Analysis III
12. Übung

Martin Schmidt
Volker Eing

19. November 2018

(Abgabe: A5, C, Eingang Ost, Postfach 46236, Montag, 26. November 2018 bis 16 Uhr)

1. Symplektische Tensoren.

Es sei V ein endlich-dimensionaler, normierter Vektorraum. Ein *symplektischer Tensor* auf V ist ein $\omega \in \bigwedge^2 V'$, das nicht entartet ist; dabei bedeutet letzteres

$$\forall\, v \in V \setminus \{0\}\ \exists\, \widetilde{v} \in V\ :\ \omega(v, \widetilde{v}) \neq 0$$

(wobei wir hier wie auch im Folgenden ω mittels des kanonischen Isomorphismus $V'' \cong V$ auch als Bilinearform $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ auffassen). Es sei ω ein symplektischer Tensor auf V.

(a) Zeige, dass die Abbildung

$$V \to V',\ v \mapsto \omega(v, \cdot\,)$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist. *(6 Punkte)*

(b) Sei $v \in V$ mit $v \neq 0$. Zeige: Es existiert ein zu v linear unabhängiger Vektor $\widetilde{v} \in V$ mit $\omega(v, \widetilde{v}) = 1$, und für jedes solches $\widetilde{v}$ gilt

$$\dim\big(\ \ker \omega(v, \cdot\,) \cap \ker \omega(\widetilde{v}, \cdot\,)\big) = \dim(V) - 2\ . \qquad (6\ Punkte)$$

(c) Beweise: Die Dimension von V ist notwendigerweise gerade, etwa gilt $\dim(V) = 2n$ mit $n \in \mathbb{N}$, und es existiert eine Basis $(v_1, \ldots, v_n, \widetilde{v}_1, \ldots, \widetilde{v}_n)$ von V mit

$$\omega(v_k, v_\ell) = \omega(\widetilde{v}_k, \widetilde{v}_\ell) = 0 \quad \text{und} \quad \omega(v_k, \widetilde{v}_\ell) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = \ell \\ 0 & \text{für } k \neq \ell \end{cases}$$

für alle $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$. *(8 Punkte)*

2. Lokale Darstellung von Tensorfeldern.

Es sei X eine n-dimensionale, glatte Mannigfaltigkeit, und f ein Tensorfeld in $T^q_p X$. Um die Notation zu vereinfachen, beschränken wir uns auf den Fall $p = 0, q = 2$; für andere Werte von p und q gelten analoge Aussagen. Es sei weiter (U, ϕ) eine Karte von X; die Komponentenfunktionen von ϕ bezeichnen wir mit $\phi_1, \ldots, \phi_n : U \to \mathbb{R}$ und betrachten die davon induzierten, über U definierten Tensorfelder $\alpha_k := \mathrm{d}\phi_k$ in $T^1_0 X$.

(a) Zeige: Es existieren Funktionen $f_{k,\ell} : U \to \mathbb{R}$ ($k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$), so dass

$$f|U = \sum_{k,\ell=1}^{n} f_{k,\ell} \cdot \alpha_k \otimes \alpha_\ell\,,$$

das heißt für alle $x \in U$ und $v, w \in T_x X$

$$f(x)(v,w) = \sum_{k,\ell=1}^{n} f_{k,\ell}(x)\, \alpha_k(x)(v)\, \alpha_\ell(x)(w)$$

gilt; zeige weiter, dass diese Funktionen eindeutig bestimmt sind. Diese Art der Beschreibung von f nennt man *Darstellung von $f|U$ in lokalen Koordinaten.*

(6 Punkte)

(b) Zeige: $f|U$ ist genau dann glatt, wenn die Funktionen $f_{k,\ell}$ alle glatt sind.

(4 Punkte)

(c) Zeige, dass f genau dann eine 2-Differentialform ist, wenn für alle $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: $f_{k,\ell} = -f_{\ell,k}$. *(4 Punkte)*

3. Geschlossene und exakte Differentialformen.

Eine p-Differentialform ω auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X heißt *geschlossen*, wenn $\mathrm{d}\omega = 0$ gilt, und sie heißt exakt, wenn es eine $(p-1)$-Differentialform θ auf X mit $\omega = \mathrm{d}\theta$ gibt.

Es sei nun $X = \mathbb{R}^3$, und es seien $x, y, z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die üblichen Koordinaten-Projektionen von $\mathbb{R}^3$. Man untersuche, ob die folgenden Differentialformen ω geschlossen sind und ob sie exakt sind; gegebenenfalls finde man auch eine Differentialform θ auf $\mathbb{R}^3$ mit $\omega = \mathrm{d}\theta$.

(a) $\omega = yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$ *(6 Punkte)*

(b) $\omega = x\,\mathrm{d}x + x^2y^2\,\mathrm{d}y + yz\,\mathrm{d}z$ *(4 Punkte)*

(c) $\omega = 2xy^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ *(6 Punkte)*