Analysis III
11. Übung

Martin Schmidt
Volker Eing

12. November 2018

(Abgabe: A5, C, Eingang Ost, Postfach 46236, Montag, 19. November 2018 bis 16 Uhr)

Im gesamten Übungsblatt seien $V, V_1, \ldots, V_n, W$ **endlich-dimensionale**, normierte Vektorräume über $\mathbb{K}$.

1. (a) Dimension von $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; W)$. *Zeige*, dass

$$\dim \mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; W) = \dim(V_1) \cdot \ldots \cdot \dim(V_n) \cdot \dim(W)$$

gilt. *(6 Punkte)*

[Tipp. Ausgehend von Basen der V_k und von W überlege man sich, wie eine Basis von $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; W)$ aussieht.]

(b) Alternative Beschreibungen der Norm auf $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; W)$. Nach Vorlesung ist die Norm auf $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; W)$ durch

$$\|A\| := \sup\{ \|A(x_1, \ldots, x_n)\| \,\big|\, x_k \in V_k,\ \|x_k\| \leq 1 \}$$

für $A \in \mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; W)$ gegeben. *Beweise*, dass die folgenden beiden alternativen Beschreibungen dieser Norm gelten:

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup\{ \|A(x_1, \ldots, x_n)\| \,\big|\, x_k \in V_k,\ \|x_k\| = 1 \} \\ &= \sup\left\{ \left\|A\left(\tfrac{x_1}{\|x_1\|}, \ldots, \tfrac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right\| \,\middle|\, x_k \in V_k \setminus \{0\} \right\} . \end{aligned}$$

(6 Punkte)

(c) Ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{L}(V; W)$ und $\mathcal{L}(V, W'; \mathbb{K})$. *Zeige,* dass die Abbildung

$$\Phi : \mathcal{L}(V; W) \to \mathcal{L}(V, W'; \mathbb{K}),\ A \mapsto \Phi(A)$$

mit

$$\Phi(A) : V \times W' \to \mathbb{K},\ (v, B) \mapsto (B \circ A)(v)$$

ein Isomorphismus der normierten Vektorräume $\mathcal{L}(V; W)$ und $\mathcal{L}(V, W'; \mathbb{K})$ ist; das bedeutet: Φ ist ein Vektorraum-Isomorphismus, der zusätzlich die Norm respektiert, d.h. für alle $A \in \mathcal{L}(V; W)$ gilt

$$\|\Phi(A)\| = \|A\| .$$

(6 Punkte)

2. Das Tensorprodukt endlich-dimensionaler Vektorräume.

(a) *Belege jeweils durch ein Beispiel*, dass im Allgemeinen

(i) das Tensorprodukt von Vektoren

$$V_1 \times \ldots \times V_n \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_n,\ (v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$$

selbst dann nicht kommutativ ist, wenn $V_1 = \ldots = V_n$ ist; *(6 Punkte)*

(ii) nicht jeder Vektor in $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ kohärent ist. *(6 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass in $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ die lineare Hülle der kohärenten Vektoren ganz $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ ist, das heißt, dass sich jedes Element von $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ als endliche Linearkombination kohärenter Vektoren schreiben läßt. *(6 Punkte)*

(c) *Konstruiere* Isomorphismen von normierten Vektorräumen, um die folgenden natürlichen Isomorphien zu beweisen:

(i) $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; W) \cong \mathcal{L}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n; W)$ *(6 Punkte)*

(ii) $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ *(4 Punkte)*

(iii) $\mathcal{L}(V; W) \cong V' \otimes W$. *(4 Punkte)*