Analysis III
4. Übung

Martin Schmidt
Volker Eing

24. September 2018

(Abgabe: A5, C, Eingang Ost, Postfach 46236, Montag, 01. Oktober 2018 bis 16 Uhr)

1. Glatte Abbildungen.

Zeige, dass die folgenden Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten glatt sind.

(a) Die Koordinatenprojektionen $f_k : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$, $(x_0, \ldots x_n) \mapsto x_k$ für $k \in \{0, \ldots, n\}$. *(6 Punkte)*

(b) Die Antipoden-Abbildung der Sphäre $\alpha : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $x \mapsto -x$. *(6 Punkte)*

(c) Die *Hopf-Abbildung*:
$\beta : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2, (w, x, y, z) \mapsto (2(wy + xz), 2(xy - wz), w^2 + x^2 - y^2 - z^2)$. *(8 Punkte)*

2. Genauso gut glatt.

Sei X eine Mannigfaltigkeit und seien $\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$ Kurven, die sich in 0 berühren. In der Definition 1.33 des Tangentialraums wird lediglich gefordert, dass die Kurven stetig differenzierbar sind.
Zeige, dass ohne Einschränkung angenommen werden kann, dass die Kurven auch unendlich oft stetig differenzierbar sind.
Genauer: Definiere die Äquivalenzrelation auf dem Raum der *glatten* Kurven $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$:

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 :\Longleftrightarrow \gamma_1 \text{ berührt } \gamma_2 \text{ in } 0.$$

Und definiere einen "neuen" Tangentialraum
$\overline{T_x X} := \{\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X \text{ ist glatte Kurve}\}/\sim$.
Zeige, dass $\overline{T_x X}$ isomorph ist zu $T_x X$.
(*Tipp:* Es gibt eine natürliche Abbildung $\overline{T_x X} \to T_x X$.) *(10 Punkte)*

3. Immersiv und nicht immersiv.

(a) Untersuche, an welchen Stellen die folgenden Abbildungen immersiv sind.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t), t)$. *(6 Punkte)*

(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (t^2, t^3)$. Ist g injektiv? *(6 Punkte)*

(b) Es sei M eine n-dimensionale, kompakte, differenzierbare Mannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung. Zeige, dass f keine Immersion sein kann. *(8 Punkte)*

(*Tipp*: Nehme an, die Behauptung sei falsch und verwende den Satz 1.37 der inversen Funktion)