestimme $\lim_{n\to\infty} F_{(n,n)}$, $\lim_{n\to\infty} F_{(n^2,n)}$ und $\lim_{n\to\infty} F_{(n^3,n)}$. Kann man das geometrisch verstehen?

Schwarzens Erkenntnis: Bestimmung des Inhalts einer Fläche per Approximation durch Dreiecke liefert keinen „vernünftigen“ Flächeninhaltsbegriff. Man begründe dies!

2.2 Kurven, Geschwindigkeit, und Parametrisierung nach der Bogenlänge

Es sei $\mathbb{E}$ ein euklidischer Raum.

Die Länge eines Weges ist im Allgemeinen nicht leicht auszurechnen: Immerhin hat man das Supremum über eine unendliche Menge von Streckenzug-Längen auszurechnen. Wenn man sich aber für *Kurven*, das sind stetig differenzierbare Wege, interessiert, wird die Sache übersichtlicher, wie sich in diesem Abschnitt zeigt.

Definition.

(a) Einen stetig differenzierbaren Weg $\alpha : I \to \mathbb{E}$ nennt man eine *Kurve* in $\mathbb{E}$. (Dabei ist, falls I Randpunkte besitzt, die Differenzierbarkeit von α in diesen als links- bzw. rechtsseitige Differenzierbarkeit zu verstehen.)

(b) Für jede Kurve $\alpha : I \to \mathbb{E}$ heißt die Funktion

$$v_\alpha := \|\alpha'\| \, : \, I \to \mathbb{R}$$

die *Bahngeschwindigkeit* von α.

Satz 1. Jede Kurve $\alpha : [a, b] \to \mathbb{E}$ ist rektifizierbar und es gilt

$$L(\alpha) = \int_a^b v_\alpha(t)\,dt\ .$$

Trotz dieser einfachen Formel stößt man bei der Berechnung der Länge von Kurven schnell an Grenzen, weil das sich ergebende Integral oft nicht durch elementare Funktionen ausgedrückt werden kann. Man kommt dann i.a. nicht um die Benutzung eines Computers herum. Das berühmteste Beispiel für diese Schwierigkeit ist die Bestimmung des Umfangs einer Ellipse.

Beweis von Satz 1. Wir zeigen zunächst $L(\alpha) \leq \int_a^b v_\alpha(t)\,dt$. Dazu sei eine Zerlegung $a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_m = b$ des Intervalls $[a, b]$ gegeben, dann gilt für die Länge des zugehörigen Streckenzugs

$$\sum_{k=0}^{m-1} d(\alpha(t_k), \alpha(t_{k+1})) = \sum_{k=0}^{m-1} \|\alpha(t_{k+1}) - \alpha(t_k)\| = \sum_{k=0}^{m-1} \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \alpha'(t)\,dt \right\| \leq \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\alpha'(t)\|\,dt = \int_a^b v_\alpha(t)\,dt\ .$$

Da $L(\alpha)$ das Supremum über die Länge aller möglichen derartigen Streckenzüge ist, folgt $L(\alpha) \leq \int_a^b v_\alpha(t)\,dt$. Indem in diesem Argument α durch $\alpha|[t_1, t_2]$ (mit $a \leq t_1 < t_2 \leq b$) ersetzen, sehen wir, dass auch

$$L(\alpha|[t_1, t_2]) \leq \int_{t_1}^{t_2} v_\alpha(t)\,dt \qquad (*)$$

gilt.

Wir betrachten nun die Funktionen

$$s : [a, b] \to \mathbb{R},\ t \mapsto L(\alpha|[a, t]) \quad \text{und} \quad \widetilde{s} : [a, b] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \int_a^t v_\alpha(s)\,ds\ .$$

Für $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ gilt dann

$$\|\alpha(t_2) - \alpha(t_1)\| = d(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) \leq \underbrace{L(\alpha|[t_1, t_2])}_{=s(t_2)-s(t_1)} \overset{(*)}{\leq} \int_{t_1}^{t_2} v_\alpha(t)\,dt = \widetilde{s}(t_2) - \widetilde{s}(t_1)$$

und somit

$$\left\| \frac{\alpha(t_2) - \alpha(t_1)}{t_2 - t_1} \right\| \leq \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \frac{\widetilde{s}(t_2) - \widetilde{s}(t_1)}{t_2 - t_1}\ .$$

Dabei gelten die Ungleichungen der letzten Zeile offenbar auch für $t_2 < t_1$. Läßt man nun $t_2 \to t_1$ gehen, so konvergiert sowohl der linke als auch der rechte Term gegen $\|\alpha'(t_1)\| = v_\alpha(t_1)$. Daher gilt auch $\lim_{t_2 \to t_1} \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1} = v_\alpha(t_1)$. Anders gesagt: Neben $\widetilde{s}$ ist auch s eine Stammfunktion von v_α, und außerdem gilt $s(a) = 0 = \widetilde{s}(a)$. Daraus ergibt sich $s = \widetilde{s}$ und damit die Behauptung. □

Definition.

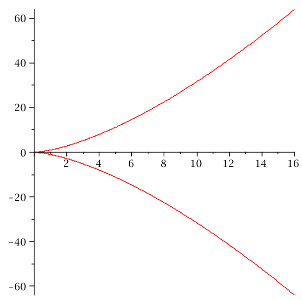
(a) Ein Weg $\alpha : I \to \mathbb{E}$ heißt *nach der Bogenlänge parametrisiert*, wenn

$$\forall t_1 < t_2\ :\ L(\alpha|[t_1, t_2]) = t_2 - t_1$$

gilt.

(b) Eine Kurve $\alpha : I \to \mathbb{E}$ heißt *regulär*, wenn v_α nullstellenfrei ist.

Beispiel. Die *Neilsche Parabel* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^2, t^3)$ ist eine C^∞-Kurve mit $\alpha'(0) = 0$. Also ist α (in $t = 0$) nicht regulär. Die Konsequenz: Das Bild $\alpha(\mathbb{R})$ hat bei $\alpha(0) = (0, 0)$ einen „Knick“.



Aussage. Eine Kurve $\alpha : I \to \mathbb{E}$ ist genau dann nach der Bogenlänge parametrisiert, wenn $v_\alpha \equiv 1$ gilt.

Beweis. Nach Satz 1 ist α genau dann nach der Bogenlänge parametrisiert, wenn für alle $t_1 < t_2$ gilt: $\int_{t_1}^{t_2} v_\alpha(t)\, dt = t_2 - t_1$, und diese Bedingung ist im Falle $v_\alpha \equiv 1$ offensichtlich erfüllt. Gilt umgekehrt $\int_{t_1}^{t_2} v_\alpha(t)\, dt = t_2 - t_1$ für alle $t_1 < t_2$, so folgt aus dieser Gleichung, indem man bei festgehaltenem t_1 nach t_2 differenziert: $v_\alpha(t_2) = 1$. □

Satz 2. (Umparametrisierung nach der Bogenlänge) Ist $\alpha : I \to \mathbb{E}$ eine reguläre C^r-Kurve ($r = 1, 2, \ldots, \infty$), so ist jede Stammfunktion $s : I \to \mathbb{R}$ von v_α streng monoton wachsend, ihre Umkehrfunktion $\varphi := s^{-1} : J \to \mathbb{R}$ (mit $J := s(I)$) ist eine C^r-Parametertransformation (d.h. eine monoton wachsende C^r-Funktion mit $\varphi(J) = I$) und die Kurve $\gamma := \alpha \circ \varphi : J \to \mathbb{E}$ ist nach der Bogenlänge parametrisiert.

Beweis. Da α eine C^r-Kurve ist, ist v_α eine C^{r-1}-Funktion, und daher ist s eine C^r-Funktion, die wegen $s' = v_\alpha > 0$ streng monoton wachsend ist. Daher ist ihre Umkehrfunktion $\varphi : J \to \mathbb{R}$ wohldefiniert, und ebenfalls eine streng monoton wachsende C^r-Funktion, somit eine C^r-Parametertransformation $J \to I$. Schließlich gilt $v_\gamma(t) = \|(\alpha \circ \varphi)'(t)\| = \|(\alpha'(\varphi(t))\| \cdot \varphi'(t) = v_\alpha(\varphi(t)) \cdot \frac{1}{s'(\varphi(t))} = 1$. Also ist γ nach der vorherigen Aussage nach Bogenlänge parametrisiert. □

2.3 Differentiation nach der Bogenlänge, das Tangentenfeld und die Krümmung

Es sei $\alpha : I \to \mathbb{E}$ eine reguläre Kurve in einem euklidischen Raum $\mathbb{E}$. Wir möchten einen Differentialoperator für die Differentiation von (differenzierbaren) Funktionen $f : I \to \mathbb{F}$ (die wir uns als „Funktionen längs α“ vorstellen) einführen, der nur von der geometrischen Gestalt der Kurve, nicht von ihrer Parametrisierung abhängt.

Zu diesem Zweck sei $s : I \to J$ eine Stammfunktion von v_α und $\varphi : J \to I$ die Umkehrfunktion von s. Nach Satz 2 des vorherigen Abschnitts ist $\alpha \circ \varphi$ eine Umparametrisierung von α nach der Bogenlänge, und daher liegt es nahe, als die gewünschte „geometrische“ Differentiation von f die Funktion $(f \circ \varphi)'(s(t))$ zu betrachten. Es gilt

$$(f \circ \varphi)'(s(t)) = (f' \circ \varphi)(s(t)) \cdot \varphi'(s(t)) = \frac{1}{v_\alpha(t)} \cdot f'(t) .$$

Daher führen wir nun den durch α induzierten Differentialoperator

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} := \frac{1}{v_\alpha} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \qquad (*)$$

ein, die sogenannte *Differentiation nach der Bogenlänge* von α. Ist die Angabe der Kurve erforderlich, auf die sich die Differentiation nach der Bogenlänge bezieht, so schreibt man auch $\frac{d}{ds_\alpha}$ statt $\frac{d}{ds}$.

Man beachte: Auch wenn die Stammfunktion s bzw. ihre Umkehrung φ in vielen Fällen nicht explizit angebbar ist, so ist es aufgrund von $(*)$ auch ohne explizite Kenntnis dieser Funktionen möglich, Differentiationen nach der Bogenlänge zu berechnen.

Die folgende Aussage begründet die Notation $\frac{d}{ds}$ für die Differentiation nach der Bogenlänge:

Aussage 1. Für jede differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{F}$ gilt

$$\forall t \in I \;:\; \frac{df}{ds}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{s(t+h) - s(t)} \,.$$

Interpretation: $\frac{df}{ds}$ misst die infinitesimale Änderung von f relativ zur Bogenlänge von α.

Beweis. Für $h \neq 0$ ist der Quotient $\frac{f(t+h)-f(t)}{s(t+h)-s(t)}$ wohldefiniert, weil s streng monoton wachsend ist, und es gilt

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{s(t+h) - s(t)} = \frac{\left(\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right)}{\left(\frac{s(t+h)-s(t)}{h}\right)} \,.$$

Für $h \to 0$ konvergiert der Zähler des rechten Quotienten gegen $f'(t)$, der Nenner gegen $s'(t) = v_\alpha(t)$. Deshalb konvergiert der gesamte Ausdruck gegen $\frac{f'(t)}{v_\alpha(t)} = \frac{df}{ds}(t)$. □

Definition. Die Ableitung

$$T_\alpha := \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$$

heißt das *Einheitstangentenfeld* von α. Ist α zweimal differenzierbar, so heißt

$$\frac{dT_\alpha}{ds}$$

das *Krümmungsvektorfeld* und

$$\varkappa := \left\| \frac{dT_\alpha}{ds} \right\|$$

die *absolute Krümmung* von α.

Beobachtung. Es gilt $\left\langle T_\alpha \,,\, \frac{dT_\alpha}{ds} \right\rangle = 0$.

Beweis. Wir haben $1 = \langle T_\alpha, T_\alpha \rangle$, und deswegen $0 = \frac{d}{ds} \langle T_\alpha, T_\alpha \rangle = 2 \langle T_\alpha, \frac{dT_\alpha}{ds} \rangle$. □

Die folgende Aussage bestätigt unsere Motivation der Differentiation nach der Bogenlänge als ein von der Parametrisierung von α unabhängiger Differentiationsprozeß.

Aussage 2. Es sei $\varphi : J \to I$ eine C^1-Parametertransformation mit $\varphi' > 0$, $\beta := \alpha \circ \varphi : J \to \mathbb{E}$ und $f : I \to \mathbb{F}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt $v_\beta = (v_\alpha \circ \varphi) \cdot \varphi'$ und daher

$$\frac{d(f \circ \varphi)}{ds_\beta} = \frac{df}{ds_\alpha} \circ \varphi \,.$$

Beweis. Es gilt $v_\beta = \|\beta'\| = \|(\alpha \circ \varphi)'\| = \|(\alpha' \circ \varphi) \cdot \varphi'\| = (v_\alpha \circ \varphi) \cdot \varphi'$, für das letzte Gleichheitszeichen beachte man auch $\varphi' > 0$. Daraus ergibt sich

$$\frac{d(f \circ \varphi)}{ds_\beta} = \frac{1}{v_\beta} \cdot (f \circ \varphi)' = \frac{1}{(v_\alpha \circ \varphi) \cdot \varphi'} \cdot (f' \circ \varphi) \cdot \varphi' = \frac{1}{v_\alpha \circ \varphi} \cdot (f' \circ \varphi) = \frac{df}{ds_\alpha} \circ \varphi \,. \qquad \square$$

Als eine Art „Umkehrung“ zu der Differentiation nach der Bogenlänge führen wir auch eine Integration nach der Bogenlänge ein. Dazu definieren wir für jede stetige Funktion $f : I \to V$ mit Werten in einem Vektorraum V und für beliebige Integrationsgrenzen $a, b \in I$ das *Integral nach der Bogenlänge*

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}s := \int_a^b f(t) \cdot v_\alpha(t) \, \mathrm{d}t$$

ein. Diese Begriffsbildung ist offenbar auch dann sinnvoll, wenn α nicht regulär ist.

Beispiele.

(a) **Gleichförmige Bewegung.** Sei $p \in \mathbb{E}$ und $v \in \mathbb{E}_L \setminus \{0\}$. Dann gilt für die *gleichförmige Bewegung* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{E},\ t \mapsto p + tv$:

$$v_\alpha \equiv \text{const.} = \|v\|, \quad T_\alpha \equiv \text{const.} = \frac{v}{\|v\|} \quad \text{und} \quad \varkappa_\alpha \equiv 0 \,.$$

(b) **Gleichförmige Kreisbewegung.** Es sei $p_0 \in \mathbb{E}$, $a, b \in \mathbb{E}_L$ zwei zueinander orthonormale Vektoren, und $r, \omega \in \mathbb{R}_+$. Dann beschreibt die Kurve

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{E},\ t \mapsto p_0 + r \cdot (\cos(\omega t)a + \sin(\omega t)b)$$

eine *gleichförmige Kreisbewegung.* Für sie gilt

$$v_\alpha = r \cdot \omega, \quad T_\alpha = -\sin(\omega t)a + \cos(\omega t)b \quad \text{und} \quad \varkappa_\alpha = \frac{1}{r} \,.$$

(c) **Schraubenlinie.** Es sei $(p_0; a_1, a_2, a_3)$ ein KKS des $\mathbb{E}^3$ und $r, h \in \mathbb{R}_+$. Dann beschreibt die Kurve

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3,\ t \mapsto p_0 + r \cdot (\cos(t)a_1 + \sin(t)a_2) + \frac{h}{2\pi} \cdot t \cdot a_3$$

eine *Schraubenlinie (Helix) mit Radius* r *und Ganghöhe* h. Es gilt

$$v_\alpha = \sqrt{r^2 + \tfrac{h^2}{4\pi^2}}$$

$$\text{Krümmungsvektorfeld} = -\frac{(2\pi)^2\, r}{(2\pi\, r)^2 + h^2} \cdot (\cos(t)a_1 + \sin(t)a_2)$$

$$\varkappa_\alpha = \frac{(2\pi)^2\, r}{(2\pi\, r)^2 + h^2} \,.$$