

Kapitel 5

Flächen im Raum

Mit diesem Kapitel beginnen wir mit dem Studium von *Flächen* im dreidimensionalen euklidischen Raum \mathbb{E}^3 . Ähnlich wie bei Kurven gibt es zwei verschiedene Arten, Flächen im \mathbb{E}^3 mathematisch zu modellieren: Zum einen können wir eine Fläche als (glatte) Punktmenge im \mathbb{E}^3 auffassen. Zum anderen können wir eine Fläche durch eine Parametrisierung, also durch eine (geeignete) Abbildung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eines Gebiets $G \subset \mathbb{R}^2$, beschreiben.

Wollten wir eine Fläche einfach als glatte Punktmenge im \mathbb{E}^3 , das heißt als 2-dimensionale *Mannigfaltigkeit*, auffassen, so müssten wir für derartige Mannigfaltigkeiten eine Analysis entwickeln. Das wäre eine sicherlich würdige Aufgabe, ist dies doch einer der wesentlichen Inhalte der Vorlesung Analysis III.

Für den Augenblick wollen wir uns aber bescheiden: In dieser Vorlesung werden wir Flächen vermittle von Parametrisierungen untersuchen; auf diese Parametrisierungen können wir die Analysis auf die gewohnte Art anwenden.

In diesem Kapitel sei $\mathbb{E} = \mathbb{E}^3$ ein 3-dimensionaler euklidischer Raum. Wir fixieren zunächst keine Orientierungen auf \mathbb{E} . Weiterhin sei, solange nichts anderes gesagt wird, G ein *Gebiet* in \mathbb{R}^2 , also eine nicht-leere, offene, zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R}^2 .

5.1 Der Begriff einer Fläche

Definition 1. Es sei $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine C^r -Abbildung mit $r \geq 1$.

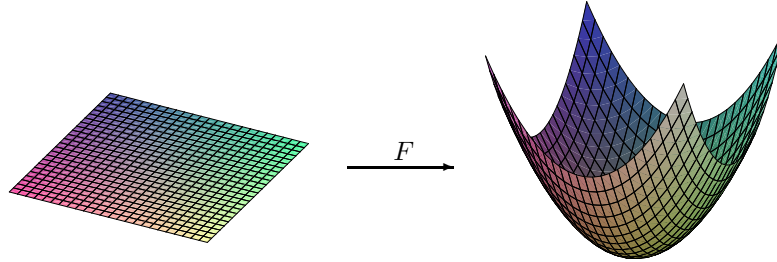
- (a) F heißt in einem Punkt $p \in G$ *regulär* (oder *immersiv*), wenn das Differential

$$d_p F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}_L^3$$

injektiv ist. Ist F in p nicht regulär, so sagen wir, dass F in p eine *Singularität* besitzt. Ist F in allen $p \in G$ regulär, so heißt F eine *Immersion*.

- (b) Zwei C^r -Abbildungen $F_i : G_i \rightarrow \mathbb{E}^3$ ($i = 1, 2$) heißen *äquivalent*, wenn es einen C^r -Diffeomorphismus $\varphi : G_2 \rightarrow G_1$ mit $F_2 = F_1 \circ \varphi$ gibt. Hierdurch wird offenbar eine Äquivalenzrelation auf der Menge derartiger Abbildungen eingeführt.

- (c) Jede derartige Äquivalenzklasse heißt eine C^r -Fläche mit Singularitäten, oder kurz eine C^r -mS-Fläche. Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse, der die Abbildung F angehört, mit $[F]$. Die Elemente von $[F]$ heißen die (verschiedenen) *Parametrisierungen* der mS-Fläche $[F]$; der Definitionsbereich G von $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ heißt der *Parameterbereich* der Parametrisierung F , und der Diffeomorphismus φ aus Teil (b) der Definition, der zwischen zwei Parametrisierungen derselben mS-Fläche vermittelt, heißt eine *Parametertransformation*.



Für je zwei C^r -äquivalente C^r -Abbildung $F_i : G_i \rightarrow \mathbb{E}^3$, die durch die Parametertransformation $\varphi : G_2 \rightarrow G_1$ miteinander verbunden sind, gilt (wegen der Kettenregel): F_2 hat genau dann in $p \in G_2$ eine Singularität, wenn F_1 in $\varphi(p)$ eine Singularität hat. Das bedeutet: Das Auftreten von Singularitäten ist eine Eigenschaft der mS-Fläche $[F_1] = [F_2]$, und nicht etwa eine Eigenschaft einzelner (vielleicht ungeschickt gewählter) Parametrisierungen dieser Fläche.

Um zu starke Entartungen zu vermeiden, werden wir uns nur mit mS-Flächen befassen, die (in einem jeweils noch zu spezifizierenden Sinne) „nicht zu viele“ Singularitäten besitzen. Eine besonders wichtige Rolle werden die „singularitätenfreien mS-Flächen“ spielen. Da wir uns diese sprachliche Verrenkung nicht antun wollen, definieren wir:

Definition 2. Eine C^r -mS-Fläche ohne Singularitäten heißt C^r -Fläche.

F ist in einem Punkt $(t, s) \in G$ genau dann regulär, wenn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial t}(t, s)$ und $\frac{\partial F}{\partial s}(t, s)$ linear unabhängig sind, und das ist genau dann der Fall, wenn die *Gramsche Determinante*

$$\det(g_{ik})_{i,k=1,2} \quad \text{mit} \quad g_{ik} := \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_k} \right\rangle$$

bzw. deren Wurzel

$$\rho_F := \sqrt{\det(g_{ik})_{i,k=1,2}},$$

das sogenannte *Flächenelement*, an der Stelle (t, s) positiv ist. (Man beachte, dass die Gramsche Determinante stets ≥ 0 ist.) Ist auf dem \mathbb{E}^3 eine Orientierung gegeben, und bezeichnet \times das dazu zugehörige Kreuzprodukt auf \mathbb{E}_L^3 , so gilt aufgrund der Lagrange-Identität (siehe Abschnitt 1.7, Aussage 4(d))

$$\rho_F = \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s} \right\|.$$

Dabei benutzen wir die Schreibweisen $\frac{\partial F}{\partial t}$ und $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ bzw. die Schreibweisen $\frac{\partial F}{\partial s}$ und $\frac{\partial F}{\partial x_2}$ als völlig gleichwertig nebeneinander; wir benutzen die eine oder die andere Schreibweise nach lediglich praktischen Erwägungen.

Die Koeffizienten g_{ik} in dieser Gramschen Determinante werden später, bei der Untersuchung der Geometrie der Fläche, von „fundamentaler“ Bedeutung sein. — Die Kurven $F_t : s \mapsto$

$F(t, s)$ und $F^s : t \mapsto F(t, s)$ heißen *Parameterlinien* der Parametrisierung F . Natürlich führen unterschiedliche Parametrisierungen derselben Fläche im Allgemeinen auch zu unterschiedlichen Parameterlinien.

Warum nennt man ρ_F das Flächenelement von F ? Das liegt daran, dass man mit seiner Hilfe den Flächeninhalt von Flächen messen kann. Seien nämlich $F_i : G_i \rightarrow \mathbb{E}^3$ zwei Parametrisierungen derselben C^1 -mS-Fläche und $\varphi : G_2 \rightarrow G_1$ eine dazugehörige Parametertransformation (das heißt $F_2 = F_1 \circ \varphi$). Weiterhin seien $K_i \subset G_i$ kompakte Teilmengen mit $\varphi(K_2) = K_1$. Dann gilt $F_1(K_1) = F_2(K_2)$, und nach dem Transformationssatz der reellen Analysis gilt für jede stetige Funktion f auf $F_1(K_1) = F_2(K_2)$

$$\int_{K_1} (f \circ F_1) \cdot \rho_{F_1} d\lambda^2 = \int_{K_2} (f \circ F_2) \cdot \rho_{F_2} d\lambda^2,$$

insbesondere

$$\int_{K_1} \rho_{F_1} d\lambda^2 = \int_{K_2} \rho_{F_2} d\lambda^2.$$

Das letztere Integral nennen wir per definitionem den *Flächeninhalt* des von $F_i|_{K_i}$ beschriebenen „mS-Flächenstückes“.

5.2 Beispiele für Flächen

Graphenflächen. Es sei $(p_0; a_1, a_2, a_3)$ ein KKS von \mathbb{E} , $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^r -Funktion. Dann parametrisiert

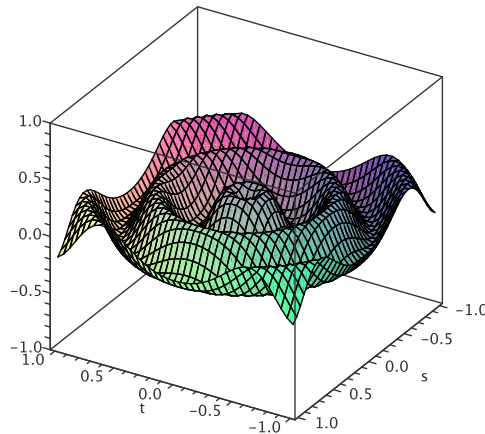
$$F : G \rightarrow \mathbb{E}, (t, s) \mapsto p_0 + t a_1 + s a_2 + f(t, s) a_3$$

eine singularitätenfreie C^r -Fläche, die sogenannte *Graphenfläche* zu f . Für ihr Flächenelement gilt

$$\rho_F = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2},$$

deshalb haben Graphenflächen keine Singularitäten.

Das folgende Bild zeigt als Beispiel die Graphenfläche zur Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, s) \mapsto \frac{1}{5} \sin(12\sqrt{t^2 + s^2})$:



Wie wir in Abschnitt 5.5 sehen werden, läßt sich jede singularitätenfreie Fläche lokal als Graphenfläche parametrisieren.

Rotationsflächen. Wir wählen ein KKS $(p_0; a_1, a_2, a_3)$ von \mathbb{E} und benutzen das Einheitsvektorfeld

$$\Gamma_{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}, \quad t \mapsto \cos(t) a_1 + \sin(t) a_2$$

wie es am Anfang von Kapitel 4 eingeführt wurde. Weiter sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^r -Kurve, deren Komponenten wir mit $\alpha = (r, b)$ bezeichnen. Dann heißt die mS-Flächen-Parametrisierung

$$F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}, \quad (t, s) \mapsto p_0 + r(t) \cdot \Gamma_{\alpha}(s) + b(t) \cdot a_3$$

die (kanonische) Parametrisierung der *Rotationsfläche* zur *Profilkurve* α . Andere Bezeichnungen für „Rotationsfläche“ sind auch *Drehfläche* oder auf englisch *surface of revolution*. Die Parameterlinien F_t bzw. F^s heißen die *Breitenkreise* bzw. die *Meridiane* der Rotationsfläche.

Die Parametrisierung F hat genau dann in $(t, s) \in I \times \mathbb{R}$ eine Singularität, wenn $r(t) = 0$ ist. Will man Singularitäten ausschließen, so setzt man daher $r > 0$ voraus; dann ist $r(t)$ jeweils der Radius des Breitenkreises F_t .

Aufgabe. Ist in der beschriebenen Situation die Profilkurve α nach der Bogenlänge parametrisiert, und sind $c, d \in I$ mit $c < d$, so ist der Flächeninhalt des „Ringstückes“ $F|([c, d] \times [0, 2\pi])$

$$2\pi \cdot \int_c^d |r(t)| \, dt.$$

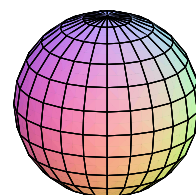
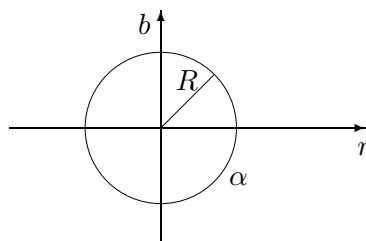
Spezielle Beispiele von Rotationsflächen.

- (a) **Die Sphäre $S_R(p_0)$** mit dem Radius $R > 0$. Diese ist die Rotationsfläche zur Profilkurve

$$\alpha(t) = R \cdot (\cos(t), \sin(t)).$$

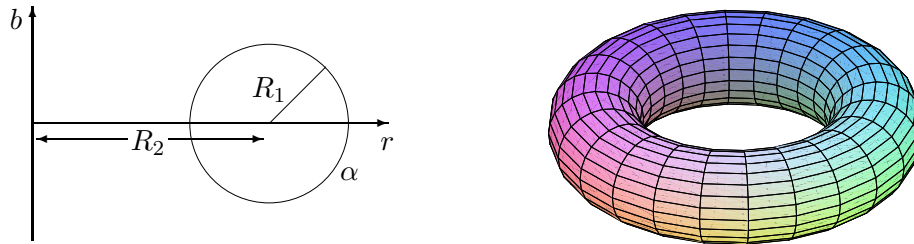
Sie hat Singularitäten in allen (t, s) mit $\cos(t) = 0$, also für $t \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

An diesem Beispiel zeigt sich eine wesentliche Schwäche „unserer“ Methode der Beschreibung von Flächen durch Parametrisierungen: Es gibt ganz wichtige und einfache Flächen, die sich nicht singularitätenfrei (global) parametrisieren lassen. (Zwar läßt sich die Sphäre mittels der stereographischen Projektion auch so parametrisieren, dass nur noch eine einzige Singularität am „Nordpol“ auftritt; aber besser geht's einfach nicht.) — Um diese Schwierigkeit zu umgehen, muss man die Sphäre als „Untermannigfaltigkeit“ auffassen, indem man statt mit einer globalen Parametrisierung die Sphäre mit mehreren lokalen Parametrisierungen überdeckt. Wenn man über diesen Ansatz mehr hören möchte, sind die Vorlesungen *Analysis III* und *Riemannsche Geometrie* von Interesse.



- (b) **Der Torus** mit dem *Seelenradius* $R_1 > 0$ und dem *Wulstradius* $R_2 > R_1$ ist die (singularitätenfreie) Rotationsfläche zur Profilkurve

$$\alpha(t) = (R_2 + R_1 \cdot \cos(t), R_1 \cdot \sin(t)) .$$



5.3 Regelflächen

Eine weitere wichtige Klasse von Flächen sind die sogenannten *Regelflächen*. Sie entstehen dadurch, dass eine Gerade (auf kontinuierliche Weise) im Raum \mathbb{E}^3 bewegt wird.

Es sei also $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht-leeres, offenes Intervall, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine C^r -Kurve und $E : I \rightarrow \mathbb{E}_L^3$ ein C^r -Einheitsvektorfeld längs α (das soll heißen: E ist eine C^r -Funktion mit $\|E\| = 1$, deren Werte $E(t)$ wir uns jeweils an der Stelle $\alpha(t)$ angetragen denken). Um die Singularitätenmenge der Regelfläche klein zu halten, machen wir die Voraussetzung

$$\forall t \in I : (E'(t) \neq 0 \quad \text{oder} \quad \alpha'(t) \notin \mathbb{R} E(t)) . \quad (\text{S})$$

Dann heißt die durch die C^r -Parametrisierung

$$F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3, (t, s) \mapsto \alpha(t) + s \cdot E(t)$$

(welche eine Bewegung einer Geraden im Raum \mathbb{E}^3 entlang der Kurve α bei gleichzeitiger Ausrichtung der Geraden in die durch E gegebene Richtung beschreibt) definierte C^r -mS-Fläche die *Regelfläche* (englisch: *ruled surface*) zu den Daten (α, E) . Die Parameterlinien F_t (mit $t \in I$) sind offensichtlich Geraden; sie heißen die *Erzeugenden* der Regelfläche. F hat in $(t, s) \in I \times \mathbb{R}$ genau dann eine Singularität, wenn $(\alpha'(t) + sE'(t)) \in \mathbb{R} E(t)$ gilt.

Ist $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^r -Funktion und $\alpha_\lambda := \alpha + \lambda \cdot E$, so wird die Regelfläche $[F]$ ebenfalls durch die Abbildung

$$I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3, (t, s) \mapsto \alpha_\lambda(t) + s \cdot E(t)$$

parametrisiert. Indem man α in der Parametrisierung einer Regelfläche geeignet wählt — das heißt, indem man von α zu α_λ mit einer geschickt gewählten Funktion λ übergeht — kann man häufig die Untersuchung der Fläche wesentlich erleichtern.

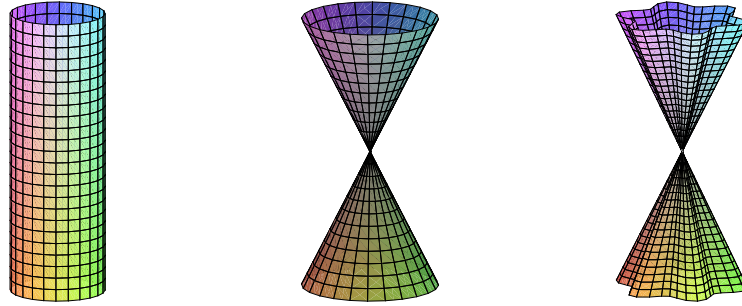
Aufgabe 1. Man kann die Kurve α stets so wählen, dass sie die Erzeugenden der Regelfläche senkrecht schneidet, d.h. dass $\langle \alpha', E \rangle = 0$ gilt.

Beispiele.

- (a) **Zylinder.** Ist $E \equiv \text{const.}$, so heißt die zugehörige Regelfläche ein *Zylinder*. In diesem Fall wählt man α wie in Aufgabe 1, dann ist α eine ebene Kurve; sie muss regulär sein, damit die Bedingung (S) erfüllt ist. Dieses Beispiel motiviert die folgende

Definition. Die von (α, E) erzeugte Regelfläche heißt *nirgends zylindrisch*, wenn $E'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt.

- (b) **Kegel.** Kann man die Regelfläche mit Hilfe einer „Punktkurve“, d.h. einer konstanten Kurve $\alpha \equiv p_0$, darstellen, so heißt sie ein *Kegel*. Damit die Voraussetzung (S) in diesem Falle erfüllt ist, muss $E'(t) \neq 0$ für alle t gelten. Das heißt also: Kegel sind nirgends zylindrisch. Die Singularitätenmenge S von F ist genau $I \times \{0\}$; ihr Bild unter F besteht genau aus dem Punkt p_0 , er heißt die *Spitze* des Kegels.



Wir wollen nun eine genauere Übersicht über die Lage der Singularitäten von F erhalten. Es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \alpha'(t) + s \cdot E'(t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial s} = E(t),$$

daher haben die in Abschnitt 5.1 eingeführten Funktionen g_{ik} für F die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} g_{11}(t, s) &= \|\alpha'(t)\|^2 + 2s \langle \alpha'(t), E'(t) \rangle + s^2 \|E'(t)\|^2 \\ g_{12}(t, s) &= g_{21}(t, s) = \langle \alpha'(t), E(t) \rangle + s \underbrace{\langle E'(t), E(t) \rangle}_{=0} \\ g_{22}(t, s) &= 1. \end{aligned}$$

Daher ist

$$P_t(s) := \det(g_{ik}(t, s))_{i,k} = a(t) \cdot s^2 + 2b(t) \cdot s + c(t)$$

mit den Funktionen

$$a = \|E'\|^2, \quad b = \langle \alpha', E' \rangle \quad \text{und} \quad c = \|\alpha'\|^2 - \langle \alpha', E \rangle^2.$$

Wir sehen also, dass für jedes $t \in I$ gilt:

F hat in (t, s) genau dann eine Singularität, wenn s eine Nullstelle des Polynoms P_t ist.

Man beachte, dass $c(t) = 0$ gerade bedeutet, dass $\alpha'(t) \in \mathbb{R}E(t)$ gilt (Gleichheitsdiskussion in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung!). Deshalb sorgt die Voraussetzung (S) gerade dafür, dass die Funktionen a , b und c für kein $t \in I$ gleichzeitig verschwinden. Daher gilt für die Nullstellenmenge $S(t)$ von P_t : $\#S(t) \leq 2$. Die Folgerung aus der folgenden Aussage zeigt jedoch, dass dieses Ergebnis noch verbessert werden kann.

Aussage 1.

(a) Ist $E'(t) = 0$, so ist das Polynom $P_t(s) = c(t)$ konstant mit $c(t) \neq 0$.

(b) Ist $E'(t) \neq 0$, so gilt

$$P_t(s) = a(t) \cdot ((s - m(t))^2 + \Delta(t)^2)$$

mit

$$m(t) := -\frac{b(t)}{a(t)} \quad \text{und} \quad \Delta(t) := \frac{\det(\alpha'(t), E(t), E'(t))}{a(t)}.$$

Beweis. Zu (a). Ist $E'(t) = 0$, so ist $a(t) = b(t) = 0$, aber $c(t) \neq 0$ wegen der Voraussetzung (S).

Zu (b). Wegen $E'(t) \neq 0$ ist $a(t) \neq 0$, daher sind $m(t)$ und $\Delta(t)$ wohldefiniert, und es gilt

$$P_t(s) = a(t) \cdot \left(\left(s^2 + 2 \frac{b(t)}{a(t)} s + \frac{b(t)^2}{a(t)^2} \right) + \left(\frac{c(t)}{a(t)} - \frac{b(t)^2}{a(t)^2} \right) \right) = a(t) \cdot ((s - m(t))^2 + \mu(t))$$

mit $\mu(t) := \frac{c(t)}{a(t)} - \frac{b(t)^2}{a(t)^2} = \frac{a(t)c(t) - b(t)^2}{a(t)^2}$. Daher genügt zu zeigen:

$$a(t)c(t) - b(t)^2 = \det(\alpha'(t), E(t), E'(t))^2.$$

Dazu setzen wir $\tilde{E} := \frac{1}{\|E'\|} \cdot E'$; wegen $\langle E', E \rangle = 0$ ist dann $(E, \tilde{E}, E \times \tilde{E})$ ein (zumindest in der Nähe von t definiertes) ONB-Feld längs α . Daher gilt

$$\|\alpha'\|^2 = \langle \alpha', E \rangle^2 + \langle \alpha', \tilde{E} \rangle^2 + \langle \alpha', E \times \tilde{E} \rangle^2$$

und daher

$$\begin{aligned} a(t)c(t) - b(t)^2 &= \|E'(t)\|^2 \cdot \left(\langle \alpha'(t), \tilde{E}(t) \rangle^2 + \langle \alpha'(t), E(t) \times \tilde{E}(t) \rangle^2 \right) - \langle \alpha'(t), E'(t) \rangle^2 \\ &= \langle \alpha'(t), E'(t) \rangle^2 + \langle \alpha'(t), E(t) \times E'(t) \rangle^2 - \langle \alpha'(t), E'(t) \rangle^2 \\ &= \langle \alpha'(t), E(t) \times E'(t) \rangle^2 = \det(E(t), E'(t), \alpha'(t))^2 = \det(\alpha'(t), E(t), E'(t))^2, \end{aligned}$$

woraus die behauptete Formel folgt. \square

Folgerung. Es gilt stets $\#S(t) \leq 1$, und zwar gilt $\#S(t) = 1$ genau dann, wenn

$$E'(t) \neq 0 \quad \text{und} \quad \det(\alpha'(t), E(t), E'(t)) = 0$$

ist. In diesem Falle ist $S(t) = \left\{ -\frac{b(t)}{a(t)} \right\}$.

Bemerkung. Ersetzt man die Kurve α durch eine Kurve α_λ (wie oben beschrieben), so ändern sich dadurch die Funktionen $a(t)$ und $\Delta(t)$ nicht.

Aussage 2. Ist die Regelfläche $[F]$ nirgends zylindrisch, so existiert genau eine C^{r-1} -Funktion $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für die Kurve $\alpha_\lambda := \alpha + \lambda \cdot E$ gilt: $\langle \alpha'_\lambda, E' \rangle = 0$. Diese Kurve α_λ heißt die *Striktionslinie* der Regelfläche.

Beweis. Ist $\alpha_\lambda = \alpha + \lambda E$ mit irgendeiner Funktion $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$, so gilt

$$\langle \alpha'_\lambda, E' \rangle = \langle \alpha' + \lambda' E + \lambda E', E' \rangle = \langle \alpha', E' \rangle + \lambda \langle E', E' \rangle$$

wegen $\langle E, E' \rangle = 0$ und somit

$$\langle \alpha'_\lambda, E' \rangle = 0 \iff \lambda = -\frac{\langle \alpha', E' \rangle}{\langle E', E' \rangle}.$$

Hieraus folgt sowohl die behauptete Existenz als auch die Eindeutigkeit. \square

Voraussetzungen für den Rest dieses Abschnitts. Wir setzen nun voraus, dass die Regelfläche $[F]$ nirgends zylindrisch ist. Weiter setzen wir voraus, dass die Kurve α die Striktionslinie von $[F]$ ist. Die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen seien so, dass diese Kurve C^r ist.

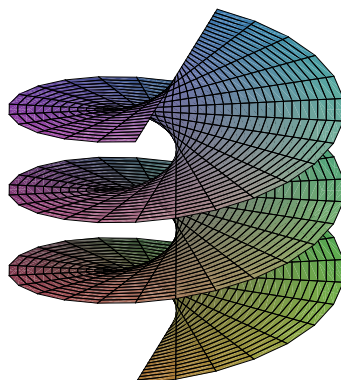
In dieser Situation gilt $m \equiv 0$, und daher: Die Parametrisierung F der Regelfläche hat genau dann in $(t, s) \in I \times \mathbb{R}$ eine Singularität, wenn

$$\det(\alpha'(t), E(t), E'(t)) = 0 \quad \text{und} \quad s = 0$$

gilt. Insbesondere liegen alle Singularitäten einer nigends zylindrischen Regelfläche auf ihrer Striktionslinie.

Weitere Beispiele für Regelflächen. Hierfür setzen wir \mathbb{IE}^3 als orientiert voraus, und fixieren ein positiv orientiertes KKS $(p_0; a_1, a_2, a_3)$. Wir bezeichnen mit (x, y, z) die dazu gehörigen Koordinatenfunktionen (siehe Abschnitt 1.4), und setzen $\Gamma(t) := \cos(t) \cdot a_1 + \sin(t) \cdot a_2$ wie in Kapitel 4.

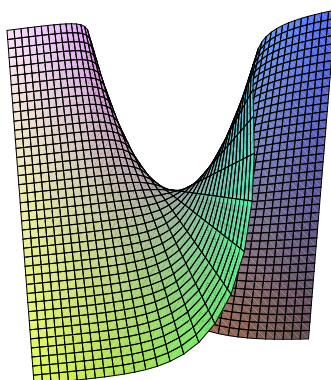
- (a) **Die Wendelfläche.** Sie ist die Regelfläche mit $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IE}^3$, $t \mapsto p_0 + bt \cdot a_3$ (wobei $b \neq 0$ ist), und $E = \Gamma$.



- (b) **Die Sattelfläche (oder hyperbolisches Paraboloid).** Sie wird die durch die Gleichung $z = x^2 - y^2$ beschrieben, d.h. als Punktmenge ist diese Fläche $\{p \in \mathbb{IE}^3 \mid z(p) = x(p)^2 - y(p)^2\}$. Diese Punktmenge ist das Bild der Regelflächenparametrisierung, die durch

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IE}^3, \quad t \mapsto p_0 + t \cdot (a_1 + a_2) \quad \text{und} \quad E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IE}_L^3, \quad t \mapsto (a_1 - a_2 + 4t \cdot a_3) / \sqrt{2 + 16t^2}$$

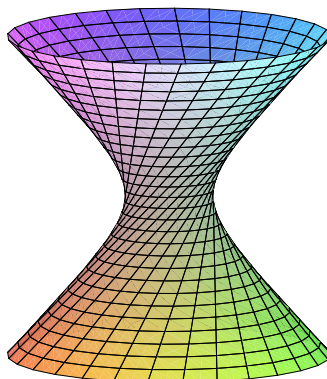
induziert wird.



- (c) **Das einschalige Hyperboloid.** Dieses wird durch die Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ beschrieben und ist das Bild der Regelflächenparametrisierung, die durch

$$\alpha := p_0 + \Gamma \quad \text{und} \quad E := (\Gamma' + a_3)/\sqrt{2}$$

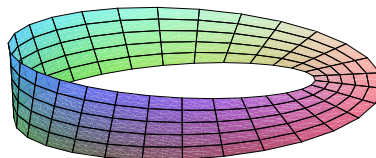
beschrieben wird. (Das *zweischalige Hyperboloid* kann hingegen *nicht* als Regelfläche dargestellt werden.)



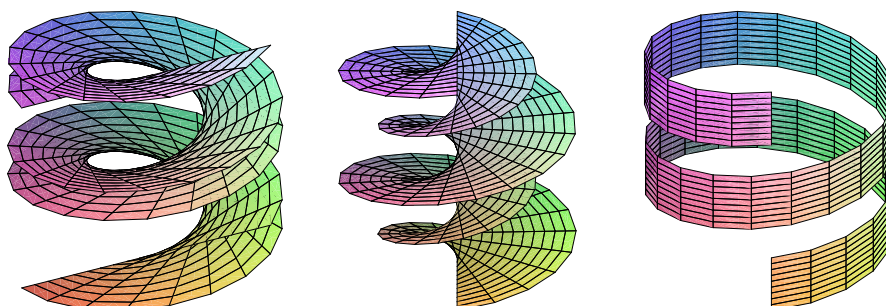
- (d) **Das (unendlich ausgedehnte) Möbiusband** ist die Regelfläche, die durch

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{E}^3, t \mapsto p_0 + \Gamma(t) \quad \text{und} \\ E : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{E}_L^3, t \mapsto \cos(t/2) \cdot \Gamma(t) + \sin(t/2) \cdot a_3 \end{aligned}$$

induziert wird.



- (e) **Die Tangentenfläche, Hauptnormalenfläche und Binormalenfläche einer regulären C^3 -Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ mit $\kappa_\alpha > 0$.** Es sei $(T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha)$ das Frenet-3-Beinfeld zu α , dann sind die *Tangenten-*, *Hauptnormalen-* und *Binormalenfläche* zu α die Regelflächen, die zur Kurve α mit $E = T_\alpha$, $E = N_\alpha$ bzw. $E = B_\alpha$ induziert werden. Die folgenden Bilder zeigen diese Flächen für eine Schraubenlinie α . Man beachte, dass die Hauptnormalenfläche einer Schraubenlinie eine Wendelfläche ist (wenn auch α nicht die Striktionslinie dieser Wendelfläche ist, siehe (a)).



Aufgabe 2. Man bestimme für die vorstehenden Beispiele die Singularitäten und gegebenenfalls die Striktionslinien. Sind letztere auffällige Kurven der jeweiligen mS-Fläche?

Aufgabe 3. Kegel und Tangentenflächen als Beispiele „singularitätenreicher“ Regelflächen. Es sei $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, $(t, s) \mapsto \alpha(t) + s \cdot E(t)$ eine Parametrisierung einer nirgends zylindrischen Regelfläche, wobei wir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ bereits als die Striktionslinie dieser Regelfläche voraussetzen. Nun sei jeder Punkt dieser Striktionslinie eine Singularität von F , genauer gesagt, es gelte:

$$\det(\alpha', E, E') \equiv 0.$$

Beispielsweise liegt dieser Fall vor, wenn $\alpha = \text{const.}$, also $[F]$ ein Kegel ist. In dieser Aufgabe soll der dazu „konträre“ Fall betrachtet werden, dass die Kurve α regulär ist. Man zeige, dass dann $[F]$ die Tangentenfläche der nach der Bogenlänge parametrisierten Striktionslinie ist.

5.4 Das Tangential- und Normalbündel einer Fläche

Wir werden in diesem Abschnitt das Tangential- und das Normalenbündel für C^r -Flächenparametrisierungen (ohne Singularitäten) einführen. Die folgende Aussage erlaubt es uns, diese Konstruktionen auch auf den „singularitätenfreien“ Teil einer C^r -mS-Flächenparametrisierung anzuwenden.

Wie gehabt sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet.

Aussage 1. Ist $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine C^r -Abbildung, so ist die Menge G_F derjenigen Punkte $p \in G$, in denen F regulär ist, eine offene Teilmenge von G . Ist $G_F \neq \emptyset$, so ist daher $F|_{G_F}$ eine Immersion, und daher sind die Einschränkungen von F auf die einzelnen Zusammenhangskomponenten von G_F jeweils Parametrisierungen von C^r -Flächen.

Beweis. Es gilt $G_F = \rho_F^{-1}(\mathbb{R}_+)$, wobei ρ_F das Flächenelement von F bezeichnet (siehe Abschnitt 4.1). Also ist G_F als das Urbild der offenen Menge \mathbb{R}_+ unter der stetigen Abbildung $\rho_F : G \rightarrow \mathbb{R}$ offen in G . \square

Definition. Sei $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine C^r -Immersion und $p \in G$. Dann definieren wir den *Tangentenraum* $T_p F$ von F in p durch

$$T_p F := d_p F(\mathbb{R}^2) = \text{span} \left\{ \frac{\partial F}{\partial t}(p), \frac{\partial F}{\partial s}(p) \right\} \subset \mathbb{E}_L^3$$

und den *Normalenraum* $\perp_p F$ von F in p als das Orthokomplement von $T_p F$ in \mathbb{E}_L^3 , also

$$\perp_{(t,s)} F = \mathbb{R} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial t}(p) \times \frac{\partial F}{\partial s}(p) \right).$$

Die Familie $TF := (T_p F)_{p \in G}$ aller Tangentialräume von F bzw. die Familie $\perp F := (\perp_p F)_{p \in G}$ aller Normalenräume von F heißt das *Tangentenbündel* bzw. das *Normalenbündel* von F . Weiterhin definieren wir die Vektorräume $\Gamma^{(s)}(TF)$ der C^s -Tangentenfelder bzw. $\Gamma^{(s)}(\perp F)$ der C^s -Normalenfelder von F (mit $s \leq r$) durch

$$\begin{aligned} \Gamma^{(s)}(TF) &:= \{ Y : G \rightarrow \mathbb{E}_L^3 \mid Y \text{ ist } s\text{-mal stetig differenzierbar und } \forall p \in G : Y(p) \in T_p F \}, \\ \Gamma^{(s)}(\perp F) &:= \{ \xi : G \rightarrow \mathbb{E}_L^3 \mid \xi \text{ ist } s\text{-mal stetig differenzierbar und } \forall p \in G : \xi(p) \in \perp_p F \}. \end{aligned}$$

Beispiel. Ist $X : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein C^s -Vektorfeld mit $s \leq r - 1$, so ist $F_*X := dF(X) : p \mapsto d_p F(X(p))$ ein C^s -Tangentialfeld von F ; siehe auch die Folgerung in Abschnitt 5.5.

Die folgende Aussage zeigt, dass das Tangential- und das Normalenbündel „invariante“ Objekte der Fläche $[F]$ sind.

Aussage 2. Sind $F_i : G_i \rightarrow \mathbb{E}^3$ zwei Parametrisierungen derselben Fläche, ist $\varphi : G_2 \rightarrow G_1$ eine dazugehörige Parametertransformation, und ist $p \in G_2$, so gilt

$$T_p F_2 = T_{\varphi(p)} F_1 \quad \text{und} \quad \perp_p F_2 = \perp_{\varphi(p)} F_1 .$$

Beweis. Es gilt also $F_2 = F_1 \circ \varphi$ und daher nach Kettenregel

$$T_p F_2 = d_p F_2(\mathbb{R}^2) = d_p(F_1 \circ \varphi)(\mathbb{R}^2) = d_{\varphi(p)} F_1(d_p \varphi(\mathbb{R}^2)) = d_{\varphi(p)} F_1(\mathbb{R}^2) = T_{\varphi(p)} F_1 .$$

Daraus folgt auch $\perp_p F_2 = (T_p F_2)^\perp = (T_{\varphi(p)} F_1)^\perp = \perp_{\varphi(p)} F_1$. \square

5.5 Lokale Parametrisierung von Flächen als Graphenflächen

Es sei $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine C^r -Flächenparametrisierung (ohne Singularitäten). Das folgende Theorem zeigt, dass sich die Fläche $[F]$ lokal als Graphenfläche auffassen lässt, siehe Abschnitt 5.2.

Theorem. Zu jedem Punkt $p_0 \in G$ existiert ein Gebiet $U \subset G$ mit $p_0 \in U$, so dass $[F|U]$ eine Graphenfläche über der (affinen) Tangentialebene $F(p_0) + T_{p_0} F$ ist, genauer gesagt: Ist $(F(p_0); a_1, a_2, a_3)$ ein positiv orientiertes KKS von \mathbb{E}^3 mit $\text{span}\{a_1, a_2\} = T_{p_0} F$, so existiert ein Gebiet $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ mit $0 \in \tilde{U}$ und eine C^r -Funktion $f : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass die C^r -Graphenflächenparametrisierung

$$\tilde{F} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{E}^3, (t, s) \mapsto F(p_0) + t \cdot a_1 + s \cdot a_2 + f(t, s) \cdot a_3 \quad (*)$$

eine weitere Parametrisierung von $[F|U]$ ist. Dabei gilt $f(0) = 0$ und $d_0 f = 0$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass es ein KKS $(p_0; a_1, a_2, a_3)$ von \mathbb{E}^3 von der im Theorem benannten Art gibt: Durch Anwendung des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens auf $(\frac{\partial F}{\partial t}(p_0), \frac{\partial F}{\partial s}(p_0))$ erhalten wir zwei orthonormale Vektoren a_1 und a_2 ; setzen wir außerdem $q_0 := F(p_0)$ und $a_3 := a_1 \times a_2$, so ist $(q_0; a_1, a_2, a_3)$ ein positiv orientiertes KKS mit $\text{span}\{a_1, a_2\} = T_{p_0} F$. Mit x_1, x_2, x_3 bezeichnen wir die zu diesem KKS gehörenden Koordinatenfunktionen.

Damit definieren wir eine Funktion $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $\varphi_k := x_k \circ F = \langle F - q_0, a_k \rangle$ für $k \in \{1, 2\}$. Es ist $\varphi(p_0) = 0$ und $\det(d_{p_0} \varphi) = \det(\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(p_0), a_k \rangle) = \det(\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(p_0), a_k \rangle) > 0$. Also ist $d_{p_0} \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Vektorraum-Isomorphismus. Nach dem lokalen Umkehrsatz existieren daher Gebiete $U \subset G$ mit $p_0 \in U$ und $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ mit $0 = \varphi(p_0) \in \tilde{U}$, so dass $\varphi|U : U \rightarrow \tilde{U}$ ein C^r -Diffeomorphismus ist.

Definieren wir nun

$$f := x_3 \circ F \circ (\varphi|U)^{-1} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

und damit \tilde{F} gemäß der Formel (*), so erhalten wir $f(0) = 0$ und

$$F|U = q_0 + \sum_{k=1}^3 (x_k \circ F) \cdot a_k = q_0 + \varphi_1 \cdot a_1 + \varphi_2 \cdot a_2 + (f \circ \varphi) \cdot a_3 = \tilde{F} \circ \varphi|U .$$

Also sind $F|U$ und $\tilde{F}|\tilde{U}$ zwei C^r -äquivalente Parametrisierungen. Differenzieren wir die letzte Gleichung an der Stelle p_0 , so erhalten wir für jedes $v \in \mathbb{R}^2$

$$d_{p_0}F(v) = d_{p_0}\varphi_1(v) \cdot a_1 + d_{p_0}\varphi_2(v) \cdot a_2 + d_0f(d_{p_0}\varphi(v)) \cdot a_3.$$

Wegen $d_{p_0}F(v) \in T_{p_0}F$ ist $0 = \langle d_{p_0}F(v), a_3 \rangle = d_0f(d_{p_0}\varphi(v))$ und somit $d_0f \circ d_{p_0}\varphi = 0$. Weil $d_{p_0}\varphi$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist, folgt $d_0f = 0$. \square

Wir halten fest, dass als Konsequenz aus diesem Theorem die Menge $F(U)$ eine (*reguläre*) *Untermannigfaltigkeit* von \mathbb{E}^3 ist.

Folgerung. Ist Y ein C^s -Tangentialfeld von F mit $0 \leq s \leq r-1$, so existiert genau ein C^s -Vektorfeld $X : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $Y = F_*X$ (siehe auch das Beispiel in Abschnitt 5.4).

Beweis. Da für jedes $p \in G$ jeweils $d_pF : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_pF$ bijektiv ist, existiert genau eine Abbildung $X : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $d_pF(X(p)) = Y(p)$. Wir haben zu zeigen, dass diese Abbildung X C^s -differenzierbar ist. Dazu verwenden wir die Bezeichnungen aus dem Beweis des Theorems.

Es sei $W := (x_1, x_2)^{-1}(\tilde{U})$, dies ist eine offene Teilmenge von \mathbb{E} . Ist $p \in U$, so ist $(x_1, x_2) \circ F(p) = \varphi(p) \in \tilde{U}$ und somit $F(p) \in W$. Daher können wir das C^s -Vektorfeld $Z : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $p \mapsto d_{F(p)}(\varphi^{-1} \circ (x_1, x_2))(Y_p)$ definieren. Wegen $\varphi^{-1} \circ (x_1, x_2) \circ F|U = \text{id}_U$ und der Kettenregel gilt für jeden Punkt $p \in U$

$$Z_p = d_{F(p)}(\varphi^{-1} \circ (x_1, x_2))(d_pF(X_p)) = d_p(\varphi^{-1} \circ (x_1, x_2) \circ F)(X_p) = X_p.$$

Somit ist $X|U = Z$, und also ist $X|U$ C^s -differenzierbar. Indem man nun den Punkt $p_0 \in G$ aus dem Theorem ganz G durchlaufen läßt (folglich U variiert), sieht man, dass X überall C^s -differenzierbar ist. \square

5.6 Der Maßtensor einer Flächenparametrisierung

In diesem Abschnitt beginnen wir damit, das Handwerkszeug zu entwickeln, um auf Flächen *Geometrie* zu betreiben. Die leitende Idee dabei ist, dass man die Geometrie der durch eine C^r -Flächenparametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ beschriebenen Fläche $[F]$ durch Größen beschreibt, die auf G definiert sind. Die erste derartige Größe ist der *Maßtensor* von F , der es uns ermöglicht, Längen und Winkel für Kurven auf der Fläche $[F]$ zu messen.

Aber zunächst müssen wir sagen, was „Kurven auf der Fläche“ sein sollen:

Definition 1. Eine C^s -Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ (mit $1 \leq s \leq r$) heißt eine *C^s -Kurve der C^r -mS-Fläche $[F]$* , wenn es für eine (und damit für jede) Parametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ dieser mS-Fläche eine C^s -Kurve $\alpha : I \rightarrow G$ mit $\gamma = F \circ \alpha$ gibt.

Wir wollen nun die Länge $L(\gamma)$ einer solchen „Flächenkurve“ mittels α ausrechnen. Dazu definieren wir für jedes $p \in G$ die symmetrische Bilinearform

$$g_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto \langle d_pF(u), d_pF(v) \rangle$$

und damit die C^{r-1} -Funktion

$$g : G \rightarrow L_{sym}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), p \mapsto g_p,$$

den sogenannten *Maßtensor* oder die *erste Fundamentalform* der Parametrisierung F . Man beachte, dass $g_p(v, v) \geq 0$ für alle $p \in G, v \in \mathbb{R}^2$ gilt, und dass g_p genau dann ein Skalarprodukt ist, wenn F in p regulär ist.

Für $\gamma = F \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ und $t \in I$ erhalten wir nun

$$\gamma'(t) = (F \circ \alpha)'(t) = d_{\alpha(t)}F(\alpha'(t)) ,$$

also

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))$$

und somit für $I = [a, b]$

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt .$$

Ebenso können wir vermittle des Maßensors den Winkel zwischen zwei Flächenkurven ausdrücken: Sind $\gamma = F \circ \alpha$ und $\delta = F \circ \beta$ zwei Flächenkurven mit $\alpha(t_1) = \beta(t_2) =: p_0$ (also auch $\gamma(t_1) = \delta(t_2)$), und sind α in t_1 , β in t_2 und F in p_0 regulär, so ist der Winkel zwischen $\gamma'(t_1)$ und $\delta'(t_2)$ gleich dem Winkel zwischen $\alpha'(t_1)$ und $\beta'(t_2)$ bezüglich des Skalarprodukts g_{t_0} .

Also kann man die beiden fundamentalen „Messungen“ der Geometrie, nämlich die Messung von Längen und von Winkeln, statt „auf der Fläche“ $[F]$ äquivalent auch im Gebiet G mit dem Maßtensor g durchführen.

Deshalb ist es ein naheliegender Abstraktionsschritt, das Paar (G, g) abstrakt zu definieren, und als eigenständiges Objekt zu untersuchen.

Definition 2. Ist G ein Gebiet des \mathbb{R}^n und $k \in \mathbb{N}$, so heißen die Funktionen $G \rightarrow L^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ bzw. $G \rightarrow L^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *Tensorfelder vom Typ $(0, k)$ bzw. $(1, k)$* auf G . Ein stetiges, symmetrisches Tensorfeld g vom Typ $(0, 2)$, so dass g_p für jedes $p \in G$ ein positiv definites Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n ist, heißt eine *Riemannsche Metrik* auf G ; in diesem Fall nennen wir das Paar (G, g) ein *Riemannsches Gebiet*. Ist g außerdem C^r -differenzierbar, so nennen wir (G, g) ein *Riemannsches C^r -Gebiet*.

Beispiele 1.

- (a) Die alternierenden Differentialformen vom Grad k sind Beispiele für Tensorfelder vom Typ $(0, k)$.
- (b) Der Maßtensor g der Parametrisierung F einer mS-Fläche $[F]$ ist ein Tensorfeld vom Typ $(0, 2)$; er ist eine Riemannsche Metrik genau dann, wenn $[F]$ singularitätenfrei ist. In diesem Falle ist (G, g) also ein Riemannsches Gebiet.
- (c) Die *kanonische Riemannsche Metrik von \mathbb{R}^n* ist die konstante Funktion $g \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt von \mathbb{R}^n bezeichnet.

Darstellung Riemannscher Metriken. Ist (G, g) ein n -dimensionales Riemannsches Gebiet, (e_1, \dots, e_n) die kanonische Basis des \mathbb{R}^n und jeweils

$$g_{ik} : G \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto g_p(e_i, e_k) ,$$

so gilt $g_{ik} = g_{ki}$ und für alle $p \in G$ und $v, w \in \mathbb{R}^n$ nach dem Beispiel (b) aus Abschnitt 1.7

$$g_p(v, w) = \sum_{i,k=1}^n g_{ik}(p) \cdot v_i \cdot w_k .$$

Somit gilt für jede C^1 -Kurve $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : I \rightarrow G$

$$g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) = \sum_{i,k} g_{ik}(\alpha(t)) \cdot \alpha'_i(t) \cdot \alpha'_k(t) .$$

Da man im Falle $I = [a, b]$ die Länge der Kurve α bezogen auf das Riemannsche Gebiet (G, g) als

$$L(\alpha) := \int_a^b \sqrt{g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt$$

definiert, werden derartige Riemannsche Metriken häufig auch als

$$ds^2 = \sum g_{ik} \cdot dx_i \cdot dx_k$$

notiert; man spricht dann manchmal auch vom „Quadrat des Linienelements“.

Man beachte: Ist g der Maßtensor einer Parametrisierung F , so stimmen die hiesigen C^{r-1} -Funktionen g_{ik} mit den in Abschnitt 5.1 eingeführten Funktionen überein.

Beobachtung. Es seien (G, g) ein n -dimensionales Riemannsches C^r -Gebiet und (X_1, \dots, X_n) ein C^r -Basisfeld auf G , das soll heißen: $X_i : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist jeweils ein C^r -Vektorfeld und für jedes $p \in G$ ist $(X_1(p), \dots, X_n(p))$ eine Basis des \mathbb{R}^n . Wendet man jeweils auf $(X_1(p), \dots, X_n(p))$ das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren bezüglich des Skalarprodukts g_p an, so erhält man ein C^r -ONB-Feld (E_1, \dots, E_n) des Riemannschen Gebiets (G, g) , das soll heißen: $E_i : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist jeweils ein C^r -Vektorfeld und für jedes $p \in G$ ist $(E_1(p), \dots, E_n(p))$ eine ONB von \mathbb{R}^n bezüglich g_p .

Beweis. An den Formeln des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens sieht man, dass dieses Verfahren die Differenzierbarkeitsordnung r erhält. \square

Anwendung. Ist (a_1, \dots, a_n) eine Basis des \mathbb{R}^n , so kann man diese Beobachtung mit $(X_1, \dots, X_n) \equiv (a_1, \dots, a_n)$ anwenden. Daraus folgt insbesondere, dass jedes Riemannsche Gebiet ein C^r -ONB-Feld besitzt.

Beispiele 2.

- (a) **Der Maßtensor einer Graphenfläche.** Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 5.2 zu Graphenflächen gilt

$$g_{11}(t, s) = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2, \quad g_{12}(t, s) = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial f}{\partial s} \quad \text{und} \quad g_{22}(t, s) = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2 .$$

- (b) **Der Maßtensor einer Rotationsfläche.** Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 5.2 zu Rotationsflächen gilt

$$g_{11}(t, s) = r'(t)^2 + b'(t)^2, \quad g_{12}(t, s) = 0 \quad \text{und} \quad g_{22}(t, s) = r(t)^2 .$$

Daraus folgt, dass die Parameterlinien F_t und F^s einer Rotationsflächenparametrisierung in (t, s) zueinander orthogonal sind.

Insbesondere gilt für die *geographische Parametrisierung der Sphäre* $S_R(p_0)$ (das heißt, für die in Beispiel (a) aus Abschnitt 5.2 beschriebene Rotationsflächenparametrisierung von $S_R(p_0)$), wenn wir (t, s) durch die in diesem Falle üblichen Bezeichnungen (ϑ, φ) ersetzen,

$$g_{11}(\vartheta, \varphi) = R^2, \quad g_{12}(\vartheta, \varphi) = 0 \quad \text{und} \quad g_{22}(\vartheta, \varphi) = R^2 \cdot \cos(\vartheta)^2.$$

Daher lautet das Quadrat des Linienelements in diesem Fall

$$ds^2 = R^2 \cdot (d\vartheta^2 + \cos(\vartheta)^2 \cdot d\varphi^2).$$

- (c) **Der Maßtensor einer Regelfläche.** Für den Maßtensor einer Regelflächenparametrisierung gilt nach Abschnitt 5.3 mit den dortigen Bezeichnungen

$$\begin{aligned} g_{11}(t, s) &= \|\alpha'(t)\|^2 + 2s \langle \alpha'(t), E'(t) \rangle + s^2 \|E'(t)\|^2 \\ g_{12}(t, s) &= \langle \alpha'(t), E(t) \rangle \\ g_{22}(t, s) &= 1. \end{aligned}$$

Volumenform und komplexe Struktur eines 2-dimensionalen Riemannschen Gebietes. Sei (G, g) ein n -dimensionales Riemannsches Gebiet. Dann bezeichnen wir für jedes $p \in G$ mit V_p den \mathbb{R}^n , versehen mit dem Skalarprodukt g_p und der kanonischen Orientierung. Auf diese Weise erhalten wir ein ganzes „Bündel“ $(V_p)_{p \in G}$ orientierter euklidischer Vektorräume.

Nach Abschnitt 1.7 ist jedem V_p eine Determinatenform, die wir hier mit ω_p bezeichnen wollen, zugeordnet. (Zur Erinnerung: Ist (a_1, \dots, a_n) eine positiv orientierte ONB von V_p , so ist ω_p die durch $\omega_p(a_1, \dots, a_n) = 1$ charakterisierte alternierende n -Linearform auf V_p .) Nach Beispiel (b) aus Abschnitt 1.7 gilt $\omega_p = \rho_p \cdot \det$ mit dem *Volumenelement* $\rho_p := \sqrt{\det(g_{ik}(p))}$ (ist g der Maßtensor einer Flächenparametrisierung F , so stimmt dieses Volumenelement offenbar mit dem in Abschnitt 5.1 definierten Flächenelement überein). Auf diese Weise erhält man auf G eine Differentialform $\omega : p \mapsto \omega_p$ vom Grad n . ω heißt die *Volumenform* des Riemannschen Gebiets (G, g) .

Ist $n = 2$, so bezeichne J_p die *Vierteldrehung* des orientierten euklidischen Vektorraums V_p (siehe Aussage 3 in Abschnitt 1.7), also diejenige lineare Abbildung $J_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die durch

$$g_p(J_p u, v) = \omega_p(u, v) \quad \text{für alle } u, v \in \mathbb{R}^2$$

charakterisiert ist. Dadurch erhalten wir ein Tensorfeld $J : p \mapsto J_p$ vom Typ (1,1) auf G . J heißt die *komplexe Struktur* des Riemannschen Gebiets (G, g) .*

Wir beenden den Abschnitt mit dem Begriff der „Isomorphie“ für Riemannsche Gebiete.

*Bemerkung für Kenner: Durch die komplexe Struktur J wird G zu einer *Riemannschen Fläche* im Sinne der komplexen Analysis.

Definition 3. Es seien (G, g) und (\tilde{G}, \tilde{g}) zwei Riemannsche Gebiete.

- (a) Ein Diffeomorphismus $\varphi : \tilde{G} \rightarrow G$ heißt eine *Isometrie* zwischen diesen Riemannschen Gebieten, wenn

$$\forall p \in \tilde{G}, u, v \in \mathbb{R}^n : \tilde{g}_p(u, v) = g_{\varphi(p)}(d_p\varphi(u), d_p\varphi(v))$$

gilt.

- (b) Sind F, \tilde{F} zwei Flächenparametrisierungen und (G, g) bzw. (\tilde{G}, \tilde{g}) die dazu gehörenden Riemannschen Gebiete, und existiert eine Isometrie $\varphi : (\tilde{G}, \tilde{g}) \rightarrow (G, g)$, so sagt man, dass die beiden Flächen zueinander *isometrisch* sind.

Zum Teil (b) der letzten Definition beachte man, dass wenn F und \tilde{F} zwei Parametrisierungen *derselben* Fläche sind, es also einen Diffeomorphismus $\varphi : \tilde{G} \rightarrow G$ mit $\tilde{F} = F \circ \varphi$ gibt, dann φ eine Isometrie zwischen den Riemannschen Gebieten (\tilde{G}, \tilde{g}) und (G, g) ist. Dies folgt einfach aufgrund der Kettenregel.

Aufgabe 1. Ein Diffeomorphismus $\varphi : (\tilde{G}, \tilde{g}) \rightarrow (G, g)$ ist genau dann eine Isometrie, wenn für jede C^1 -Kurve $\alpha : [a, b] \rightarrow \tilde{G}$ gilt: $L(\varphi \circ \alpha) = L(\alpha)$.

Aufgabe 2. Eine isometrische Deformation der Wendelfläche in das Katenoid. Es sei $(p_0; \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3))$ ein KKS und

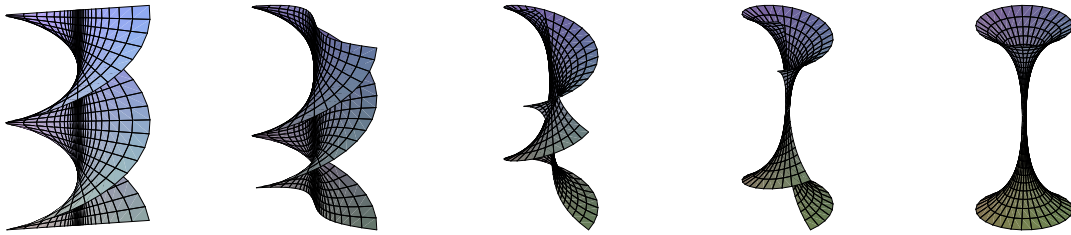
$$F : [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3, (\tau, t, s) \mapsto p_0 + \cos(\tau) \cdot \sinh(s) \cdot \Gamma_{\mathbf{a}}(t) + \sin(\tau) \cdot \cosh(s) \cdot \Gamma'_{\mathbf{a}}(t) \\ + (t \cdot \cos(\tau) + s \cdot \sin(\tau)) \cdot a_3.$$

- (a) Für jedes $\tau \in [0, \pi/2]$ ist die Abbildung $F_\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3, (t, s) \mapsto F(\tau, t, s)$ eine Parametrisierung einer singularitätenfreien Fläche.
- (b) Man bestimme die „Koeffizienten“ g_{ik}^τ des Maßensors der Parametrisierung F_τ .
- (c) F_0 ist eine Parametrisierung der Wendelfläche, wie sie im Weiteren Beispiel (a) aus Abschnitt 5.3 beschrieben ist, und zwar mit $b = 1$.
- (d) $F_{\pi/2}$ ist eine Parametrisierung des Katenoids. Die Standardparametrisierung des *Katenoids* ist die Rotationsflächenparametrisierung mit der *Kettenlinie*

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cosh(t), t)$$

als Profilkurve.

- (e) Alle durch die F_τ beschriebenen Flächen sind zueinander isometrisch. Man sagt auch, dass durch die Abbildung F eine isometrische Deformation der Wendelfläche $[F_0]$ in das Katenoid $[F_{\pi/2}]$ beschrieben wird.



(Eine Animation zur Deformation der Wendelfläche ins Katenoid findet sich auf der Webseite zur Vorlesung.)

Aufgabe 3. Papiermodelle für Tangentenflächen. Es seien $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine C^1 -Funktion und $\Omega(\kappa)$ die Menge aller nach Bogenlänge parametrisierter C^3 -Kurven $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ mit der Krümmung $\kappa_\alpha = \kappa$. Dann sind die Tangentenflächen von je zwei Kurven $\alpha, \beta \in \Omega(\kappa)$ zueinander isometrisch. (Streng genommen muß man die Betrachtung auf die singularitätenfreien „Blätter“ der Tangentenflächen beschränken.) Insbesondere kann man daher(?) Tangentenflächen aus Papier zusammenkleben (welches man „verbiegt“, aber nirgends „verzerrt“).

Wir schließen diesen Abschnitt mit der Angabe zweier „abstrakter 2-dimensionaler Riemannscher Gebiete“, die nach einem Satz von HILBERT keinesfalls als die Riemannschen Gebiete einer Flächenparametrisierung entstehen können.[†]

Beispiele 3.

- (a) Die *hyperbolische Halbebene* \mathbb{H} ist das Riemannsche Gebiet (G, g) mit $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ und mit der Riemannschen C^∞ -Metrik

$$g : (x, y) \mapsto \frac{1}{y^2} \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt des \mathbb{R}^2 bezeichnet.

- (b) Die Poincarésche Kreisscheibe \mathbb{U} ist das Riemannsche Gebiet (G, g) mit $G := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und mit der Riemannschen C^∞ -Metrik

$$g : z \mapsto \frac{4}{(1 - z\bar{z})^2} \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle.$$

Hierbei betrachten wir den Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen in bekannter Weise als den reellen Vektorraum \mathbb{R}^2 , der durch die komplexe Multiplikation angereichert ist; mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wird wieder das kanonische Skalarprodukt von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ bezeichnet.

- (c) Bekanntlich[‡] bildet die *lineare Transformation*

$$f : z \mapsto i \cdot \frac{1 - z}{1 + z}$$

die Einheitskreisscheibe von \mathbb{C} biholomorph (also C^∞ -diffeomorph) auf die obere Halbebene ab. Tatsächlich liefert f eine Isometrie $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{H}$. Um dies einzusehen, beachte man, dass

[†]D. HILBERT: *Über Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung*, Trans. Amer. Math. Soc. **2** (1901)

[‡]vgl. etwa FISCHER/LIEB: *Funktionentheorie*, Kapitel IX, §3

man in \mathbb{C} das kanonische Skalarprodukt durch die Konjugation und die Realteilbildung ausdrücken kann, und zwar durch $\langle u, v \rangle = \operatorname{Re}(u \cdot \bar{v})$. Ist c eine weitere komplexe Zahl, so ist daher $\langle c \cdot u, c \cdot v \rangle = |c|^2 \cdot \langle u, v \rangle$. Da wegen der Holomorphie von f $D_z f(v) = f'(z) \cdot v$ ist, gilt somit $\langle D_z f(u), D_z f(v) \rangle = |f'(z)|^2 \cdot \langle u, v \rangle$. Um nun zu beweisen, dass f eine Isometrie $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{H}$ ist, hat man daher für $z \in \mathbb{U}$ lediglich

$$\frac{|f'(z)|^2}{\operatorname{Im}(f(z))^2} = \frac{4}{(1 - z\bar{z})^2}$$

nachzurechnen, was eine leichte Übung ist ($\operatorname{Im}(z) := \operatorname{Imaginärteil von } z$).

5.7 Orthogonale Parametrisierungen

Für reguläre Kurven ist die Parametrisierung nach der Bogenlänge eine „besonders vorteilhafte“ Parametrisierung. In den folgenden beiden Abschnitten wird es unser Anliegen sein, für Flächen in entsprechender Weise „vorteilhafte“ Parametrisierungen zu finden, in dem Sinne, dass deren Maßtensor eine besonders einfache Gestalt hat.

In diesem Abschnitt zeigen wir zunächst, dass es für jede Fläche lokal sogenannte *orthogonale* Parametrisierungen gibt:

Definition. Eine Flächenparametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ heißt *orthogonal*, wenn sich die Parameterlinien F_t und F^s zu $(t, s) \in G$ in ihrem Schnittpunkt $F(t, s)$ jeweils orthogonal schneiden, das heißt, wenn für den Maßtensor g von F gilt:

$$g_{12} \equiv 0.$$

Beispiele. Die kanonischen Parametrisierungen von Rotationsflächen sind orthogonal (siehe Abschnitt 5.2 und Beispiel 2(b) in Abschnitt 5.6). Für Regelflächen (siehe Abschnitt 5.3 und Beispiel 2(c) in Abschnitt 5.6) kann man stets orthogonale Parametrisierungen der Gestalt $F(t, s) = \alpha(t) + s \cdot E(t)$ wählen, und zwar hat man hierfür α gemäß der Aufgabe 1 aus Abschnitt 5.3 zu wählen.

Theorem. Es sei G ein Gebiet im \mathbb{R}^2 und $X_1, X_2 : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ zwei C^r -Vektorfelder. Ferner sei $p_0 \in G$ so gewählt, dass $X_1(p_0)$ und $X_2(p_0)$ linear unabhängig sind. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und ein C^r -Diffeomorphismus φ des „offenen Quadrats“ $Q :=]-\varepsilon, \varepsilon[\times]-\varepsilon, \varepsilon[$ „in“ G (das heißt, $\varphi(Q)$ ist eine offene Teilmenge von G und $\varphi : Q \rightarrow \varphi(Q)$ ist ein C^r -Diffeomorphismus) mit $\varphi(0, 0) = p_0$ und C^{r-1} -Funktionen $\lambda_1, \lambda_2 : Q \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \lambda_i \cdot (X_i \circ \varphi) \quad \text{für } i = 1, 2 \quad .$$

Warnung. Dieses Theorem läßt sich nicht ohne zusätzliche Voraussetzungen auf mehr als zwei Vektorfelder verallgemeinern.

Der *Beweis des Theorems* ist nicht leicht, man benutzt Methoden der Theorie partieller Differentialgleichungen. Für die Zwecke dieser Vorlesung verzichten wir. \square

Folgerung. Ist (G, g) ein 2-dimensionales Riemannsches C^r -Gebiet und $p_0 \in G$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ und ein C^r -Diffeomorphismus φ von $Q :=]-\varepsilon, \varepsilon[\times]-\varepsilon, \varepsilon[$ „in“ G mit $\varphi(0, 0) = p_0$, so dass für alle $p \in Q$ gilt

$$g_{\varphi(p)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(p), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(p) \right) = 0.$$

Beweis. Es sei (X_1, X_2) ein C^r -ONB-Feld auf dem Riemannschen Gebiet (G, g) (siehe die Anwendung zur Beobachtung in Abschnitt 5.6), auf welches wir das Theorem anwenden: Mit dem dortigen Diffeomorphismus φ erhalten wir

$$g_{\varphi(p)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(p), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(p) \right) = \lambda_1(p) \cdot \lambda_2(p) \cdot g_{\varphi(p)}(X_1(\varphi(p)), X_2(\varphi(p))) = 0.$$

□

Satz. Existenz lokaler orthogonaler Parametrisierungen. Es sei $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine Parametrisierung einer C^r -Fläche mit $r \geq 2$. Dann existiert zu jedem Punkt $p_0 \in G$ ein Teilgebiet $U \subset G$ mit $p_0 \in U$, ein weiteres Gebiet $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ und eine zu $F|_U$ äquivalente, orthogonale C^{r-1} -Flächenparametrisierung $\tilde{F} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{E}^3$.

Beweis. Wir wenden die obige Folgerung auf das von F induzierte Riemannsche Gebiet (G, g) an: Mit dem dortigen C^r -Diffeomorphismus φ aus der Folgerung definiert man $\tilde{F} := F \circ \varphi$ und $\tilde{U} := Q$. □

5.8 Konforme Parametrisierungen

Im vorherigen Abschnitt haben wir gesehen, dass es für jede Fläche lokal orthogonale Parametrisierungen gibt, also solche, deren Parameterlinien einander senkrecht schneiden. Tatsächlich gilt ein sehr viel weiter reichendes Resultat.

Definition. Eine C^r -Flächenparametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ heißt *konform* (oder *isotherm*), wenn für den Maßtensor g von F

$$g_{12} \equiv 0 \quad \text{und} \quad g_{11} \equiv g_{22} =: \lambda^2,$$

wobei $\lambda : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine C^{r-1} -Funktion ist; dann gilt also

$$g = \lambda^2 \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt des \mathbb{R}^2 bezeichnet.

Allgemeiner nennt man einen C^r -Diffeomorphismus $\varphi : (\tilde{G}, \tilde{g}) \rightarrow (G, g)$ zwischen zwei n -dimensionalen Riemannschen Gebieten *konform*, wenn es eine C^{r-1} -Funktion $\lambda : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{R}_+$ gibt mit

$$\forall p \in \tilde{G}, u, v \in \mathbb{R}^n : \tilde{g}_p(u, v) = \lambda(p)^2 \cdot g_{\varphi(p)}(d_p \varphi(u), d_p \varphi(v)).$$

Beispiel. Die Parametrisierungen F_τ aus Aufgabe 2 in Abschnitt 5.6 sind alle konform.

Theorem von Gauß/Korn/Lichtenstein. Es sei $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine Parametrisierung einer C^r -Fläche mit $r \geq 2$. Dann existiert zu jedem Punkt $p_0 \in G$ ein Teilgebiet $U \subset G$ mit $p_0 \in U$, ein weiteres Gebiet $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ und eine zu $F|_U$ äquivalente, konforme C^{r-1} -Flächenparametrisierung $\tilde{F} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{E}^3$.

Zur Historie des Theorems von Gauß/Korn/Lichtenstein. Bereits im Jahre 1816 hat GAUSS die Frage nach der Gültigkeit dieses Theorems gestellt. Auf seine Anregung wurde 1821 diese Aufgabe von der Kopenhagener Wissenschaftlichen Gesellschaft publiziert. Da bis in den Sommer 1822 keine Lösung bei der Gesellschaft eingegangen war, machte GAUSS sich selbst an die Arbeit und bewies das Theorem für den Fall, dass F reell analytisch (d.h. in Potenzreihen entwickelbar) ist. Erst 1911 bzw. 1914 gelang LICHTENSTEIN bzw. KORN der Beweis unter obiger schwachen Differenzierbarkeitsvoraussetzung. – Das Problem führt auf eine elliptische partielle Differentialgleichung, die sog. Beltrami-Gleichung. Eine allgemein zugängliche Behandlung findet man in den Lectures 3 - 5 des Buches „Riemann surfaces“, New York 1957/58 von L. BERS. Der Buchtitel zeigt den engen Zusammenhang zur Funktionentheorie. Tatsächlich sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ein Spezialfall der Beltrami-Gleichung.

Der Nutzen konformer Parametrisierungen wird durch die folgende Aussage und ihre Folgerung verdeutlicht:

Aussage. Sind $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ zwei Skalarprodukte eines Vektorraumes V , so sind die drei folgenden Aussagen paarweise äquivalent:

- (a) Es gilt $\langle \cdot, \cdot \rangle_2 = c^2 \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle_1$ mit einer geeigneten Zahl $c \in \mathbb{R}_+$.
- (b) Für je zwei beliebige, von 0 verschiedene Vektoren $u, v \in V$ sind die Winkel bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ gleich.
- (c) Je zwei beliebige, bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ orthogonale Vektoren $u, v \in V$ sind auch bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ orthogonal.

Ist V 2-dimensional und sind J_1 und J_2 die zu $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ bzw. $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ gehörigen Vierteldrehungen bezüglich ein-und-derselben Orientierung von V (siehe Aussage 3 in Abschnitt 1.7), so ist auch noch die folgende Aussage zu den Aussagen (a)-(c) äquivalent:

- (d) $J_1 = J_2$.

Beweis. Die Implikation (a) \Rightarrow (b) folgt aus der Definition des Winkels mittels des Skalarprodukts (siehe Definition (a) in Abschnitt 1.6), und die Implikation (b) \Rightarrow (c) ist offensichtlich.

Zu (c) \Rightarrow (a). Es sei (a_1, \dots, a_n) eine $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ -ONB von V . Nach (c) gilt dann $\langle a_i, a_k \rangle_2 = 0$ für $i \neq k$. Weiterhin haben wir $\langle a_i + a_k, a_i - a_k \rangle_1 = 0$, also nach (c) auch $0 = \langle a_i + a_k, a_i - a_k \rangle_2 = \langle a_i, a_i \rangle_2 - \langle a_k, a_k \rangle_2$. Definieren wir $c \in \mathbb{R}_+$ durch $c^2 = \langle a_1, a_1 \rangle_2$, so gilt daher $\langle a_i, a_k \rangle_2 = c^2 \cdot \langle a_i, a_k \rangle_1$ für alle i, k . Damit folgt für beliebige Vektoren $u, v \in V$

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_2 &= \left\langle \sum_i \langle u, a_i \rangle_1 \cdot a_i, \sum_k \langle v, a_k \rangle_1 \cdot a_k \right\rangle_2 = \sum_{i,k} \langle u, a_i \rangle_1 \cdot \langle v, a_k \rangle_1 \cdot \langle a_i, a_k \rangle_2 \\ &= c^2 \cdot \sum_{i,k} \langle u, a_i \rangle_1 \cdot \langle v, a_k \rangle_1 \cdot \langle a_i, a_k \rangle_1 = c^2 \cdot \sum_i \langle u, a_i \rangle_1 \cdot \langle v, a_i \rangle_1 = c^2 \cdot \left\langle \sum_i \langle u, a_i \rangle_1 a_i, v \right\rangle_1 = c^2 \cdot \langle u, v \rangle_1. \end{aligned}$$

Zu (a) \Rightarrow (d). Ist (a_1, a_2) eine positiv orientierte $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ -ONB von V , so ist $(\frac{1}{c}a_1, \frac{1}{c}a_2)$ eine positiv orientierte $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ -ONB. Hieraus folgt $J_1 = J_2$.

Zu (d) \Rightarrow (c). Es gelte $J_1 = J_2$ und es seien $u, v \in V$ Vektoren mit $\langle u, v \rangle_1 = 0$. Ist $u = 0$, so gilt trivialerweise auch $\langle u, v \rangle_2 = 0$. Ist aber $u \neq 0$, so gilt $v = \lambda \cdot J_1 u$ mit einem geeigneten $\lambda \in \mathbb{R}$. Wegen $J_1 = J_2$ folgt damit $\langle u, v \rangle_2 = \lambda \cdot \langle u, J_1 u \rangle_2 = \lambda \cdot \langle u, J_2 u \rangle_2 = 0$. \square

Folgerung. Es seien G ein Gebiet des \mathbb{R}^2 , $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine C^1 -Immersion, g der Maßtensor von G und J die komplexe Struktur des Riemannschen Gebietes (G, g) . Dann sind die folgenden Aussagen paarweise äquivalent:

- (a) F ist eine konforme Parametrisierung einer (singularitätenfreien) Fläche.
- (b) Die Winkelmessung in dem Riemannschen Gebiet (G, g) stimmt an jeder Stelle von G mit der kanonischen euklidischen Winkelmessung in $G \subset \mathbb{R}^2$ überein.
- (c) Für jeden Punkt $p \in G$ ist J_p die übliche euklidische Vierteldrehung.

Hieraus folgt: Zueinander konform äquivalente Riemannsche Gebiete stimmen als Riemannsche Flächen überein.

5.9 Anhang: Flächen in mehr Dimensionen

Natürlich kann man analog zu den zwei-dimensionalen Flächen im \mathbb{E}^3 auch k -dimensionale (mS-)Flächen in einem n -dimensionalen euklidischen Raum \mathbb{E}^n definieren, nämlich als Äquivalenzklassen von C^r -Abbildungen $F : G \rightarrow \mathbb{E}^n$, wobei G jeweils ein Gebiet im \mathbb{R}^k ist. Für jede derartige Abbildung wird man wie in den Abschnitten 5.1 und 5.6 den *Maßtensor*

$$g : G \rightarrow L_{sym}^2(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}), \quad p \mapsto (g_p : (u, v) \mapsto \langle d_p F(u), d_p F(v) \rangle),$$

seine Komponenten

$$g_{ij} := \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle \quad (\text{für } i, j \in \{1, \dots, k\})$$

und das *Volumenelement* $\rho_F := \sqrt{\det(g_{ij})}$ definieren. F ist genau dann eine Immersion, und $[F]$ damit eine (singularitätenfreie) Fläche, wenn $\rho_F > 0$ gilt. Ist $K \subset G$ kompakt, so definieren wir das (k -dimensionale) *Volumen* von $F|K$ als

$$\int_K \rho_F d\lambda^k,$$

mit derselben Begründung wie in Abschnitt 5.1 ist diese Größe von der Wahl der Parametrisierung der Fläche unabhängig. In dieser Bedeutung von ρ_F liegt der Grund für die Bezeichnung „Volumenelement“ sowohl für das hiesige ρ_F , als auch für das in Abschnitt 5.6 eingeführte Volumenelement ρ eines k -dimensionalen Riemannschen Gebiets.

Zu beachten ist, dass die Aussagen aus den Abschnitten 5.7 und 5.8 über die Existenz lokaler orthogonaler bzw. konformer Abbildungen *keine* Entsprechung für k -dimensionale Flächen mit $k \geq 3$ haben.

