Analysis III
13. Übung

Martin Schmidt
Volker Eing

26. November 2018

(Abgabe: A5, C, Eingang Ost, Postfach 46236, Montag, 03. Dezember 2018 bis 16 Uhr)

1. Über das Zurückziehen von Differentialformen.

(a) Es seien X, Y differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension n und $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung. Weiter seien Karten $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) : V \to \mathbb{R}^n$ auf offenen Teilmengen $U \subset X$ bzw. $V \subset Y$ mit $f(U) \subset V$ gegeben. Man zeige, dass unter diesen Voraussetzungen für jede glatte Funktion $g \in \mathrm{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ gilt:

$$f^*(g \, \mathrm{d}\psi_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\psi_n) = (g \circ f) \cdot \det\left(\frac{\partial(\psi_j \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\right) \cdot \mathrm{d}\phi_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\phi_n \,.$$

(7 Punkte)

[Tipp. Man verwende die bekannte Formel $\langle A_1 \wedge \cdots \wedge A_p, v_1 \otimes \ldots \otimes v_p\rangle = \det\big(A_i(v_j)\big)_{i,j}$, siehe S. 71 des Skripts.]

(b) Wir betrachten auf $\mathbb{R}^3$ die *kanonische Volumenform*, das ist die 3-Differentialform $\omega := \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, sowie die *sphärischen Koordinaten*, d.h. die glatte Abbildung

$$f : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3, \; (r, \vartheta, \varphi) \mapsto \big(r\,\cos(\vartheta)\,\cos(\varphi)\,,\, r\,\cos(\vartheta)\,\sin(\varphi)\,,\, r\,\sin(\vartheta)\big)\,.$$

Berechne „ω in sphärischen Koordinaten“, das heißt, die Zurückziehung $f^*\omega$.

(6 Punkte)

2. Aus der symplektischen Geometrie.

Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine 2-Differentialform ω auf X heißt *symplektische Form*, wenn ω geschlossen ist (d.h. $\mathrm{d}\omega = 0$ gilt), und für jedes $x \in X$ der alternierende Tensor $\omega(x) \in \bigwedge^2 T'_x M$ nicht entartet ist (siehe Aufgabe 1 Zettel 12). In dieser Situation nennt man das Paar (X, ω) eine *symplektische Mannigfaltigkeit.*

Man zeige für eine symplektische Mannigfaltigkeit (X, ω) die folgenden Aussagen.

(a) Die Dimension von X ist notwendigerweise gerade. *(1 Punkt)*

(b) Die Abbildung

$$TX \to T'X, \; v \mapsto i_v\omega = \langle \omega, v \otimes \square \rangle$$

ist ein Vektorbündel-Isomorphismus. Daher existiert zu jeder Funktion $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ genau ein Vektorfeld $H_f \in \mathrm{Vec}^\infty(X)$ mit

$$i_{H_f}\omega = \mathrm{d}f \,.$$

H_f heißt das *Hamiltonsche Vektorfeld* zu f. *(4 Punkte)*

(c) Sei $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$. Jede Integralkurve $c : (a,b) \to X$ des Hamiltonschen Vektorfelds H_f ist eine Niveaulinie von f (d.h. $f \circ c$ ist konstant). *(4 Punkte)*

3. Über orientierbare Mannigfaltigkeiten.

(a) Zeige:

(i) Die n-dimensionale Sphäre S^n ist orientierbar. *(4 Punkte)*

(ii) Das Möbiusband ist nicht orientierbar. *(4 Punkte)*

(b) Es seien X und Y orientierbare, differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Zeige, dass dann auch $X \times Y$ orientierbar ist. *(4 Punkte)*

(c) Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zeige, dass X in jedem Fall lokal orientierbar ist. Genauer gesagt: Ist (U, ϕ) eine Karte von X mit $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) : U \to \mathbb{R}^n$, so zeige man, dass $\mathrm{d}\phi_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\phi_n$ eine nullstellenfreie n-Differentialform auf U ist. *(4 Punkte)*

(d) Beweise, dass das Tangentialbündel TX einer jeden differenzierbaren Mannigfaltigkeit X orientierbar ist. *(6 Punkte)*

[Tipp. Man berechne für zwei Karten von TX von der im Beweis von Satz 1.52 beschriebenen Art die Determinante der Jacobimatrix des Kartenwechsels.]

4. Gleichungsdefinierte orientierte Hyperflächen. Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung und $q \in \mathbb{R}$ so, dass $X := f^{-1}(\{q\}) \neq \varnothing$ und f in allen $x \in X$ submersiv ist. Zeige, dass X eine $(n-1)$-dimensionale, orientierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist. *(6 Punkte)*

[Tipp. Ist ω eine Volumenform auf $\mathbb{R}^n$ und F das Gradientenvektorfeld von f (d.h. es gilt $T_x(f)(v) = F(x) \cdot v$, wobei $\cdot$ das Standard-Skalarprodukt von $\mathbb{R}^n$ bezeichnet), so untersuche man $i_F\omega|X$.]