

Kurven und Flächen

Herbst-Winter-Semester 2009

Sebastian Klein

*Nach dem Vorbild einer großartigen Vorlesung
„Elementare Differentialgeometrie“
von Professor H. Reckziegel (Universität zu Köln)
aus dem Wintersemester 1997/98*

Inhaltsverzeichnis

1	Der euklidische Raum	1
1.1	Der affine Raum	1
1.2	Affine Abbildungen	2
1.3	Affine Unterräume	3
1.4	Affine Koordinatensysteme	4
1.5	Differentialrechnung in einer Variablen	5
1.6	Euklidische Räume	6
1.7	Orientierung, Vierteldrehung und Kreuzprodukt	8
1.8	Drehungen und orientierte Winkel in zwei Dimensionen	11
2	Grundlegendes über Kurven	15
2.1	Wege und ihre Länge	15
2.2	Kurven, Geschwindigkeit, und Parametrisierung nach der Bogenlänge	19
2.3	Differentiation nach der Bogenlänge	21
3	Ebene Kurventheorie	25
3.1	Die Frenet-Gleichungen für ebene Kurven	25
3.2	Der Hauptsatz der ebenen Kurventheorie	27
3.3	Taylorentwicklung ebener Kurven, Krümmungskreise	28
3.4	Enveloppen, Evoluten, Parallelkurven und Involuten	29
3.5	Die Umlaufzahl und der Jordansche Kurvensatz	30
3.6	Die isoperimetrische Ungleichung	34
3.7	Der Vierscheitelsatz	34

4	Räumliche Kurventheorie	37
4.1	Die Frenet-Gleichungen für Raumkurven	37
4.2	Taylorentwicklung von Raumkurven	40
4.3	Der Hauptsatz der räumlichen Kurventheorie	42
4.4	Infinitesimale Charakterisierung ebener Kurven im \mathbb{E}^3	43
4.5	Kurven mit spezieller Krümmung und Torsion	44
4.6	Sphärische Kurven	45
4.7	Kurventheorie in n Dimensionen	46
5	Flächen im Raum	49
5.1	Der Begriff einer Fläche	49
5.2	Beispiele für Flächen	51
5.3	Regelflächen	53
5.4	Das Tangential- und Normalbündel einer Fläche	58
5.5	Lokale Parametrisierung von Flächen als Graphenflächen	59
5.6	Der Maßtensor einer Flächenparametrisierung	60
5.7	Orthogonale Parametrisierungen	66
5.8	Konforme Parametrisierungen	67
5.9	Anhang: Flächen in mehr Dimensionen	69
6	Äußere Geometrie räumlicher Flächen	71
6.1	Einheitsnormalenfelder von Flächenparametrisierungen	72
6.2	Der Formoperator und die zweite Fundamentalform	73
6.3	Die beiden Fundamentalformen bestimmen die Parametrisierung	76
6.4	Normalkrümmung und geodätische Krümmung einer Flächenkurve	78
6.5	Die skalaren Krümmungsgrößen	82
6.6	Zur Berechnung der skalaren Krümmungsgrößen	87
6.7	Die Gaußsche Krümmung als Maß der Flächenverzerrung	91
6.8	Minimalflächen	92

7	Innere Geometrie räumlicher Flächen	97
7.1	Das Christoffelsymbol eines Riemannschen Gebiets	97
7.2	Die Levi-Civita-Ableitung einer Riemannschen Metrik	101
7.3	Die Gaußsche Ableitungsgleichung erster Ordnung	104
7.4	Geodätische Linien	105
7.5	Differentialformen in zwei Dimensionen	109
7.6	Die Zusammenhangsform eines Riemannschen Gebiets	111
7.7	Die Gaußsche Krümmung als Größe der inneren Geometrie	114
7.8	Der Fundamentalsatz der Flächentheorie	118

Kapitel 1

Der euklidische Raum

1.1 Der affine Raum

Definition. Ein (reeller) n -dimensionaler affiner Raum ist ein Tupel $(\mathbb{E}, \mathbb{V}, \varphi)$ bestehend aus einer Menge \mathbb{E} (deren Elemente wir *Punkte* nennen), einem n -dimensionalen Vektorraum \mathbb{V} (dem sogenannten *Richtungsvektorraum* von \mathbb{E}) und einer Abbildung $\varphi : \mathbb{V} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, so dass die folgenden Axiome erfüllt sind:

$$(A0) \quad \varphi(0, p) = p \text{ für alle } p \in \mathbb{E}$$

$$(A1) \quad \varphi(v + w, p) = \varphi(v, \varphi(w, p)) \text{ für alle } p \in \mathbb{E} \text{ und } v, w \in \mathbb{V}$$

$$(A2) \quad \forall p, q \in \mathbb{E} \exists! v \in \mathbb{V} : q = \varphi(v, p) .$$

Das Axiom (A2) besagt in Worten: Von p aus erreicht man einen jeden Punkt $q \in \mathbb{E}$ durch *Antragen* eines ganz bestimmten Vektors $v \in \mathbb{V}$.

Für $v \in \mathbb{V}$ bezeichnen wir mit

$$\varphi_v : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}, p \mapsto \varphi(v, p)$$

die *Translation* um v , und für $p \in \mathbb{E}$ bezeichnen wir

$$\varphi^p : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{E}, v \mapsto \varphi(v, p) .$$

Bezeichnungen.

- (a) Gilt $\varphi(v, p) = q$, so schreibt man üblicherweise auch $q = p + v$ und $v = q - p$. Man nennt $q - p$ den *Verbindungsvektor* von p nach q ; er ist wegen des Axioms (A2) eindeutig bestimmt. Man beachte, dass $+$ und $-$ hier *nicht* für „Rechenoperationen“ stehen, und dass der Ausdruck $v + p$ keinen Sinn macht.
- (b) Statt „ $(\mathbb{E}, \mathbb{V}, \varphi)$ ist ein affiner Raum“ werden wir oft auch kurz sagen: „ \mathbb{E} ist ein affiner Raum“. Wir bezeichnen dann den Richtungsvektorraum von \mathbb{E} mit \mathbb{E}_L . Wollen wir betonen, dass n die Dimension von \mathbb{E} ist, schreiben wir auch \mathbb{E}^n statt \mathbb{E} .

Beispiel. Jeder n -dimensionale Vektorraum V (z.B. $V = \mathbb{R}^n$) kann auf kanonische Weise als affiner Raum aufgefasst werden, nämlich mit $\mathbb{I}E = V$, $\mathbb{I}E_L = V$ und

$$\varphi : (v, w) \mapsto v + w.$$

Dieses Beispiel sollte man nicht zu sehr als Leitbild für den Umgang mit affinen Räumen verwenden, denn der Grund, warum wir uns mit affinen Räumen beschäftigen, ist gerade, dass wir den anschaulichen Raum mathematisch so modellieren wollen, dass Punkte und Vektoren (Richtungen) durch *unterschiedliche* mathematische Objekte dargestellt werden, um diese beiden Konzepte begrifflich besser auseinander halten zu können.

Rechenregeln. Sei $\mathbb{I}E$ ein affiner Raum, $p, p_1, p_2, p_3, q_1, q_2 \in \mathbb{I}E$ und $v, w \in \mathbb{I}E_L$. Dann gilt:

$$(a) \quad p + 0 = p$$

$$(b) \quad p + (v + w) = (p + v) + w$$

$$(c) \quad q = p + v \iff p = q + (-v)$$

$$(d) \quad p + v = q + w \implies (p = q \iff v = w) \quad (\text{Eliminationsregel I})$$

Insbesondere gilt: Die Abbildungen $\varphi_v : \mathbb{I}E \rightarrow \mathbb{I}E$ und $\varphi^p : \mathbb{I}E_L \rightarrow \mathbb{I}E$ sind Bijektionen.

$$(e) \quad p_2 - p_1 = q_2 - q_1 \implies (p_2 = q_2 \iff p_1 = q_1) \quad (\text{Eliminationsregel II})$$

$$(f) \quad (p_3 - p_2) + (p_2 - p_1) = p_3 - p_1 \quad (\text{Dreiecksregel})$$

$$(g) \quad p_2 - p_1 = q_2 - q_1 \iff q_2 - p_2 = q_1 - p_1 \quad (\text{Parallelogrammregel})$$

Beweis. (a) und (b) sind bloß Umformulierungen von (A0) bzw. (A1). Zu (c). Gilt $q = p + v$, so hat man nach (a),(b): $p = p + 0 = p + (v + (-v)) = (p + v) + (-v) = q + (-v)$. Die umgekehrte Implikation geht ganz genauso. Zu (d). Gilt neben $p + v = q + w$ auch $p = q$, so hat man $p + v = p + w$, woraus mit der Eindeutigkeitsaussage in (A2) folgt: $v = w$. Gilt umgekehrt $v = w$, so hat man $p + v = q + v = (p + (q - p)) + v = p + ((q - p) + v)$ und somit nach der zuvor bewiesenen Richtung $v = (q - p) + v$, d.h. $q - p = 0$ und somit $q = p + 0 = p$. Zu (e). Gilt neben $p_2 - p_1 = q_2 - q_1$ auch $p_2 = q_2$, so haben wir $q_1 = q_2 + (q_1 - q_2) = q_2 + (p_1 - p_2) = p_2 + (p_1 - p_2) = p_1$. Die umgekehrte Implikation geht genauso. Zu (f). Es gilt $p_1 + ((p_3 - p_2) + (p_2 - p_1)) = (p_1 + (p_2 - p_1)) + (p_3 - p_2) = p_2 + (p_3 - p_2) = p_3$ und somit $p_3 - p_1 = (p_3 - p_2) + (p_2 - p_1)$. Zu (g). Gelte $p_2 - p_1 = q_2 - q_1$. Dann ergibt sich $p_2 + (q_1 - p_1) = p_2 + ((q_1 - p_2) + (p_2 - p_1)) = p_2 + ((q_1 - p_2) + (q_2 - q_1)) = p_2 + (q_2 - p_2)$ und somit nach (d): $q_1 - p_1 = q_2 - p_2$. Die umgekehrte Implikation geht wieder genauso. \square

1.2 Affine Abbildungen

Im vorherigen Abschnitt haben wir affine Räume eingeführt. Nun lernen wir die dazugehörigen „Morphismen“ (strukturhaltenden Abbildungen) kennen.

$\mathbb{I}E$ und $\mathbb{I}F$ seien affine Räume.

Definition. Eine Abbildung $f : \mathbb{I}E \rightarrow \mathbb{I}F$ heißt *affin*, wenn es einen Punkt $p_0 \in \mathbb{I}E$ und eine lineare Abbildung $A : \mathbb{I}E_L \rightarrow \mathbb{I}F_L$ mit

$$f(p_0 + v) = f(p_0) + Av \quad \text{für alle } v \in \mathbb{I}E_L$$

gibt. Ist dies der Fall, so gilt allgemeiner

$$f(p + v) = f(p) + Av \quad \text{für alle } p \in \mathbb{E} \text{ und } v \in \mathbb{E}_L.$$

Die lineare Abbildung A ist daher durch f eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen sie mit f_L und nennen sie die *Linearisierung* von f .

Beispiele.

- (a) Die identische Abbildung $\text{id}_{\mathbb{E}}$ ist eine affine Bijektion mit $(\text{id}_{\mathbb{E}})_L = \text{id}_{\mathbb{E}_L}$. Außerdem sind alle möglichen Kompositionen $g \circ f$ von affinen Abbildungen wieder affin, und es gilt $(g \circ f)_L = g_L \circ f_L$. Ist $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ eine bijektive affine Abbildung (ein *affiner Isomorphismus*), so ist $f^{-1} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$ ebenfalls eine bijektive affine Abbildung, und es gilt: $(f^{-1})_L = (f_L)^{-1}$. Abstrakter formuliert: Die „Zuordnung“ $f \mapsto f_L$ ist ein *Funktor* von der Kategorie der affinen Räume in die Kategorie der Vektorräume.
- (b) Die Translationen φ_v von \mathbb{E} sind affine Bijektionen mit $(\varphi_v)_L = \text{id}_{\mathbb{E}_L}$. Fasst man den Vektorraum \mathbb{E}_L auf die kanonische Weise auch als affinen Raum auf, so sind die Abbildungen $\varphi^p : \mathbb{E}_L \rightarrow \mathbb{E}$ ebenfalls affine Bijektionen mit $\varphi_L^p = \text{id}_{\mathbb{E}_L}$.
- (c) Sind V und W Vektorräume, so ist eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ genau dann affin bezüglich der kanonischen affinen Strukturen von V und W , wenn es eine lineare Abbildung $A : V \rightarrow W$ und einen Vektor $b \in W$ mit

$$f(v) = Av + b \quad \text{für alle } v \in V$$

gibt, und zwar ist dann $f_L = A$. Insbesondere sind lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen affin.

Aussage. Die Menge $\text{GA}(\mathbb{E})$ der affinen Bijektionen $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ ist eine Untergruppe der Gruppe $\text{Bij}(\mathbb{E})$ aller Bijektionen $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, die sogenannte *allgemeine affine Gruppe* (*general affine group*) von \mathbb{E} . Die Abbildung

$$\text{GA}(\mathbb{E}) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{E}_L), f \mapsto f_L$$

ist ein Gruppen-Homomorphismus, dessen Kern die Menge

$$H := \{ \varphi_v \mid v \in \mathbb{E}_L \}$$

ist; daher ist H ein Normalteiler von $\text{GA}(\mathbb{E})$ (also eine Untergruppe mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$\forall f \in \text{GA}(\mathbb{E}), h \in H : f \circ h \circ f^{-1} \in H).$$

1.3 Affine Unterräume

Definition. Eine Teilmenge M eines affinen Raums \mathbb{E} heißt *affiner Unterraum* von \mathbb{E} , wenn es einen Punkt $p_0 \in \mathbb{E}$ und einen Untervektorraum U von \mathbb{E}_L mit

$$M = p_0 + U := \varphi^{p_0}(U) = \{ p_0 + u \mid u \in U \}$$

gibt. Dann gilt notwendigerweise $p_0 \in M$, und es gilt $M = p + U$ für alle $p \in M$. Daher ist $U = (\varphi^p)^{-1}(M)$ durch M eindeutig festgelegt. M ist in kanonischer Weise ein affiner Raum: Sein Richtungsvektorraum ist U und seine Translationen sind die Einschränkungen $\varphi_u|_M : M \rightarrow M$ (mit $u \in U$) der Translationen φ_u von \mathbb{E} .

Die *Punkte* von \mathbb{E} bilden die 0-dimensionalen affinen Unterräume von \mathbb{E} . Die 1-dimensionalen, 2-dimensionalen bzw. die $(n-1)$ -dimensionalen Unterräume von \mathbb{E} heißen *Geraden*, *Ebenen* bzw. *Hyperebenen* von \mathbb{E} .

Aufgabe. Es sei $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ eine affine Abbildung.

- (a) Ist M ein affiner Unterraum von \mathbb{E} , so ist $f(M)$ ein affiner Unterraum von \mathbb{F} .
- (b) Ist N ein affiner Unterraum von \mathbb{F} und gilt $f^{-1}(N) \neq \emptyset$, so ist $f^{-1}(N)$ ein affiner Unterraum von \mathbb{E} .
- (c) Ist $\mathbb{F} = \mathbb{E}$ und gilt $\text{Fix}(f) := \{p \in \mathbb{E} \mid f(p) = p\} \neq \emptyset$, so ist $\text{Fix}(f)$ ein affiner Unterraum von \mathbb{E} .

Beispiel. Sind V und W Vektorräume, $A : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung und $b \in W$, so ist der Lösungsraum der linearen Gleichung $Ax = b$ (bezüglich der kanonischen affinen Struktur von V) ein affiner Unterraum von V . Dies ist ein Spezialfall von Teil (b) der letzten Aufgabe, und zwar mit $f = A$ und $N = \{b\}$.

1.4 Affine Koordinatensysteme

Es sei \mathbb{E} ein n -dimensionaler affiner Raum und $\mathbb{V} := \mathbb{E}_L$. Durch die Wahl eines Punktes $p_0 \in \mathbb{E}$ wird ein Isomorphismus $(\mathbb{E}; p_0) \cong \mathbb{V}$ induziert, nämlich die affine Bijektion $\varphi^{p_0} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{E}$. Weiter wird bekanntlich durch die Wahl einer Basis $a := (a_1, \dots, a_n)$ von \mathbb{V} ein Isomorphismus $(\mathbb{V}; a_1, \dots, a_n) \cong \mathbb{R}^n$ induziert, nämlich durch den Vektorraum-Isomorphismus

$$\Phi_a : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \sum_{k=1}^n c_k a_k \mapsto (c_1, \dots, c_n).$$

Somit ist $(\mathbb{E}; p_0, a_1, \dots, a_n)$ zum \mathbb{R}^n „isomorph“, und zwar vermittelt der affinen Bijektion $x := \Phi_a \circ (\varphi^{p_0})^{-1} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definition. In der zuvor beschriebenen Situation heißt $(p_0; a_1, \dots, a_n)$ ein *affines Koordinatensystem* oder *AKS* für den affinen Raum \mathbb{E} . Die affine Bijektion $x : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt auch (zum AKS $(p_0; a_1, \dots, a_n)$ gehörende) *affine Karte* für \mathbb{E} , die Komponentenfunktionen $x_i : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ von $x = (x_1, \dots, x_n)$ werden die zugehörigen *Koordinatenfunktionen* genannt. Mit ihnen gilt

$$\forall p \in \mathbb{E} : p = p_0 + \sum_{k=1}^n x_k(p) \cdot a_k.$$

Aussage. (Koordinaten-Transformationen) Sind $x, y : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei affine Karten (von zwei verschiedenen AKS induziert) so ist $f := y \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (so dass also das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{E} & \\ x \swarrow & & \searrow y \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

kommutiert) eine bijektive affine Abbildung; f heißt die *Koordinatentransformation* oder der *Koordinatenwechsel* von x zu y . Also existieren eine invertierbare $(n \times n)$ -Matrix $A = (a_{ik})$ und ein Vektor $b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$\forall u \in \mathbb{R}^n : f(u) = Au + b,$$

also

$$\forall i : y_i = \sum_k a_{ik} \cdot x_k + b_i$$

gilt.

Einsicht. Wir sehen, dass es zu jedem n -dimensionalen affinen Raum AKSe und damit auch affine Karten gibt; deshalb ist jeder solche Raum zum \mathbb{R}^n „affin-isomorph“, und auch je zwei n -dimensionale affine Räume sind zueinander affin-isomorph. Es existieren jedoch keine *kanonischen* Isomorphismen zwischen diesen Räumen. Der Übergang von \mathbb{E} zu \mathbb{R}^n bedeutet daher stets die Auszeichnung eines bestimmten AKS von \mathbb{E} . Aus diesem Grunde ist es trotz der Isomorphie zum \mathbb{R}^n sinnvoll, allgemeine affine Räume zu betrachten, wenn man diese Auszeichnung eines speziellen Koordinatensystems vermeiden möchte.

1.5 Differentialrechnung in einer Variablen

Um in affinen Räumen *Differentialgeometrie* betreiben zu können, muss man die Differentialrechnung für affine Räume beherrschen. Wir erläutern hier, wie man die eindimensionale Differentialrechnung für Funktionen (einer Veränderlichen) mit Werten in einem affinen Raum auf die Differentialrechnung für \mathbb{R}^n -wertige Funktionen zurückführt. In ähnlicher Weise lässt sich die mehrdimensionale Differentialrechnung auf Abbildungen zwischen affinen Räumen anwenden; davon wird zu einem späteren Zeitpunkt die Rede sein.

In diesem Abschnitt sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, \mathbb{E} ein affiner Raum, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ eine Funktion (später werden wir *Kurven* durch derartige Funktionen modellieren) und $t_0 \in I$.

Definition. α heißt in t_0 *differenzierbar*, wenn der Grenzwert von $\frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0}$ für $t \rightarrow t_0$ in \mathbb{E}_L existiert; in diesem Falle heißt $\alpha'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{E}_L$ die *Ableitung* oder der *Geschwindigkeitsvektor* von α in t_0 .

Rechenregeln. Sei α in $t_0 \in I$ differenzierbar.

- (a) *Verträglichkeit mit affinen Abbildungen.* Sei \mathbb{E}' ein weiterer affiner Raum und $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ eine affine Abbildung. Dann ist auch $f \circ \alpha$ in t_0 differenzierbar und es gilt $(f \circ \alpha)'(t_0) = f_L(\alpha'(t_0))$.
- (b) *Kettenregel.* Ist $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $g : J \rightarrow I$ eine Funktion, die in $s_0 \in J$ differenzierbar ist, und gilt $g(s_0) = t_0$, so ist $\alpha \circ g$ in s_0 differenzierbar, und es gilt $(\alpha \circ g)'(s_0) = g'(s_0) \cdot \alpha'(g(s_0))$.
- (c) *Leibnizregel.* Sind V_1, V_2, V Vektorräume, $\alpha_i : I \rightarrow V_i$ für $i \in \{1, 2\}$ in $t_0 \in I$ differenzierbare Wege, und $B : V_1 \times V_2 \rightarrow V$ eine bilineare Abbildung, so ist auch der Weg $B(\alpha_1, \alpha_2) : I \rightarrow V, t \mapsto B(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ in t_0 differenzierbar, und es gilt

$$(B(\alpha_1, \alpha_2))'(t_0) = B(\alpha_1'(t_0), \alpha_2(t_0)) + B(\alpha_1(t_0), \alpha_2'(t_0)) .$$

Aufgabe. Ist $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ eine Abbildung und sind x_1, \dots, x_n die Koordinatenfunktionen eines AKS $(p_0; a_1, \dots, a_n)$ von \mathbb{E} , so ist α in $t_0 \in I$ genau dann differenzierbar, wenn $x_k \circ \alpha$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ in t_0 differenzierbar ist. In diesem Falle gilt:

$$\alpha'(t_0) = \sum_{k=1}^n (x_k \circ \alpha)'(t_0) \cdot a_k .$$

1.6 Euklidische Räume

Ein wichtiger Aspekt der Geometrie ist die Messung von Längen und Winkeln. Um dies in einem Vektorraum tun zu können, benötigt man ein Skalarprodukt. In diesem Abschnitt übertragen wir die entsprechenden Begriffe auf affine Räume. Doch zuvor eine wichtige

Erinnerung. Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum \mathbb{V} , und $\| \cdot \|$ die dazugehörige Norm (d.h. $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ für $v \in \mathbb{V}$), so gilt die folgende *Polarisationsformel*

$$\forall v, w \in \mathbb{V} : \langle v, w \rangle = \pm \frac{1}{2} (\|v \pm w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

(wobei an beiden Stellen dasselbe Vorzeichen zu wählen ist). Aus diesem Grund ist ein Endomorphismus von \mathbb{V} , der normtreu ist, schon skalarprodukttreu.

Definition.

- (a) Ein n -dimensionaler *euklidischer Raum* ist ein n -dimensionaler affiner Raum \mathbb{E} , dessen Richtungsvektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ versehen ist. Die hierzu gehörige Norm werde mit $\| \cdot \|$ bezeichnet. Für $v, w \in \mathbb{E}_L \setminus \{0\}$ nennen wir

$$\angle(v, w) := \arccos \left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \right) \in [0, \pi]$$

den *Winkel* zwischen v und w . Durch

$$d : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}, (p, q) \mapsto \|q - p\|$$

wird auf \mathbb{E} eine Abstandsfunktion (eine *Metrik*) definiert.

- (b) Sind \mathbb{E} und \mathbb{E}' euklidische Räume, so heißt eine Abbildung $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ eine *Isometrie*, wenn sie bijektiv und *abstandstreu* ist; letzteres bedeutet

$$\forall p, q \in \mathbb{E} : d'(f(p), f(q)) = d(p, q) .$$

- (c) Ein AKS $(p_0; a_1, \dots, a_n)$ eines euklidischen Raums \mathbb{E} heißt ein *kartesisches Koordinatensystem* oder kurz *KKS*, wenn (a_1, \dots, a_n) eine Orthonormalbasis (ONB) des Richtungsvektorraums \mathbb{E}_L ist. Dann ist die zugehörige affine Karte $x : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Isometrie bezüglich des kanonischen Skalarproduktes von \mathbb{R}^n . Mehr noch: die linearisierte Karte $x_L : \mathbb{E}_L \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist skalarprodukt-treu.

Beachte: Je zwei n -dimensionale euklidische Räume sind zueinander affin und metrisch „isomorph“. Diese Isomorphie ist aber nicht kanonisch.

Beispiele.

- (a) Der \mathbb{R}^n ist mit dem kanonischen Skalarprodukt ein euklidischer Raum.
 (b) Die Translationen φ_v eines jeden euklidischen Raums sind Isometrien.
 (c) Für jede affine Abbildung $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ gilt

$$d'(f(p), f(q)) = \|f_L(q - p)\| .$$

Aus diesem Grunde ist eine bijektive, affine Abbildung $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ genau dann eine Isometrie, wenn f_L normtreu ist, und das ist (wegen der Polarisationsformel) genau dann der Fall, wenn f_L skalarprodukt-treu ist.

Theorem. Isometrien eines euklidischen Raums. Sei \mathbb{E} ein euklidischer Raum. Dann gilt für die Gruppe $I(\mathbb{E})$ der Isometrien von \mathbb{E} :

$$I(\mathbb{E}) = \{ f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E} \text{ affin} \mid f_L \text{ ist orthogonale Abbildung in } \mathbb{E}_L \} .$$

Insbesondere sind Isometrien affine Abbildungen.

Beweisstrategie. Für den Beweis der „schwierigen“ Inklusion „ \subset “ sei eine Isometrie $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ gegeben. Man fixiere $p_0 \in \mathbb{E}$ und betrachte die Abbildung

$$g : \mathbb{E}_L \rightarrow \mathbb{E}_L, v \mapsto f(p_0 + v) - f(p_0) .$$

Dann zeige man der Reihe nach die folgenden Punkte (1)–(5). **(1)** $\|g(w) - g(v)\| = \|w - v\|$ für $v, w \in \mathbb{E}_L$. Aus (1) folgert man **(2)** $\|g(v)\| = \|v\|$ für $v \in \mathbb{E}_L$ (d.h.: g ist normtreu). Aus (1), (2) und der Polarisationsformel ergibt sich **(3)** $\langle g(v), g(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ (d.h.: g ist skalarprodukt-treu). Nun folgt der entscheidende Schritt **(4)**: g ist eine orthogonale, insbesondere lineare Abbildung. Dazu betrachte man ein KKS $(p_0; a_1, \dots, a_n)$, beachte, dass wegen (3) $(p_0; g(a_1), \dots, g(a_n))$ ebenfalls ein KKS ist, und stelle $g(v)$ bezüglich der ONB $(g(a_1), \dots, g(a_n))$ dar, wobei $v \in \mathbb{E}_L$ variabel ist. Schließlich sieht man leicht **(5)**: f ist affin mit $f_L = g$. \square

Folgerung. Freie Beweglichkeit in euklidischen Räumen. Sei \mathbb{E} ein euklidischer Raum und $(p_0; a_1, \dots, a_n)$ bzw. $(q_0; b_1, \dots, b_n)$ zwei KKSe von \mathbb{E} . Dann existiert genau eine Isometrie f von \mathbb{E} mit

$$f(p_0) = q_0 \quad \text{und} \quad f_L(a_i) = b_i \text{ für alle } i .$$

„In \mathbb{E} kann man jeden Körper in jede beliebige Lage bringen.“

1.7 Orientierung eines euklidischen Vektorraums; Vierteldrehung und Kreuzprodukt

Es sei \mathbb{V} ein n -dimensionaler euklidischer Vektorraum. Der Vektorraum $\text{Alt}^n(\mathbb{V})$ der alternierenden n -Formen auf \mathbb{V} ist 1-dimensional, weswegen $\text{Alt}^n(\mathbb{V}) \setminus \{0\}$ bezüglich der Äquivalenzrelation

$$\omega_1 \sim \omega_2 : \Longleftrightarrow (\exists c \in \mathbb{R}_+ : \omega_2 = c \cdot \omega_1)$$

in zwei Klassen zerfällt. Diese beiden Äquivalenzklassen werden als die beiden *Orientierungen* von \mathbb{V} bezeichnet; fixiert man eine von ihnen und bezeichnet sie mit $\text{Alt}_+^n(\mathbb{V})$, so sagt man, dass \mathbb{V} hierdurch zu einem *orientierten* euklidischen Vektorraum wird. Dann existiert genau eine n -Form $\det \in \text{Alt}_+^n(\mathbb{V})$, die sogenannte *Determinantenform* von \mathbb{V} , so dass für jede ONB (a_1, \dots, a_n) von \mathbb{V} gilt:

$$\det(a_1, \dots, a_n) \in \{\pm 1\}.$$

Ist in dieser Situation $\det(a_1, \dots, a_n) = 1$, so heißt die ONB (a_1, \dots, a_n) *positiv orientiert*.

Aussage 1. Ist (a_1, \dots, a_n) eine positiv orientierte ONB eines orientierten euklidischen Vektorraums \mathbb{V} , so gilt

$$\forall \omega \in \text{Alt}^n(\mathbb{V}) : \omega = \omega(a_1, \dots, a_n) \cdot \det.$$

Beweis. Die Aussage folgt aus der Tatsache, dass $\text{Alt}^n(\mathbb{V}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \mapsto \omega(a_1, \dots, a_n)$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist. \square

Definition. Ist der Richtungsvektorraum \mathbb{E}_L eines euklidischen Raums \mathbb{E} orientiert, so nennt man \mathbb{E} einen *orientierten euklidischen Raum*.

Aussage 2. Ist \mathbb{V} ein orientierter euklidischer Vektorraum und sind $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}$, so gilt

$$\det(u_1, \dots, u_n) \cdot \det(v_1, \dots, v_n) = \det(\langle u_i, v_k \rangle)_{i,k},$$

wobei auf der rechten Seite die übliche Determinante einer Matrix steht.

Beweis. Wir wählen eine positiv orientierte ONB (a_1, \dots, a_n) von \mathbb{V} und definieren damit die n -Form

$$\nu : (u_1, \dots, u_n) \mapsto \det(\langle u_i, a_k \rangle).$$

Nach Aussage 1 gilt $\nu = \det(\langle a_i, a_k \rangle) \cdot \det = \det$, also

$$\forall (u_1, \dots, u_n) : \det(u_1, \dots, u_n) = \det(\langle u_i, a_k \rangle). \quad (*)$$

Nun zu der fraglichen Formel: Zu $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{V}^n$ definieren wir die n -Form

$$\omega_{\mathbf{u}} : (v_1, \dots, v_n) \mapsto \det(\langle u_i, v_k \rangle).$$

Wieder nach Aussage 1 gilt $\omega_{\mathbf{u}} = c_{\mathbf{u}} \cdot \det$ mit $c_{\mathbf{u}} = \omega_{\mathbf{u}}(a_1, \dots, a_n) = \det(\langle u_i, a_k \rangle) \stackrel{(*)}{=} \det(u_1, \dots, u_n)$, also $\det(u_1, \dots, u_n) \cdot \det(v_1, \dots, v_n) = c_{\mathbf{u}} \cdot \det(v_1, \dots, v_n) = \omega_{\mathbf{u}}(v_1, \dots, v_n) = \det(\langle u_i, v_k \rangle)$. \square

In den beiden Fällen $\dim(\mathbb{V}) = 2$ und $\dim(\mathbb{V}) = 3$ werden durch die Wahl einer Orientierung auf \mathbb{V} besonders anschauliche Objekte induziert. Wir betrachten diese beiden Fälle daher nun genauer.

Aussage 3. (Vierteldrehung) Sei \mathbb{V} ein orientierter euklidischer Vektorraum mit $\dim(\mathbb{V}) = 2$. Dann existiert genau ein $J \in \text{End}(\mathbb{V})$ mit

$$\forall v, w \in \mathbb{V} : \langle Jv, w \rangle = \det(v, w) .$$

Ist (a_1, a_2) eine positiv orientierte ONB von \mathbb{V} , so gilt für alle $v \in \mathbb{V}$

$$Jv = \langle v, a_1 \rangle \cdot a_2 - \langle v, a_2 \rangle \cdot a_1 ,$$

deshalb nennt man J die *Vierteldrehung* von \mathbb{V} .

Ferner ist $J \in \text{End}_-(\mathbb{V}) \cap \text{SO}(\mathbb{V})$ und es gilt $J \circ J = -\text{id}_{\mathbb{V}}$. Insbesondere ist für jeden Einheitsvektor $a \in \mathbb{V}$ das Paar (a, Ja) eine positiv orientierte ONB von \mathbb{V} .

Beweis. Ist $v \in \mathbb{V}$ gegeben, so ist $\det(v, \cdot)$ eine Linearform auf \mathbb{V} , daher existiert genau ein Vektor $Jv \in \mathbb{V}$ mit $\langle Jv, \cdot \rangle = \det(v, \cdot)$, und die so definierte Abbildung $J : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ ist offensichtlich linear. Ist (a_1, a_2) eine positiv orientierte ONB, so gilt $\langle Ja_1, a_1 \rangle = \det(a_1, a_1) = 0 = \langle a_2, a_1 \rangle$ und $\langle Ja_1, a_2 \rangle = \det(a_1, a_2) = 1 = \langle a_2, a_2 \rangle$ und somit

$$Ja_1 = a_2, \quad \text{entsprechend } Ja_2 = -a_1 . \quad (\dagger)$$

Die positiv orientierte ONB (a_1, a_2) wird also durch J in eine andere positiv orientierte ONB, nämlich $(a_2, -a_1)$ überführt, weswegen $J \in \text{SO}(\mathbb{V}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt. Außerdem gilt für $v \in \mathbb{V}$

$$Jv = J(\langle v, a_1 \rangle a_1 + \langle v, a_2 \rangle a_2) \stackrel{(\dagger)}{=} \langle v, a_1 \rangle a_2 - \langle v, a_2 \rangle a_1 ,$$

ebenfalls aus (\dagger) folgt die Gleichung $J \circ J = -\text{id}_{\mathbb{V}}$. Mit dieser Gleichung und der Orthogonalität von J ergibt sich schließlich auch $J \in \text{End}_-(\mathbb{V})$. \square

Aussage 4. (Kreuzprodukt) Sei \mathbb{V} ein orientierter euklidischer Vektorraum mit $\dim(\mathbb{V}) = 3$. Dann existiert genau eine Abbildung $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, $(u, v) \mapsto u \times v$ mit

$$\forall u, v, w \in \mathbb{V} : \langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w) ;$$

sie ist bilinear und schief-symmetrisch; man nennt sie das *Kreuzprodukt* von \mathbb{V} . Das Kreuzprodukt hat die folgenden Eigenschaften: ($u, v, w \in \mathbb{V}$)

(a) $\langle u \times v, u \rangle = \langle u \times v, v \rangle = 0$.

(b) Ist (a_1, a_2, a_3) eine ONB von \mathbb{V} , so gilt für $u, v \in \mathbb{V}$

$$u \times v = \sum_{k=1}^3 \det(u, v, a_k) a_k .$$

(c) $(u \times v) \times w = \langle u, w \rangle \cdot v - \langle v, w \rangle \cdot u$. Damit ist das Kreuzprodukt insbesondere nicht assoziativ.

(d) Die *Lagrangesche Identität*: $\langle v_1 \times v_2, w_1 \times w_2 \rangle = \det(\langle v_i, w_k \rangle)_{i,k}$
 $= \langle v_1, w_1 \rangle \cdot \langle v_2, w_2 \rangle - \langle v_1, w_2 \rangle \cdot \langle v_2, w_1 \rangle$

(e) Sind $a_1, a_2 \in \mathbb{V}$ zwei zueinander orthogonale Einheitsvektoren, so ist $(a_1, a_2, a_1 \times a_2)$ eine positiv orientierte ONB von \mathbb{V} .

(f) Für alle Transformationen $A \in \text{SO}(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und alle $v, w \in \mathbb{V}$ gilt

$$(Av) \times (Aw) = A(v \times w) .$$

Beweis. Für gegebene $u, v \in \mathbb{V}$ ist $\det(u, v, \cdot)$ eine Linearform auf \mathbb{V} , weswegen es genau einen Vektor $u \times v \in \mathbb{V}$ mit $\langle u \times v, \cdot \rangle = \det(u, v, \cdot)$ gibt, und weil \det eine alternierende Trilinearform ist, ist die so definierte Abbildung $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, $(u, v) \mapsto u \times v$ bilinear und schief-symmetrisch.

Zu (a). Nach Definition gilt $\langle u \times v, u \rangle = \det(u, v, u) = 0$ und entsprechend $\langle u \times v, v \rangle = 0$. Zu (b). Durch Fourier-Entwicklung von $u \times v$ ergibt sich $u \times v = \sum_k \langle u \times v, a_k \rangle a_k = \sum_k \det(u, v, a_k) a_k$. Zu (c). Da beide Seiten der Gleichung in u, v, w linear sind, genügt es, die Gleichung bei Einsetzen von Vektoren einer positiv orientierten ONB (a_1, a_2, a_3) zu prüfen. Da beide Seiten in u, v schief-symmetrisch sind, genügt es sogar, $(u, v) \in \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_1)\}$ zu untersuchen. Die Zahl der zu untersuchenden Fälle kann noch weiter reduziert werden: Da mit (a_1, a_2, a_3) auch (a_2, a_3, a_1) und (a_3, a_1, a_2) positiv orientierte ONBen sind, genügt es sogar, die Gleichung für $(u, v, w) = (a_1, a_2, a_k)$ mit $k \in \{1, 2, 3\}$ zu bestätigen. Nun rechnet man leicht mit Hilfe von (b) nach: $(a_1 \times a_2) \times a_1 = a_2 = \langle a_1, a_1 \rangle a_2 - \langle a_2, a_1 \rangle a_1$, $(a_1 \times a_2) \times a_2 = -a_1 = \langle a_1, a_2 \rangle a_2 - \langle a_2, a_2 \rangle a_1$, $(a_1 \times a_2) \times a_3 = 0 = \langle a_1, a_3 \rangle a_2 - \langle a_2, a_3 \rangle a_1$. Zu (d). Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \langle v_1 \times v_2, w_1 \times w_2 \rangle &= \det(v_1, v_2, w_1 \times w_2) = \det(w_1 \times w_2, v_1, v_2) = \langle (w_1 \times w_2) \times v_1, v_2 \rangle \\ &\stackrel{(c)}{=} \langle \langle w_1, v_1 \rangle \cdot w_2 - \langle w_2, v_1 \rangle \cdot w_1, v_2 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle \langle v_2, w_2 \rangle - \langle v_1, w_2 \rangle \langle v_2, w_1 \rangle. \end{aligned}$$

Zu (e). Aus (a) ergibt sich, dass $a_1 \times a_2$ auf a_1 und auf a_2 senkrecht steht, nach (d) gilt $\|a_1 \times a_2\|^2 = \det(\langle a_i, a_k \rangle)_{i,k} = \det(\mathbb{1}) = 1$, also ist $(a_1, a_2, a_1 \times a_2)$ eine ONB von \mathbb{V} ; diese ist wegen $\det(a_1, a_2, a_1 \times a_2) = \langle a_1 \times a_2, a_1 \times a_2 \rangle = 1$ positiv orientiert. Zu (f). Diese Aussage ist nicht überraschend: Da das Kreuzprodukt mittels der Struktur eines orientierten euklidischen Vektorraums definiert ist, sollte es unter den diese Struktur erhaltenden Automorphismen von \mathbb{V} — das sind gerade die $A \in \text{SO}(\mathbb{V}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — invariant sein. Im Konkreten folgt die Aussage aus

$$\begin{aligned} \langle (Au) \times (Av), Aw \rangle &= \det(Au, Av, Aw) = \det(A) \cdot \det(u, v, w) = \det(u, v, w) \\ &= \langle u \times v, w \rangle = \langle A(u \times v), Aw \rangle. \end{aligned} \quad \square$$

Beispiele.

- (a) Auf dem \mathbb{R}^n existiert genau eine Struktur eines orientierten euklidischen Vektorraums, so dass seine Standard-Basis (e_1, \dots, e_n) eine positiv orientierte ONB ist. Diesbezüglich stimmt die Determinantenform \det mit der üblichen Determinante überein. Im Falle $n = 2$ ist die Vierteldrehung der Endomorphismus $(v_1, v_2) \mapsto (-v_2, v_1)$, und im Falle $n = 3$ wird das Kreuzprodukt zwischen $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ und $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ durch

$$v \times w = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

gegeben.

- (b) Sei nun $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein beliebiges anderes Skalarprodukt auf dem \mathbb{R}^n . Mit Hilfe der Standard-Basis (e_1, \dots, e_n) definieren wir dann jeweils $g_{ik} := \langle e_i, e_k \rangle$. Dann können wir das Skalarprodukt und die Determinantenfunktion $\det^{(\cdot, \cdot)}$ dieses orientierten euklidischen Vektorraums auf die folgende Weise beschreiben:

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n : \langle v, w \rangle = \sum_{i,k=1}^n g_{ik} v_i w_k$$

und

$$\forall v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n : \det^{(\cdot, \cdot)}(v_1, \dots, v_n) = \sqrt{\det(g_{ik})} \cdot \det(v_1, \dots, v_n),$$

wobei \det die übliche Determinantenfunktion des \mathbb{R}^n bezeichnet. Im Falle $n = 2$ wird die Vierteldrehung des euklidischen Vektorraums $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ durch die Matrix

$$\frac{1}{\sqrt{\det(g_{ik})}} \cdot \begin{pmatrix} -g_{12} & -g_{22} \\ g_{11} & g_{21} \end{pmatrix}$$

beschrieben. — Beispiel (b) wird später eine zentrale Rolle in der Flächentheorie des \mathbb{R}^3 spielen.

Beweis zu (b). Da \det und $\det^{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ beide zur kanonischen Orientierung des \mathbb{R}^n gehören, gilt $\det^{\langle \cdot, \cdot \rangle} = c \cdot \det$ mit einem $c \in \mathbb{R}_+$. Zu dessen Bestimmung berechnen wir mittels der Standard-Basis (e_1, \dots, e_n)

$$c^2 = (c \cdot \det(e_1, \dots, e_n))^2 = \det^{\langle \cdot, \cdot \rangle}(e_1, \dots, e_n)^2 = \det(\langle e_i, e_k \rangle) = \det(g_{ik}),$$

wobei das vorletzte Gleichheitszeichen aus Aussage 2 folgt. Daher gilt $\det(g_{ik}) > 0$, weswegen der Ausdruck $\sqrt{\det(g_{ik})}$ wohldefiniert ist, und es folgt $\det^{\langle \cdot, \cdot \rangle} = \sqrt{\det(g_{ik})} \cdot \det$. \square

1.8 Drehungen und orientierte Winkel in zwei Dimensionen

Es sei \mathbb{V} ein orientierter, 2-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Wir bezeichnen die Vierteldrehung von \mathbb{V} mit $J : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$.

Drehungen: Die 1-Parametergruppe $(R_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist der Endomorphismus

$$R_t := \cos(t) \cdot \text{id}_{\mathbb{V}} + \sin(t) \cdot J$$

eine orientierungserhaltende, orthogonale Transformation, d.h. $R_t \in \text{SO}(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Ist (a_1, a_2) irgendeine positiv orientierte ONB von \mathbb{V} , so wird R_t diesbezüglich durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

dargestellt, deshalb nennt man R_t die *Drehung um den Winkel t* . Für $t, s \in \mathbb{R}$ gilt

$$R_0 = \text{id}_{\mathbb{V}}, \quad R_t \circ R_s = R_{t+s} \quad \text{und} \quad R_{-t} = R_t^{-1},$$

anders gesagt: Die Abbildung $(\mathbb{R}, +) \rightarrow \text{SO}(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $t \mapsto R_t$ ist ein Gruppen-Homomorphismus. Man sagt auch: Die Familie $(R_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ist eine *Ein-Parameter-Untergruppe* von $\text{SO}(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Der Kern des genannten Gruppenhomomorphismus ist $2\pi\mathbb{Z}$.

Der orientierte Winkel. Sind $v, w \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$, so ist

$$\angle_{or}(v, w) := \{ \varphi \in \mathbb{R} \mid \langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\varphi) \text{ und } \det(v, w) = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin(\varphi) \}$$

eine nicht-leere Menge, die man die *Menge der orientierten Winkel* zwischen v und w nennt. Ist $\varphi \in \angle_{or}(v, w)$ (man sagt: φ ist ein *orientierter Winkel* zwischen v und w) und $a := v/\|v\|$, so gilt

$$w = \frac{\|w\|}{\|v\|} \cdot R_{\varphi}(v) = \|w\| \cdot (\cos(\varphi) \cdot a + \sin(\varphi) \cdot Ja)$$

und

$$\angle_{or}(v, w) = \varphi + 2\pi\mathbb{Z} := \{ \varphi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

Beweis. Zum Beweis der Aussagen benutzen wir die gleichförmige Kreisbewegung

$$\gamma_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos(t), \sin(t)).$$

Sie ist 2π -periodisch, ihr Bild ist der Einheitskreis $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, und für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ ist die Einschränkung $\gamma_0|_{[t_0 - \pi, t_0 + \pi[}$ ein Homöomorphismus auf $S^1 \setminus \{\gamma_0(t_0 + \pi)\}$, also eine bijektive, stetige Abbildung mit stetiger Umkehrabbildung.

Da (a, Ja) eine ONB von \mathbb{V} ist, gilt

$$w = \langle w, a \rangle \cdot a + \langle w, Ja \rangle \cdot Ja = \langle w, a \rangle \cdot a + \det(a, w) \cdot Ja$$

und somit

$$\|w\|^2 = \langle w, a \rangle^2 + \det(a, w)^2 = \frac{1}{\|v\|^2} \cdot (\langle v, w \rangle^2 + \det(v, w)^2).$$

Daher ist $p := \left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}, \frac{\det(v, w)}{\|v\| \cdot \|w\|} \right) \in S^1$, und nach Definition des orientierten Winkels gilt $\angle(v, w) = \gamma_0^{-1}(\{p\})$. Die Aussagen folgen nun aus den angegebenen Eigenschaften von γ_0 . \square

Wir übertragen nun die Kreisbewegung γ_0 im \mathbb{R}^2 , die in obigem Beweis eine wesentliche Rolle spielte, in einen beliebigen 2-dimensionalen orientierten, euklidischen Vektorraum. Dieser Vorgang ist mathematisch trivial, wird es uns aber in der elementaren Kurventheorie ermöglichen, wesentliche Sachverhalte elegant zu formulieren.

Definition. Für jeden Einheitsvektor $a \in \mathbb{V}$ definieren wir das „Einheitsvektorfeld“

$$\Gamma_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}, t \mapsto R_t(a) = \cos(t) \cdot a + \sin(t) \cdot Ja.$$

Γ_a besitzt mutatis mutandis dieselben Eigenschaften, die für γ_0 im vorherigen Beweis aufgeführt worden sind.

Aussage. Für das soeben definierte Einheitsvektorfeld Γ_a gilt $\Gamma'_a = J\Gamma_a$, also ist $(\Gamma_a(t), \Gamma'_a(t))$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine positiv orientierte ONB von \mathbb{V} .

Beweis. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt $\Gamma'_a(t) = -\sin(t) \cdot a + \cos(t) \cdot Ja = J(\cos(t) \cdot a + \sin(t) \cdot Ja) = J\Gamma_a(t)$. \square

Satz. (Stetige bzw. differenzierbare Abhängigkeit des orientierten Winkels.) Sei $a \in \mathbb{V}$ ein Einheitsvektor, $r \in \{0, 1, \dots, \infty\}$, und $E : I \rightarrow \mathbb{V}$ eine C^r -Funktion auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $\|E\| = 1$. Dann existiert eine C^r -Funktion $\vartheta : I \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\forall t \in I : \vartheta(t) \in \angle_{or}(a, E(t))$$

und somit

$$E = \Gamma_a \circ \vartheta$$

gilt. Sind ϑ_1, ϑ_2 zwei stetige derartige Funktionen, so gilt

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 \equiv \text{const.} \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Wir werden später sehen, dass dieser Satz ein zentrales Hilfsmittel sowohl für die lokale als auch für die globale Ebene der Kurventheorie ist.

Beweis. Zur Eindeutigkeitsaussage: Sind ϑ_1, ϑ_2 wie im Satz, so ist $\vartheta_2 - \vartheta_1$ eine stetige Funktion auf dem Intervall I , deren Werte in der diskreten Menge $2\pi\mathbb{Z}$ liegt, und deshalb konstant.

Zur Existenz: Im Falle $r = 0$ folgt die Existenz von ϑ aus der Tatsache, dass $\Gamma_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}$ ein lokaler Homöomorphismus mit $\Gamma_a^{-1}(E(t)) = \angle_{or}(a, E(t))$ für alle $t \in I$ ist. Betrachten wir also nun den Fall $r \geq 1$. Wir fixieren ein $t_0 \in I$ und bezeichnen mit $\vartheta : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion der Funktion $f := \langle E', JE \rangle$ mit dem „Anfangswert“ $\vartheta(t_0) \in \angle_{or}(a, E(t_0))$; nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist ϑ eine C^r -Funktion.

Wir werden nun zeigen, dass $X := \Gamma_a \circ \vartheta$ und E Lösungen desselben gewöhnlichen Differentialgleichungs-Anfangswertproblems sind; deshalb gilt nach dem Satz von Picard/Lindelöf (Existenz- und Eindeigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen) $X = E$, woraus die Behauptung folgt.

Wir stellen dazu zunächst fest, dass $X(t_0) = E(t_0)$ gilt, und zeigen dann, dass X und E beide Lösungen der linearen, homogenen Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t) \cdot Jy(t)$$

sind. Für X rechnet man einfach: $X'(t) = \Gamma'_a(\vartheta(t)) \cdot \vartheta'(t) = J\Gamma_a(\vartheta(t)) \cdot f(t) = JX(t) \cdot f(t)$. Für E schreibt man die Fourier-Entwicklung von E' bezüglich des ONB-Feldes (E, JE) hin:

$$E' = \langle E', E \rangle \cdot E + \langle E', JE \rangle \cdot JE = \langle E', E \rangle \cdot E + f \cdot JE.$$

Nun gilt $\langle E, E \rangle = 1$ und deshalb $0 = (\langle E, E \rangle)' = \langle E', E \rangle + \langle E, E' \rangle = 2 \langle E', E \rangle$. Also ergibt sich $E' = f \cdot JE$. \square

Kapitel 2

Grundlegendes über Kurven

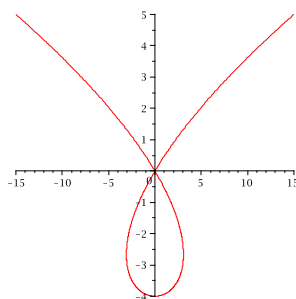
2.1 Wege und ihre Länge

Es sei $\mathbb{I}\mathbb{E}$ ein affiner Raum. Wir wollen uns mit Kurven in $\mathbb{I}\mathbb{E}$ befassen. Grundsätzlich gibt es zwei unterschiedliche Sichtweisen, was man unter einer Kurve in $\mathbb{I}\mathbb{E}$ anschaulich verstehen will. Die eine Sichtweise ist, eine Kurve als einen „geometrischen Ort“, das heißt als eine durch eine gewisse Eigenschaft charakterisierte Menge von Punkten von $\mathbb{I}\mathbb{E}$ aufzufassen. Die zweite Sichtweise ist, eine Kurve als den Weg eines bewegten Massepunktes zu verstehen, mathematisch modelliert als eine Funktion eines (Zeit-)Parameters nach $\mathbb{I}\mathbb{E}$.

Hier wollen wir die zweite Sichtweise in den Mittelpunkt stellen, weil sie es uns leichter macht, die Mittel der Analysis anzuwenden. Dennoch interessieren wir uns in erster Linie für Eigenschaften von Kurven, die nur von ihrer Bildmenge, das heißt, von ihrer *geometrischen Gestalt* abhängen.

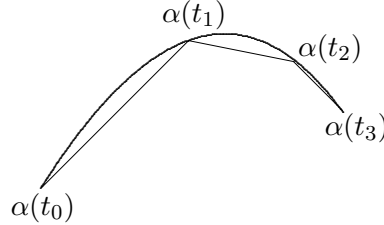
Definition 1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Ein *Weg* (in $\mathbb{I}\mathbb{E}$) ist eine stetige Abbildung $\alpha : I \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{E}$.

Bemerkung. Wir setzen nicht voraus, dass unsere Wege injektiv sind. Das bedeutet u.a., dass ein Weg *Selbstdurchdringungen* haben kann. Beispielsweise gilt für den Weg $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^3 - 4t, t^2 - 4)$: $\alpha(2) = (0, 0) = \alpha(-2)$.



Den ersten „intrinsischen“ Begriff für Wege, den wir untersuchen wollen, ist ihre *Länge*. Es ist klar, dass wir, um die Länge von Wegen in $\mathbb{I}\mathbb{E}$ messen zu können, einen Abstandsbegriff in $\mathbb{I}\mathbb{E}$ benötigen. Daher setzen wir nun voraus, dass $\mathbb{I}\mathbb{E}$ ein euklidischer Raum ist, dann wird durch $d(p, q) := \|p - q\|$ für $p, q \in \mathbb{I}\mathbb{E}$ bekanntlich eine Metrik auf $\mathbb{I}\mathbb{E}$ definiert.

Es sei nun ein Weg $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ gegeben mit $a < b$. Um die Länge von α zu bestimmen, folgen wir einer Idee von ARCHIMEDES, und approximieren den Weg durch Streckenzüge:



Wir wählen also eine Zerlegung $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = b$ des Intervalls $[a, b]$, und betrachten den Streckenzug, der dadurch entsteht, dass wir $\alpha(t_0)$ geradlinig mit $\alpha(t_1)$ verbinden, diesen Punkt dann geradlinig mit $\alpha(t_2)$ verbinden, und so fort, bis wir schließlich $\alpha(t_{m-1})$ mit $\alpha(t_m)$ verbunden haben. Die Länge dieses Streckenzugs, die wir als eine Approximation für die Länge von α auffassen wollen, beträgt dann offenbar

$$\sum_{k=0}^{m-1} d(\alpha(t_k), \alpha(t_{k+1})) .$$

Betrachten wir eine Verfeinerung dieser Zerlegung, so wird der Weg durch den feineren Streckenzug im Allgemeinen besser approximiert, und die Länge des feineren Streckenzugs wird aufgrund der Dreiecksungleichung höchstens länger. Berücksichtigen wir außerdem, dass es zu je zwei beliebigen Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$ eine gemeinsame Verfeinerung gibt, werden wir auf die folgende Definition geführt:

Definition 2. Unter der *Länge* des Weges $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ versteht man die „Zahl“

$$L(\alpha) := \sup \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} d(\alpha(t_k), \alpha(t_{k+1})) \mid m \in \mathbb{N}, a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = b \right\} \in [0, \infty] .$$

Ist $L(\alpha) < \infty$, so heißt α *rektifizierbar*.

Beispiel. Sind $p, q \in \mathbb{E}$ und ist $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}$, $t \mapsto p + t(q - p)$ die Parametrisierung der Verbindungsstrecke von p nach q , so gilt $L(\alpha) = d(p, q)$.

Bemerkung. Es gibt nicht-rektifizierbare Wege.

(a) Ein einfaches Beispiel eines nicht-rektifizierbaren Weges ist

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{cases} (0, 0) & \text{für } t = 0 \\ (t, t \cdot \cos(1/t)) & \text{für } t > 0 \end{cases} .$$

(b) Ist $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (mit $n \geq 2$) ein rektifizierbarer Weg, so ist $\alpha([0, 1])$ bezüglich des üblichen Volumenmaßes eine Menge vom Maß Null.

(c) Andererseits gibt es *Peano-Wege* $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, das sind solche (stetige!) Wege, für die $\alpha([0, 1]) = [0, 1] \times [0, 1]$ gilt. Diese sind nach dem Vorangegangenen nicht rektifizierbar.

Aufgabe 1. Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ ein rektifizierbarer Weg und $f \in I(\mathbb{E})$. Dann gilt $L(f \circ \alpha) = L(\alpha)$, insbesondere ist der Weg $f \circ \alpha$ ebenfalls rektifizierbar.

Aufgabe 2. Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ ein rektifizierbarer Weg. Dann ist die Funktion

$$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto L(\alpha|_{[a, t]})$$

monoton wachsend und stetig.

[Tipp für den Stetigkeitsbeweis in einem Parameter $t^* \in]a, b[$: Man überlege sich, dass es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ Parameter $t_0 = a < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$ gibt, so dass einerseits der Streckenzug β mit den Eckpunkten $\alpha(t_i)$ ($0 \leq i \leq m$) länger als $L(\alpha) - \varepsilon/3$ ist und dass andererseits für ein geeignetes $k \in \{1, \dots, m-1\}$ gilt: $t^* = t_k$ und $d(\alpha(t_{k-1}), \alpha(t_k)), d(\alpha(t_k), \alpha(t_{k+1})) < \varepsilon/3$. In dieser Situation zeige man $L(\alpha|_{[t_{k-1}, t_{k+1}]} < \varepsilon$ und schließe daraus $|\varphi(t) - \varphi(t^*)| < \varepsilon$ für alle $t \in [t_{k-1}, t_{k+1}]$ mit der Monotonie von φ .]

Satz 1. (Invarianz der Weglänge unter Parametertransformation.) Es sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ ein Weg und $\varphi : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ eine *Parametertransformation*: das soll heißen, dass φ surjektiv, monoton wachsend und stetig* ist. Dann gilt $L(\alpha \circ \varphi) = L(\alpha)$. Insbesondere ist $\alpha \circ \varphi$ genau dann rektifizierbar, wenn α rektifizierbar ist.

Beweis. Wir zeigen, dass die Mengen

$$M := \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} d(\alpha(t_k), \alpha(t_{k+1})) \mid m \in \mathbb{N}, a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = b \right\}$$

und

$$M' := \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} d((\alpha \circ \varphi)(t'_k), (\alpha \circ \varphi)(t'_{k+1})) \mid m \in \mathbb{N}, a' = t'_0 \leq t'_1 \leq \dots \leq t'_m = b' \right\}$$

übereinstimmen, dann gilt auch $L(\alpha) = \sup M = \sup M' = L(\alpha \circ \varphi)$.

Dazu: Ist $a' = t'_0 \leq t'_1 \leq \dots \leq t'_m = b'$ eine Zerlegung des Intervalls $[a', b']$, so ist mit $t_k := \varphi(t'_k)$ eine Zerlegung $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = b$ des Intervalls $[a, b]$ gegeben, und offenbar gilt

$$\sum_{k=0}^{m-1} d(\alpha(t_k), \alpha(t_{k+1})) = \sum_{k=0}^{m-1} d((\alpha \circ \varphi)(t'_k), (\alpha \circ \varphi)(t'_{k+1})). \quad (*)$$

Daraus folgt $M' \subset M$. Ist umgekehrt eine Zerlegung $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = b$ des Intervalls $[a, b]$ gegeben, so setzen wir $t'_0 := a'$, $t'_m := b'$ und wählen $t'_k \in \varphi^{-1}(\{t_k\})$ beliebig für $k \in \{1, \dots, m-1\}$. Dann ist $a' = t'_0 \leq t'_1 \leq \dots \leq t'_m = b'$ eine Zerlegung des Intervalls $[a', b']$, und es gilt wieder (*), woraus $M \subset M'$ folgt. \square

Als nächstes wollen wir uns vergewissern, dass unsere anschauliche Vorstellung von Strecken als die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten, die unserer Definition der Weglänge zugrunde lag, tatsächlich korrekt ist. Dies erfordert etwas Vorbereitung:

Lemma. Sind $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{E}$ und gilt „Gleichheit in der Dreiecksungleichung“, d.h. $d(p_1, p_3) = d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3)$, so gilt $p_2 \in [p_1, p_3] := \{p_1 + t(p_3 - p_1) \mid t \in [0, 1]\}$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $p_3 \neq p_1$. Dann setzen wir $v := p_3 - p_1 \neq 0$, und es gilt:

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \langle v, v \rangle = |\langle v, v \rangle| = |\langle (p_3 - p_2) + (p_2 - p_1), v \rangle| \leq |\langle p_3 - p_2, v \rangle| + |\langle p_2 - p_1, v \rangle| \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \|p_3 - p_2\| \cdot \|v\| + \|p_2 - p_1\| \cdot \|v\| = (d(p_2, p_3) + d(p_1, p_2)) \cdot \|v\| = d(p_1, p_3) \cdot \|v\| = \|v\|^2, \end{aligned}$$

*Tatsächlich kann man zeigen, dass die Stetigkeit von φ schon aus der Surjektivität und Monotonie folgt.

wobei die Ungleichung (*) aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt. Wir sehen also, dass in dieser Rechnung tatsächlich überall Gleichheit gilt. Daher ergibt sich, indem man die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für $(p_3 - p_2, v)$ bzw. $(p_2 - p_1, v)$ berücksichtigt:

$$|\langle p_3 - p_2, v \rangle| = \|p_3 - p_2\| \cdot \|v\| \quad \text{und} \quad |\langle p_2 - p_1, v \rangle| = \|p_2 - p_1\| \cdot \|v\| ,$$

das heißt, für die beiden letzteren Konstellationen gilt in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung Gleichheit. Daraus ergibt sich, dass $s, t \geq 0$ existieren mit $p_3 - p_2 = sv$ und $p_2 - p_1 = tv$. Damit haben wir $p_2 = p_1 + (p_2 - p_1) = p_1 + tv$; ferner gilt $p_2 = p_1 + ((p_3 - p_1) + (p_2 - p_3)) = p_1 + (1 - s)v$, somit ist $t = 1 - s \leq 1$. \square

Folgerung. Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ ein Weg, und gilt $L(\alpha) = d(\alpha(a), \alpha(b))$, so ist $\alpha(t) \in [\alpha(a), \alpha(b)]$ für alle $t \in [a, b]$.

Beweis. Für $t \in [a, b]$ gilt

$$L(\alpha) = d(\alpha(a), \alpha(b)) \leq d(\alpha(a), \alpha(t)) + d(\alpha(t), \alpha(b)) \leq L(\alpha)$$

und somit $d(\alpha(a), \alpha(b)) = d(\alpha(a), \alpha(t)) + d(\alpha(t), \alpha(b))$. Durch Anwendung des Lemmas (mit $p_1 := \alpha(a)$, $p_2 := \alpha(t)$ und $p_3 := \alpha(b)$) ergibt sich $\alpha(t) \in [\alpha(a), \alpha(b)]$. \square

Satz 2. (Strecken sind Kürzeste.) Es seien $p, q \in \mathbb{E}$ zwei verschiedene Punkte, $W(p, q)$ die Menge aller Wege $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}$ mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha(1) = q$, und $\alpha_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}$, $t \mapsto p + t(q - p)$ die kanonische Parametrisierung der Verbindungsstrecke von p nach q . Dann gilt:

- (a) $L(\alpha_0) = d(p, q)$.
- (b) $\forall \alpha \in W(p, q) : L(\alpha) \geq L(\alpha_0)$.
- (c) Ist $\alpha \in W(p, q)$ mit $L(\alpha) = L(\alpha_0)$, so existiert eine Umparametrisierung $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ (siehe Satz 1) mit $\alpha = \alpha_0 \circ \varphi$.

Beweis. Zu (a). Ist eine Zerlegung $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = 1$ des Intervalls $[0, 1]$ vorgegeben, so gilt offenbar $d(\alpha(t_k), \alpha(t_{k+1})) = (t_{k+1} - t_k) \cdot \|q - p\|$ und somit $\sum_k d(\alpha(t_k), \alpha(t_{k+1})) = \|q - p\| = d(p, q)$. Es folgt $L(\alpha_0) = \sup\{\dots\} = d(p, q)$. Zu (b). $0 = t_0 \leq t_1 = 1$ ist eine Zerlegung des Intervalls $[0, 1]$, deshalb gilt $L(\alpha) \geq d(\alpha(t_0), \alpha(t_1)) = d(p, q) = L(\alpha_0)$. Zu (c). Gilt $L(\alpha) = L(\alpha_0)$, so ergibt sich aus der Folgerung dieses Abschnitts, dass es zu jedem $t \in [0, 1]$ ein $\varphi(t) \in [0, 1]$ mit $\alpha(t) = p + \varphi(t)(q - p)$ gibt; mit der hierdurch definierten Funktion $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ gilt offenbar $\alpha = \alpha_0 \circ \varphi$. Außerdem gilt $\varphi(t) = \frac{\langle \alpha(t) - p, q - p \rangle}{\|q - p\|^2}$ und daher ist φ mit α stetig. Zum Beweis der Monotonie von φ sei $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} L(\alpha) &\geq d(p, \alpha(t_1)) + d(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) + d(\alpha(t_2), q) = \underbrace{|\varphi(t_1)|}_{\geq 0} \cdot \|q - p\| + |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \cdot \|q - p\| + \underbrace{|1 - \varphi(t_2)|}_{\geq 0} \cdot \|q - p\| \\ &= (\varphi(t_1) + |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| + 1 - \varphi(t_2)) \cdot \|q - p\|. \end{aligned}$$

Wäre nun $\varphi(t_2) < \varphi(t_1)$, so würde sich ergeben: $L(\alpha) \geq (1 + 2(\varphi(t_1) - \varphi(t_2))) \cdot \|q - p\| > \|q - p\| = L(\alpha_0)$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Deshalb ist φ monoton wachsend. Schließlich gilt $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$ (wegen $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$), woraus wegen des Zwischenwertsatzes die Surjektivität von $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ folgt. \square

Aufgabe 3. (Der Schwarzsche Stiefel.) HERMANN ARMANDUS SCHWARZ — lange ist es her (1843 - 1921) — sitzt am Fenster und überlegt, ob man den Inhalt einer Fläche per Approximation durch viele Dreiecke bestimmen kann, analog zur Bestimmung der Länge rektifizierbarer Wege per Approximation durch Strecken.

Draußen geht ein Soldat vorbei und Schwarzens Blick fällt auf dessen verknautschten Stiefel. Und da hat er ihn, den „SCHWARZschen Stiefel“:

Wir betrachten einen Kreiszylinder vom Radius r und mit Höhe h , zerlegen die Mantelfläche durch $m - 1$ Kreise, die alle zum Grundkreis parallel sind und voneinander den Abstand h/m haben. Dann wählen wir auf jedem dieser Kreis n äquidistante Punkte, und zwar so, dass bei jedem Kreis die Punkte mitten zwischen die des darüber liegenden Nachbarkreises zu liegen kommen. Wir betrachten die Menge der Dreiecke, die diese Punkte als Ecken haben.

- (a) Man zeige, dass die Anzahl dieser Dreiecke $2mn$ und
- (b) der Gesamtflächeninhalt aller Dreiecke

$$F_{(m,n)} := 2 \cdot m \cdot n \cdot r \cdot \sin(\pi/n) \cdot \sqrt{r^2(1 - \cos(\pi/n))^2 + h^2/m^2}$$

ist.

- (c) Man bestimme $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{(n,n)}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{(n^2,n)}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{(n^3,n)}$. Kann man das geometrisch verstehen?

Schwarzens Erkenntnis: Bestimmung des Inhalts einer Fläche per Approximation durch Dreiecke liefert keinen „vernünftigen“ Flächeninhaltsbegriff. Man begründe dies!

2.2 Kurven, Geschwindigkeit, und Parametrisierung nach der Bogenlänge

Es sei \mathbb{E} ein euklidischer Raum.

Die Länge eines Weges ist im Allgemeinen nicht leicht auszurechnen: Immerhin hat man das Supremum über eine unendliche Menge von Streckenzug-Längen auszurechnen. Wenn man sich aber für *Kurven*, das sind stetig differenzierbare Wege, interessiert, wird die Sache übersichtlicher, wie sich in diesem Abschnitt zeigt.

Definition.

- (a) Einen stetig differenzierbaren Weg $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ nennt man eine *Kurve* in \mathbb{E} . (Dabei ist, falls I Randpunkte besitzt, die Differenzierbarkeit von α in diesen als links- bzw. rechtsseitige Differenzierbarkeit zu verstehen.)
- (b) Für jede Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ heißt die Funktion

$$v_\alpha := \|\alpha'\| : I \rightarrow \mathbb{R}$$

die *Bahngeschwindigkeit* von α .

Satz 1. Jede Kurve $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ ist rektifizierbar und es gilt

$$L(\alpha) = \int_a^b v_\alpha(t) dt .$$

Trotz dieser einfachen Formel stößt man bei der Berechnung der Länge von Kurven schnell an Grenzen, weil das sich ergebende Integral oft nicht durch elementare Funktionen ausgedrückt werden kann. Man kommt dann i.a. nicht um die Benutzung eines Computers herum. Das berühmteste Beispiel für diese Schwierigkeit ist die Bestimmung des Umfangs einer Ellipse.

Beweis von Satz 1. Wir zeigen zunächst $L(\alpha) \leq \int_a^b v_\alpha(t) dt$. Dazu sei eine Zerlegung $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = b$ des Intervalls $[a, b]$ gegeben, dann gilt für die Länge des zugehörigen Streckenzugs

$$\sum_{k=0}^{m-1} d(\alpha(t_k), \alpha(t_{k+1})) = \sum_{k=0}^{m-1} \|\alpha(t_{k+1}) - \alpha(t_k)\| = \sum_{k=0}^{m-1} \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \alpha'(t) dt \right\| \leq \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b v_\alpha(t) dt .$$

Da $L(\alpha)$ das Supremum über die Länge aller möglichen derartigen Streckenzüge ist, folgt $L(\alpha) \leq \int_a^b v_\alpha(t) dt$. Indem in diesem Argument α durch $\alpha|_{[t_1, t_2]}$ (mit $a \leq t_1 < t_2 \leq b$) ersetzen, sehen wir, dass auch

$$L(\alpha|_{[t_1, t_2]}) \leq \int_{t_1}^{t_2} v_\alpha(t) dt \quad (*)$$

gilt.

Wir betrachten nun die Funktionen

$$s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto L(\alpha|_{[a, t]}) \quad \text{und} \quad \tilde{s} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \int_a^t v_\alpha(s) ds .$$

Für $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ gilt dann

$$\|\alpha(t_2) - \alpha(t_1)\| = d(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) \leq \underbrace{L(\alpha|_{[t_1, t_2]})}_{=s(t_2)-s(t_1)} \stackrel{(*)}{\leq} \int_{t_1}^{t_2} v_\alpha(t) dt = \tilde{s}(t_2) - \tilde{s}(t_1)$$

und somit

$$\left\| \frac{\alpha(t_2) - \alpha(t_1)}{t_2 - t_1} \right\| \leq \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \frac{\tilde{s}(t_2) - \tilde{s}(t_1)}{t_2 - t_1} .$$

Dabei gelten die Ungleichungen der letzten Zeile offenbar auch für $t_2 < t_1$. Läßt man nun $t_2 \rightarrow t_1$ gehen, so konvergiert sowohl der linke als auch der rechte Term gegen $\|\alpha'(t_1)\| = v_\alpha(t_1)$. Daher gilt auch $\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = v_\alpha(t_1)$. Anders gesagt: Neben \tilde{s} ist auch s eine Stammfunktion von v_α , und außerdem gilt $s(a) = 0 = \tilde{s}(a)$. Daraus ergibt sich $s = \tilde{s}$ und damit die Behauptung. \square

Definition.

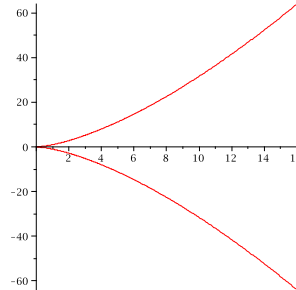
(a) Ein Weg $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ heißt *nach der Bogenlänge parametrisiert*, wenn

$$\forall t_1 < t_2 : L(\alpha|_{[t_1, t_2]}) = t_2 - t_1$$

gilt.

(b) Eine Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ heißt *regulär*, wenn v_α nullstellenfrei ist.

Beispiel. Die *Neilsche Parabel* $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^2, t^3)$ ist eine C^∞ -Kurve mit $\alpha'(0) = 0$. Also ist α (in $t = 0$) nicht regulär. Die Konsequenz: Das Bild $\alpha(\mathbb{R})$ hat bei $\alpha(0) = (0, 0)$ einen „Knick“.



Aussage. Eine Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ ist genau dann nach der Bogenlänge parametrisiert, wenn $v_\alpha \equiv 1$ gilt.

Beweis. Nach Satz 1 ist α genau dann nach der Bogenlänge parametrisiert, wenn für alle $t_1 < t_2$ gilt: $\int_{t_1}^{t_2} v_\alpha(t) dt = t_2 - t_1$, und diese Bedingung ist im Falle $v_\alpha \equiv 1$ offensichtlich erfüllt. Gilt umgekehrt $\int_{t_1}^{t_2} v_\alpha(t) dt = t_2 - t_1$ für alle $t_1 < t_2$, so folgt aus dieser Gleichung, indem man bei festgehaltenem t_1 nach t_2 differenziert: $v_\alpha(t_2) = 1$. \square

Satz 2. (Umparametrisierung nach der Bogenlänge) Ist $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ eine reguläre C^r -Kurve ($r = 1, 2, \dots, \infty$), so ist jede Stammfunktion $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ von v_α streng monoton wachsend, ihre Umkehrfunktion $\varphi := s^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $J := s(I)$) ist eine C^r -Parametertransformation (d.h. eine monoton wachsende C^r -Funktion mit $\varphi(J) = I$) und die Kurve $\gamma := \alpha \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{E}$ ist nach der Bogenlänge parametrisiert.

Beweis. Da α eine C^r -Kurve ist, ist v_α eine C^{r-1} -Funktion, und daher ist s eine C^r -Funktion, die wegen $s' = v_\alpha > 0$ streng monoton wachsend ist. Daher ist ihre Umkehrfunktion $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ wohldefiniert, und ebenfalls eine streng monoton wachsende C^r -Funktion, somit eine C^r -Parametertransformation $J \rightarrow I$. Schließlich gilt $v_\gamma(t) = \|(\alpha \circ \varphi)'(t)\| = \|(\alpha'(\varphi(t))) \cdot \varphi'(t)\| = v_\alpha(\varphi(t)) \cdot \frac{1}{s'(\varphi(t))} = 1$. Also ist γ nach der vorherigen Aussage nach Bogenlänge parametrisiert. \square

2.3 Differentiation nach der Bogenlänge, das Tangentenfeld und die Krümmung

Es sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ eine reguläre Kurve in einem euklidischen Raum \mathbb{E} . Wir möchten einen Differentialoperator für die Differentiation von (differenzierbaren) Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{F}$ (die wir uns als „Funktionen längs α “ vorstellen) einführen, der nur von der geometrischen Gestalt der Kurve, nicht von ihrer Parametrisierung abhängt.

Zu diesem Zweck sei $s : I \rightarrow J$ eine Stammfunktion von v_α und $\varphi : J \rightarrow I$ die Umkehrfunktion von s . Nach Satz 2 des vorherigen Abschnitts ist $\alpha \circ \varphi$ eine Umparametrisierung von α nach der Bogenlänge, und daher liegt es nahe, als die gewünschte „geometrische“ Differentiation von f die Funktion $(f \circ \varphi)'(s(t))$ zu betrachten. Es gilt

$$(f \circ \varphi)'(s(t)) = (f' \circ \varphi)(s(t)) \cdot \varphi'(s(t)) = \frac{1}{v_\alpha(t)} \cdot f'(t).$$

Daher führen wir nun den durch α induzierten Differentialoperator

$$\frac{d}{ds} := \frac{1}{v_\alpha} \cdot \frac{d}{dt} \quad (*)$$

ein, die sogenannte *Differentiation nach der Bogenlänge* von α . Ist die Angabe der Kurve erforderlich, auf die sich die Differentiation nach der Bogenlänge bezieht, so schreibt man auch $\frac{d}{ds_\alpha}$ statt $\frac{d}{ds}$.

Man beachte: Auch wenn die Stammfunktion s bzw. ihre Umkehrung φ in vielen Fällen nicht explizit angebar ist, so ist es aufgrund von $(*)$ auch ohne explizite Kenntnis dieser Funktionen möglich, Differentiationen nach der Bogenlänge zu berechnen.

Die folgende Aussage begründet die Notation $\frac{d}{ds}$ für die Differentiation nach der Bogenlänge:

Aussage 1. Für jede differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{F}$ gilt

$$\forall t \in I : \frac{df}{ds}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{s(t+h) - s(t)}.$$

Interpretation: $\frac{df}{ds}$ misst die infinitesimale Änderung von f relativ zur Bogenlänge von α .

Beweis. Für $h \neq 0$ ist der Quotient $\frac{f(t+h)-f(t)}{s(t+h)-s(t)}$ wohldefiniert, weil s streng monoton wachsend ist, und es gilt

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{s(t+h) - s(t)} = \frac{\left(\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right)}{\left(\frac{s(t+h)-s(t)}{h}\right)}.$$

Für $h \rightarrow 0$ konvergiert der Zähler des rechten Quotienten gegen $f'(t)$, der Nenner gegen $s'(t) = v_\alpha(t)$. Deshalb konvergiert der gesamte Ausdruck gegen $\frac{f'(t)}{v_\alpha(t)} = \frac{df}{ds}(t)$. \square

Definition. Die Ableitung

$$T_\alpha := \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$$

heißt das *Einheitstangentenfeld* von α . Ist α zweimal differenzierbar, so heißt

$$\frac{dT_\alpha}{ds}$$

das *Krümmungsvektorfeld* und

$$\varkappa := \left\| \frac{dT_\alpha}{ds} \right\|$$

die *absolute Krümmung* von α .

Beobachtung. Es gilt $\left\langle T_\alpha, \frac{dT_\alpha}{ds} \right\rangle = 0$.

Beweis. Wir haben $1 = \langle T_\alpha, T_\alpha \rangle$, und deswegen $0 = \frac{d}{ds} \langle T_\alpha, T_\alpha \rangle = 2 \langle T_\alpha, \frac{dT_\alpha}{ds} \rangle$. \square

Die folgende Aussage bestätigt unsere Motivation der Differentiation nach der Bogenlänge als ein von der Parametrisierung von α unabhängiger Differentiationsprozeß.

Aussage 2. Es sei $\varphi : J \rightarrow I$ eine C^1 -Parametertransformation mit $\varphi' > 0$, $\beta := \alpha \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{E}$ und $f : I \rightarrow \mathbb{F}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt $v_\beta = (v_\alpha \circ \varphi) \cdot \varphi'$ und daher

$$\frac{d(f \circ \varphi)}{ds_\beta} = \frac{df}{ds_\alpha} \circ \varphi.$$

Beweis. Es gilt $v_\beta = \|\beta'\| = \|(\alpha \circ \varphi)'\| = \|(\alpha' \circ \varphi) \cdot \varphi'\| = (v_\alpha \circ \varphi) \cdot \varphi'$, für das letzte Gleichheitszeichen beachte man auch $\varphi' > 0$. Daraus ergibt sich

$$\frac{d(f \circ \varphi)}{ds_\beta} = \frac{1}{v_\beta} \cdot (f \circ \varphi)' = \frac{1}{(v_\alpha \circ \varphi) \cdot \varphi'} \cdot (f' \circ \varphi) \cdot \varphi' = \frac{1}{v_\alpha \circ \varphi} \cdot (f' \circ \varphi) = \frac{df}{ds_\alpha} \circ \varphi. \quad \square$$

Als eine Art „Umkehrung“ zu der Differentiation nach der Bogenlänge führen wir auch eine Integration nach der Bogenlänge ein. Dazu definieren wir für jede stetige Funktion $f : I \rightarrow V$ mit Werten in einem Vektorraum V und für beliebige Integrationsgrenzen $a, b \in I$ das *Integral nach der Bogenlänge*

$$\int_a^b f \, ds := \int_a^b f(t) \cdot v_\alpha(t) \, dt$$

ein. Diese Begriffsbildung ist offenbar auch dann sinnvoll, wenn α nicht regulär ist.

Beispiele.

- (a) **Gleichförmige Bewegung.** Sei $p \in \mathbb{E}$ und $v \in \mathbb{E}_L \setminus \{0\}$. Dann gilt für die *gleichförmige Bewegung* $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$, $t \mapsto p + tv$:

$$v_\alpha \equiv \text{const.} = \|v\|, \quad T_\alpha \equiv \text{const.} = \frac{v}{\|v\|} \quad \text{und} \quad \varkappa_\alpha \equiv 0.$$

- (b) **Gleichförmige Kreisbewegung.** Es sei $p_0 \in \mathbb{E}$, $a, b \in \mathbb{E}_L$ zwei zueinander orthonormale Vektoren, und $r, \omega \in \mathbb{R}_+$. Dann beschreibt die Kurve

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}, \quad t \mapsto p_0 + r \cdot (\cos(\omega t)a + \sin(\omega t)b)$$

eine *gleichförmige Kreisbewegung*. Für sie gilt

$$v_\alpha = r \cdot \omega, \quad T_\alpha = -\sin(\omega t)a + \cos(\omega t)b \quad \text{und} \quad \varkappa_\alpha = \frac{1}{r}.$$

- (c) **Schraubenlinie.** Es sei $(p_0; a_1, a_2, a_3)$ ein KKS des \mathbb{E}^3 und $r, h \in \mathbb{R}_+$. Dann beschreibt die Kurve

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3, \quad t \mapsto p_0 + r \cdot (\cos(t)a_1 + \sin(t)a_2) + \frac{h}{2\pi} \cdot t \cdot a_3$$

eine *Schraubenlinie (Helix)* mit Radius r und Ganghöhe h . Es gilt

$$\begin{aligned} v_\alpha &= \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} \\ \text{Krümmungsvektorfeld} &= -\frac{(2\pi)^2 r}{(2\pi r)^2 + h^2} \cdot (\cos(t)a_1 + \sin(t)a_2) \\ \varkappa_\alpha &= \frac{(2\pi)^2 r}{(2\pi r)^2 + h^2}. \end{aligned}$$

Kapitel 3

Ebene Kurventheorie

In diesem Kapitel wollen wir uns mit ebenen Kurven befassen. Dementsprechend gelten für das gesamte Kapitel die folgenden *Generalvoraussetzungen*:

Es sei \mathbb{E} ein 2-dimensionaler, orientierter, euklidischer Raum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Determinantenform $\det(\cdot, \cdot)$ auf \mathbb{E}_L , ferner bezeichnen wir die Vierteldrehung von \mathbb{E} mit $J : \mathbb{E}_L \rightarrow \mathbb{E}_L$ (siehe Abschnitt 1.7). Für jeden Einheitsvektor $a \in \mathbb{E}_L$ ist also (a, Ja) eine positiv orientierte ONB von \mathbb{E}_L .

3.1 Die Frenet-Gleichungen für ebene Kurven

Ein wesentliches Hilfsmittel zur Lösung geometrischer Probleme besteht in der Wahl eines dem Problem bestmöglich angepassten Bezugssystems. In diesem Abschnitt werden wir für reguläre C^2 -Kurven ein „mit der Kurve mitlaufendes“, an sie angepasstes KKS-Feld konstruieren.

Es sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ eine *reguläre* C^2 -Kurve. Dann setzen wir

$$T_\alpha := \frac{d\alpha}{ds} \quad \text{und} \quad N_\alpha := JT_\alpha .$$

$T_\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_L$ heißt das (kanonische) *Einheitstangentenfeld* von α , $N_\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_L$ heißt das (kanonische) *Einheitsnormalenfeld* von α . Für jedes $t \in I$ ist damit

$$(\alpha(t); T_\alpha(t), N_\alpha(t))$$

ein positiv orientiertes KKS von \mathbb{E} , das an die Geometrie von α zum „Zeitpunkt“ t besonders gut angepasst ist. Man nennt das Paar $(T_\alpha(t), N_\alpha(t))$ das (begleitende) *Frenet-2-Bein(feld)* von α (JEAN FRENET 1847).

Die Frenet-Gleichungen. Die Bewegung des Frenet-2-Beins in Abhängigkeit von t wird durch eine einzige Funktion kontrolliert. Es gelten nämlich die *Frenet-Gleichungen*

$$\frac{d}{ds}T_\alpha = \kappa_\alpha \cdot N_\alpha \quad \text{und} \quad \frac{d}{ds}N_\alpha = -\kappa_\alpha \cdot T_\alpha$$

mit der Funktion $\kappa_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\kappa_\alpha := \frac{\det(\alpha', \alpha'')}{v_\alpha^3}.$$

κ_α heißt die *orientierte Krümmung* von α ; $|\kappa_\alpha|$ ist die absolute Krümmung von α im Sinne von Abschnitt 2.3.

Beweis. Nach der Beobachtung aus Abschnitt 2.3 gilt $\langle T_\alpha, \frac{d}{ds} T_\alpha \rangle = 0$ und somit jeweils $\frac{d}{ds} T_\alpha(t) \in \mathbb{R} N_\alpha(t)$. Also existiert eine Funktion $\kappa_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\frac{d}{ds} T_\alpha = \kappa_\alpha \cdot N_\alpha$. Da auch $\langle N_\alpha, \frac{d}{ds} N_\alpha \rangle = 0$ gilt, ergibt sich nun

$$\frac{d}{ds} N_\alpha = \langle \frac{d}{ds} N_\alpha, T_\alpha \rangle T_\alpha = \left(\frac{d}{ds} \langle N_\alpha, T_\alpha \rangle - \langle N_\alpha, \frac{d}{ds} T_\alpha \rangle \right) \cdot T_\alpha = -\langle N_\alpha, \kappa_\alpha N_\alpha \rangle T_\alpha = -\kappa_\alpha T_\alpha.$$

Mit dem so definierten κ_α ist die absolute Krümmung von α : $\|\frac{d}{ds} T_\alpha\| = \|\kappa_\alpha N_\alpha\| = |\kappa_\alpha|$. Es bleibt also nur die Formel $\kappa_\alpha = \frac{\det(\alpha', \alpha'')}{v_\alpha^3}$ zu zeigen. Dazu: Es gilt offenbar

$$\alpha' = v_\alpha T_\alpha,$$

woraus sich durch weitere Differentiation und Anwendung der ersten Frenet-Formel ergibt:

$$\alpha'' = v'_\alpha T_\alpha + v_\alpha T'_\alpha = v'_\alpha T_\alpha + v_\alpha^2 \frac{dT_\alpha}{ds} = v'_\alpha T_\alpha + v_\alpha^2 \kappa_\alpha N_\alpha.$$

Damit erhalten wir

$$\det(\alpha', \alpha'') = \det(v_\alpha T_\alpha, v'_\alpha T_\alpha + v_\alpha^2 \kappa_\alpha N_\alpha) = \det(v_\alpha T_\alpha, v_\alpha^2 \kappa_\alpha N_\alpha) = v_\alpha^3 \kappa_\alpha \det(T_\alpha, N_\alpha) = v_\alpha^3 \kappa_\alpha$$

und damit die behauptete Formel. \square

Beispiele.

- (a) **Geradlinige Bewegung.** Für $\alpha : t \mapsto p_0 + \varphi(t) \cdot a$ mit einem Einheitsvektor a und einer C^2 -Funktion φ mit $\varphi' > 0$ gilt

$$v_\alpha = \varphi', \quad T_\alpha \equiv a, \quad N_\alpha \equiv Ja \quad \text{und} \quad \kappa_\alpha = 0.$$

- (b) **Kreisbewegung.** Für $\alpha : t \mapsto p_0 + r \cdot (\cos(\varphi(t))a + \sin(\varphi(t))Ja)$ mit einer C^2 -Funktion φ , so dass φ' nullstellenfrei ist, gilt

$$\begin{aligned} v_\alpha &= r \cdot |\varphi'|, \\ T_\alpha &= \text{sign}(\varphi') \cdot (-(\sin \circ \varphi)a + (\cos \circ \varphi)Ja), \\ N_\alpha &= -\text{sign}(\varphi') \cdot ((\cos \circ \varphi)a + (\sin \circ \varphi)Ja), \\ \kappa_\alpha &= \text{sign}(\varphi')/r. \end{aligned}$$

- (c) **Der Graph einer C^2 -Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.** Als solchen bezeichnet man die reguläre Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, f(t))$. Für ihn gilt $v_\alpha = \sqrt{1 + (f')^2}$, $T_\alpha = \frac{1}{v_\alpha}(1, f')$, $N_\alpha = \frac{1}{v_\alpha}(-f', 1)$ und

$$\kappa_\alpha = \frac{f''}{\sqrt{1 + (f')^2}^3}.$$

3.2 Der Hauptsatz der ebenen Kurventheorie

Satz. Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ eine reguläre C^2 -Kurve, $a \in \mathbb{E}_L$ ein Einheitsvektor, und $\vartheta : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion, die das Einheitstangentenfeld T_α von α durch

$$T_\alpha = R_\vartheta(a) = (\cos \circ \vartheta) \cdot a + (\sin \circ \vartheta) \cdot Ja \quad (*)$$

beschreibt, siehe den Satz in Abschnitt 1.8. Dann gilt für die orientierte Krümmung κ_α von α :

$$\kappa_\alpha = \frac{d}{ds} \vartheta.$$

Interpretation. Die orientierte Krümmung ist die Geschwindigkeit des „Tangentenschwenks“.

Beweis. Wir berechnen $\frac{d}{ds} T_\alpha$ auf zweierlei Art: Einerseits ist nach den Frenet-Gleichungen $\frac{d}{ds} T_\alpha = \kappa_\alpha N_\alpha$. Andererseits ergibt sich aus (*):

$$\frac{dT_\alpha}{ds} = \frac{1}{v_\alpha} T'_\alpha = \frac{1}{v_\alpha} (-(\sin \circ \vartheta) \cdot \vartheta' \cdot a + (\cos \circ \vartheta) \cdot \vartheta' \cdot Ja) = \frac{1}{v_\alpha} \cdot \vartheta' \cdot JT_\alpha = \frac{d\vartheta}{ds} \cdot N_\alpha.$$

Durch Vergleich dieser beiden Ergebnisse ergibt sich $\kappa_\alpha = \frac{d\vartheta}{ds}$. □

Theorem. Der Hauptsatz der ebenen Kurventheorie.

- (a) Es sei $k \geq 2$, $p_0 \in \mathbb{E}$, $a \in \mathbb{E}_L$ ein Einheitsvektor, $v : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine C^{k-1} -Funktion, $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^{k-2} -Funktion und $t_0 \in I$. Dann existiert genau eine reguläre C^k -Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$, die die „Differentialgleichungen“

$$v_\alpha = v \quad \text{und} \quad \kappa_\alpha = \kappa \quad (\dagger)$$

mit den „Anfangsbedingungen“

$$\alpha(t_0) = p_0 \quad \text{und} \quad T_\alpha(t_0) = a \quad (\ddagger)$$

erfüllt.

- (b) Sind $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{E}$ zwei reguläre C^2 -Kurven, so gilt genau dann $v_\alpha = v_\beta$ und $\kappa_\alpha = \kappa_\beta$, wenn es eine Isometrie $f \in I(\mathbb{E})$ mit $f_L \in \text{SO}(\mathbb{E}_L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gibt, so dass $\beta = f \circ \alpha$ ist.

Beweis. Zu (a). Aus den „skalaren Beschreibungsgrößen“ v und κ können wir durch insgesamt zweimalige Integration der Reihe nach ϑ (den Tangentenwinkel aus dem vorherigen Satz), T_α , α' und schließlich α selbst rekonstruieren. Dabei sorgen die Anfangsbedingungen (\ddagger) dafür, dass wir ein eindeutiges Ergebnis erhalten.

Im Einzelnen: Zunächst gilt $\vartheta' = v \cdot \kappa$ nach dem Satz, und zwar mit $\vartheta(t_0) \in 2\pi\mathbb{Z}$ wegen $T_\alpha(t_0) = a$. Durch Integration erhält man eine C^{k-1} -Funktion $\vartheta : I \rightarrow \mathbb{R}$, die bis auf einen konstanten Summanden $\in 2\pi\mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt ist. Daher können wir $T_\alpha = R_\vartheta(a)$ bilden, und T_α ist eindeutig bestimmt und C^{k-1} , und bestimmt die C^{k-1} -Funktion $\alpha' = v \cdot T_\alpha$. Hieraus erhalten wir schließlich durch eine weitere Integration die Kurve α selbst, die wegen der Anfangsbedingung $\alpha(t_0) = p_0$ eindeutig bestimmt ist. Sie ist C^k und offensichtlich (wegen $v_\alpha = v > 0$) regulär.

Zu (b). Ist $\beta = f \circ \alpha$ mit $f \in I(\mathbb{E})$, $f_L \in \text{SO}(\mathbb{E}_L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, so ist $\beta' = f_L \circ \alpha'$ und daher $v_\beta = \|f_L \circ \alpha'\| = \|\alpha'\| = v_\alpha$, deshalb auch $T_\beta = f_L \circ T_\alpha$ und somit auch $N_\beta = f_L \circ N_\alpha$ wegen $\det(f_L) = 1$. Damit ergibt sich $\kappa_\beta N_\beta = \frac{d}{ds} T_\beta = \frac{d}{ds} (f_L \circ T_\alpha) = f_L \circ \frac{d}{ds} T_\alpha = \kappa_\alpha \cdot (f_L \circ N_\alpha) = \kappa_\alpha N_\beta$ und somit $\kappa_\beta = \kappa_\alpha$.

Gilt umgekehrt $v_\alpha = v_\beta$ und $\varkappa_\alpha = \varkappa_\beta$, so fixieren wir $t_0 \in I$. Dann sind $(\alpha(t_0); T_\alpha(t_0), N_\alpha(t_0))$ und $(\beta(t_0); T_\beta(t_0), N_\beta(t_0))$ zwei KKS von \mathbb{E} , also existiert nach der Folgerung aus 1.6 über die „freie Beweglichkeit“ in euklidischen Räumen ein $f \in I(\mathbb{E})$ mit

$$f(\alpha(t_0)) = \beta(t_0), \quad f_L(T_\alpha(t_0)) = T_\beta(t_0) \quad \text{und} \quad f_L(N_\alpha(t_0)) = N_\beta(t_0); \quad (\circ)$$

weil die beiden genannten KKS dieselbe Orientierung besitzen, gilt sogar $f_L \in \text{SO}(\mathbb{E}_L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Wir betrachten nun die Kurve $\tilde{\beta} := f \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$. Nach der schon bewiesenen Richtung von (b) gilt $v_{\tilde{\beta}} = v_\alpha = v_\beta$ und $\varkappa_{\tilde{\beta}} = \varkappa_\alpha = \varkappa_\beta$; ferner gilt $\tilde{\beta}(t_0) = \beta(t_0)$ und $T_{\tilde{\beta}} = T_\beta(t_0)$ nach (o). Mit der Eindeutigkeitsaussage von (a) folgt nun $\beta = \tilde{\beta} = f \circ \alpha$. \square

Folgerung. Die geradlinigen Bewegungen (siehe Beispiel (a) aus 3.1) sind die einzigen regulären, ebenen C^2 -Kurven mit $\varkappa_\alpha \equiv 0$; die Kreisbewegungen (Beispiel (b) aus 3.1) sind die einzigen regulären, ebenen C^2 -Kurven mit $\varkappa_\alpha \equiv \text{const.} \neq 0$.

3.3 Taylorentwicklung ebener Kurven, Krümmungskreise

Aussage. Es sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ eine C^2 -Kurve, $t_0 \in I$ ein Parameter mit $\varkappa_0 := \varkappa_\alpha(t_0) \neq 0$, $\varepsilon := \text{sign}(\varkappa_0)$, $r := \varepsilon / \varkappa_0$, $p_0 := \alpha(t_0) + \frac{1}{\varkappa_0} \cdot N_\alpha(t_0)$ und $a := \frac{\alpha(t_0) - p_0}{\|\alpha(t_0) - p_0\|} = -\varepsilon \cdot N_\alpha(t_0)$.

Dann gilt für den Kreis $\beta : t \mapsto p_0 + r \cdot \Gamma_a(\varepsilon t)$

$$\beta(0) = \alpha(t_0) \quad , \quad T_\beta(0) = T_\alpha(t_0) \quad \text{und} \quad \varkappa_\beta(0) = \varkappa_\alpha(t_0) .$$

Dieser Kreis ist also für (α, t_0) das geometrische Analogon zur Taylor-Approximation zweiter Ordnung. Er heißt der *Krümmungskreis* zu (α, t_0) .

Beweis. Klar! \square

Die folgende Aufgabe verdeutlicht, warum Krümmungskreise auch *Schmiegekreise* genannt werden.

Aufgabe. Es sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ eine reguläre C^2 -Kurve und $t_0 \in I$.

(a) *Lage einer Kurve relativ zu ihrer Tangente in t_0 .* Man betrachte die Höhenfunktion

$$h : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \langle p - \alpha(t_0), N_\alpha(t_0) \rangle$$

und die Halbebenen

$$H_+ := h^{-1}(\mathbb{R}_+) \quad , \quad \overline{H_+} := h^{-1}(\mathbb{R}_+ \cup \{0\}) \quad , \quad H_- := \mathbb{E} \setminus \overline{H_+} \quad , \quad \overline{H_-} := \mathbb{E} \setminus H_+ .$$

(i) Ist $\varkappa_\alpha(t_0) \neq 0$, so gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\alpha(U_\delta(t_0) \cap I \setminus \{t_0\}) \subset \begin{cases} H_+ , & \text{falls } \varkappa_\alpha(t_0) > 0 \\ H_- , & \text{falls } \varkappa_\alpha(t_0) < 0 \end{cases} .$$

(ii) Gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit $\alpha(U_\delta(t_0) \cap I \setminus \{t_0\}) \subset \overline{H_+}$ (bzw. $\subset \overline{H_-}$), so gilt $\varkappa_\alpha(t_0) \geq 0$ (bzw. ≤ 0).

- (b) *Geometrische Bedeutung des Krümmungskreises.* Es sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $p_\lambda := \alpha(t_0) + \lambda \cdot N_\alpha(t_0)$. Gilt $\lambda \cdot \kappa_\alpha(t_0) > 1$ (bzw. $\lambda \cdot \kappa_\alpha(t_0) < 1$), so gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_+$, so dass $\alpha(U_\delta(t_0) \cap I \setminus \{t_0\})$ ganz in (bzw. ganz außerhalb) der offenen Kreisscheibe um p_λ mit Radius $|\lambda|$ liegt. Was hat das mit dem Krümmungskreis zu tun?
- (c) Ist $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ glatt geschlossen (das heißt: $I = [a, b]$, $\alpha(a) = \alpha(b)$, $\alpha'(a) = \alpha'(b)$ und $\alpha''(a) = \alpha''(b)$) und verläuft α in einer abgeschlossenen Kreisscheibe mit Radius r , so gibt es ein $t_0 \in I$ mit $|\kappa_\alpha(t_0)| \geq 1/r$.

3.4 Enveloppen, Evoluten, Parallelkurven und Involuten

Es sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ eine C^2 -Kurve. In Teil (b)–(d) der folgenden Aufgabe wird α als regulär vorausgesetzt; ihr begleitendes Frenet-2-Bein bezeichnen wir kurz mit (T, N) , ihre orientierte Krümmung mit κ .

Aufgabe.

- (a) **Envelope.** Ist $X : I \rightarrow \mathbb{E}_L$ ein C^2 -Vektorfeld (längs α) mit $\|X\| = 1$ und $\|X'\| > 0$, so existiert zu der Geradenschar $g_t := \alpha(t) + \mathbb{R} \cdot X(t)$ (mit $t \in I$) genau eine C^1 -Kurve $\beta : I \rightarrow \mathbb{E}$ mit

$$\forall t \in I : (\beta(t) \in g_t \quad \text{und} \quad \beta'(t) \in \mathbb{R} \cdot X(t)) ,$$

und zwar gilt

$$\beta = \alpha + \lambda \cdot X \quad \text{mit} \quad \lambda := -\frac{\langle \alpha', X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} .$$

Die Kurve β heißt *Envelope* (oder *Einhüllende* oder auch *Brennkurve*) der Geradenschar g_t . (Der Name „Brennkurve“ hat den folgenden Hintergrund: Falls die g_t Lichtstrahlen repräsentieren, ist β eine Linie extrem starker Strahlungsintensität.)

- (b) **Evolute.** Hat die Krümmung κ keine Nullstellen, so heißt die Kurve $\beta := \alpha + (1/\kappa) \cdot N$ die *Evolute* von α . Man zeige:
- (i) $\beta(I)$ ist die Menge der Mittelpunkte der Krümmungskreise von α .
 - (ii) $\beta = \alpha + \frac{\langle \alpha', \alpha' \rangle}{\det(\alpha', \alpha'')} \cdot J\alpha'$.
 - (iii) Ist κ differenzierbar, so gilt $\beta' = -(\kappa'/\kappa^2) \cdot N$.
 - (iv) Ist κ differenzierbar, so ist β genau dann in $t \in I$ nicht regulär, wenn α in t einen *Scheitel* hat (d.h. wenn $\kappa'(t) = 0$ gilt).
 - (v) *Huygens'sche Konstruktion der Evolute.* β ist die Envelope der Geradenschar, die aus den Normalen $\alpha(t) + \mathbb{R} \cdot N(t)$ von α besteht.
- (c) **Parallelkurven.** Für $s \in \mathbb{R}$ heißt die Kurve $\alpha_s : I \rightarrow \mathbb{E}$, $t \mapsto \alpha(t) + s \cdot N(t)$ die *Parallelkurve* von α im orientierten Abstand s . Wir definieren

$$F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}, (t, s) \mapsto \alpha_s(t) .$$

Man zeige:

- (i) $\alpha'_s = (1 - s\kappa) \cdot \alpha'$. Insbesondere ist α_s genau dann in $t \in I$ regulär, wenn $\kappa(t) \cdot s \neq 1$ ist. Daher gilt: Falls α_s in $t \in I$ nicht regulär ist, so liegt $\alpha_s(t)$ auf der Evolute von α .
- (ii) Die partiellen Ableitungen von F nach t und s sind in einem $(t_0, s_0) \in I \times \mathbb{R}$ genau dann linear unabhängig (für die Experten: das bedeutet gerade, dass F in (t_0, s_0) maximalen Rang hat), wenn α_{s_0} in t_0 regulär ist. Insbesondere ist dies in allen $(t_0, 0)$ mit $t_0 \in I$ der Fall.
- (iii) Ist α_s in $t \in I$ regulär, so ist $\kappa(t)/|1 - s\kappa(t)|$ die orientierte Krümmung von α_s .
- (d) **Involuten.** Ist $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von v_α , so heißt $\beta := \alpha - s \cdot T$ eine *Involute* von α . Da Stammfunktionen lediglich bis auf eine „Integrationskonstante“ eindeutig festgelegt sind, existiert zu α eine ganze „Ein-Parameter-Familie“ von Involuten. Man zeige

$$\beta' = -s \cdot \kappa \cdot v_\alpha \cdot N.$$

Daher gilt also

- (i) $\langle \alpha', \beta' \rangle = 0$.
- (ii) β ist genau dann in $t \in I$ regulär, wenn $s(t) \cdot \kappa(t) \neq 0$.

Man skizziere α mit mehreren Involuten, und beweise sodann: Ist die Involute β überall regulär, so ist die Ein-Parameter-Familie aller Involuten von α gerade die Ein-Parameter-Familie aller Parallelkurven von β , und α ist die Evolute von β , falls β C^2 -differenzierbar ist; und umgekehrt: Ist α Evolute einer regulären C^2 -Kurve γ , so ist γ eine Involute von α .

3.5 Die Umlaufzahl und der Jordansche Kurvensatz

Definition. Es sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ eine reguläre C^k -Kurve.

- (a) α heißt *geschlossen*, wenn $\alpha(a) = \alpha(b)$ ist.
- (b) α heißt *einfach geschlossen*, wenn $\alpha(a) = \alpha(b)$ und

$$\forall a \leq t_1 < t_2 \leq b : (\alpha(t_1) = \alpha(t_2) \implies t_1 = a \text{ und } t_2 = b)$$

gilt.

- (c) α heißt eine *glatt geschlossene C^k -Kurve*, wenn

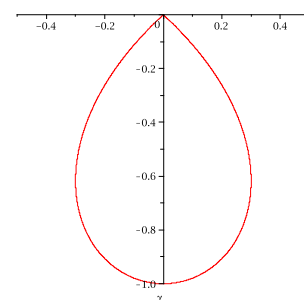
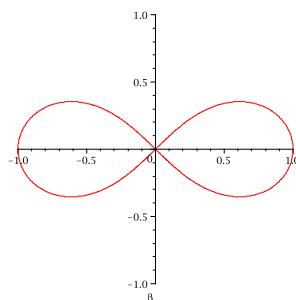
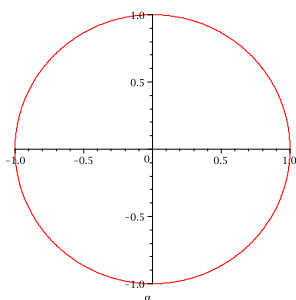
$$\forall r \in 0, \dots, k : \alpha^{(r)}(a) = \alpha^{(r)}(b)$$

gilt.

- (d) Wir nennen α eine *C^k -Jordankurve*, wenn α eine einfach und glatt geschlossene C^k -Kurve ist.

Beispiel und Gegenbeispiele.

- (a) Die Kreisparametrisierung $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ ist eine C^∞ -Jordankurve.
- (b) Die *Lemniskate von Bernoulli* $\beta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \frac{\cos(t)}{1+\sin^2(t)} \cdot (1, \sin(t))$ ist nicht einfach geschlossen.
- (c) Die *Tschirnhausen-Kubik* $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \frac{t^2-1}{t^2+1} \cdot (t, 1)$ ist geschlossen, aber nicht glatt geschlossen.



Theorem. Der Jordansche Kurvensatz. Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{IE}$ ein einfach geschlossener Weg eines 2-dimensionalen euklidischen Raumes \mathbb{IE} , so zerfällt die offene Menge $\mathbb{IE} \setminus \alpha([a, b])$ in genau zwei Zusammenhangskomponenten G_i und G_a , und $\alpha([a, b])$ ist der Rand sowohl von G_i als auch von G_a .*

Bemerkung. Der Jordansche Kurvensatz gilt in gleicher Weise auch für Kurven auf der 2-dimensionalen Sphäre S^2 , jedoch (offensichtlich) nicht auf dem Torus oder dem Möbiusband.

Der Beweis des Jordanschen Kurvensatzes in seiner vollen Allgemeinheit ist sehr schwierig. Man benutzt Methoden der algebraischen Topologie. Wir können jedoch mit differentialgeometrischen Mitteln hier einen einfachen Beweis des Jordanschen Kurvensatzes in dem Fall, dass α eine C^2 -Jordankurve ist, geben. Wichtige Hilfsmittel sind der Begriff der Umlaufzahl, sowie die Konstruktion eines „Kragens“ um die Kurve.

Zunächst stellen wir die notwendigen Informationen über die Umlaufzahl zusammen.

Konstruktion der Umlaufzahl. Es sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{IE}$ ein geschlossener Weg. Die Menge $\alpha([a, b])$ ist kompakt, also ist $G := \mathbb{IE} \setminus \alpha([a, b])$ offen. Für jedes $p \in G$ definieren wir das Einheitsvektorfeld

$$E_p : [a, b] \rightarrow \mathbb{IE}_L, \quad t \mapsto \frac{\alpha(t) - p}{\|\alpha(t) - p\|}.$$

Ist dann $v \in \mathbb{IE}_L$ ein Einheitsvektor, so existiert nach dem Satz aus 1.8 eine stetige Funktion $\vartheta_p : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$E_p = \Gamma_v \circ \vartheta_p$$

*Man beachte, dass hier für α keine Differenzierbarkeit, noch viel weniger Regularität vorausgesetzt ist. — Die Indizes i und a in den Bezeichnungen der Zusammenhangskomponenten stehen für „innen“ bzw. „außen“.

ist. Die Zahl

$$I(\alpha, p) := \frac{\vartheta_p(b) - \vartheta_p(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z},$$

die von der Wahl von v und von ϑ_p unabhängig ist, heißt die *Umlaufzahl* von α um p .

Satz. In obiger Situation gilt:

- (a) Die Funktion $I_\alpha : G \rightarrow \mathbb{Z}, p \mapsto I(\alpha, p)$ ist stetig und somit auf jeder Zusammenhangskomponente von G konstant.
- (b) Es existiert genau eine Zusammenhangskomponente von G , welche unbeschränkt ist; wir bezeichnen sie mit $C_G(\infty)$. Auf dieser Zusammenhangskomponente verschwindet die Umlaufzahl von α .
- (c) **Das Schnittkriterium.** Für $p \in G$ kann man die Umlaufzahl $I(\alpha, p)$ nach folgendem Rezept bestimmen:

Man wähle einen Strahl

$$S := \{p + s \cdot a \mid s \in \mathbb{R}_+\}, \quad \text{wobei } a \in \mathbb{E}_L \text{ ein Einheitsvektor ist,}$$

so dass

$$K := \{t \in [a, b] \mid \alpha(t) \in S\}$$

eine *endliche* Menge ist. Man achte bei der Wahl von S darauf, dass $\alpha(0) \notin S$ und dass für alle $t \in K$

α in t stetig differenzierbar und $(a, \alpha'(t))$ eine Basis von \mathbb{E}

ist. (Aufgrund dessen kreuzt α den Strahl S zu den Zeiten $t \in K$.) Dann berechne man für jedes $t \in K$ die Schnittzahl

$$\sigma_t := \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}, \quad \text{wenn } (a, \alpha'(t)) \begin{cases} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{cases} \text{ orientiert ist.}$$

Man merke sich: $\sigma_t = 1$ heißt, dass α zum Zeitpunkt t gegenüber dem Strahl S Vorfahrt, und $\sigma_t = -1$, dass α zum Zeitpunkt t gegenüber dem Strahl S Wartepflicht hat.

Die Umlaufzahl von α um p ergibt sich nun durch die Bilanz

$$I(\alpha, p) = \sum_{t \in K} \sigma_t.$$

- (d) Ist α eine geschlossene, stückweise C^1 -Kurve, so gilt jeweils

$$I(\alpha, p) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_a^b \langle E'_p(t), JE_p(t) \rangle dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_a^b \det(E_p(t), E'_p(t)) dt.$$

Beweis. Zu (a) und (d). Wir beweisen (a) hier nur für den Fall, dass α eine C^1 -Kurve ist. Dann ist auch das Einheitsvektorfeld $E_p = \Gamma_a \circ \vartheta_p = (\cos \vartheta_p) a + (\sin \vartheta_p) Ja$ stetig differenzierbar, und es gilt $E'_p = (\sin \vartheta_p) \vartheta'_p a - (\cos \vartheta_p) \vartheta'_p Ja = \vartheta'_p \cdot JE_p$ und somit $\det(E_p, E'_p) = \vartheta'_p$. Hieraus folgt $I(\alpha, p) = \frac{1}{2\pi}(\vartheta_p(b) - \vartheta_p(a)) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \det(E_p, E'_p)$. Nun hängt E_p (aufgrund seiner Definition: $E_p(t) = \frac{\alpha(t) - p}{\|\alpha(t) - p\|}$) stetig von p ab; aus der vorherigen Darstellung von $I(\alpha, p)$ folgt daher mit dem Vererbungssatz der Integralrechnung, dass auch $I(\alpha, p)$ stetig von p abhängt.

Zu (b). Da das Intervall $[a, b]$ kompakt ist, ist sein stetiges Bild $\alpha([a, b])$ ebenfalls kompakt, insbesondere beschränkt. Also existieren $p_0 \in \mathbb{E}$ und $r > 0$ mit $\alpha([a, b]) \subset B_r(p_0)$ und somit $\mathbb{E} \setminus B_r(p_0) \subset G$. Da jede unbeschränkte Zusammenhangskomponente von G mit $\mathbb{E} \setminus B_r(p_0)$ einen nicht-leeren Durchschnitt haben muss, folgt hieraus, dass G genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente $C_G(\infty)$ besitzt.

Ist $p \in \mathbb{E} \setminus B_r(p_0)$ und $a = p - p_0/\|p - p_0\|$, so gilt für alle $t \in [a, b]$: $\vartheta_p(t) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und somit $|I(\alpha, p)| = \frac{1}{2\pi} |\vartheta_p(b) - \vartheta_p(a)| \leq \frac{1}{2}$, mithin $I(\alpha, p) = 0$. Weil nach (a) $I(\alpha, p)$ auf Zusammenhangskomponenten von G konstant ist, folgt $I(\alpha, p) = 0$ für alle $p \in C_G(\infty)$. \square

Beweis des Jordanschen Kurvensatz für eine C^2 -Jordankurve. Mit $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ bezeichnen wir eine reguläre L -periodische C^2 -Kurve, so dass $\alpha|_{[0, L]}$ eine C^2 -Jordankurve ist. Wir betrachten zu α die Parallelkurven $\alpha_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ im Abstand $s \in \mathbb{R}$ und definieren außerdem eine C^1 -Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}$ durch

$$F(t, s) := \alpha_s(t) := \alpha(t) + s \cdot N_\alpha(t)$$

sowie ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ durch

$$\delta := 1/\kappa_0 \quad \text{mit} \quad \kappa_0 := \max_{t \in [0, L]} |\kappa_\alpha(t)| = \max_{t \in \mathbb{R}} |\kappa_\alpha(t)|.$$

Behauptung 1. $F|(\mathbb{R} \times U_\delta(0))$ ist ein lokaler Diffeomorphismus, also eine offene Abbildung in \mathbb{E} .

Beweis zu Behauptung 1: Nach der Aufgabe über Parallelkurven in Abschnitt 3.4 hat F in einem $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ genau dann maximalen Rang, wenn $\kappa_\alpha(t) \cdot s \neq 1$ ist. Nach der Definition von δ ist dies für alle $(t, s) \in \mathbb{R} \times U_\delta(0)$ der Fall; mit dem lokalen Umkehrsatz folgt, dass F auf $\mathbb{R} \times U_\delta(0)$ ein lokaler Diffeomorphismus ist.

Behauptung 2. Es existiert ein $\varepsilon \in]0, \delta]$, so dass gilt

$$\forall s \in]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus \{0\} : \alpha_s(\mathbb{R}) \cap \alpha(\mathbb{R}) = \emptyset.$$

Beweis zu Behauptung 2: Angenommen, die Behauptung wäre falsch. Dann existieren reelle Folgen (s_n) mit $-\delta < s_n < \delta$, $s_n \neq 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$, sowie $(t_n), (t'_n)$ mit $t_n, t'_n \in [0, L]$, so dass jeweils $\alpha_{s_n}(t_n) = \alpha(t'_n)$, mit anderen Worten

$$F(t_n, s_n) = F(t'_n, 0), \quad (*)$$

gilt. Da (t_n) und (t'_n) im (folgen-)kompakten Intervall $[0, L]$ liegen, besitzen diese Folgen Häufungspunkte; indem wir ggfs. zu konvergenten Teilfolgen übergehen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass (t_n) und (t'_n) jeweils gegen einen Grenzwert $t_* \in [0, L]$ bzw. $t'_* \in [0, L]$ konvergieren. Nun gilt aufgrund der Stetigkeit von F , indem wir in $(*)$ den Grenzübergang durchführen: $F(t_*, 0) = F(t'_*, 0)$, also $\alpha(t_*) = \alpha(t'_*)$. Da $t_*, t'_* \in [0, L]$ gilt, und $\alpha|_{[0, L]}$ als einfach geschlossen vorausgesetzt war, folgt hieraus entweder $t_* = t'_*$ oder $t_* = 0, t'_* = L$ oder $t_* = L, t'_* = 0$. Wir betrachten zunächst den Fall $t_* = t'_*$. Nach Behauptung 1 existiert eine Umgebung W von $(t_*, 0)$ in \mathbb{R}^2 , so dass $F|W$ injektiv ist. Weil die Folgen (t'_n, s_n) und $(t_n, 0)$ beide gegen $(t_*, 0)$ konvergieren und daher für große n in W liegen, folgt daher aus $(*)$ $(t_n, s_n) = (t'_n, 0)$ und somit insbesondere $s_n = 0$, im Widerspruch zur Konstruktion von (s_n) . Im Falle $t_* = 0, t'_* = L$ (bzw. $t_* = L, t'_* = 0$) hat man nur die vorherige Argumentation zu modifizieren, in dem man t'_n durch $t'_n - L$ (bzw. t_n durch $t_n - L$) ersetzt.

Nun konstruieren wir den „Kragen“

$$U := F(\mathbb{R} \times]-\varepsilon, \varepsilon[)$$

und seine beiden Teilmengen

$$U_+ := F(\mathbb{R} \times]0, \varepsilon[) \quad \text{und} \quad U_- := F(\mathbb{R} \times]-\varepsilon, 0[).$$

Alle drei Mengen sind offen, U enthält $\alpha(\mathbb{R})$, und U_+ und U_- sind wegen Behauptung 2 zusammenhängende Teilmengen von $G := \mathbb{E} \setminus \alpha(\mathbb{R})$. Insbesondere existieren daher Zusammenhangskomponenten Z_+ und Z_- von G , die U_+ bzw. U_- enthalten. (Im Augenblick wissen wir noch nicht, dass $Z_- \neq Z_+$ ist.)

Behauptung 3. Außer Z_+ und Z_- besitzt G keine Zusammenhangskomponenten, weil für jede Zusammenhangskomponente Z von G gilt: $\emptyset \neq \partial Z \subset \alpha(\mathbb{R})$.

Beweis zu Behauptung 3: Sei Z eine Zusammenhangskomponente von G . Wir zeigen zunächst $\partial Z \neq \emptyset$. Wäre nämlich $\partial Z = \overline{Z} \setminus Z^0 = \emptyset$, so würde $\overline{Z} \subset Z^0$ und damit $Z = Z^0 = \overline{Z}$ gelten. $Z \neq \emptyset$ wäre damit eine

sowohl offene als auch abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{E} . Da \mathbb{E} zusammenhängend ist, würde $Z = \mathbb{E}$ folgen, im Widerspruch zu $Z \subset G = \mathbb{E} \setminus \alpha(\mathbb{R})$. Wir nehmen nun an, dass $\partial Z \not\subset \alpha(\mathbb{R})$ gelten würde. Dann würde also ein $p \in \partial Z \cap G$ existieren. Da G offen und $p \in G$ ist, existiert daher ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit $U_\delta(p) \subset G$; wegen $p \in \partial Z$ gilt $U_\delta(p) \cap Z \neq \emptyset$. Da $U_\delta(p)$ und Z beide zusammenhängend sind, folgt hieraus, dass auch $U_\delta(p) \cup Z$ zusammenhängend ist. Da Z eine Zusammenhangskomponente ist, folgt $U_\delta(p) \subset Z$ und somit $p \in Z^0$, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung $p \in \partial Z = \overline{Z} \setminus Z^0$. Damit ist $\emptyset \neq \partial Z \subset \alpha(\mathbb{R})$ gezeigt. Hieraus folgt insbesondere, dass für den Schnitt mit dem „Kragen“ U gilt: $\overline{Z} \cap U \neq \emptyset$, und daher, weil U offen ist, auch $Z \cap U \neq \emptyset$. Andererseits gilt $Z \subset G$ und daher $Z \cap \alpha(\mathbb{R}) = \emptyset$. Daher gilt entweder $Z \cap U_+ \neq \emptyset$ oder $Z \cap U_- \neq \emptyset$. Im Falle $Z \cap U_+ \neq \emptyset$ ist mit Z und U_+ auch $Z \cup U_+$ zusammenhängend, und daher gilt $U_+ \subset Z$, weil Z eine Zusammenhangskomponente ist. Daher gilt $Z = Z_+$. Im Fall $Z \cap U_- \neq \emptyset$ argumentiert man entsprechend.

Behauptung 4. Es gilt $\partial Z_+ = \partial Z_- = \alpha(\mathbb{R})$.

Beweis zu Behauptung 4: Aus Behauptung 3 wissen wir schon $\partial Z_+ \subset \alpha(\mathbb{R})$. Ist zum Beweis der umgekehrten Inklusion $t \in \mathbb{R}$ gegeben, so gilt $\alpha(t) = \lim_{s \searrow 0} \alpha_s(t) \in \overline{Z_+}$. Andererseits ist $\alpha(t) \notin Z_+ = Z_+^0$, somit ist $\alpha(t) \in \overline{Z_+} \setminus Z_+^0 = \partial Z_+$. Mit Z_- verfährt man wieder analog.

Behauptung 5. Es ist $Z_+ \neq Z_-$, somit hat G genau zwei Zusammenhangskomponenten.

Zum Beweis dieser letzten Behauptung benutzt man die Umlaufzahl, und zwar wendet man das Schnittkriterium an, um zu zeigen, dass die Umlaufzahl-Funktion I_α auf U_+ und U_- verschiedene Werte annimmt. Dazu konstruiert man eine α tangierende Gerade g , so dass α ganz auf einer Seite von g liegt. \square

3.6 Die isoperimetrische Ungleichung

Satz. (Isoperimetrische Ungleichung) Es sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ ein einfach geschlossener rektifizierbarer Weg und G das von α berandete, beschränkte Gebiet (siehe den Jordanschen Kurvensatz). Dann gilt für dessen Flächeninhalt $\lambda^2(\overline{G})$ die Ungleichung

$$4\pi \cdot \lambda^2(\overline{G}) \leq L(\alpha)^2,$$

und zwar gilt Gleichheit genau dann, wenn α eine Kreislinie beschreibt.

Der Beweis des Satzes über die isoperimetrische Ungleichung in dieser allgemeinen Form kann man nachlesen bei DINGHAS/SCHMIDT: *Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im n -dimensionalen Euklidischen Raum.*, Abh. Preuss. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl. **1943**, (1944), no. 7. Einen Beweis für den Fall, dass α eine C^2 -Kurve ist, findet man auch in DO CARMO, *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, 3. Auflage, Braunschweig 1993, S. 26ff.

3.7 Der Vierscheitelsatz

Definition. Es sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ eine reguläre C^1 -Kurve.

- (a) Ist α eine C^1 -Jordankurve, so heißt sie *konvex*, wenn für jedes $t_0 \in [a, b]$ die Kurve α jeweils ganz auf einer Seite der Tangenten $\alpha(t_0) + \mathbb{R} \cdot T_\alpha(t_0)$ liegt, das soll heißen, wenn für die Funktion $g_{t_0} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), N_\alpha(t_0) \rangle$ entweder überall $g_{t_0} \geq 0$ oder überall $g_{t_0} \leq 0$ gilt.
- (b) Ist α eine konvexe C^2 -Jordankurve, so nennt man α auch eine *Eilinie*.

- (c) Ist α in einem $t_0 \in [a, b]$ dreimal differenzierbar und besitzt κ_α in t_0 ein lokales Extremum, so sagt man, dass α in t_0 einen *Scheitel* hat.

Aufgabe. Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^2$ eine C^3 -Eilinie, so trifft jede Gerade die Kurve α , wenn überhaupt, entweder in einer Strecke (die auch zu einem einzelnen Punkt degenerieren kann), oder in genau zwei Punkten.

Vierscheitel-Satz. Jede C^3 -Eilinie $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^2$ hat mindestens vier Scheitel in $[a, b]$.

Beweis. (nach KÜHNEL, *Differentialgeometrie*, S. 31) Falls κ auf einem Teilintervall I von $[a, b]$ positiver Länge konstant ist, so sind alle inneren Punkte von I Scheitelpunkte und deshalb ist in diesem Fall nichts zu zeigen. Daher können wir im Folgenden voraussetzen, dass κ auf keinem Teilintervall von $[a, b]$ positiver Länge konstant ist. Dann sind die lokalen Extrema von κ gerade die Nullstellen von κ' , an denen κ' das Vorzeichen wechselt.

Wir begründen nun zunächst, dass α mindestens *zwei* Scheitelpunkte besitzt. Dazu beachten wir, dass die stetige Funktion κ auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ ihr Maximum und ihr Minimum annimmt, etwa in $s_1 \in [a, b]$ bzw. in $s_2 \in [a, b]$. Dann gilt $s_1 \neq s_2$ wegen der Voraussetzung an die Nicht-Konstanz von κ , und nach Definition sind s_1 und s_2 insbesondere lokale Extrema von κ und somit Scheitelpunkte von α . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $s_1 < s_2$ voraus.

Wir betrachten nun das positiv orientierte KKS $(\alpha(s_1); a_1, a_2)$ von \mathbb{E}^2 , wobei wir $a_1 := \frac{\alpha(s_2) - \alpha(s_1)}{\|\alpha(s_2) - \alpha(s_1)\|}$ und $a_2 := J a_1$ setzen (und J die Vierteldrehung von \mathbb{E}^2 ist), außerdem seien $x_1, x_2 : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die zu diesem KKS gehörenden Koordinatenfunktionen. Damit gilt also $x_2(\alpha(s_1)) = x_2(\alpha(s_2)) = 0$, und es gibt kein weiteres $s \in [a, b]$ mit $x_2(\alpha(s)) = 0$, denn anderenfalls würde nach der Aufgabe dieses Abschnitts $x_2 \circ \alpha$ auf einem ganzen Teilintervall von $[a, b]$ verschwinden, wo dann auch κ verschwinden würde. Daher wechselt $x_2 \circ \alpha$ das Vorzeichen nur in s_1 und s_2 .

Wir setzen nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraus, dass α nach der Bogenlänge parametrisiert sei, und machen die Annahme, dass α in s_1 und s_2 seine einzigen Scheitelpunkte hat. Dann wechselt κ' sein Vorzeichen nur in s_1 und s_2 , und daher wechselt die Funktion $s \mapsto \kappa'(s) \cdot x_2(\alpha(s))$ ihr Vorzeichen überhaupt nicht. Weil α nach Bogenlänge parametrisiert ist, lautet die erste Frenet-Gleichung in dieser Situation $\alpha'' = \kappa \cdot J \alpha'$, woraus insbesondere $(x_1 \circ \alpha)'' = -\kappa \cdot (x_2 \circ \alpha)'$ folgt. Mit dieser Gleichung ergibt sich durch partielle Integration

$$\int_a^b \kappa'(s) \cdot (x_2 \circ \alpha)(s) ds = \underbrace{\kappa(s) \cdot (x_2 \circ \alpha)(s)}_{\substack{=0 \\ (*)}} \Big|_a^b - \int_a^b \kappa(s) \cdot (x_2 \circ \alpha)'(s) ds = \int_a^b (x_1 \circ \alpha)''(s) ds = (x_1 \circ \alpha)'(s) \Big|_a^b \stackrel{(*)}{=} 0,$$

wobei die mit $(*)$ markierten Gleichheitszeichen beide aus der Periodizität von α folgen. Der Integrand $\kappa' \cdot (x_2 \circ \alpha)$ auf der linken Seite hat jedoch keinen Vorzeichenwechsel. Wenn das Integral gleich Null ist, muss daher der Integrand identisch verschwinden, also $\kappa' = 0$. Damit ist κ konstant, im Widerspruch zur Voraussetzung am Anfang des Beweises.

Somit besitzt α noch einen dritten Scheitelpunkt, also eine dritte Nullstelle von κ' mit Vorzeichenwechsel. Wegen der Periodizität kann die Anzahl der Vorzeichenwechsel von κ' aber nicht ungerade sein, also muss es auch noch einen vierten Scheitelpunkt geben. \square

Kapitel 4

Räumliche Kurventheorie

Wir wenden uns nun der Theorie von Kurven im 3-dimensionalen Raum zu. Dementsprechend machen wir im gesamten Kapitel die folgenden *Generalvoraussetzungen*:

Es sei \mathbb{E} ein 3-dimensionaler, orientierter, euklidischer Raum, \mathbb{E}_L sein Richtungsvektorraum, $\det : \mathbb{E}_L \times \mathbb{E}_L \rightarrow \mathbb{R}$ die durch die Orientierung ausgezeichnete Determinatenfunktion und $\mathbb{E}_L \times \mathbb{E}_L \rightarrow \mathbb{E}_L$, $(v, w) \mapsto v \times w$ das hierdurch definierte Kreuzprodukt, es gilt also

$$\forall u, v, w \in \mathbb{E}_L : \langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$$

(siehe Abschnitt 1.7). Ich erinnere daran, dass für zwei beliebige, zueinander senkrechte Einheitsvektoren $u, v \in \mathbb{E}_L$ das Tupel $(u, v, u \times v)$ eine ONB von \mathbb{E}_L ist.

Ist $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ eine positiv orientierte ONB von \mathbb{E}_L , so definieren wir das Einheitsvektorfeld

$$\Gamma_{\mathbf{a}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_L, t \mapsto \cos(t) a_1 + \sin(t) a_2 ;$$

damit ist dann für jedes $t \in \mathbb{R}$ das Tupel $(\Gamma_{\mathbf{a}}(t), \Gamma'_{\mathbf{a}}(t), a_3)$ eine positiv orientierte ONB von \mathbb{E}_L , deshalb gilt insbesondere $\Gamma_{\mathbf{a}} \times \Gamma'_{\mathbf{a}} \equiv a_3$. Außerdem gilt $\Gamma'_{\mathbf{a}}(t) = \Gamma_{\mathbf{a}}(t + \frac{\pi}{2})$ und $\Gamma''_{\mathbf{a}}(t) = -\Gamma_{\mathbf{a}}(t)$.

4.1 Die Frenet-Gleichungen für Raumkurven

In diesem Abschnitt werden wir für Kurven im \mathbb{E}^3 ein angepasstes KKS-Feld einführen, und dessen Bewegung beschreiben, in analoger Weise, wie wir dies für Kurven in \mathbb{E}^2 in Abschnitt 3.1 getan haben.

Dazu sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ eine *reguläre* C^k -Kurve mit $k \geq 3$. Ihr sind die folgenden, in den Abschnitten 2.2 und 2.3 eingeführten Größen zugeordnet:

- Die Bahngeschwindigkeit $v_{\alpha} = \|\alpha'\|$,
- Das Einheitstangentenfeld $T_{\alpha} = \frac{d\alpha}{ds}$ und
- Die *absolute* Krümmung $\varkappa_{\alpha} = \left\| \frac{d}{ds} T_{\alpha} \right\|$.

Wir wollen im Folgenden stets voraussetzen, dass

$$\varkappa_\alpha > 0$$

gilt; diese Bedingung ist damit gleichbedeutend, dass für jedes $t \in I$ der Geschwindigkeitsvektor $\alpha'(t)$ und der Beschleunigungsvektor $\alpha''(t)$ linear unabhängig sind. Deswegen können wir das sogenannte *Hauptnormalenfeld*

$$N_\alpha := \frac{1}{\varkappa_\alpha} \cdot \frac{d}{ds} T_\alpha$$

und das sogenannte *Binormalenfeld*

$$B_\alpha := T_\alpha \times N_\alpha$$

von α bilden. Damit ist für jedes $t \in I$

$$(\alpha(t); T_\alpha(t), N_\alpha(t), B_\alpha(t))$$

ein der Geometrie von α zum Zeitpunkt t besonders gut angepasstes, positiv orientiertes KKS von \mathbb{E} . Das Tripel $(T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha)$ heißt das *Frenet-3-Bein* von α .

Man nennt

$$\begin{aligned} \alpha(t) + \text{Spann}\{T_\alpha(t), N_\alpha(t)\} &= \alpha(t) + \text{Spann}\{\alpha'(t), \alpha''(t)\} && \text{die Schmiegeebene,} \\ \alpha(t) + \text{Spann}\{N_\alpha(t), B_\alpha(t)\} &&& \text{die Normalebene und} \\ \alpha(t) + \text{Spann}\{T_\alpha(t), B_\alpha(t)\} &&& \text{die rektifizierende Ebene} \end{aligned}$$

von α zum Zeitpunkt t . Eine Funktion $X : I \rightarrow \mathbb{E}_L$ heißt ein *Normalenfeld* von α , wenn für alle $t \in I$ gilt: $X(t) \perp \alpha'(t)$ (das heißt, $X(t)$ ist tangential zur Normalebene von α zur Zeit t).

Satz. Die Bewegung des Frenet-3-Beins $(T_\alpha(t), N_\alpha(t), B_\alpha(t))$ wird durch v_α , \varkappa_α sowie eine weitere C^{k-3} -Funktion $\tau_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ kontrolliert; es gilt nämlich

$$\frac{d}{ds} T_\alpha = \varkappa_\alpha N_\alpha, \quad (1)$$

$$\frac{d}{ds} N_\alpha = -\varkappa_\alpha T_\alpha + \tau_\alpha B_\alpha, \quad (2)$$

$$\frac{d}{ds} B_\alpha = -\tau_\alpha N_\alpha. \quad (3)$$

Die Funktion $\tau_\alpha = \langle \frac{d}{ds} N_\alpha, B_\alpha \rangle$ heißt die *Torsion* von α . Es gilt

$$v_\alpha = \|\alpha'\|, \quad \varkappa_\alpha = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{v_\alpha^3} \quad \text{und} \quad \tau_\alpha = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}. \quad (4)$$

Beweis. Formel (1) folgt unmittelbar aus der Definition von N_α . Zu Formel (2): Gemäß der Fourier-Entwicklung von $\frac{d}{ds} N_\alpha$ bezüglich der ONB $(T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha)$ gilt $\frac{d}{ds} N_\alpha = \langle \frac{d}{ds} N_\alpha, T_\alpha \rangle T_\alpha + \langle \frac{d}{ds} N_\alpha, N_\alpha \rangle N_\alpha + \langle \frac{d}{ds} N_\alpha, B_\alpha \rangle B_\alpha$. Wir rechnen nun die auftretenden Skalarprodukte aus: Es gilt $\langle T_\alpha, N_\alpha \rangle = 0$ und somit $0 = \frac{d}{ds} \langle T_\alpha, N_\alpha \rangle = \langle \frac{d}{ds} T_\alpha, N_\alpha \rangle + \langle T_\alpha, \frac{d}{ds} N_\alpha \rangle \stackrel{(1)}{=} \varkappa_\alpha + \langle T_\alpha, \frac{d}{ds} N_\alpha \rangle$, also $\langle \frac{d}{ds} N_\alpha, T_\alpha \rangle = -\varkappa_\alpha$. Außerdem gilt $\langle N_\alpha, N_\alpha \rangle = 1$ und somit $0 = \frac{d}{ds} \langle N_\alpha, N_\alpha \rangle = 2 \langle \frac{d}{ds} N_\alpha, N_\alpha \rangle$. Definieren wir ferner die Funktion τ_α durch $\tau_\alpha := \langle \frac{d}{ds} N_\alpha, B_\alpha \rangle$, so ergibt sich die

Formel (2) nun durch Einsetzen der berechneten Skalarprodukte in die obige Fourier-Entwicklung. Zu Formel (3): Durch analoge Rechnungen wie beim Beweis von Formel (2) ergibt sich aus den Beziehungen $\langle B_\alpha, T_\alpha \rangle = 0$, $\langle B_\alpha, N_\alpha \rangle = 0$ und $\langle B_\alpha, B_\alpha \rangle = 1$ jeweils $\langle \frac{d}{ds} B_\alpha, T_\alpha \rangle = -\langle B_\alpha, \frac{d}{ds} T_\alpha \rangle \stackrel{(1)}{=} 0$, $\langle \frac{d}{ds} B_\alpha, N_\alpha \rangle = -\langle B_\alpha, \frac{d}{ds} N_\alpha \rangle \stackrel{(2)}{=} -\tau_\alpha$ und $\langle \frac{d}{ds} B_\alpha, B_\alpha \rangle = 0$. Durch Einsetzen dieser Skalarprodukte in die Fourier-Entwicklung von $\frac{d}{ds} B_\alpha$ bezüglich der ONB $(T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha)$ ergibt sich die Formel (3).

In (4) ist die Formel für v_α einfach dessen Definition, siehe die Definition (b) in 2.2. Zur Formel für κ_α : Es gilt $\alpha' = v_\alpha \cdot T_\alpha$ und deshalb

$$\alpha'' = v'_\alpha T_\alpha + v_\alpha T'_\alpha = v'_\alpha T_\alpha + v_\alpha^2 \frac{d}{ds} T_\alpha \stackrel{(1)}{=} v'_\alpha T_\alpha + v_\alpha^2 \kappa_\alpha N_\alpha.$$

Somit ergibt sich $\alpha' \times \alpha'' = v_\alpha T_\alpha \times (v'_\alpha T_\alpha + v_\alpha^2 \kappa_\alpha N_\alpha) = v_\alpha^3 \kappa_\alpha B_\alpha$ und daher $\|\alpha' \times \alpha''\| = v_\alpha^3 \kappa_\alpha$, woraus die Formel für κ_α folgt. Um die Formel für τ_α zu beweisen, rechnen wir weiter:

$$\begin{aligned} \alpha''' &= v''_\alpha T_\alpha + v'_\alpha T'_\alpha + (v_\alpha^2 \kappa_\alpha)' N_\alpha + v_\alpha^2 \kappa_\alpha N'_\alpha = v''_\alpha T_\alpha + v'_\alpha v_\alpha \frac{d}{ds} T_\alpha + (v_\alpha^2 \kappa_\alpha)' N_\alpha + v_\alpha^3 \kappa_\alpha \frac{d}{ds} N_\alpha \\ &\stackrel{(1),(2)}{=} v''_\alpha T_\alpha + v'_\alpha v_\alpha \kappa_\alpha N_\alpha + (v_\alpha^2 \kappa_\alpha)' N_\alpha + v_\alpha^3 \kappa_\alpha (-\kappa_\alpha T_\alpha + \tau_\alpha B_\alpha) = * \cdot T_\alpha + * \cdot N_\alpha + v_\alpha^3 \kappa_\alpha \tau_\alpha B_\alpha. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich $\det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = \langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle = \langle v_\alpha^3 \kappa_\alpha B_\alpha, \alpha''' \rangle = v_\alpha^3 \kappa_\alpha \cdot v_\alpha^3 \kappa_\alpha \tau_\alpha = (v_\alpha^3 \kappa_\alpha)^2 \tau_\alpha = \|\alpha' \times \alpha''\|^2 \cdot \tau_\alpha$. Daraus folgt die Formel für τ_α in (4). \square

Beispiel. Für die *Schraubenlinie*

$$\alpha(t) = p_0 + r \cdot \Gamma_{\mathbf{a}}(t) + \frac{h}{2\pi} \cdot t \cdot a_3$$

haben wir schon im Beispiel (c) in Abschnitt 2.3 die absolute Krümmung ausgerechnet:

$$\kappa_\alpha = \frac{(2\pi)^2 r}{(2\pi r)^2 + h^2}.$$

Nun rechnen wir auch die Torsion von α aus: Es gilt

$$\alpha'(t) = r \Gamma'_{\mathbf{a}}(t) + \frac{h}{2\pi} \cdot a_3, \quad \alpha''(t) = -r \Gamma_{\mathbf{a}}(t) \quad \text{und} \quad \alpha'''(t) = -r \Gamma'_{\mathbf{a}}(t);$$

hieraus ergibt sich

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = r^2 a_3 - \frac{h r}{2\pi} \Gamma'_{\mathbf{a}}(t)$$

und damit

$$\tau_\alpha = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} = \frac{2\pi h}{(2\pi r)^2 + h^2}.$$

Wir sehen also: *Schraubenlinien haben konstante Krümmung und konstante Torsion*. In Abschnitt 4.5 werden wir sehen, dass die Schraubenlinien unter allen Kurven in \mathbb{E}^3 durch diese Eigenschaft charakterisiert werden. Dabei kann jeder vorgegebene Wert der Krümmung und Torsion durch eine Schraubenlinie (mit geeigneten Parametern r und h) realisiert werden. In diesem Sinne repräsentiert die Schraubenlinie die allgemeinste Form einer Kurve im \mathbb{E}^3 im ganz Kleinen.

Aufgabe 1. Eine Interpretation der Torsion. Mit der Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ ist ein weiterer Differentialoperator ∇_∂^\perp , die *Normalendifferentiation*, verbunden, die jedem C^1 -Normalenfeld $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ das Normalenfeld

$$\nabla_\partial^\perp X := X' - \langle X', T_\alpha \rangle \cdot T_\alpha = \text{normale Komponente von } X'$$

zuordnet. Ist $\nabla_\partial^\perp X \equiv 0$, so heißt X ein *paralleles* Normalenfeld von α . Es gilt:

- (a) X ist genau dann parallel, wenn $X' = -v_\alpha \varkappa_\alpha \langle X, N_\alpha \rangle \cdot T_\alpha$ ist.
- (b) Zu jedem „Anfangswert“ $v \perp \alpha'(t_0)$ ($t_0 \in I$) existiert genau ein paralleles Normalenfeld X von α mit $X(t_0) = v$.
- (c) Sind X_1, X_2 parallele Normalenfelder von α , so ist $\langle X_1, X_2 \rangle \equiv \text{const.}$
- (d) Ist E ein paralleles Einheitsnormalenfeld von α , so ist auch $T_\alpha \times E$ ein paralleles Einheitsnormalenfeld von α , und zwar ist dieses orthogonal zu E , es existiert eine C^1 -Funktion $\vartheta : I \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$N_\alpha = (\cos \circ \vartheta) \cdot E + (\sin \circ \vartheta) \cdot (T_\alpha \times E)$$

ist, es gilt

$$B_\alpha = -(\sin \circ \vartheta) \cdot E + (\cos \circ \vartheta) \cdot (T_\alpha \times E)$$

und

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \tau_\alpha.$$

[Tipp: Man verwende die grundlegenden Sätze über gewöhnliche Differentialgleichungen, die Frenetschen Gleichungen und für die Existenz von ϑ den Satz aus 1.8, den man auf das Einheitsvektorfeld $(\langle N_\alpha, E \rangle, \langle N_\alpha, T_\alpha \times E \rangle) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ anwendet.]

Aufgabe 2. Erste Charakterisierungen von Kurven auf Sphären. Für jede nach der Bogenlänge parametrisierte C^3 -Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) α verläuft auf einer Sphäre.
- (b) Es existiert ein Punkt $p_0 \in \mathbb{E}^3$, so dass $\alpha - p_0$ ein paralleles Normalenfeld von α ist.
- (c) Es existiert ein paralleles Normalenfeld X von α , so dass $\langle T'_\alpha, X \rangle \equiv \text{const.} \neq 0$ ist.

4.2 Taylorentwicklung von Raumkurven

Das Taylorpolynom dritter Ordnung einer Raumkurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ in einem $t_0 \in I$ hat die Gestalt

$$t \mapsto \alpha(t_0) + (t - t_0) \cdot \alpha'(t_0) + \frac{1}{2} (t - t_0)^2 \cdot \alpha''(t_0) + \frac{1}{6} (t - t_0)^3 \cdot \alpha'''(t_0).$$

Setzen wir der Einfachheit halber voraus, dass α nach Bogenlänge parametrisiert ist, so gilt

$$\alpha' = T_\alpha, \quad \alpha'' = \varkappa_\alpha \cdot N_\alpha$$

und

$$\alpha''' = \varkappa'_\alpha \cdot N_\alpha + \varkappa_\alpha \cdot N'_\alpha = -\varkappa_\alpha^2 \cdot T_\alpha + \varkappa'_\alpha \cdot N_\alpha + \varkappa_\alpha \tau_\alpha \cdot B_\alpha.$$

Hieraus ergibt sich für das Taylorpolynom dritter Ordnung von α in t_0 :

$$\begin{aligned} t \mapsto & \alpha(t_0) + ((t - t_0) - \frac{1}{6} \varkappa_\alpha(t_0)^2 (t - t_0)^3) \cdot T_\alpha(t_0) \\ & + (\frac{1}{2} \varkappa_\alpha(t_0) (t - t_0)^2 + \frac{1}{6} \varkappa'_\alpha(t_0) (t - t_0)^3) \cdot N_\alpha(t_0) \\ & + \frac{1}{6} \varkappa_\alpha(t_0) \tau_\alpha(t_0) (t - t_0)^3 \cdot B_\alpha(t_0). \end{aligned}$$

Daher besitzen die Orthogonalprojektionen von α in die drei ausgezeichneten Ebenen in t_0 die folgenden Taylorentwicklungen:

(a) in der Schmiegeebene $\alpha(t_0) + \text{Spann}\{T_\alpha(t_0), N_\alpha(t_0)\}$:

$$t \mapsto \alpha(t_0) + (t - t_0) \cdot T_\alpha(t_0) + \frac{1}{2} \kappa_\alpha(t_0) (t - t_0)^2 \cdot N_\alpha(t_0) + \dots$$

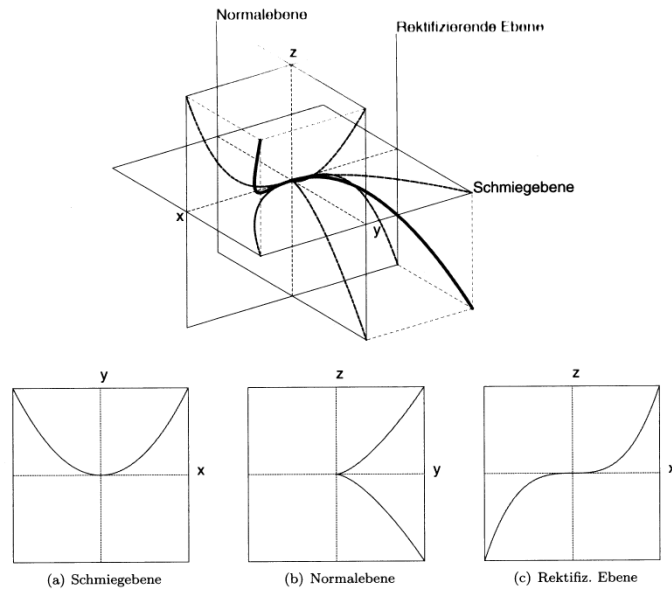
(b) in der rektifizierenden Ebene $\alpha(t_0) + \text{Spann}\{T_\alpha(t_0), B_\alpha(t_0)\}$:

$$t \mapsto \alpha(t_0) + (t - t_0) \cdot T_\alpha(t_0) + \frac{1}{6} \kappa_\alpha(t_0) \tau_\alpha(t_0) (t - t_0)^3 \cdot B_\alpha(t_0) + \dots$$

(c) in der Normalebene $\alpha(t_0) + \text{Spann}\{N_\alpha(t_0), B_\alpha(t_0)\}$:

$$t \mapsto \alpha(t_0) + \frac{1}{2} \kappa_\alpha(t_0) (t - t_0)^2 \cdot N_\alpha(t_0) + \frac{1}{6} \kappa_\alpha(t_0) \tau_\alpha(t_0) (t - t_0)^3 \cdot B_\alpha(t_0) + \dots$$

Wegen $\kappa_\alpha(t_0) \neq 0$ wird im Falle $\tau_\alpha(t_0) \neq 0$ das qualitative Verhalten von α in der Nähe von t_0 durch diese Taylor-Entwicklungen beschrieben. Es ist dasselbe Verhalten, wie man es bei einer Schraubenlinie (also im Fall konstanter Krümmung und Torsion) auch im Großen antrifft. Man erhält bei dieser die folgenden Bilder für die drei Projektionen (entnommen aus KÜHNEL, *Differentialgeometrie*, Bild 2.5, S. 14):



Geometrische Interpretation der Torsion. Wegen

$$\langle \alpha(t) - \alpha(t_0), B_\alpha(t_0) \rangle = \frac{1}{6} \kappa_\alpha(t_0) \tau_\alpha(t_0) (t - t_0)^3 + \dots$$

wird im Falle $\tau_\alpha(t_0) \neq 0$ die Schmiegeebene $\alpha(t_0) + \mathbb{R}B_\alpha(t_0)^\perp$ zur Zeit $t = t_0$ von α durchdrungen, und zwar von unten nach oben (das soll heißen: in Richtung von $B_\alpha(t_0)$) falls $\tau_\alpha(t_0) > 0$, und von oben nach unten falls $\tau_\alpha(t_0) < 0$.

4.3 Der Hauptsatz der räumlichen Kurventheorie

Theorem.

- (a) Es sei $(p_0; a_1, a_2, a_3)$ ein positiv orientiertes KKS von \mathbb{E} , $k \geq 3$ eine natürliche Zahl, $v : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine C^{k-1} -Funktion, $\varkappa : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine C^{k-2} -Funktion, $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^{k-3} -Funktion und $t_0 \in I$. Dann existiert genau eine reguläre C^k -Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$, die die „Differentialgleichungen“

$$v_\alpha = v, \quad \varkappa_\alpha = \varkappa \quad \text{und} \quad \tau_\alpha = \tau$$

mit der „Anfangsbedingung“

$$(\alpha; T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha)|_{t=t_0} = (p_0; a_1, a_2, a_3)$$

erfüllt.

- (b) Sind $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{E}$ zwei reguläre C^3 -Kurven mit $\varkappa_\alpha > 0$ und $\varkappa_\beta > 0$, so gilt genau dann

$$v_\alpha \equiv v_\beta, \quad \varkappa_\alpha \equiv \varkappa_\beta \quad \text{und} \quad \tau_\alpha \equiv \tau_\beta,$$

wenn es eine orientierungserhaltende Isometrie $f \in I(\mathbb{E})$ (d.h. eine Isometrie mit $f_L \in \text{SO}(\mathbb{E}_L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$) mit $\beta = f \circ \alpha$ gibt.

Beweis. Zu (a). Wir betrachten für Vektorfelder $E_1, E_2, E_3 : I \rightarrow \mathbb{E}_L$ das lineare Differentialgleichungssystem

$$E_1' = +v \varkappa E_2, \tag{1}$$

$$E_2' = -v \varkappa E_1 + v \tau E_3, \tag{2}$$

$$E_3' = -v \tau E_2. \tag{3}$$

Da es sich hierbei um ein *lineares* Differentialgleichungssystem handelt, existiert zu den Anfangsbedingungen

$$E_k(t_0) = a_k \quad \text{für } k \in \{1, 2, 3\}$$

genau eine auf ganz I ausgedehnte Lösung (E_1, E_2, E_3) . Um zu zeigen, dass es sich bei (E_1, E_2, E_3) um ein ONB-Feld handelt, betrachten wir die sechs Funktionen $\langle E_k, E_\ell \rangle$ mit $1 \leq k \leq \ell \leq 3$. Aus dem obigen Differentialgleichungssystem ergibt sich für diese Funktionen das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \langle E_1, E_1 \rangle' &= 2 \langle E_1', E_1 \rangle &= 2v \varkappa \langle E_1, E_2 \rangle \\ \langle E_1, E_2 \rangle' &= \langle E_1', E_2 \rangle + \langle E_1, E_2' \rangle &= v \varkappa \langle E_2, E_2 \rangle - v \varkappa \langle E_1, E_1 \rangle + v \tau \langle E_1, E_3 \rangle \\ \langle E_1, E_3 \rangle' &= \langle E_1', E_3 \rangle + \langle E_1, E_3' \rangle &= v \varkappa \langle E_2, E_3 \rangle - v \tau \langle E_1, E_2 \rangle \\ \langle E_2, E_2 \rangle' &= 2 \langle E_2', E_2 \rangle &= -2v \varkappa \langle E_1, E_2 \rangle + 2v \tau \langle E_2, E_3 \rangle \\ \langle E_2, E_3 \rangle' &= \langle E_2', E_3 \rangle + \langle E_2, E_3' \rangle &= -v \varkappa \langle E_1, E_3 \rangle + v \tau \langle E_3, E_3 \rangle - v \tau \langle E_2, E_2 \rangle \\ \langle E_3, E_3 \rangle' &= 2 \langle E_3', E_3 \rangle &= -2v \tau \langle E_2, E_3 \rangle \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\langle E_k, E_k \rangle(t_0) = 1, \quad \langle E_k, E_\ell \rangle(t_0) = 0 \quad \text{für } 1 \leq k < \ell \leq 3.$$

Dieses neue lineare Anfangswertproblem besitzt ebenfalls eine eindeutige Lösung; da durch

$$\langle E_k, E_k \rangle \equiv 1, \quad \langle E_k, E_\ell \rangle \equiv 0 \quad \text{für } 1 \leq k < \ell \leq 3.$$

offenbar eine Lösung gegeben wird, muss diese Lösung die tatsächlichen Verhältnisse zwischen den Vektorfeldern E_1 , E_2 und E_3 wiedergeben, mit anderen Worten: (E_1, E_2, E_3) ist ein ONB-Feld. Da die ONB

$(E_1(t_0), E_2(t_0), E_3(t_0))$ positiv orientiert ist, ist aus Stetigkeitsgründen (E_1, E_2, E_3) sogar ein positiv orientiertes ONB-Feld.

Wir definieren nun die Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\alpha(t) := p_0 + \int_{t_0}^t v(s) E_1(s) ds$. Damit gilt offenbar $\alpha(t_0) = p_0$ und $\alpha'(t) = v(t) E_1(t)$, also $v_\alpha = v$ und $T_\alpha = E_1$. Weiter gilt $\frac{d}{ds} T_\alpha = \frac{1}{v_\alpha} E'_1 = \frac{1}{v} v \times E_2 = \times E_2$ und daher $\kappa_\alpha = \left\| \frac{d}{ds} T_\alpha \right\| = \times$ und $N_\alpha = \frac{1}{\kappa_\alpha} \frac{d}{ds} T_\alpha = E_2$. Schließlich haben wir $B_\alpha = T_\alpha \times N_\alpha = E_1 \times E_2 = E_3$, weil (E_1, E_2, E_3) ein positiv orientiertes ONB-Feld ist, und daher $\tau_\alpha = \langle \frac{d}{ds} N_\alpha, B_\alpha \rangle = \frac{1}{v} \langle E'_2, E_3 \rangle = \frac{1}{v} v \tau = \tau$. Deswegen hat α alle gewünschten Eigenschaften. Die Eindeutigkeit von α folgt aus der Eindeutigkeit des ONB-Feldes (E_1, E_2, E_3) .

Zu (b). Gilt $\beta = f \circ \alpha$ mit einer orientierungserhaltenden Isometrie f , so ist $\beta' = (f \circ \alpha)' = f_L \circ \alpha'$, und somit $v_\beta = v_\alpha$ und $T_\beta = f_L \circ T_\alpha$. Insbesondere spielt es keine Rolle, ob wir Differentiationen nach der Bogenlänge bezüglich α oder bezüglich β ausführen. Durch Differentiation der Beziehung $T_\beta = f_L \circ T_\alpha$ nach der Bogenlänge erhält man $\frac{d}{ds} T_\beta = f_L \circ \frac{d}{ds} T_\alpha$, und daher $\kappa_\beta = \kappa_\alpha$ und $N_\beta = f_L \circ N_\alpha$. Schließlich gilt $B_\beta = T_\beta \times N_\beta = (f_L \circ T_\alpha) \times (f_L \circ N_\alpha) = f_L \circ (T_\alpha \times N_\alpha) = f_L \circ B_\alpha$; für diese Rechnung war wichtig, dass $f_L \in \text{SO}(\mathbb{E}_L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist. Damit ergibt sich $\tau_\beta = \langle \frac{d}{ds} N_\beta, B_\beta \rangle = \langle f_L \circ \frac{d}{ds} N_\alpha, f_L \circ B_\alpha \rangle = \langle \frac{d}{ds} N_\alpha, B_\alpha \rangle = \tau_\alpha$.

Der Nachweis der umgekehrten Implikation von (b) verläuft analog wie im zweidimensionalen Fall, siehe das Theorem (b) aus Abschnitt 3.2. \square

4.4 Infinitesimale Charakterisierung ebener Kurven im \mathbb{E}^3

Satz. Es sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ eine reguläre C^3 -Kurve mit $\kappa_\alpha > 0$. Dann gilt

$$\alpha \text{ ist eine ebene Kurve} \iff \tau_\alpha \equiv 0.$$

Genauer gesagt: Gilt $\tau_\alpha \equiv 0$ und ist $t_0 \in I$, so verläuft die Kurve α in der Ebene $\mathbb{E}' := p_0 + (\mathbb{R}a)^\perp$ mit $p_0 := \alpha(t_0)$ und $a := B_\alpha(t_0)$. Versehen wir \mathbb{E}'_L mit der durch $\det_{\mathbb{E}'_L} := \det_{\mathbb{E}_L}(\cdot, \cdot, a)|_{\mathbb{E}'_L} \times \mathbb{E}'_L$ gegebenen Orientierung, so ist κ_α die orientierte Krümmung und (T_α, N_α) das Frenet-2-Beinfeld der Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}'$ im Sinne der ebenen Kurventheorie.

Beweis. Es gelte, dass die Kurve α in einer Ebene $\mathbb{E}' \subset \mathbb{E}$, etwa $\mathbb{E}' = p_0 + (\mathbb{R}a)^\perp$ mit $p_0 \in \mathbb{E}$ und $a \in \mathbb{E}_L$, $\|a\| = 1$, verläuft. Wir betrachten nun die Höhenfunktion $h : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto \langle p - p_0, a \rangle$. Damit gilt $\mathbb{E}' = h^{-1}(\{0\})$, und deshalb ist $h \circ \alpha \equiv 0$. Somit gilt auch $0 \equiv (h \circ \alpha)' = \langle \alpha', a \rangle = v_\alpha \langle T_\alpha, a \rangle$ und somit $T_\alpha \perp a$. Deswegen gilt weiter $0 \equiv \langle T_\alpha, a \rangle' = \langle T'_\alpha, a \rangle = v_\alpha \langle \frac{d}{ds} T_\alpha, a \rangle = v_\alpha \kappa_\alpha \langle N_\alpha, a \rangle$ und somit auch $N_\alpha \perp a$. Also wird $(\mathbb{R}a)^\perp$ jeweils von $T_\alpha(t)$ und $N_\alpha(t)$ aufgespannt, und somit gilt $B_\alpha = T_\alpha \times N_\alpha = \pm a$; aus Stetigkeitsgründen folgt, dass B_α konstant ist. Damit ist $0 = B'_\alpha = -v_\alpha \tau_\alpha N_\alpha$ und somit $\tau_\alpha = 0$.

Gelte nun umgekehrt $\tau_\alpha = 0$. Dann gilt nach der dritten Frenet-Gleichung $\frac{d}{ds} B_\alpha = -\tau_\alpha N_\alpha = 0$. Also ist B_α konstant, etwa gleich $a \in \mathbb{E}_L$ mit $\|a\| = 1$. Wir fixieren nun $t_0 \in I$, setzen $p_0 := \alpha(t_0)$ und betrachten wieder die Höhenfunktion $h : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto \langle p - p_0, a \rangle$. Damit gilt $(h \circ \alpha)' = \langle \alpha', a \rangle = v_\alpha \langle T_\alpha, B_\alpha \rangle = 0$, also ist $h \circ \alpha$ konstant, und zwar gleich $(h \circ \alpha)(t_0) = 0$. Somit ist $\alpha(I) \subset h^{-1}(\{0\}) = p_0 + (\mathbb{R}a)^\perp =: \mathbb{E}'$.

In dieser Situation stimmt offenbar das Einheitstangentenfeld T_α der räumlichen Theorie mit dem der ebenen Theorie überein. Außerdem gilt für die Vierteldrehung $J' : \mathbb{E}'_L \rightarrow \mathbb{E}'_L$ von \mathbb{E}'_L (bezüglich der im Satz beschriebenen Orientierung): $\langle J'v, w \rangle = \det_{\mathbb{E}'_L}(v, w) = \det_{\mathbb{E}_L}(v, w, a) = \det_{\mathbb{E}_L}(a, v, w) = \langle a \times v, w \rangle$ und somit $J'v = a \times v$. Also ist $N_\alpha = B_\alpha \times T_\alpha = a \times T_\alpha = J'(T_\alpha)$, und somit stimmt auch das Einheitsnormalenfeld der räumlichen Theorie mit dem Einheitsnormalenfeld der ebenen Theorie überein. Schließlich lautet die erste Frenet-Gleichung sowohl in der ebenen als auch in der räumlichen Kurventheorie $\frac{d}{ds} T_\alpha = \kappa_\alpha N_\alpha$, deswegen stimmt auch die absolute Krümmung von α im Sinne der räumlichen Kurventheorie mit der orientierten Krümmung von α im Sinne der ebenen Kurventheorie überein. \square

4.5 Kurven mit spezieller Krümmung und Torsion

Aussage. Es sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine reguläre C^3 -Kurve.

- (a) Es gilt genau dann $\kappa_\alpha \equiv 0$, wenn α auf einer Geraden von \mathbb{E} verläuft.
- (b) Es gilt genau dann $\tau_\alpha \equiv 0$, wenn α in einer Ebene von \mathbb{E} verläuft.
- (c) Es gilt genau dann $\kappa_\alpha \equiv \text{const.} > 0$ und $\tau_\alpha \equiv 0$, wenn α auf einem Kreis in einer Ebene von \mathbb{E} verläuft.
- (d) Es gilt genau dann $\kappa_\alpha \equiv \text{const.} > 0$ und $\tau_\alpha \equiv \text{const.} \neq 0$, wenn α eine *Schraubenlinie* ist, d.h. wenn bis auf Umparametrisierung

$$\alpha(t) = p_0 + r \cos(t) a_1 + r \sin(t) a_2 + \frac{h}{2\pi} t a_3$$

mit einem geeigneten KKS $(p_0; a_1, a_2, a_3)$ von \mathbb{E} sowie $r > 0$ und $h \neq 0$ ist.

Beweis. Für (a). Ist $\kappa_\alpha \equiv 0$, so gilt $\frac{d}{ds}T_\alpha \equiv 0$ und somit $T_\alpha \equiv \text{const.} =: a$. Damit ist $\alpha'(t) = v_\alpha \cdot a$ und daher $\alpha(t) = \alpha(t_0) + \varphi(t) \cdot a$ mit der Funktion $\varphi(t) := \int_{t_0}^t v_\alpha(s) ds$. Also verläuft α auf der Geraden $\alpha(t_0) + \mathbb{R}a$. Die umgekehrte Richtung ist klar.

Für (b). Dies ist nur eine Neuformulierung des Satzes aus Abschnitt 4.4.

Für (c). Wegen $\tau_\alpha \equiv 0$ verläuft α nach (b) in einer Ebene \mathbb{E}' von \mathbb{E} , und zwar stimmt nach dem Satz aus Abschnitt 4.4 die absolute Krümmung von α als Kurve in \mathbb{E} mit der orientierten Krümmung von α als Kurve in \mathbb{E}' überein. Nach der Folgerung aus dem Hauptsatz der ebenen Kurventheorie in Abschnitt 3.2 ergibt sich daher, dass α tatsächlich auf einem Kreis in \mathbb{E}' verläuft. Die umgekehrte Richtung ist wieder klar.

Für (d). Man berechnet zunächst für die Kurve $\alpha(t) = p_0 + r \cos(t)a_1 + r \sin(t)a_2 + \frac{h}{2\pi} t a_3$ (mit $r > 0$, $h \neq 0$ und einem KKS $(p_0; a_1, a_2, a_3)$) die geometrischen Größen κ_α und τ_α mittels der Formeln (4) aus dem Satz aus Abschnitt 4.1 aus, und erhält für κ_α und τ_α jeweils konstante Ergebnisse in Abhängigkeit von r und h (siehe auch das Beispiel in Abschnitt 4.1). Ist umgekehrt $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ eine reguläre C^3 -Kurve mit konstanter Krümmung und Torsion, so zeigt die vorherige Berechnung der Krümmung und Torsion der Schraubenlinie, dass Zahlen $r > 0$ und $h \neq 0$ gewählt werden können, so dass die dazu gehörige Schraubenlinie dieselbe Krümmung und dieselbe Torsion wie die gegebene Kurve α besitzt. Daher zeigt der Hauptsatz der räumlichen Kurventheorie: Parametrisiert man diese Schraubenlinie so um, dass auch ihre Bahngeschwindigkeit mit der Bahngeschwindigkeit von α übereinstimmt, und wählt man das KKS $(p_0; a_1, a_2, a_3)$ geeignet, so stimmt diese umparametrisierte Schraubenlinie mit α überein. — Die Durchführung der Rechnungen im Einzelnen überlasse ich als *Übungsaufgabe*. \square

Aufgabe. Eine reguläre C^3 -Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ heißt eine *Böschungslinie* (oder *Helix*), wenn $\kappa_\alpha > 0$ ist, und wenn ein Einheitsvektor $a \in \mathbb{E}_L$ existiert, so dass der Winkel zwischen e und T_α konstant ist.

Zeige: α ist genau dann eine Böschungslinie, wenn $\kappa_\alpha > 0$ gilt und $\tau_\alpha / \kappa_\alpha$ konstant ist. (LANCRET, 1802)

Man überlege sich, wie man Papiermodelle für Böschungslinien im anschaulichen Raum konstruieren kann.

4.6 Sphärische Kurven

Es sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine reguläre C^3 -Kurve, die auf einer Sphäre $S_R^2(p_0) := \{q \in \mathbb{E}^3 \mid \|q - p_0\| = R\}$ ($R \in \mathbb{R}_+$) verläuft.

Differenziert man die Gleichung $R^2 = \langle \alpha - p_0, \alpha - p_0 \rangle$ zweimal nach der Bogenlänge, so erhält man $0 = \langle \frac{d}{ds} T_\alpha, \alpha - p_0 \rangle + \langle T_\alpha, T_\alpha \rangle = \kappa_\alpha \cdot \langle N_\alpha, \alpha - p_0 \rangle + 1$. Beachten wir nun die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, so erhalten wir als erstes Ergebnis die

Aussage 1. $\kappa_\alpha \geq 1/R$.

Daher können wir auf α die Frenet-Theorie anwenden. Zunächst sieht man aber

Aussage 2. $E := \frac{1}{R} \cdot (\alpha - p_0)$ ist ein paralleles Einheitsnormalenfeld, siehe die Aufgaben 1 und 2 aus Abschnitt 4.1.

Die in der Aufgabe 1(d) aus Abschnitt 4.1 angegebenen Formeln für N_α und B_α mittels E und einer Winkelfunktion ϑ kann man nun nach E auflösen und erhält dadurch

$$\alpha - p_0 = R \cdot (\cos \circ \vartheta \cdot N_\alpha - \sin \circ \vartheta \cdot B_\alpha).$$

Indem wir diese Gleichung nach der Bogenlänge differenzieren, erhalten wir unter Ausnutzung der Frenetschen Gleichungen $T_\alpha = -\kappa_\alpha R \cos \circ \vartheta \cdot T_\alpha$, also

$$0 < \frac{1}{\kappa_\alpha R} = -\cos \circ \vartheta \leq 1. \quad (*)$$

Diese Gleichung ist recht informativ. Zunächst erhalten wir aus ihr erneut die Aussage 1. Sodann zeigt (*), dass κ_α genau dann konstant ist, wenn dies für ϑ gilt; somit gilt wegen $\frac{d\vartheta}{ds} = \tau_\alpha$ die

Aussage 3. κ_α ist genau dann konstant, wenn $\tau_\alpha \equiv 0$ ist; dann verläuft α also in einem Kreis der Sphäre.

Ist hingegen τ_α nullstellenfrei, so folgt wegen $\frac{d}{ds}\vartheta = \tau_\alpha$ durch Differentiation von (*) die Gleichung $\sin \circ \vartheta = \left(\frac{d}{ds}(1/\kappa_\alpha)\right)/(\tau_\alpha R)$ und somit wegen $\cos^2 + \sin^2 = 1$ die vielzitierte Beziehung

$$\varrho^2 + (\tilde{\varrho} \cdot \frac{d}{ds}\varrho)^2 = R^2 \quad \text{mit} \quad \varrho := 1/\kappa_\alpha \quad \text{und} \quad \tilde{\varrho} := 1/\tau_\alpha. \quad (\dagger)$$

Schließlich geben wir einen kurzen Beweis für den

Satz. Ist $I = [a, b]$ und α glatt geschlossen, so gilt für die „Totaltorsion“ der sphärischen Kurve α

$$\int_a^b \tau_\alpha ds := \int_a^b \tau_\alpha(t) \cdot v_\alpha(t) dt = 0.$$

Beweis. Wegen $(\alpha(a); T_\alpha(a), N_\alpha(a), B_\alpha(a)) = (\alpha(b); T_\alpha(b), N_\alpha(b), B_\alpha(b))$ existiert ein $n \in \mathbb{Z}$, so dass $\vartheta(b) - \vartheta(a) = 2n\pi$ ist; weiterhin existiert wegen (*) ein $m \in \mathbb{Z}$, so dass $\frac{\pi}{2} + 2m\pi < \vartheta(t) < \frac{3\pi}{2} + 2m\pi$ für alle $t \in I$ gilt. Daher ist $|\vartheta(b) - \vartheta(a)| < \pi$ und somit $n = 0$, also $\vartheta(b) = \vartheta(a)$. Damit folgt die Behauptung wegen $\vartheta' = v_\alpha \cdot \tau_\alpha$. \square

Aufgabe. Jede reguläre C^4 -Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ mit $\kappa_\alpha \cdot \tau_\alpha^2 \cdot \left(\frac{d}{ds}\kappa_\alpha\right)^2 > 0$, für welche obige Beziehung (†) gilt, verläuft auf einer Sphäre vom Radius R .

[Tipp: Man zeige, dass $\alpha + \varrho \cdot N_\alpha + \tilde{\varrho} \cdot \frac{d}{ds}\varrho \cdot B_\alpha$ konstant ist.]

4.7 Anhang: Die Frenet-Gleichungen und der Hauptsatz der Kurventheorie in n Dimensionen

Zum Abschluss unserer Einführung in die Kurventheorie stellen wir dar, wie die Fundamente unserer Untersuchungen, nämlich das eine Kurve begleitende Frenet-KKS und die dazu gehörigen Frenet-Gleichungen für Kurven im n -dimensionalen Raum, aussehen.

Es sei \mathbb{E} ein n -dimensionaler, orientierter euklidischer Raum.

Definition.

- (a) Eine reguläre C^n -Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ heißt eine *Frenet-Kurve*, wenn für jedes $t \in I$ die Vektoren $\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{(n-1)}(t)$ linear unabhängig sind.
- (b) Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ eine Frenet-Kurve. Dann ist das *Frenet- n -Beinfeld* (E_1, \dots, E_n) zu α das n -Tupel von Vektorfeldern $E_k : I \rightarrow \mathbb{E}_L$, das dadurch eindeutig charakterisiert ist, dass für jedes $t \in I$ gilt:

- (i) $(E_1(t), \dots, E_n(t))$ ist eine positiv orientierte ONB von \mathbb{E}_L ,
- (ii) für jedes $k \in \{1, \dots, n-1\}$ gilt

$$\text{span}\{E_1(t), \dots, E_k(t)\} = \text{span}\{\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{(k)}(t)\}.$$

- (iii) $\langle \alpha^{(k)}(t), E_k(t) \rangle > 0$ für jedes $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Bemerkung. Im Fall $n = 2$ ist jede reguläre C^2 -Kurve eine Frenet-Kurve. Im Fall $n = 3$ ist jede reguläre C^3 -Kurve α mit $\kappa_\alpha > 0$ eine Frenet-Kurve.

Ist eine Frenet-Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ gegeben, so konstruiert man das zugehörige Frenet- n -Beinfeld (E_1, \dots, E_n) auf die folgende Weise: Zunächst gewinnt man E_1, \dots, E_{n-1} aus $\alpha', \dots, \alpha^{(n-1)}$ durch Anwendung des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens:

$$\begin{aligned} E_1 &:= \alpha' / \|\alpha'\| = T_\alpha \\ E_2 &:= (\alpha'' - \langle \alpha'', E_1 \rangle E_1) / \|\dots\| \\ &\vdots \\ E_{n-1} &:= \left(\alpha^{(n-1)} - \sum_{k=1}^{n-2} \langle \alpha^{(n-1)}, E_k \rangle E_k \right) / \|\dots\| ; \end{aligned}$$

die Bedingung an eine Frenet-Kurve, dass $\alpha'(t), \dots, \alpha^{(n-1)}(t)$ jeweils linear unabhängig sein möge gewährleistet, dass man hierdurch tatsächlich ein Orthonormalsystem-Feld (E_1, \dots, E_{n-1}) erhält. Das noch verbleibende Vektorfeld E_n ist nun durch die Bedingung (i) in der Definition eindeutig bestimmt.

Satz. Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ eine Frenet-Kurve. Dann wird die Bewegung ihres Frenet- n -Beinfeldes (E_1, \dots, E_n) durch $n-1$ Funktionen kontrolliert, genauer: Es existieren Funktionen $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$, so dass κ_k für $k \leq n-1$ jeweils $(n-1-k)$ -mal stetig differenzierbar ist und $\kappa_k > 0$ für $k \leq n-2$ gilt, und so dass

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ E_{n-1} \\ E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \kappa_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ E_{n-1} \\ E_n \end{pmatrix} \quad (*)$$

gilt. Diese Gleichungen heißen die *Frenet-Gleichungen* zu α ; die Funktion κ_k nennt man die k -te *Frenet-Krümmung* von α . Die erste Frenet-Krümmung κ_1 ist die absolute Krümmung von α im Sinne der Definition aus Abschnitt 2.3. Die letzte Krümmung κ_{n-1} heißt auch die *Torsion* der Kurve.

Beweis. Da (E_1, \dots, E_n) ein ONB-Feld ist, gilt

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix}$$

mit der $(n \times n)$ -Matrix $A = (a_{k\ell})$, deren Einträge die Funktionen $a_{k\ell} := \langle \frac{d}{ds} E_k, E_\ell \rangle$ sind. Wegen $\langle E_k, E_\ell \rangle \equiv \text{const.}$ gilt $0 = \frac{d}{ds} \langle E_k, E_\ell \rangle = \langle \frac{d}{ds} E_k, E_\ell \rangle + \langle E_k, \frac{d}{ds} E_\ell \rangle = a_{k\ell} + a_{\ell k}$, also ist A schief-symmetrisch. Weiter gilt nach Konstruktion jeweils $E_k(t) \in \text{span}\{\alpha'(t), \dots, \alpha^{(k)}(t)\}$, und daher $\frac{d}{ds} E_k(t) \in \text{span}\{\alpha'(t), \dots, \alpha^{(k+1)}(t)\} = \text{span}\{E_1(t), \dots, E_{k+1}(t)\}$. Somit ist $a_{k\ell} = 0$ für $\ell \geq k+2$, und daher gilt (*) mit $\kappa_k := a_{k, (k+1)} = \langle \frac{d}{ds} E_k, E_{k+1} \rangle$.

Für $k \leq n-2$ ist das Vorzeichen von $\kappa_k = \langle \frac{d}{ds} E_k, E_{k+1} \rangle$ dasselbe wie das Vorzeichen von $\langle \alpha^{(k+1)}, E_{k+1} \rangle$, und dieses ist nach Eigenschaft (iii) aus der Definition des Frenet- n -Beinfeldes positiv.

Schließlich gilt $E_1 = T_\alpha$ und deshalb $\kappa_\alpha = \|\frac{d}{ds} T_\alpha\| = \|\frac{d}{ds} E_1\| = \|\kappa_1 E_2\| = \kappa_1$. \square

Hauptsatz der Kurventheorie.

- (a) Es sei $(p_0; a_1, \dots, a_n)$ ein positiv orientiertes KKS von \mathbb{E} , $t_0 \in I$, $r \geq n$ eine natürliche Zahl, und $v, \kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, so dass v $(r-1)$ -mal und κ_k jeweils $(r-1-k)$ -mal stetig differenzierbar ist und $v > 0$ sowie $\kappa_k > 0$ für $k \leq n-2$ gilt. Dann existiert genau eine C^r -Frenet-Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) (*Differentialgleichungen*) Es gilt $v_\alpha = v$ und die Funktionen $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ sind die Frenet-Krümmungen von α .

- (ii) (*Anfangsbedingung*) Es gilt $\alpha(t_0) = p_0$ und (a_1, \dots, a_n) ist das Frenet- n -Bein von α zum Zeitpunkt t_0 .
- (b) Sind $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{E}$ zwei Frenet-Kurven, so sind äquivalent:
 - (i) Es gilt $v_\alpha = v_\beta$ und alle Frenet-Krümmungen von α und β stimmen überein.
 - (ii) Es existiert eine orientierungserhaltende Isometrie $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ mit $\beta = f \circ \alpha$.

Beweis. Für (a). Siehe KÜHNEL, *Differentialgeometrie*, den Beweis von Satz 2.15, S. 19ff. Für (b). Der Beweis verläuft (unter Verwendung von (a)) ähnlich wie im 2-dimensionalen bzw. 3-dimensionalen Fall (siehe die Abschnitte 3.2 und 4.3). \square

Kapitel 5

Flächen im Raum

Mit diesem Kapitel beginnen wir mit dem Studium von *Flächen* im dreidimensionalen euklidischen Raum \mathbb{E}^3 . Ähnlich wie bei Kurven gibt es zwei verschiedene Arten, Flächen im \mathbb{E}^3 mathematisch zu modellieren: Zum einen können wir eine Fläche als (glatte) Punktmenge im \mathbb{E}^3 auffassen. Zum anderen können wir eine Fläche durch eine Parametrisierung, also durch eine (geeignete) Abbildung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eines Gebiets $G \subset \mathbb{R}^2$, beschreiben.

Wollten wir eine Fläche einfach als glatte Punktmenge im \mathbb{E}^3 , das heißt als 2-dimensionale *Mannigfaltigkeit*, auffassen, so müssten wir für derartige Mannigfaltigkeiten eine Analysis entwickeln. Das wäre eine sicherlich würdige Aufgabe, ist dies doch einer der wesentlichen Inhalte der Vorlesung Analysis III.

Für den Augenblick wollen wir uns aber bescheiden: In dieser Vorlesung werden wir Flächen vermittle von Parametrisierungen untersuchen; auf diese Parametrisierungen können wir die Analysis auf die gewohnte Art anwenden.

In diesem Kapitel sei $\mathbb{E} = \mathbb{E}^3$ ein 3-dimensionaler euklidischer Raum. Wir fixieren zunächst keine Orientierungen auf \mathbb{E} . Weiterhin sei, solange nichts anderes gesagt wird, G ein *Gebiet* in \mathbb{R}^2 , also eine nicht-leere, offene, zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R}^2 .

5.1 Der Begriff einer Fläche

Definition 1. Es sei $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine C^r -Abbildung mit $r \geq 1$.

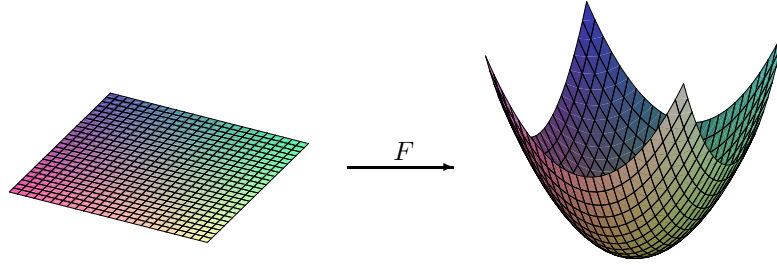
- (a) F heißt in einem Punkt $p \in G$ *regulär* (oder *immersiv*), wenn das Differential

$$d_p F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}_L^3$$

injektiv ist. Ist F in p nicht regulär, so sagen wir, dass F in p eine *Singularität* besitzt. Ist F in allen $p \in G$ regulär, so heißt F eine *Immersion*.

- (b) Zwei C^r -Abbildungen $F_i : G_i \rightarrow \mathbb{E}^3$ ($i = 1, 2$) heißen *äquivalent*, wenn es einen C^r -Diffeomorphismus $\varphi : G_2 \rightarrow G_1$ mit $F_2 = F_1 \circ \varphi$ gibt. Hierdurch wird offenbar eine Äquivalenzrelation auf der Menge derartiger Abbildungen eingeführt.

- (c) Jede derartige Äquivalenzklasse heißt eine C^r -Fläche mit Singularitäten, oder kurz eine C^r -mS-Fläche. Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse, der die Abbildung F angehört, mit $[F]$. Die Elemente von $[F]$ heißen die (verschiedenen) *Parametrisierungen* der mS-Fläche $[F]$; der Definitionsbereich G von $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ heißt der *Parameterbereich* der Parametrisierung F , und der Diffeomorphismus φ aus Teil (b) der Definition, der zwischen zwei Parametrisierungen derselben mS-Fläche vermittelt, heißt eine *Parametertransformation*.



Für je zwei C^r -äquivalente C^r -Abbildung $F_i : G_i \rightarrow \mathbb{E}^3$, die durch die Parametertransformation $\varphi : G_2 \rightarrow G_1$ miteinander verbunden sind, gilt (wegen der Kettenregel): F_2 hat genau dann in $p \in G_2$ eine Singularität, wenn F_1 in $\varphi(p)$ eine Singularität hat. Das bedeutet: Das Auftreten von Singularitäten ist eine Eigenschaft der mS-Fläche $[F_1] = [F_2]$, und nicht etwa eine Eigenschaft einzelner (vielleicht ungeschickt gewählter) Parametrisierungen dieser Fläche.

Um zu starke Entartungen zu vermeiden, werden wir uns nur mit mS-Flächen befassen, die (in einem jeweils noch zu spezifizierenden Sinne) „nicht zu viele“ Singularitäten besitzen. Eine besonders wichtige Rolle werden die „singularitätenfreien mS-Flächen“ spielen. Da wir uns diese sprachliche Verrenkung nicht antun wollen, definieren wir:

Definition 2. Eine C^r -mS-Fläche ohne Singularitäten heißt C^r -Fläche.

F ist in einem Punkt $(t, s) \in G$ genau dann regulär, wenn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial t}(t, s)$ und $\frac{\partial F}{\partial s}(t, s)$ linear unabhängig sind, und das ist genau dann der Fall, wenn die *Gramsche Determinante*

$$\det(g_{ik})_{i,k=1,2} \quad \text{mit} \quad g_{ik} := \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_k} \right\rangle$$

bzw. deren Wurzel

$$\rho_F := \sqrt{\det(g_{ik})_{i,k=1,2}},$$

das sogenannte *Flächenelement*, an der Stelle (t, s) positiv ist. (Man beachte, dass die Gramsche Determinante stets ≥ 0 ist.) Ist auf dem \mathbb{E}^3 eine Orientierung gegeben, und bezeichnet \times das dazu zugehörige Kreuzprodukt auf \mathbb{E}_L^3 , so gilt aufgrund der Lagrange-Identität (siehe Abschnitt 1.7, Aussage 4(d))

$$\rho_F = \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s} \right\|.$$

Dabei benutzen wir die Schreibweisen $\frac{\partial F}{\partial t}$ und $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ bzw. die Schreibweisen $\frac{\partial F}{\partial s}$ und $\frac{\partial F}{\partial x_2}$ als völlig gleichwertig nebeneinander; wir benutzen die eine oder die andere Schreibweise nach lediglich praktischen Erwägungen.

Die Koeffizienten g_{ik} in dieser Gramschen Determinante werden später, bei der Untersuchung der Geometrie der Fläche, von „fundamentaler“ Bedeutung sein. — Die Kurven $F_t : s \mapsto F(t, s)$

und $F^s : t \mapsto F(t, s)$ heißen *Parameterlinien* der Parametrisierung F . Natürlich führen unterschiedliche Parametrisierungen derselben Fläche im Allgemeinen auch zu unterschiedlichen Parameterlinien.

Warum nennt man ρ_F das Flächenelement von F ? Das liegt daran, dass man mit seiner Hilfe den Flächeninhalt von Flächen messen kann. Seien nämlich $F_i : G_i \rightarrow \mathbb{E}^3$ zwei Parametrisierungen derselben C^1 -mS-Fläche und $\varphi : G_2 \rightarrow G_1$ eine dazugehörige Parametertransformation (das heißt $F_2 = F_1 \circ \varphi$). Weiterhin seien $K_i \subset G_i$ kompakte Teilmengen mit $\varphi(K_2) = K_1$. Dann gilt $F_1(K_1) = F_2(K_2)$, und nach dem Transformationssatz der reellen Analysis gilt für jede stetige Funktion f auf $F_1(K_1) = F_2(K_2)$

$$\int_{K_1} (f \circ F_1) \cdot \rho_{F_1} d\lambda^2 = \int_{K_2} (f \circ F_2) \cdot \rho_{F_2} d\lambda^2,$$

insbesondere

$$\int_{K_1} \rho_{F_1} d\lambda^2 = \int_{K_2} \rho_{F_2} d\lambda^2.$$

Das letztere Integral nennen wir per definitionem den *Flächeninhalt* des von $F_i|_{K_i}$ beschriebenen „mS-Flächenstückes“.

5.2 Beispiele für Flächen

Graphenflächen. Es sei $(p_0; a_1, a_2, a_3)$ ein KKS von \mathbb{E} , $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^r -Funktion. Dann parametrisiert

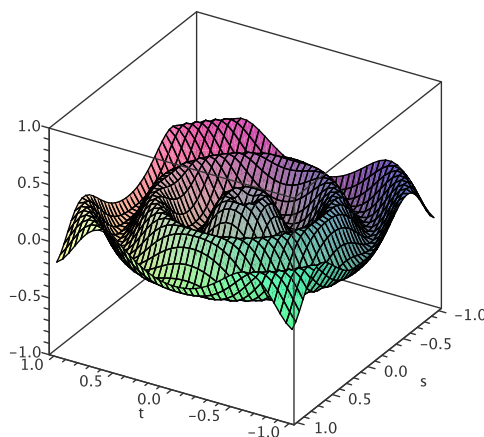
$$F : G \rightarrow \mathbb{E}, (t, s) \mapsto p_0 + t a_1 + s a_2 + f(t, s) a_3$$

eine singularitätenfreie C^r -Fläche, die sogenannte *Graphenfläche* zu f . Für ihr Flächenelement gilt

$$\rho_F = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2},$$

deshalb haben Graphenflächen keine Singularitäten.

Das folgende Bild zeigt als Beispiel die Graphenfläche zur Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, s) \mapsto \frac{1}{5} \sin(12\sqrt{t^2 + s^2})$:



Wie wir in Abschnitt 5.5 sehen werden, läßt sich jede singularitätenfreie Fläche lokal als Graphenfläche parametrisieren.

Rotationsflächen. Wir wählen ein KKS $(p_0; a_1, a_2, a_3)$ von \mathbb{E} und benutzen das Einheitsvektorfeld

$$\Gamma_{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}, \quad t \mapsto \cos(t) a_1 + \sin(t) a_2$$

wie es am Anfang von Kapitel 4 eingeführt wurde. Weiter sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^r -Kurve, deren Komponenten wir mit $\alpha = (r, b)$ bezeichnen. Dann heißt die mS-Flächen-Parametrisierung

$$F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}, \quad (t, s) \mapsto p_0 + r(t) \cdot \Gamma_{\alpha}(s) + b(t) \cdot a_3$$

die (kanonische) Parametrisierung der *Rotationsfläche* zur *Profilkurve* α . Andere Bezeichnungen für „Rotationsfläche“ sind auch *Drehfläche* oder auf englisch *surface of revolution*. Die Parameterlinien F_t bzw. F^s heißen die *Breitenkreise* bzw. die *Meridiane* der Rotationsfläche.

Die Parametrisierung F hat genau dann in $(t, s) \in I \times \mathbb{R}$ eine Singularität, wenn $r(t) = 0$ ist. Will man Singularitäten ausschließen, so setzt man daher $r > 0$ voraus; dann ist $r(t)$ jeweils der Radius des Breitenkreises F_t .

Aufgabe. Ist in der beschriebenen Situation die Profilkurve α nach der Bogenlänge parametrisiert, und sind $c, d \in I$ mit $c < d$, so ist der Flächeninhalt des „Ringstückes“ $F|([c, d] \times [0, 2\pi])$

$$2\pi \cdot \int_c^d |r(t)| dt.$$

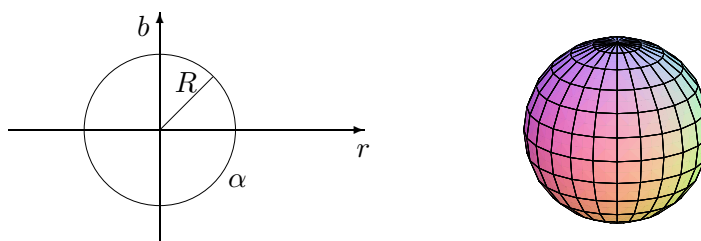
Spezielle Beispiele von Rotationsflächen.

- (a) **Die Sphäre $S_R(p_0)$** mit dem Radius $R > 0$. Diese ist die Rotationsfläche zur Profilkurve

$$\alpha(t) = R \cdot (\cos(t), \sin(t)).$$

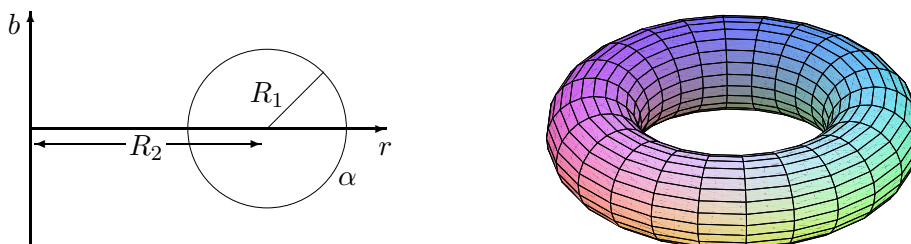
Sie hat Singularitäten in allen (t, s) mit $\cos(t) = 0$, also für $t \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

An diesem Beispiel zeigt sich eine wesentliche Schwäche „unserer“ Methode der Beschreibung von Flächen durch Parametrisierungen: Es gibt ganz wichtige und einfache Flächen, die sich nicht singularitätenfrei (global) parametrisieren lassen. (Zwar läßt sich die Sphäre mittels der stereographischen Projektion auch so parametrisieren, dass nur noch eine einzige Singularität am „Nordpol“ auftritt; aber besser geht’s einfach nicht.) — Um diese Schwierigkeit zu umgehen, muss man die Sphäre als „Untermannigfaltigkeit“ auffassen, indem man statt mit einer globalen Parametrisierung die Sphäre mit mehreren lokalen Parametrisierungen überdeckt. Wenn man über diesen Ansatz mehr hören möchte, sind die Vorlesungen *Analysis III* und *Riemannsche Geometrie* von Interesse.



- (b) **Der Torus** mit dem *Seelenradius* $R_1 > 0$ und dem *Wulstradius* $R_2 > R_1$ ist die (singularitätenfreie) Rotationsfläche zur Profilkurve

$$\alpha(t) = (R_2 + R_1 \cdot \cos(t), R_1 \cdot \sin(t)) .$$



5.3 Regelflächen

Eine weitere wichtige Klasse von Flächen sind die sogenannten *Regelflächen*. Sie entstehen dadurch, dass eine Gerade (auf kontinuierliche Weise) im Raum \mathbb{E}^3 bewegt wird.

Es sei also $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht-leeres, offenes Intervall, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine C^r -Kurve und $E : I \rightarrow \mathbb{E}_L^3$ ein C^r -Einheitsvektorfeld längs α (das soll heißen: E ist eine C^r -Funktion mit $\|E\| = 1$, deren Werte $E(t)$ wir uns jeweils an der Stelle $\alpha(t)$ angetragen denken). Um die Singularitätenmenge der Regelfläche klein zu halten, machen wir die Voraussetzung

$$\forall t \in I : (E'(t) \neq 0 \quad \text{oder} \quad \alpha'(t) \notin \mathbb{R} E(t)) . \quad (\text{S})$$

Dann heißt die durch die C^r -Parametrisierung

$$F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3, (t, s) \mapsto \alpha(t) + s \cdot E(t)$$

(welche eine Bewegung einer Geraden im Raum \mathbb{E}^3 entlang der Kurve α bei gleichzeitiger Ausrichtung der Geraden in die durch E gegebene Richtung beschreibt) definierte C^r -mS-Fläche die *Regelfläche* (englisch: *ruled surface*) zu den Daten (α, E) . Die Parameterlinien F_t (mit $t \in I$) sind offensichtlich Geraden; sie heißen die *Erzeugenden* der Regelfläche. F hat in $(t, s) \in I \times \mathbb{R}$ genau dann eine Singularität, wenn $(\alpha'(t) + sE'(t)) \in \mathbb{R} E(t)$ gilt.

Ist $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^r -Funktion und $\alpha_\lambda := \alpha + \lambda \cdot E$, so wird die Regelfläche $[F]$ ebenfalls durch die Abbildung

$$I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3, (t, s) \mapsto \alpha_\lambda(t) + s \cdot E(t)$$

parametrisiert. Indem man α in der Parametrisierung einer Regelfläche geeignet wählt — das heißt, indem man von α zu α_λ mit einer geschickt gewählten Funktion λ übergeht — kann man häufig die Untersuchung der Fläche wesentlich erleichtern.

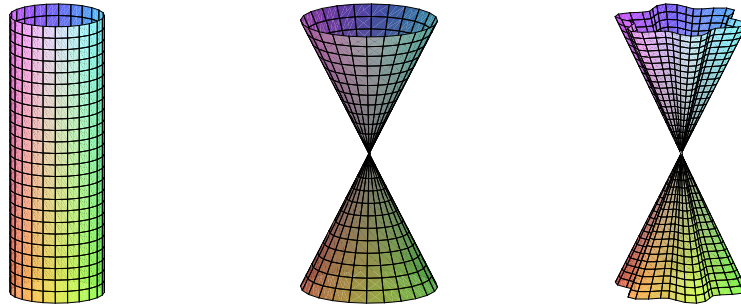
Aufgabe 1. Man kann die Kurve α stets so wählen, dass sie die Erzeugenden der Regelfläche senkrecht schneidet, d.h. dass $\langle \alpha', E \rangle = 0$ gilt.

Beispiele.

- (a) **Zylinder.** Ist $E \equiv \text{const.}$, so heißt die zugehörige Regelfläche ein *Zylinder*. In diesem Fall wählt man α wie in Aufgabe 1, dann ist α eine ebene Kurve; sie muss regulär sein, damit die Bedingung (S) erfüllt ist. Dieses Beispiel motiviert die folgende

Definition. Die von (α, E) erzeugte Regelfläche heißt *nirgends zylindrisch*, wenn $E'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt.

- (b) **Kegel.** Kann man die Regelfläche mit Hilfe einer „Punktkurve“, d.h. einer konstanten Kurve $\alpha \equiv p_0$, darstellen, so heißt sie ein *Kegel*. Damit die Voraussetzung (S) in diesem Falle erfüllt ist, muss $E'(t) \neq 0$ für alle t gelten. Das heißt also: Kegel sind nirgends zylindrisch. Die Singularitätenmenge S von F ist genau $I \times \{0\}$; ihr Bild unter F besteht genau aus dem Punkt p_0 , er heißt die *Spitze* des Kegels.



Wir wollen nun eine genauere Übersicht über die Lage der Singularitäten von F erhalten. Es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \alpha'(t) + s \cdot E'(t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial s} = E(t),$$

daher haben die in Abschnitt 5.1 eingeführten Funktionen g_{ik} für F die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} g_{11}(t, s) &= \|\alpha'(t)\|^2 + 2s \langle \alpha'(t), E'(t) \rangle + s^2 \|E'(t)\|^2 \\ g_{12}(t, s) &= g_{21}(t, s) = \langle \alpha'(t), E(t) \rangle + s \underbrace{\langle E'(t), E(t) \rangle}_{=0} \\ g_{22}(t, s) &= 1. \end{aligned}$$

Daher ist

$$P_t(s) := \det(g_{ik}(t, s))_{i,k} = a(t) \cdot s^2 + 2b(t) \cdot s + c(t)$$

mit den Funktionen

$$a = \|E'\|^2, \quad b = \langle \alpha', E' \rangle \quad \text{und} \quad c = \|\alpha'\|^2 - \langle \alpha', E \rangle^2.$$

Wir sehen also, dass für jedes $t \in I$ gilt:

F hat in (t, s) genau dann eine Singularität, wenn s eine Nullstelle des Polynoms P_t ist.

Man beachte, dass $c(t) = 0$ gerade bedeutet, dass $\alpha'(t) \in \mathbb{R}E(t)$ gilt (Gleichheitsdiskussion in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung!). Deshalb sorgt die Voraussetzung (S) gerade dafür, dass die Funktionen a , b und c für kein $t \in I$ gleichzeitig verschwinden. Daher gilt für die Nullstellenmenge $S(t)$ von P_t : $\#S(t) \leq 2$. Die Folgerung aus der folgenden Aussage zeigt jedoch, dass dieses Ergebnis noch verbessert werden kann.

Aussage 1.

(a) Ist $E'(t) = 0$, so ist das Polynom $P_t(s) = c(t)$ konstant mit $c(t) \neq 0$.

(b) Ist $E'(t) \neq 0$, so gilt

$$P_t(s) = a(t) \cdot ((s - m(t))^2 + \Delta(t)^2)$$

mit

$$m(t) := -\frac{b(t)}{a(t)} \quad \text{und} \quad \Delta(t) := \frac{\det(\alpha'(t), E(t), E'(t))}{a(t)}.$$

Beweis. Zu (a). Ist $E'(t) = 0$, so ist $a(t) = b(t) = 0$, aber $c(t) \neq 0$ wegen der Voraussetzung (S).

Zu (b). Wegen $E'(t) \neq 0$ ist $a(t) \neq 0$, daher sind $m(t)$ und $\Delta(t)$ wohldefiniert, und es gilt

$$P_t(s) = a(t) \cdot \left(\left(s^2 + 2 \frac{b(t)}{a(t)} s + \frac{b(t)^2}{a(t)^2} \right) + \left(\frac{c(t)}{a(t)} - \frac{b(t)^2}{a(t)^2} \right) \right) = a(t) \cdot ((s - m(t))^2 + \mu(t))$$

mit $\mu(t) := \frac{c(t)}{a(t)} - \frac{b(t)^2}{a(t)^2} = \frac{a(t)c(t) - b(t)^2}{a(t)^2}$. Daher genügt zu zeigen:

$$a(t)c(t) - b(t)^2 = \det(\alpha'(t), E(t), E'(t))^2.$$

Dazu setzen wir $\tilde{E} := \frac{1}{\|E'\|} \cdot E'$; wegen $\langle E', E \rangle = 0$ ist dann $(E, \tilde{E}, E \times \tilde{E})$ ein (zumindest in der Nähe von t definiertes) ONB-Feld längs α . Daher gilt

$$\|\alpha'\|^2 = \langle \alpha', E \rangle^2 + \langle \alpha', \tilde{E} \rangle^2 + \langle \alpha', E \times \tilde{E} \rangle^2$$

und daher

$$\begin{aligned} a(t)c(t) - b(t)^2 &= \|E'(t)\|^2 \cdot \left(\langle \alpha'(t), \tilde{E}(t) \rangle^2 + \langle \alpha'(t), E(t) \times \tilde{E}(t) \rangle^2 \right) - \langle \alpha'(t), E'(t) \rangle^2 \\ &= \langle \alpha'(t), E'(t) \rangle^2 + \langle \alpha'(t), E(t) \times E'(t) \rangle^2 - \langle \alpha'(t), E'(t) \rangle^2 \\ &= \langle \alpha'(t), E(t) \times E'(t) \rangle^2 = \det(E(t), E'(t), \alpha'(t))^2 = \det(\alpha'(t), E(t), E'(t))^2, \end{aligned}$$

woraus die behauptete Formel folgt. \square

Folgerung. Es gilt stets $\#S(t) \leq 1$, und zwar gilt $\#S(t) = 1$ genau dann, wenn

$$E'(t) \neq 0 \quad \text{und} \quad \det(\alpha'(t), E(t), E'(t)) = 0$$

ist. In diesem Falle ist $S(t) = \left\{ -\frac{b(t)}{a(t)} \right\}$.

Bemerkung. Ersetzt man die Kurve α durch eine Kurve α_λ (wie oben beschrieben), so ändern sich dadurch die Funktionen $a(t)$ und $\Delta(t)$ nicht.

Aussage 2. Ist die Regelfläche $[F]$ nirgends zylindrisch, so existiert genau eine C^{r-1} -Funktion $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für die Kurve $\alpha_\lambda := \alpha + \lambda \cdot E$ gilt: $\langle \alpha'_\lambda, E' \rangle = 0$. Diese Kurve α_λ heißt die *Striktionslinie* der Regelfläche.

Beweis. Ist $\alpha_\lambda = \alpha + \lambda E$ mit irgendeiner Funktion $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$, so gilt

$$\langle \alpha'_\lambda, E' \rangle = \langle \alpha' + \lambda' E + \lambda E', E' \rangle = \langle \alpha', E' \rangle + \lambda \langle E', E' \rangle$$

wegen $\langle E, E' \rangle = 0$ und somit

$$\langle \alpha'_\lambda, E' \rangle = 0 \iff \lambda = -\frac{\langle \alpha', E' \rangle}{\langle E', E' \rangle}.$$

Hieraus folgt sowohl die behauptete Existenz als auch die Eindeutigkeit. \square

Voraussetzungen für den Rest dieses Abschnitts. Wir setzen nun voraus, dass die Regelfläche $[F]$ nirgends zylindrisch ist. Weiter setzen wir voraus, dass die Kurve α die Striktionslinie von $[F]$ ist. Die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen seien so, dass diese Kurve C^r ist.

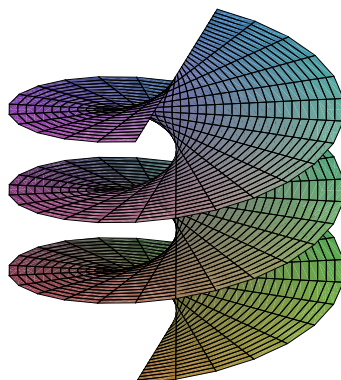
In dieser Situation gilt $m \equiv 0$, und daher: Die Parametrisierung F der Regelfläche hat genau dann in $(t, s) \in I \times \mathbb{R}$ eine Singularität, wenn

$$\det(\alpha'(t), E(t), E'(t)) = 0 \quad \text{und} \quad s = 0$$

gilt. Insbesondere liegen alle Singularitäten einer nirgends zylindrischen Regelfläche auf ihrer Striktionslinie.

Weitere Beispiele für Regelflächen. Hierfür setzen wir \mathbb{IE}^3 als orientiert voraus, und fixieren ein positiv orientiertes KKS $(p_0; a_1, a_2, a_3)$. Wir bezeichnen mit (x, y, z) die dazu gehörigen Koordinatenfunktionen (siehe Abschnitt 1.4), und setzen $\Gamma(t) := \cos(t) \cdot a_1 + \sin(t) \cdot a_2$ wie in Kapitel 4.

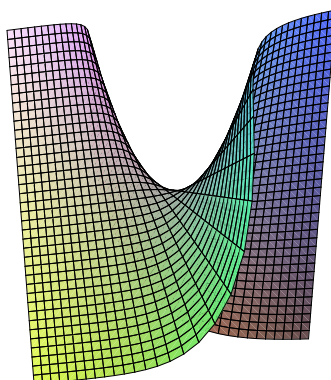
- (a) **Die Wendelfläche.** Sie ist die Regelfläche mit $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IE}^3$, $t \mapsto p_0 + b t \cdot a_3$ (wobei $b \neq 0$ ist), und $E = \Gamma$.



- (b) **Die Sattelfläche (oder hyperbolisches Paraboloid).** Sie wird die durch die Gleichung $z = x^2 - y^2$ beschrieben, d.h. als Punktmenge ist diese Fläche $\{p \in \mathbb{IE}^3 \mid z(p) = x(p)^2 - y(p)^2\}$. Diese Punktmenge ist das Bild der Regelflächenparametrisierung, die durch

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IE}^3, \quad t \mapsto p_0 + t \cdot (a_1 + a_2) \quad \text{und} \quad E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IE}_L^3, \quad t \mapsto (a_1 - a_2 + 4t \cdot a_3) / \sqrt{2 + 16t^2}$$

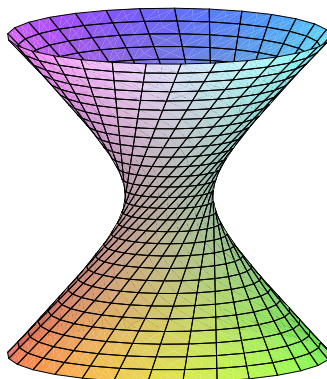
induziert wird.



- (c) **Das einschalige Hyperboloid.** Dieses wird durch die Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ beschrieben und ist das Bild der Regelflächenparametrisierung, die durch

$$\alpha := p_0 + \Gamma \quad \text{und} \quad E := (\Gamma' + a_3)/\sqrt{2}$$

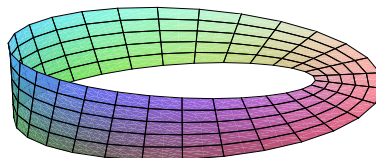
beschrieben wird. (Das *zweischalige Hyperboloid* kann hingegen *nicht* als Regelfläche dargestellt werden.)



- (d) **Das (unendlich ausgedehnte) Möbiusband** ist die Regelfläche, die durch

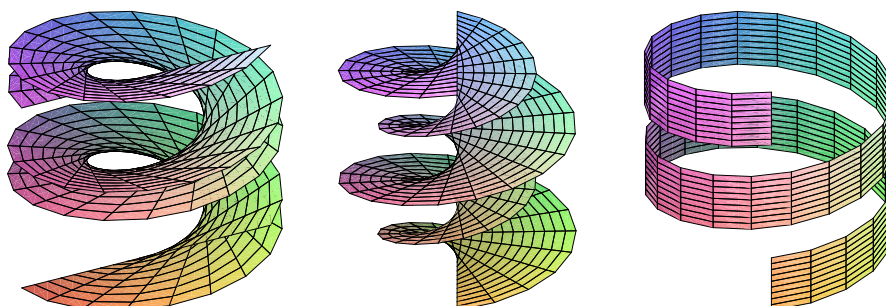
$$\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{E}^3, t \mapsto p_0 + \Gamma(t) \quad \text{und} \\ E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_L^3, t \mapsto \cos(t/2) \cdot \Gamma(t) + \sin(t/2) \cdot a_3$$

induziert wird.



- (e) **Die Tangentenfläche, Hauptnormalenfläche und Binormalenfläche einer regulären C^3 -Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ mit $\kappa_\alpha > 0$.** Es sei $(T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha)$ das Frenet-3-Beinfeld zu α , dann sind die *Tangenten*-, *Hauptnormalen*- und *Binormalenfläche* zu α die Regelflächen, die zur Kurve α mit $E = T_\alpha$, $E = N_\alpha$ bzw. $E = B_\alpha$ induziert werden.

Die folgenden Bilder zeigen diese Flächen für eine Schraubenlinie α . Man beachte, dass die Hauptnormalenfläche einer Schraubenlinie eine Wendelfläche ist (wenn auch α nicht die Striktionslinie dieser Wendelfläche ist, siehe (a)).



Aufgabe 2. Man bestimme für die vorstehenden Beispiele die Singularitäten und gegebenenfalls die Striktionslinien. Sind letztere auffällige Kurven der jeweiligen mS-Fläche?

Aufgabe 3. Kegel und Tangentenflächen als Beispiele „singularitätenreicher“ Regelflächen. Es sei $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, $(t, s) \mapsto \alpha(t) + s \cdot E(t)$ eine Parametrisierung einer nirgends zylindrischen Regelfläche, wobei wir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ bereits als die Striktionslinie dieser Regelfläche voraussetzen. Nun sei jeder Punkt dieser Striktionslinie eine Singularität von F , genauer gesagt, es gelte:

$$\det(\alpha', E, E') \equiv 0.$$

Beispielsweise liegt dieser Fall vor, wenn $\alpha = \text{const.}$, also $[F]$ ein Kegel ist. In dieser Aufgabe soll der dazu „konträre“ Fall betrachtet werden, dass die Kurve α regulär ist. Man zeige, dass dann $[F]$ die Tangentenfläche der nach der Bogenlänge parametrisierten Striktionslinie ist.

5.4 Das Tangential- und Normalbündel einer Fläche

Wir werden in diesem Abschnitt das Tangential- und das Normalenbündel für C^r -Flächenparametrisierungen (ohne Singularitäten) einführen. Die folgende Aussage erlaubt es uns, diese Konstruktionen auch auf den „singularitätenfreien“ Teil einer C^r -mS-Flächenparametrisierung anzuwenden.

Wie gehabt sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet.

Aussage 1. Ist $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine C^r -Abbildung, so ist die Menge G_F derjenigen Punkte $p \in G$, in denen F regulär ist, eine offene Teilmenge von G . Ist $G_F \neq \emptyset$, so ist daher $F|_{G_F}$ eine Immersion, und daher sind die Einschränkungen von F auf die einzelnen Zusammenhangskomponenten von G_F jeweils Parametrisierungen von C^r -Flächen.

Beweis. Es gilt $G_F = \rho_F^{-1}(\mathbb{R}_+)$, wobei ρ_F das Flächenelement von F bezeichnet (siehe Abschnitt 4.1). Also ist G_F als das Urbild der offenen Menge \mathbb{R}_+ unter der stetigen Abbildung $\rho_F : G \rightarrow \mathbb{R}$ offen in G . \square

Definition. Sei $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine C^r -Immersion und $p \in G$. Dann definieren wir den *Tangentenraum* $T_p F$ von F in p durch

$$T_p F := d_p F(\mathbb{R}^2) = \text{span} \left\{ \frac{\partial F}{\partial t}(p), \frac{\partial F}{\partial s}(p) \right\} \subset \mathbb{E}_L^3$$

und den *Normalenraum* $\perp_p F$ von F in p als das Orthokomplement von $T_p F$ in \mathbb{E}_L^3 , also

$$\perp_{(t,s)} F = \mathbb{R} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial t}(p) \times \frac{\partial F}{\partial s}(p) \right).$$

Die Familie $TF := (T_p F)_{p \in G}$ aller Tangentialräume von F bzw. die Familie $\perp F := (\perp_p F)_{p \in G}$ aller Normalenräume von F heißt das *Tangentenbündel* bzw. das *Normalenbündel* von F . Weiterhin definieren wir die Vektorräume $\Gamma^{(s)}(TF)$ der C^s -Tangentenfelder bzw. $\Gamma^{(s)}(\perp F)$ der C^s -Normalenfelder von F (mit $s \leq r$) durch

$$\Gamma^{(s)}(TF) := \{ Y : G \rightarrow \mathbb{E}_L^3 \mid Y \text{ ist } s\text{-mal stetig differenzierbar und } \forall p \in G : Y(p) \in T_p F \},$$

$$\Gamma^{(s)}(\perp F) := \{ \xi : G \rightarrow \mathbb{E}_L^3 \mid \xi \text{ ist } s\text{-mal stetig differenzierbar und } \forall p \in G : \xi(p) \in \perp_p F \}.$$

Beispiel. Ist $X : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein C^s -Vektorfeld mit $s \leq r - 1$, so ist $F_*X := dF(X) : p \mapsto d_p F(X(p))$ ein C^s -Tangentialfeld von F ; siehe auch die Folgerung in Abschnitt 5.5.

Die folgende Aussage zeigt, dass das Tangential- und das Normalenbündel „invariante“ Objekte der Fläche $[F]$ sind.

Aussage 2. Sind $F_i : G_i \rightarrow \mathbb{E}^3$ zwei Parametrisierungen derselben Fläche, ist $\varphi : G_2 \rightarrow G_1$ eine dazugehörige Parametertransformation, und ist $p \in G_2$, so gilt

$$T_p F_2 = T_{\varphi(p)} F_1 \quad \text{und} \quad \perp_p F_2 = \perp_{\varphi(p)} F_1 .$$

Beweis. Es gilt also $F_2 = F_1 \circ \varphi$ und daher nach Kettenregel

$$T_p F_2 = d_p F_2(\mathbb{R}^2) = d_p(F_1 \circ \varphi)(\mathbb{R}^2) = d_{\varphi(p)} F_1(d_p \varphi(\mathbb{R}^2)) = d_{\varphi(p)} F_1(\mathbb{R}^2) = T_{\varphi(p)} F_1 .$$

Daraus folgt auch $\perp_p F_2 = (T_p F_2)^\perp = (T_{\varphi(p)} F_1)^\perp = \perp_{\varphi(p)} F_1$. \square

5.5 Lokale Parametrisierung von Flächen als Graphenflächen

Es sei $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine C^r -Flächenparametrisierung (ohne Singularitäten). Das folgende Theorem zeigt, dass sich die Fläche $[F]$ lokal als Graphenfläche auffassen lässt, siehe Abschnitt 5.2.

Theorem. Zu jedem Punkt $p_0 \in G$ existiert ein Gebiet $U \subset G$ mit $p_0 \in U$, so dass $[F|U]$ eine Graphenfläche über der (affinen) Tangentialebene $F(p_0) + T_{p_0} F$ ist, genauer gesagt: Ist $(F(p_0); a_1, a_2, a_3)$ ein positiv orientiertes KKS von \mathbb{E}^3 mit $\text{span}\{a_1, a_2\} = T_{p_0} F$, so existiert ein Gebiet $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ mit $0 \in \tilde{U}$ und eine C^r -Funktion $f : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass die C^r -Graphenflächenparametrisierung

$$\tilde{F} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{E}^3, (t, s) \mapsto F(p_0) + t \cdot a_1 + s \cdot a_2 + f(t, s) \cdot a_3 \quad (*)$$

eine weitere Parametrisierung von $[F|U]$ ist. Dabei gilt $f(0) = 0$ und $d_0 f = 0$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass es ein KKS $(p_0; a_1, a_2, a_3)$ von \mathbb{E}^3 von der im Theorem benannten Art gibt: Durch Anwendung des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens auf $(\frac{\partial F}{\partial t}(p_0), \frac{\partial F}{\partial s}(p_0))$ erhalten wir zwei orthonormale Vektoren a_1 und a_2 ; setzen wir außerdem $q_0 := F(p_0)$ und $a_3 := a_1 \times a_2$, so ist $(q_0; a_1, a_2, a_3)$ ein positiv orientiertes KKS mit $\text{span}\{a_1, a_2\} = T_{p_0} F$. Mit x_1, x_2, x_3 bezeichnen wir die zu diesem KKS gehörenden Koordinatenfunktionen.

Damit definieren wir eine Funktion $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $\varphi_k := x_k \circ F = \langle F - q_0, a_k \rangle$ für $k \in \{1, 2\}$. Es ist $\varphi(p_0) = 0$ und $\det(d_{p_0} \varphi) = \det(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(p_0)) = \det(\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(p_0), a_k \rangle) > 0$. Also ist $d_{p_0} \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Vektorraum-Isomorphismus. Nach dem lokalen Umkehrsatz existieren daher Gebiete $U \subset G$ mit $p_0 \in U$ und $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ mit $0 = \varphi(p_0) \in \tilde{U}$, so dass $\varphi|U : U \rightarrow \tilde{U}$ ein C^r -Diffeomorphismus ist.

Definieren wir nun

$$f := x_3 \circ F \circ (\varphi|U)^{-1} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

und damit \tilde{F} gemäß der Formel (*), so erhalten wir $f(0) = 0$ und

$$F|U = q_0 + \sum_{k=1}^3 (x_k \circ F) \cdot a_k = q_0 + \varphi_1 \cdot a_1 + \varphi_2 \cdot a_2 + (f \circ \varphi) \cdot a_3 = \tilde{F} \circ \varphi|U .$$

Also sind $F|U$ und $\tilde{F}|\tilde{U}$ zwei C^r -äquivalente Parametrisierungen. Differenzieren wir die letzte Gleichung an der Stelle p_0 , so erhalten wir für jedes $v \in \mathbb{R}^2$

$$d_{p_0}F(v) = d_{p_0}\varphi_1(v) \cdot a_1 + d_{p_0}\varphi_2(v) \cdot a_2 + d_0f(d_{p_0}\varphi(v)) \cdot a_3.$$

Wegen $d_{p_0}F(v) \in T_{p_0}F$ ist $0 = \langle d_{p_0}F(v), a_3 \rangle = d_0f(d_{p_0}\varphi(v))$ und somit $d_0f \circ d_{p_0}\varphi = 0$. Weil $d_{p_0}\varphi$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist, folgt $d_0f = 0$. \square

Wir halten fest, dass als Konsequenz aus diesem Theorem die Menge $F(U)$ eine (*reguläre*) *Untermannigfaltigkeit* von \mathbb{E}^3 ist.

Folgerung. Ist Y ein C^s -Tangentialfeld von F mit $0 \leq s \leq r-1$, so existiert genau ein C^s -Vektorfeld $X : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $Y = F_*X$ (siehe auch das Beispiel in Abschnitt 5.4).

Beweis. Da für jedes $p \in G$ jeweils $d_pF : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_pF$ bijektiv ist, existiert genau eine Abbildung $X : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $d_pF(X(p)) = Y(p)$. Wir haben zu zeigen, dass diese Abbildung X C^s -differenzierbar ist. Dazu verwenden wir die Bezeichnungen aus dem Beweis des Theorems.

Es sei $W := (x_1, x_2)^{-1}(\tilde{U})$, dies ist eine offene Teilmenge von \mathbb{E} . Ist $p \in U$, so ist $(x_1, x_2) \circ F(p) = \varphi(p) \in \tilde{U}$ und somit $F(p) \in W$. Daher können wir das C^s -Vektorfeld $Z : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $p \mapsto d_{F(p)}(\varphi^{-1} \circ (x_1, x_2))(Y_p)$ definieren. Wegen $\varphi^{-1} \circ (x_1, x_2) \circ F|U = \text{id}_U$ und der Kettenregel gilt für jeden Punkt $p \in U$

$$Z_p = d_{F(p)}(\varphi^{-1} \circ (x_1, x_2))(d_pF(X_p)) = d_p(\varphi^{-1} \circ (x_1, x_2) \circ F)(X_p) = X_p.$$

Somit ist $X|U = Z$, und also ist $X|U$ C^s -differenzierbar. Indem man nun den Punkt $p_0 \in G$ aus dem Theorem ganz G durchlaufen läßt (folglich U variiert), sieht man, dass X überall C^s -differenzierbar ist. \square

5.6 Der Maßtensor einer Flächenparametrisierung

In diesem Abschnitt beginnen wir damit, das Handwerkszeug zu entwickeln, um auf Flächen *Geometrie* zu betreiben. Die leitende Idee dabei ist, dass man die Geometrie der durch eine C^r -Flächenparametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ beschriebenen Fläche $[F]$ durch Größen beschreibt, die auf G definiert sind. Die erste derartige Größe ist der *Maßtensor* von F , der es uns ermöglicht, Längen und Winkel für Kurven auf der Fläche $[F]$ zu messen.

Aber zunächst müssen wir sagen, was „Kurven auf der Fläche“ sein sollen:

Definition 1. Eine C^s -Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ (mit $1 \leq s \leq r$) heißt eine *C^s -Kurve der C^r -mS-Fläche $[F]$* , wenn es für eine (und damit für jede) Parametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ dieser mS-Fläche eine C^s -Kurve $\alpha : I \rightarrow G$ mit $\gamma = F \circ \alpha$ gibt.

Wir wollen nun die Länge $L(\gamma)$ einer solchen „Flächenkurve“ mittels α ausrechnen. Dazu definieren wir für jedes $p \in G$ die symmetrische Bilinearform

$$g_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto \langle d_pF(u), d_pF(v) \rangle$$

und damit die C^{r-1} -Funktion

$$g : G \rightarrow L_{sym}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), p \mapsto g_p,$$

den sogenannten *Maßtensor* oder die *erste Fundamentalform* der Parametrisierung F . Man beachte, dass $g_p(v, v) \geq 0$ für alle $p \in G, v \in \mathbb{R}^2$ gilt, und dass g_p genau dann ein Skalarprodukt ist, wenn F in p regulär ist.

Für $\gamma = F \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ und $t \in I$ erhalten wir nun

$$\gamma'(t) = (F \circ \alpha)'(t) = d_{\alpha(t)}F(\alpha'(t)) ,$$

also

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))$$

und somit für $I = [a, b]$

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt .$$

Ebenso können wir vermittle des Maßtensors den Winkel zwischen zwei Flächenkurven ausdrücken: Sind $\gamma = F \circ \alpha$ und $\delta = F \circ \beta$ zwei Flächenkurven mit $\alpha(t_1) = \beta(t_2) =: p_0$ (also auch $\gamma(t_1) = \delta(t_2)$), und sind α in t_1 , β in t_2 und F in p_0 regulär, so ist der Winkel zwischen $\gamma'(t_1)$ und $\delta'(t_2)$ gleich dem Winkel zwischen $\alpha'(t_1)$ und $\beta'(t_2)$ bezüglich des Skalarprodukts g_{t_0} .

Also kann man die beiden fundamentalen „Messungen“ der Geometrie, nämlich die Messung von Längen und von Winkeln, statt „auf der Fläche“ $[F]$ äquivalent auch im Gebiet G mit dem Maßtensor g durchführen.

Deshalb ist es ein naheliegender Abstraktionsschritt, das Paar (G, g) abstrakt zu definieren, und als eigenständiges Objekt zu untersuchen.

Definition 2. Ist G ein Gebiet des \mathbb{R}^n und $k \in \mathbb{N}$, so heißen die Funktionen $G \rightarrow L^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ bzw. $G \rightarrow L^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *Tensorfelder vom Typ $(0, k)$ bzw. $(1, k)$* auf G . Ein stetiges, symmetrisches Tensorfeld g vom Typ $(0, 2)$, so dass g_p für jedes $p \in G$ ein positiv definites Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n ist, heißt eine *Riemannsche Metrik* auf G ; in diesem Fall nennen wir das Paar (G, g) ein *Riemannsches Gebiet*. Ist g außerdem C^r -differenzierbar, so nennen wir (G, g) ein *Riemannsches C^r -Gebiet*.

Beispiele 1.

- (a) Die alternierenden Differentialformen vom Grad k sind Beispiele für Tensorfelder vom Typ $(0, k)$.
- (b) Der Maßtensor g der Parametrisierung F einer mS-Fläche $[F]$ ist ein Tensorfeld vom Typ $(0, 2)$; er ist eine Riemannsche Metrik genau dann, wenn $[F]$ singularitätenfrei ist. In diesem Falle ist (G, g) also ein Riemannsches Gebiet.
- (c) Die *kanonische Riemannsche Metrik von \mathbb{R}^n* ist die konstante Funktion $g \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt von \mathbb{R}^n bezeichnet.

Darstellung Riemannscher Metriken. Ist (G, g) ein n -dimensionales Riemannsches Gebiet, (e_1, \dots, e_n) die kanonische Basis des \mathbb{R}^n und jeweils

$$g_{ik} : G \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto g_p(e_i, e_k) ,$$

so gilt $g_{ik} = g_{ki}$ und für alle $p \in G$ und $v, w \in \mathbb{R}^n$ nach dem Beispiel (b) aus Abschnitt 1.7

$$g_p(v, w) = \sum_{i,k=1}^n g_{ik}(p) \cdot v_i \cdot w_k .$$

Somit gilt für jede C^1 -Kurve $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : I \rightarrow G$

$$g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) = \sum_{i,k} g_{ik}(\alpha(t)) \cdot \alpha'_i(t) \cdot \alpha'_k(t) .$$

Da man im Falle $I = [a, b]$ die Länge der Kurve α bezogen auf das Riemannsche Gebiet (G, g) als

$$L(\alpha) := \int_a^b \sqrt{g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt$$

definiert, werden derartige Riemannsche Metriken häufig auch als

$$ds^2 = \sum g_{ik} \cdot dx_i \cdot dx_k$$

notiert; man spricht dann manchmal auch vom „Quadrat des Linienelements“.

Man beachte: Ist g der Maßtensor einer Parametrisierung F , so stimmen die hiesigen C^{r-1} -Funktionen g_{ik} mit den in Abschnitt 5.1 eingeführten Funktionen überein.

Beobachtung. Es seien (G, g) ein n -dimensionales Riemannsches C^r -Gebiet und (X_1, \dots, X_n) ein C^r -Basisfeld auf G , das soll heißen: $X_i : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist jeweils ein C^r -Vektorfeld und für jedes $p \in G$ ist $(X_1(p), \dots, X_n(p))$ eine Basis des \mathbb{R}^n . Wendet man jeweils auf $(X_1(p), \dots, X_n(p))$ das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren bezüglich des Skalarprodukts g_p an, so erhält man ein C^r -ONB-Feld (E_1, \dots, E_n) des Riemannschen Gebiets (G, g) , das soll heißen: $E_i : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist jeweils ein C^r -Vektorfeld und für jedes $p \in G$ ist $(E_1(p), \dots, E_n(p))$ eine ONB von \mathbb{R}^n bezüglich g_p .

Beweis. An den Formeln des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens sieht man, dass dieses Verfahren die Differenzierbarkeitsordnung r erhält. \square

Anwendung. Ist (a_1, \dots, a_n) eine Basis des \mathbb{R}^n , so kann man diese Beobachtung mit $(X_1, \dots, X_n) \equiv (a_1, \dots, a_n)$ anwenden. Daraus folgt insbesondere, dass jedes Riemannsche Gebiet ein C^r -ONB-Feld besitzt.

Beispiele 2.

- (a) **Der Maßtensor einer Graphenfläche.** Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 5.2 zu Graphenflächen gilt

$$g_{11}(t, s) = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2, \quad g_{12}(t, s) = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial f}{\partial s} \quad \text{und} \quad g_{22}(t, s) = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2 .$$

- (b) **Der Maßtensor einer Rotationsfläche.** Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 5.2 zu Rotationsflächen gilt

$$g_{11}(t, s) = r'(t)^2 + b'(t)^2, \quad g_{12}(t, s) = 0 \quad \text{und} \quad g_{22}(t, s) = r(t)^2 .$$

Daraus folgt, dass die Parameterlinien F_t und F^s einer Rotationsflächenparametrisierung in (t, s) zueinander orthogonal sind.

Insbesondere gilt für die *geographische Parametrisierung der Sphäre* $S_R(p_0)$ (das heißt, für die in Beispiel (a) aus Abschnitt 5.2 beschriebene Rotationsflächenparametrisierung von $S_R(p_0)$), wenn wir (t, s) durch die in diesem Falle üblichen Bezeichnungen (ϑ, φ) ersetzen,

$$g_{11}(\vartheta, \varphi) = R^2, \quad g_{12}(\vartheta, \varphi) = 0 \quad \text{und} \quad g_{22}(\vartheta, \varphi) = R^2 \cdot \cos(\vartheta)^2.$$

Daher lautet das Quadrat des Linienelements in diesem Fall

$$ds^2 = R^2 \cdot (d\vartheta^2 + \cos(\vartheta)^2 \cdot d\varphi^2).$$

- (c) **Der Maßtensor einer Regelfläche.** Für den Maßtensor einer Regelflächenparametrisierung gilt nach Abschnitt 5.3 mit den dortigen Bezeichnungen

$$\begin{aligned} g_{11}(t, s) &= \|\alpha'(t)\|^2 + 2s \langle \alpha'(t), E'(t) \rangle + s^2 \|E'(t)\|^2 \\ g_{12}(t, s) &= \langle \alpha'(t), E(t) \rangle \\ g_{22}(t, s) &= 1. \end{aligned}$$

Volumenform und komplexe Struktur eines 2-dimensionalen Riemannschen Gebietes. Sei (G, g) ein n -dimensionales Riemannsches Gebiet. Dann bezeichnen wir für jedes $p \in G$ mit V_p den \mathbb{R}^n , versehen mit dem Skalarprodukt g_p und der kanonischen Orientierung. Auf diese Weise erhalten wir ein ganzes „Bündel“ $(V_p)_{p \in G}$ orientierter euklidischer Vektorräume.

Nach Abschnitt 1.7 ist jedem V_p eine Determinatenform, die wir hier mit ω_p bezeichnen wollen, zugeordnet. (Zur Erinnerung: Ist (a_1, \dots, a_n) eine positiv orientierte ONB von V_p , so ist ω_p die durch $\omega_p(a_1, \dots, a_n) = 1$ charakterisierte alternierende n -Linearform auf V_p .) Nach Beispiel (b) aus Abschnitt 1.7 gilt $\omega_p = \rho_p \cdot \det$ mit dem *Volumenelement* $\rho_p := \sqrt{\det(g_{ik}(p))}$ (ist g der Maßtensor einer Flächenparametrisierung F , so stimmt dieses Volumenelement offenbar mit dem in Abschnitt 5.1 definierten Flächenelement überein). Auf diese Weise erhält man auf G eine Differentialform $\omega : p \mapsto \omega_p$ vom Grad n . ω heißt die *Volumenform* des Riemannschen Gebiets (G, g) .

Ist $n = 2$, so bezeichne J_p die *Vierteldrehung* des orientierten euklidischen Vektorraums V_p (siehe Aussage 3 in Abschnitt 1.7), also diejenige lineare Abbildung $J_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die durch

$$g_p(J_p u, v) = \omega_p(u, v) \quad \text{für alle } u, v \in \mathbb{R}^2$$

charakterisiert ist. Dadurch erhalten wir ein Tensorfeld $J : p \mapsto J_p$ vom Typ (1,1) auf G . J heißt die *komplexe Struktur* des Riemannschen Gebiets (G, g) .*

Wir beenden den Abschnitt mit dem Begriff der „Isomorphie“ für Riemannsche Gebiete.

*Bemerkung für Kenner: Durch die komplexe Struktur J wird G zu einer *Riemannschen Fläche* im Sinne der komplexen Analysis.

Definition 3. Es seien (G, g) und (\tilde{G}, \tilde{g}) zwei Riemannsche Gebiete.

- (a) Ein Diffeomorphismus $\varphi : \tilde{G} \rightarrow G$ heißt eine *Isometrie* zwischen diesen Riemannschen Gebieten, wenn

$$\forall p \in \tilde{G}, u, v \in \mathbb{R}^n : \tilde{g}_p(u, v) = g_{\varphi(p)}(d_p\varphi(u), d_p\varphi(v))$$

gilt.

- (b) Sind F, \tilde{F} zwei Flächenparametrisierungen und (G, g) bzw. (\tilde{G}, \tilde{g}) die dazu gehörenden Riemannschen Gebiete, und existiert eine Isometrie $\varphi : (\tilde{G}, \tilde{g}) \rightarrow (G, g)$, so sagt man, dass die beiden Flächen zueinander *isometrisch* sind.

Zum Teil (b) der letzten Definition beachte man, dass wenn F und \tilde{F} zwei Parametrisierungen derselben Fläche sind, es also einen Diffeomorphismus $\varphi : \tilde{G} \rightarrow G$ mit $\tilde{F} = F \circ \varphi$ gibt, dann φ eine Isometrie zwischen den Riemannschen Gebieten (\tilde{G}, \tilde{g}) und (G, g) ist. Dies folgt einfach aufgrund der Kettenregel.

Aufgabe 1. Ein Diffeomorphismus $\varphi : (\tilde{G}, \tilde{g}) \rightarrow (G, g)$ ist genau dann eine Isometrie, wenn für jede C^1 -Kurve $\alpha : [a, b] \rightarrow \tilde{G}$ gilt: $L(\varphi \circ \alpha) = L(\alpha)$.

Aufgabe 2. Eine isometrische Deformation der Wendelfläche in das Katenoid. Es sei $(p_0; \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3))$ ein KKS und

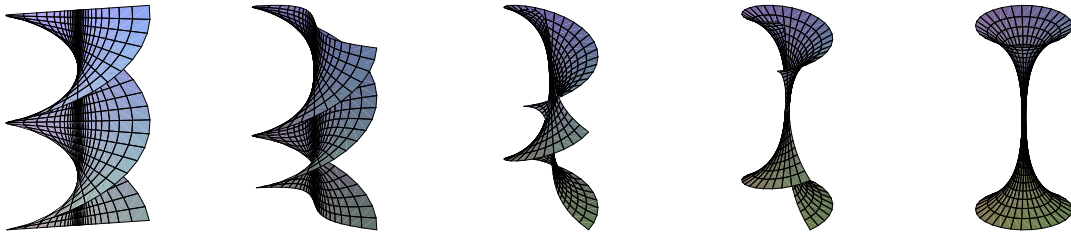
$$F : [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3, (\tau, t, s) \mapsto p_0 + \cos(\tau) \cdot \sinh(s) \cdot \Gamma_{\mathbf{a}}(t) + \sin(\tau) \cdot \cosh(s) \cdot \Gamma'_{\mathbf{a}}(t) \\ + (t \cdot \cos(\tau) + s \cdot \sin(\tau)) \cdot a_3.$$

- (a) Für jedes $\tau \in [0, \pi/2]$ ist die Abbildung $F_\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3, (t, s) \mapsto F(\tau, t, s)$ eine Parametrisierung einer singularitätenfreien Fläche.
- (b) Man bestimme die „Koeffizienten“ g_{ik}^τ des Maßtensors der Parametrisierung F_τ .
- (c) F_0 ist eine Parametrisierung der Wendelfläche, wie sie im Weiteren Beispiel (a) aus Abschnitt 5.3 beschrieben ist, und zwar mit $b = 1$.
- (d) $F_{\pi/2}$ ist eine Parametrisierung des Katenoids. Die Standardparametrisierung des *Katenoids* ist die Rotationsflächenparametrisierung mit der *Kettenlinie*

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cosh(t), t)$$

als Profilkurve.

- (e) Alle durch die F_τ beschriebenen Flächen sind zueinander isometrisch. Man sagt auch, dass durch die Abbildung F eine isometrische Deformation der Wendelfläche $[F_0]$ in das Katenoid $[F_{\pi/2}]$ beschrieben wird.



(Eine Animation zur Deformation der Wendelfläche ins Katenoid findet sich auf der Webseite zur Vorlesung.)

Aufgabe 3. Papiermodelle für Tangentenflächen. Es seien $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine C^1 -Funktion und $\Omega(\kappa)$ die Menge aller nach Bogenlänge parametrisierter C^3 -Kurven $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ mit der Krümmung $\kappa_\alpha = \kappa$. Dann sind die Tangentenflächen von je zwei Kurven $\alpha, \beta \in \Omega(\kappa)$ zueinander isometrisch. (Streng genommen muß man die Betrachtung auf die singularitätenfreien „Blätter“ der Tangentenflächen beschränken.) Insbesondere kann man daher(?) Tangentenflächen aus Papier zusammenkleben (welches man „verbiegt“, aber nirgends „verzerrt“).

Wir schließen diesen Abschnitt mit der Angabe zweier „abstrakter 2-dimensionaler Riemannscher Gebiete“, die nach einem Satz von HILBERT keinesfalls als die Riemannschen Gebiete einer Flächenparametrisierung entstehen können.[†]

Beispiele 3.

- (a) Die *hyperbolische Halbebene* \mathbb{H} ist das Riemannsche Gebiet (G, g) mit $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ und mit der Riemannschen C^∞ -Metrik

$$g : (x, y) \mapsto \frac{1}{y^2} \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle ,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt des \mathbb{R}^2 bezeichnet.

- (b) Die Poincarésche Kreisscheibe \mathbb{U} ist das Riemannsche Gebiet (G, g) mit $G := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und mit der Riemannschen C^∞ -Metrik

$$g : z \mapsto \frac{4}{(1 - z\bar{z})^2} \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle .$$

Hierbei betrachten wir den Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen in bekannter Weise als den reellen Vektorraum \mathbb{R}^2 , der durch die komplexe Multiplikation angereichert ist; mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wird wieder das kanonische Skalarprodukt von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ bezeichnet.

- (c) Bekanntlich[‡] bildet die *lineare Transformation*

$$f : z \mapsto i \cdot \frac{1 - z}{1 + z}$$

die Einheitskreisscheibe von \mathbb{C} biholomorph (also C^∞ -diffeomorph) auf die obere Halbebene ab. Tatsächlich liefert f eine Isometrie $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{H}$. Um dies einzusehen, beachte man, dass

[†]D. HILBERT: *Über Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung*, Trans. Amer. Math. Soc. **2** (1901)

[‡]vgl. etwa FISCHER/LIEB: *Funktionentheorie*, Kapitel IX, §3

man in \mathbb{C} das kanonische Skalarprodukt durch die Konjugation und die Realteilbildung ausdrücken kann, und zwar durch $\langle u, v \rangle = \operatorname{Re}(u \cdot \bar{v})$. Ist c eine weitere komplexe Zahl, so ist daher $\langle c \cdot u, c \cdot v \rangle = |c|^2 \cdot \langle u, v \rangle$. Da wegen der Holomorphie von f $D_z f(v) = f'(z) \cdot v$ ist, gilt somit $\langle D_z f(u), D_z f(v) \rangle = |f'(z)|^2 \cdot \langle u, v \rangle$. Um nun zu beweisen, dass f eine Isometrie $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{H}$ ist, hat man daher für $z \in \mathbb{U}$ lediglich

$$\frac{|f'(z)|^2}{\operatorname{Im}(f(z))^2} = \frac{4}{(1 - z\bar{z})^2}$$

nachzurechnen, was eine leichte Übung ist ($\operatorname{Im}(z) := \operatorname{Imaginärteil von } z$).

5.7 Orthogonale Parametrisierungen

Für reguläre Kurven ist die Parametrisierung nach der Bogenlänge eine „besonders vorteilhafte“ Parametrisierung. In den folgenden beiden Abschnitten wird es unser Anliegen sein, für Flächen in entsprechender Weise „vorteilhafte“ Parametrisierungen zu finden, in dem Sinne, dass deren Maßtensor eine besonders einfache Gestalt hat.

In diesem Abschnitt zeigen wir zunächst, dass es für jede Fläche lokal sogenannte *orthogonale* Parametrisierungen gibt:

Definition. Eine Flächenparametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ heißt *orthogonal*, wenn sich die Parameterlinien F_t und F^s zu $(t, s) \in G$ in ihrem Schnittpunkt $F(t, s)$ jeweils orthogonal schneiden, das heißt, wenn für den Maßtensor g von F gilt:

$$g_{12} \equiv 0.$$

Beispiele. Die kanonischen Parametrisierungen von Rotationsflächen sind orthogonal (siehe Abschnitt 5.2 und Beispiel 2(b) in Abschnitt 5.6). Für Regelflächen (siehe Abschnitt 5.3 und Beispiel 2(c) in Abschnitt 5.6) kann man stets orthogonale Parametrisierungen der Gestalt $F(t, s) = \alpha(t) + s \cdot E(t)$ wählen, und zwar hat man hierfür α gemäß der Aufgabe 1 aus Abschnitt 5.3 zu wählen.

Theorem. Es sei G ein Gebiet im \mathbb{R}^2 und $X_1, X_2 : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ zwei C^r -Vektorfelder. Ferner sei $p_0 \in G$ so gewählt, dass $X_1(p_0)$ und $X_2(p_0)$ linear unabhängig sind. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und ein C^r -Diffeomorphismus φ des „offenen Quadrats“ $Q :=]-\varepsilon, \varepsilon[\times]-\varepsilon, \varepsilon[$ „in“ G (das heißt, $\varphi(Q)$ ist eine offene Teilmenge von G und $\varphi : Q \rightarrow \varphi(Q)$ ist ein C^r -Diffeomorphismus) mit $\varphi(0, 0) = p_0$ und C^{r-1} -Funktionen $\lambda_1, \lambda_2 : Q \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \lambda_i \cdot (X_i \circ \varphi) \quad \text{für } i = 1, 2 \quad .$$

Warnung. Dieses Theorem läßt sich nicht ohne zusätzliche Voraussetzungen auf mehr als zwei Vektorfelder verallgemeinern.

Der *Beweis des Theorems* ist nicht leicht, man benutzt Methoden der Theorie partieller Differentialgleichungen. Für die Zwecke dieser Vorlesung verzichten wir. \square

Folgerung. Ist (G, g) ein 2-dimensionales Riemannsches C^r -Gebiet und $p_0 \in G$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ und ein C^r -Diffeomorphismus φ von $Q :=]-\varepsilon, \varepsilon[\times]-\varepsilon, \varepsilon[$ „in“ G mit $\varphi(0, 0) = p_0$, so dass für alle $p \in Q$ gilt

$$g_{\varphi(p)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(p), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(p) \right) = 0.$$

Beweis. Es sei (X_1, X_2) ein C^r -ONB-Feld auf dem Riemannschen Gebiet (G, g) (siehe die Anwendung zur Beobachtung in Abschnitt 5.6), auf welches wir das Theorem anwenden: Mit dem dortigen Diffeomorphismus φ erhalten wir

$$g_{\varphi(p)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(p), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(p) \right) = \lambda_1(p) \cdot \lambda_2(p) \cdot g_{\varphi(p)}(X_1(\varphi(p)), X_2(\varphi(p))) = 0.$$

□

Satz. Existenz lokaler orthogonaler Parametrisierungen. Es sei $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine Parametrisierung einer C^r -Fläche mit $r \geq 2$. Dann existiert zu jedem Punkt $p_0 \in G$ ein Teilgebiet $U \subset G$ mit $p_0 \in U$, ein weiteres Gebiet $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ und eine zu $F|_U$ äquivalente, orthogonale C^{r-1} -Flächenparametrisierung $\tilde{F} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{E}^3$.

Beweis. Wir wenden die obige Folgerung auf das von F induzierte Riemannsche Gebiet (G, g) an: Mit dem dortigen C^r -Diffeomorphismus φ aus der Folgerung definiert man $\tilde{F} := F \circ \varphi$ und $\tilde{U} := Q$. □

5.8 Konforme Parametrisierungen

Im vorherigen Abschnitt haben wir gesehen, dass es für jede Fläche lokal orthogonale Parametrisierungen gibt, also solche, deren Parameterlinien einander senkrecht schneiden. Tatsächlich gilt ein sehr viel weiter reichendes Resultat.

Definition. Eine C^r -Flächenparametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ heißt *konform* (oder *isotherm*), wenn für den Metriktensor g von F

$$g_{12} \equiv 0 \quad \text{und} \quad g_{11} \equiv g_{22} =: \lambda^2,$$

wobei $\lambda : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine C^{r-1} -Funktion ist; dann gilt also

$$g = \lambda^2 \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt des \mathbb{R}^2 bezeichnet.

Allgemeiner nennt man einen C^r -Diffeomorphismus $\varphi : (\tilde{G}, \tilde{g}) \rightarrow (G, g)$ zwischen zwei n -dimensionalen Riemannschen Gebieten *konform*, wenn es eine C^{r-1} -Funktion $\lambda : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{R}_+$ gibt mit

$$\forall p \in \tilde{G}, u, v \in \mathbb{R}^n : \tilde{g}_p(u, v) = \lambda(p)^2 \cdot g_{\varphi(p)}(d_p \varphi(u), d_p \varphi(v)).$$

Beispiel. Die Parametrisierungen F_τ aus Aufgabe 2 in Abschnitt 5.6 sind alle konform.

Theorem von Gauß/Korn/Lichtenstein. Es sei $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine Parametrisierung einer C^r -Fläche mit $r \geq 2$. Dann existiert zu jedem Punkt $p_0 \in G$ ein Teilgebiet $U \subset G$ mit $p_0 \in U$, ein weiteres Gebiet $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ und eine zu $F|_U$ äquivalente, konforme C^{r-1} -Flächenparametrisierung $\tilde{F} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{E}^3$.

Zur Historie des Theorems von Gauß/Korn/Lichtenstein. Bereits im Jahre 1816 hat GAUSS die Frage nach der Gültigkeit dieses Theorems gestellt. Auf seine Anregung wurde 1821 diese Aufgabe von der Kopenhagener Wissenschaftlichen Gesellschaft publiziert. Da bis in den Sommer 1822 keine Lösung bei der Gesellschaft eingegangen war, machte GAUSS sich selbst an die Arbeit und bewies das Theorem für den Fall, dass F reell analytisch (d.h. in Potenzreihen entwickelbar) ist. Erst 1911 bzw. 1914 gelang LICHTENSTEIN bzw. KORN der Beweis unter obiger schwachen Differenzierbarkeitsvoraussetzung. – Das Problem führt auf eine elliptische partielle Differentialgleichung, die sog. Beltrami-Gleichung. Eine allgemein zugängliche Behandlung findet man in den Lectures 3 - 5 des Buches „Riemann surfaces“, New York 1957/58 von L. BERS. Der Buchtitel zeigt den engen Zusammenhang zur Funktionentheorie. Tatsächlich sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ein Spezialfall der Beltrami-Gleichung.

Der Nutzen konformer Parametrisierungen wird durch die folgende Aussage und ihre Folgerung verdeutlicht:

Aussage. Sind $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ zwei Skalarprodukte eines Vektorraumes V , so sind die drei folgenden Aussagen paarweise äquivalent:

- (a) Es gilt $\langle \cdot, \cdot \rangle_2 = c^2 \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle_1$ mit einer geeigneten Zahl $c \in \mathbb{R}_+$.
- (b) Für je zwei beliebige, von 0 verschiedene Vektoren $u, v \in V$ sind die Winkel bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ gleich.
- (c) Je zwei beliebige, bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ orthogonale Vektoren $u, v \in V$ sind auch bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ orthogonal.

Ist V 2-dimensional und sind J_1 und J_2 die zu $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ bzw. $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ gehörigen Vierteldrehungen bezüglich ein-und-derselben Orientierung von V (siehe Aussage 3 in Abschnitt 1.7), so ist auch noch die folgende Aussage zu den Aussagen (a)-(c) äquivalent:

- (d) $J_1 = J_2$.

Beweis. Die Implikation (a) \Rightarrow (b) folgt aus der Definition des Winkels mittels des Skalarprodukts (siehe Definition (a) in Abschnitt 1.6), und die Implikation (b) \Rightarrow (c) ist offensichtlich.

Zu (c) \Rightarrow (a). Es sei (a_1, \dots, a_n) eine $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ -ONB von V . Nach (c) gilt dann $\langle a_i, a_k \rangle_2 = 0$ für $i \neq k$. Weiterhin haben wir $\langle a_i + a_k, a_i - a_k \rangle_1 = 0$, also nach (c) auch $0 = \langle a_i + a_k, a_i - a_k \rangle_2 = \langle a_i, a_i \rangle_2 - \langle a_k, a_k \rangle_2$. Definieren wir $c \in \mathbb{R}_+$ durch $c^2 = \langle a_1, a_1 \rangle_2$, so gilt daher $\langle a_i, a_k \rangle_2 = c^2 \cdot \langle a_i, a_k \rangle_1$ für alle i, k . Damit folgt für beliebige Vektoren $u, v \in V$

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_2 &= \left\langle \sum_i \langle u, a_i \rangle_1 \cdot a_i, \sum_k \langle v, a_k \rangle_1 \cdot a_k \right\rangle_2 = \sum_{i,k} \langle u, a_i \rangle_1 \cdot \langle v, a_k \rangle_1 \cdot \langle a_i, a_k \rangle_2 \\ &= c^2 \cdot \sum_{i,k} \langle u, a_i \rangle_1 \cdot \langle v, a_k \rangle_1 \cdot \langle a_i, a_k \rangle_1 = c^2 \cdot \sum_i \langle u, a_i \rangle_1 \cdot \langle v, a_i \rangle_1 = c^2 \cdot \left\langle \sum_i \langle u, a_i \rangle_1 a_i, v \right\rangle_1 = c^2 \cdot \langle u, v \rangle_1. \end{aligned}$$

Zu (a) \Rightarrow (d). Ist (a_1, a_2) eine positiv orientierte $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ -ONB von V , so ist $(\frac{1}{c}a_1, \frac{1}{c}a_2)$ eine positiv orientierte $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ -ONB. Hieraus folgt $J_1 = J_2$.

Zu (d) \Rightarrow (c). Es gelte $J_1 = J_2$ und es seien $u, v \in V$ Vektoren mit $\langle u, v \rangle_1 = 0$. Ist $u = 0$, so gilt trivialerweise auch $\langle u, v \rangle_2 = 0$. Ist aber $u \neq 0$, so gilt $v = \lambda \cdot J_1 u$ mit einem geeigneten $\lambda \in \mathbb{R}$. Wegen $J_1 = J_2$ folgt damit $\langle u, v \rangle_2 = \lambda \cdot \langle u, J_1 u \rangle_2 = \lambda \cdot \langle u, J_2 u \rangle_2 = 0$. \square

Folgerung. Es seien G ein Gebiet des \mathbb{R}^2 , $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine C^1 -Immersion, g der Maßtensor von G und J die komplexe Struktur des Riemannschen Gebietes (G, g) . Dann sind die folgenden Aussagen paarweise äquivalent:

- (a) F ist eine konforme Parametrisierung einer (singularitätenfreien) Fläche.
- (b) Die Winkelmessung in dem Riemannschen Gebiet (G, g) stimmt an jeder Stelle von G mit der kanonischen euklidischen Winkelmessung in $G \subset \mathbb{R}^2$ überein.
- (c) Für jeden Punkt $p \in G$ ist J_p die übliche euklidische Vierteldrehung.

Hieraus folgt: Zueinander konform äquivalente Riemannsche Gebiete stimmen als Riemannsche Flächen überein.

5.9 Anhang: Flächen in mehr Dimensionen

Natürlich kann man analog zu den zwei-dimensionalen Flächen im \mathbb{E}^3 auch k -dimensionale (mS-)Flächen in einem n -dimensionalen euklidischen Raum \mathbb{E}^n definieren, nämlich als Äquivalenzklassen von C^r -Abbildungen $F : G \rightarrow \mathbb{E}^n$, wobei G jeweils ein Gebiet im \mathbb{R}^k ist. Für jede derartige Abbildung wird man wie in den Abschnitten 5.1 und 5.6 den *Maßtensor*

$$g : G \rightarrow L_{sym}^2(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}), \quad p \mapsto (g_p : (u, v) \mapsto \langle d_p F(u), d_p F(v) \rangle),$$

seine Komponenten

$$g_{ij} := \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle \quad (\text{für } i, j \in \{1, \dots, k\})$$

und das *Volumenelement* $\rho_F := \sqrt{\det(g_{ij})}$ definieren. F ist genau dann eine Immersion, und $[F]$ damit eine (singularitätenfreie) Fläche, wenn $\rho_F > 0$ gilt. Ist $K \subset G$ kompakt, so definieren wir das (k -dimensionale) *Volumen* von $F|K$ als

$$\int_K \rho_F d\lambda^k,$$

mit derselben Begründung wie in Abschnitt 5.1 ist diese Größe von der Wahl der Parametrisierung der Fläche unabhängig. In dieser Bedeutung von ρ_F liegt der Grund für die Bezeichnung „Volumenelement“ sowohl für das hiesige ρ_F , als auch für das in Abschnitt 5.6 eingeführte Volumenelement ρ eines k -dimensionalen Riemannschen Gebiets.

Zu beachten ist, dass die Aussagen aus den Abschnitten 5.7 und 5.8 über die Existenz lokaler orthogonaler bzw. konformer Abbildungen *keine* Entsprechung für k -dimensionale Flächen mit $k \geq 3$ haben.

Kapitel 6

Äußere Geometrie räumlicher Flächen

Wie wir bereits wissen, werden bestimmte fundamentale „Messungen“ auf einer Fläche durch den Maßtensor einer Parametrisierung beschrieben. Insbesondere ermöglicht es der Maßtensor, Längen und Winkel auf der Fläche zu messen. Ein Ansatz für die Untersuchung der Geometrie von Flächen besteht daher darin, der Frage nachzugehen, welche Eigenschaften der Fläche man allein aus dem Maßtensor erschließen kann. (Dabei sollen auch Ableitungen des Maßtensors zugelassen sein.) In einem Bild ausgedrückt, entspricht dies der Geometrie der Fläche, wie sie von einer intelligenten Ameise wahrgenommen wird, die auf der Fläche herumkrabbelnd diese erkundet. Diese Art des Flächenstudiums nennt man *innere Geometrie von Flächen* oder — in einem allgemeineren Rahmen — *Riemannsche Geometrie*.

Wir wissen allerdings auch, dass durch den Maßtensor allein die Geometrie der im \mathbb{E}^3 eingebetteten Fläche nicht vollständig beschrieben wird, gibt es doch sehr unterschiedliche Flächen, die denselben Maßtensor besitzen (ein Beispiel haben wir in der Aufgabe 2 in Abschnitt 5.6 kennengelernt). Um die unterschiedliche Beschaffenheit dieser Flächen zu erfassen, müssen wir sie von „außen“ her ansehen, sie also als Objekt des umgebenden Raums untersuchen. Diese Betrachtungsweise heißt *äußere Geometrie*.

Noch eine Veranschaulichung: Unseren eigenen Lebensraum, die Erdoberfläche konnten wir bis zum Start des Sputnik am 4. Oktober 1957 nur mit den Mitteln der inneren Geometrie studieren. Das machte die Faszination der ersten, damals entstandenen Aufnahmen der Erde aus, sah man doch durch sie die Erdoberfläche zum ersten Mal mit den Augen der äußeren Geometrie.

Wir werden uns im Folgenden zunächst mit der äußeren Geometrie von Flächen befassen. In Kapitel 7 werden wir dann zum — in Abschnitt 5.6 begonnenen — Studium der inneren Geometrie zurückkehren.

Das ganze Kapitel hindurch sei $\mathbb{E} = \mathbb{E}^3$ ein 3-dimensionaler, orientierter euklidischer Raum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Determinantenform \det , $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $F : G \rightarrow \mathbb{E}$ eine (singularitätenfreie) C^r -Flächenparametrisierung. Dabei setzen wir nun stets $r \geq 2$ voraus. Wie in Abschnitt 5.6 beschrieben, sind uns durch F die folgenden Größen der inneren Geometrie gegeben: der *Maßtensor* g , das *Flächenelement* ρ_F , die *Volumenform* ω und die *komplexe Struktur* J .

6.1 Einheitsnormalenfelder von Flächenparametrisierungen

Nach Abschnitt 5.5 ist für jedes $p \in G$ der Normalenraum $\perp_p F$ eindimensional, enthält also genau zwei Einheitsvektoren. Die folgende Definition zeigt, dass durch die Parametrisierung F einer der beiden Normalenvektoren ausgezeichnet wird:

Definition. Unter „dem“ *Einheitsnormalenfeld* von F wird das C^{r-1} -Normalenfeld (siehe Abschnitt 5.5)

$$N_F := \frac{\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s}}{\left\| \frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s} \right\|} = \frac{1}{\rho_F} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s} \right)$$

verstanden.

Beispiele.

(a) **Einheitsnormalenfeld einer Graphenfläche.** Ist

$$F : G \rightarrow \mathbb{E}, (t, s) \mapsto p_0 + t a_1 + s a_2 + f(t, s) a_3$$

die Parametrisierung einer Graphenfläche wie in Abschnitt 5.2, so ist

$$\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s} = -\frac{\partial f}{\partial t} a_1 - \frac{\partial f}{\partial s} a_2 + a_3$$

und daher

$$N_F = \frac{1}{\rho_F} \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial t} a_1 - \frac{\partial f}{\partial s} a_2 + a_3 \right) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial t} a_1 - \frac{\partial f}{\partial s} a_2 + a_3}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2}}.$$

(b) **Einheitsnormalenfeld einer Rotationsfläche.** Ist

$$F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}, (t, s) \mapsto p_0 + r(t) \cdot \Gamma_{\mathbf{a}}(s) + b(t) \cdot a_3$$

eine Rotationsflächen-Parametrisierung wie in Abschnitt 5.2, so ist

$$\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s} = r(t) \cdot (r'(t) a_3 - b'(t) \Gamma_{\mathbf{a}}(s))$$

und daher

$$N_F = \frac{1}{v_{\alpha}(t)} \cdot (r'(t) a_3 - b'(t) \Gamma_{\mathbf{a}}(s)).$$

Ist insbesondere F die geographische Parametrisierung der zweifach punktierten Sphäre $S_R^2(p_0) \setminus \{N, S\}$ (also die Rotationsflächenparametrisierung zu $\alpha :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto R(\cos(t), \sin(t))$), so ist daher $N_F = -\frac{1}{R} \cdot (F - p_0)$.

Aussage 1. Für jeden Punkt $p \in G$ und $u, v \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\omega_p(u, v) = \det(d_p F(u), d_p F(v), N_F(p)) .$$

Beweis. Die rechte Seite der zu beweisenden Formel beschreibt für jeweils festes $p \in G$ eine alternierende 2-Form μ_p des \mathbb{R}^2 . Daher gilt $\mu_p = c_p \cdot \omega_p$ mit einem $c_p \in \mathbb{R}$. Durch Einsetzen der Standardbasis (e_1, e_2) des \mathbb{R}^2 erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu_p(e_1, e_2) &= \det\left(\frac{\partial F}{\partial t}(p), \frac{\partial F}{\partial s}(p), N_F(p)\right) = \left\langle \left(\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s}\right)(p), N_F(p) \right\rangle \\ &= \left\| \left(\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s}\right)(p) \right\| = \rho_F(p) = \rho_F(p) \cdot \det(e_1, e_2) = \omega_p(e_1, e_2) \end{aligned}$$

und somit $c_p = 1$. Damit stimmen μ und ω überein. \square

Aussage 2. Ist $\tilde{F} : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine weitere C^r -Parametrisierung derselben Fläche $[F]$, und $\varphi : \tilde{G} \rightarrow G$ die zugehörige Parametertransformation, so sind die Einheitsnormalenfelder von \tilde{F} und von F durch die Gleichung $N_{\tilde{F}} = \varepsilon \cdot (N_F \circ \varphi)$ verbunden; hierbei ist $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$, je nachdem, ob φ orientierungserhaltend oder orientierungswechselnd ist.

Beweis. Mit Hilfe der Kettenregel ergibt sich

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_1} = \frac{\partial (F \circ \varphi)}{\partial x_1} = d_{\varphi(p)} F \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right) \circ \varphi$$

und entsprechend

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right) \circ \varphi ;$$

somit

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} \times \frac{\partial \tilde{F}}{\partial s} = \det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\right) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s}\right) \circ \varphi ,$$

woraus die Behauptung folgt. \square

6.2 Der Formoperator und die zweite Fundamentalform

In der ebenen Kurventheorie spielte die zeitliche Änderung des Normalenfeldes einer Kurve α , die gemäß der Frenetgleichung $\frac{d}{ds} N_\alpha = -\kappa_\alpha \cdot T_\alpha$ durch die orientierte Krümmung κ_α von α gemessen wird, eine wesentliche Rolle. In ähnlicher Weise untersuchen wir nun die Änderung des Einheitsnormalenfeldes N_F einer C^r -Flächenparametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$.

Satz 1 und Definition 1. Die Änderung des Einheitsnormalenfeldes N_F wird durch ein C^{r-2} -Tensorfeld auf G kontrolliert. Es gilt nämlich für $p \in G$ die *Weingarten-Gleichung*

$$d_p N_F = - (d_p F) \circ A_p$$

mit dem hierdurch eindeutig bestimmten C^{r-2} -Tensorfeld $A : G \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^2)$ vom Typ $(1,1)$ (siehe Definition 2 in Abschnitt 5.6). A heißt der *Formoperator* (engl. *shape operator*) von F ; andere Bezeichnungen sind *zweiter Fundamentaltensor*, *Weingartenabbildung* und *Gestaltoperator**. Da $d_p F : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p F$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist, beschreibt der „Wert“ $A_p v$ (bis auf das Vorzeichen) die Kippgeschwindigkeit des Einheitsnormalenfeldes N_F an der Stelle p und

*Die Bezeichnung „Gestaltoperator“ kenne ich von Herrn Professor DOMBROWSKI aus Köln. Sie bringt die geometrische Bedeutung von A noch klarer zur Geltung, nur kommt sie mir nicht so glatt über die Lippen.

in Richtung von v ; damit wird offenbar das „Sich-Biegen“ der Fläche $[F]$ in der Nähe von $F(p)$ erfasst.

Beweis. Sei $p \in G$ und $v \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $\langle N_F, N_F \rangle \equiv 1$ und deshalb $0 = d_p(\langle N_F, N_F \rangle)(v) = 2\langle d_p N_F(v), N_F(p) \rangle$ und somit $d_p N_F(v) \in T_p F$. Daher existiert genau ein Vektor, den wir mit $A_p v \in \mathbb{R}^2$ bezeichnen, so dass $d_p N_F(v) = -d_p F(A_p v)$ gilt. Hierdurch wird eine Abbildung $A_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert, die wegen der Linearität von $d_p N_F$ und $d_p F$ linear ist. Somit erhalten wir ein Tensorfeld $A : G \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $p \mapsto A_p$ vom Typ $(1,1)$, und mit diesem Tensorfeld ist die Weingarten-Gleichung erfüllt.

Es verbleibt zu zeigen, dass A ein C^{r-2} -Tensorfeld ist. Dazu fixieren wir $v \in \mathbb{R}^2$ und wenden die Folgerung aus Abschnitt 5.5 auf das C^{r-2} -Tangentialfeld $Y := -d_{\dots} N_F(v)$ an. Nach dieser Folgerung existiert genau ein C^{r-2} -Vektorfeld $X : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $Y = F_* X$, also $d_{\dots} N_F(v) = -d_{\dots} F \circ X$. Damit erfüllt X die Weingarten-Gleichung; wegen der eindeutigen Bestimmtheit von A durch diese Gleichung folgt also, dass $X = A_{\dots} v$ ist. Damit ist $A_{\dots} v$ jeweils ein C^{r-2} -Vektorfeld; weil v beliebig war, folgt hieraus, dass A ein C^{r-2} -Tensorfeld ist. \square

Beispiele 1.

- (a) **Ebene Flächenparametrisierungen.** Eine Flächenparametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ heißt *eben*, wenn es ein $q_0 \in \mathbb{E}^3$ und einen Einheitsvektor $a \in \mathbb{E}_L^3$ gibt, so dass $F(G)$ in der Ebene $q_0 + (\mathbb{R}a)^\perp$ liegt. Eine C^2 -Flächenparametrisierung ist genau dann eben, wenn ihr Formoperator identisch verschwindet.

Beweis. Ist F eben, gilt also etwa $F(G) \subset q_0 + (\mathbb{R}a)^\perp$, so ist N_F konstant gleich $\pm a$, und deshalb $d_p N_F(v) = 0$ für $p \in G$ und $v \in \mathbb{R}^2$. Nach der Weingarten-Gleichung folgt $A_p v = 0$.

Gilt umgekehrt $A \equiv 0$, so folgt aus der Weingarten-Gleichung $d N_F \equiv 0$, und somit ist N_F dann konstant, etwa gleich einem Einheitsvektor $a \in \mathbb{E}_L^3$. Ist $p_0 \in G$ fixiert und $q_0 := F(p_0) \in \mathbb{E}^3$, so betrachten wir die Funktion

$$f : G \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \langle F(p) - q_0, a \rangle.$$

Nun gilt $d_p f(v) = \langle d_p F(v), a \rangle = \langle d_p F(v), N_F(p) \rangle = 0$, also ist f konstant, und zwar gleich $f(p_0) = 0$. Das bedeutet aber, dass $F(G) \subset q_0 + (\mathbb{R}a)^\perp$ ist. \square

- (b) **Sphärische Flächenparametrisierungen.** Wir nennen eine Parametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ *sphärisch*, wenn $F(G)$ in einer Sphäre $S_R^2(q_0) \subset \mathbb{E}^3$ ($q_0 \in \mathbb{E}^3$ und $R \in \mathbb{R}_+$) liegt, wenn also

$$\langle F - q_0, F - q_0 \rangle \equiv R^2 \quad (*)$$

ist. Ist in diesem Fall F zweimal stetig differenzierbar, so ist der Formoperator eine konstante Funktion $A : G \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^2)$, nämlich $A \equiv \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ mit $\lambda = \pm 1/R$; und zwar ist genau dann $\lambda = 1/R$, wenn das Einheitsnormalenfeld N_F in die Sphäre $S_R^2(q_0)$ weist.

Beweis. Durch Differentiation von $(*)$ erhalten wir jeweils $\langle d_p F(v), F(p) - q_0 \rangle = 0$; daher ist $F(p) - q_0 \in \perp_p F$, weswegen wir

$$F - q_0 = c \cdot N_F \quad \text{mit} \quad c := \langle F - q_0, N_F \rangle \quad (\dagger)$$

schreiben können. Dabei ist wegen $(*)$ die Funktion c konstant mit $c^2 = R^2$. Durch Differentiation von (\dagger) erhalten wir $d_p F(v) = c \cdot d_p N_F(v) = -c \cdot d_p F(A_p v)$, also $A_p v = \lambda \cdot v$ mit $\lambda = -\frac{1}{c} \in \{\pm 1/R\}$. Der Fall $\lambda = 1/R$ tritt genau dann ein, wenn $N_F = -\frac{1}{R} \cdot (F - q_0)$ gilt, d.h. wenn N_F in die Sphäre weist. \square

Aussage. Ist $\tilde{F} : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine zweite C^r -Parametrisierung derselben Fläche $[F]$ und $\varphi : \tilde{G} \rightarrow G$ eine dazugehörige Parametertransformation, so hängen die Formoperatoren A und \tilde{A} der beiden Parametrisierungen durch

$$d_p \varphi \circ \tilde{A}_p = \varepsilon \cdot A_{\varphi(p)} \circ d_p \varphi \quad \text{für alle} \quad p \in G$$

zusammen, wobei $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$ gilt, je nachdem, ob φ orientierungserhaltend oder orientierungswechselnd ist.

Beweis. Nach Aussage 2 aus Abschnitt 6.1 gilt $N_{\tilde{F}} = \varepsilon \cdot N_F \circ \varphi$. Durch Differentiation dieser Gleichung und Anwendung der Weingarten-Gleichung erhält man

$$-d_{\varphi(p)} F \circ d_p \varphi \circ \tilde{A}_p = -d_p(F \circ \varphi) \circ \tilde{A}_p = -d_p \tilde{F} \circ \tilde{A}_p = d_p \tilde{N}_F = \varepsilon \cdot d_p(N_F \circ \varphi) = \varepsilon \cdot d_{\varphi(p)} N_F \circ d_p \varphi = -\varepsilon \cdot d_{\varphi(p)} F \circ A_{\varphi(p)} \circ d_p \varphi$$

und damit die Behauptung. \square

Aufgabe 1. Es seien $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ und $\tilde{F} : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{E}^3$ zwei C^r -Flächenparametrisierungen, die sich längs einer C^r -Kurve $\alpha : I \rightarrow G$ berühren, d.h.

$$F \circ \alpha = \tilde{F} \circ \alpha \quad \text{und} \quad d_{\alpha(t)} F = d_{\alpha(t)} \tilde{F} \quad \text{für alle } t \in I.$$

Dann gilt für die Formoperatoren A und \tilde{A} der beiden Parametrisierungen

$$\tilde{A}_{\alpha(t)} \alpha'(t) = A_{\alpha(t)} \alpha'(t).$$

Satz 2 und Definition 2. Es gilt für alle $p \in G$ und $u, v \in \mathbb{R}^2$

$$h_p(u, v) := g_p(A_p u, v) = \langle d_p^2 F(u, v), N_F(p) \rangle.$$

Daher ist $h : G \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $p \mapsto h_p$ ein symmetrisches C^{r-2} -Tensorfeld vom Typ (0,2) und A ein selbstadjungiertes Tensorfeld. Das Tensorfeld h heißt die *zweite Fundamentalform* der Parametrisierung F .

Aufgrund dieses Satzes ist für jeden Punkt $p_0 \in G$ die zweite Fundamentalform h_{p_0} gerade die Hesseform der „Höhenfunktion“ $G \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto \langle F(p) - F(p_0), N_F(p_0) \rangle$.

Beweis. Es seien $p \in G$ und $u, v \in \mathbb{R}^2$. Da $\langle N_F, dF(v) \rangle \equiv 0$ ist, folgt mit der Leibnizschen Regel:

$$\begin{aligned} g_p(A_p u, v) &= \langle d_p F(A_p u), d_p F(v) \rangle = -\langle d_p N_F(u), d_p F(v) \rangle \\ &= -d_p(\langle N_F, dF(v) \rangle)(u) + \langle N_F(p), d_p^2 F(u, v) \rangle = \langle N_F(p), d_p^2 F(u, v) \rangle. \end{aligned}$$

\square

Darstellung der zweiten Fundamentalform. Für die zweite Fundamentalform der Parametrisierung F gilt in allen Punkten $p \in G$

$$\begin{aligned} h_p(u, v) &= \sum_{i,k=1}^2 h_{ik}(p) \cdot u_i \cdot v_k \quad \text{mit den Funktionen} \\ h_{ik} &:= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}, N_F \right\rangle = \frac{1}{\rho_F} \cdot \det \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} \right). \end{aligned}$$

Beweis. Wegen der Bilinearität von h_p gilt $h_p(u, v) = \sum_{i,k=1}^2 h_p(e_i, e_k) u_i v_k$. Aufgrund von Satz 2 und der Definition von N_F ergibt sich:

$$h_p(e_i, e_k) = \langle d^2 F(e_i, e_k), N_F \rangle = \frac{1}{\rho_F} \cdot \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}, \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} \right\rangle = \frac{1}{\rho_F} \cdot \det \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} \right).$$

\square

Beispiele 2.

- (a)
- Die zweite Fundamentalform einer Graphenfläche.**
- Es sei

$$F : G \rightarrow \mathbb{E}^3, (t, s) \mapsto p_0 + t a_1 + s a_2 + f(t, s) a_3$$

eine Graphenflächenparametrisierung wie in Abschnitt 5.2, wir setzen jedoch jetzt voraus, dass die Funktion f mindestens C^2 -differenzierbar ist. Dann gilt für $p \in G$

$$d_p^2 F(u, v) = d_p^2 f(u, v) \cdot a_3$$

und deswegen (siehe auch Beispiel (a) in Abschnitt 6.1)

$$h_p(u, v) = \langle d^2 F(u, v), N_F \rangle = \frac{1}{\rho_F} \cdot d^2 f(u, v) .$$

Gilt $d_{p_0} f = 0$ für ein $p_0 \in G$ (siehe das Theorem in Abschnitt 5.5), so ist $N_F(p_0) = a_3$ und $\rho_F(p_0) = 1$, und deswegen $h_{p_0} = d_{p_0}^2 f$.

- (b)
- Die zweite Fundamentalform einer Rotationsfläche.**
- Es sei

$$F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3, (t, s) \mapsto p_0 + r(t) \cdot \Gamma_{\mathbf{a}}(s) + b(t) \cdot a_3$$

eine Rotationsflächenparametrisierung wie in Abschnitt 5.2, jedoch setzen wir nun voraus, dass die Profilkurve $\alpha = (r, b)$ mindestens eine C^2 -Kurve ist und dass $r > 0$ gilt. Bezeichnen wir mit v_α bzw. \varkappa_α die Bahngeschwindigkeit bzw. die orientierte Krümmung von α , so gilt für die Komponenten h_{ik} der zweiten Fundamentalform von F

$$h_{11}(t, s) = (\varkappa_\alpha \cdot v_\alpha^2)(t) \quad , \quad h_{12} = 0 \quad \text{und} \quad h_{22}(t, s) = \frac{r \cdot b'}{v_\alpha}(t) .$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie von Rotationsflächen ist es nicht verwunderlich, dass die Funktionen h_{ik} ebenso wie die Komponenten g_{ik} des Maßensors nicht von der Variablen s abhängen.

Aufgabe 2. In der Situation der Aussage dieses Abschnitts gilt für die zweite Fundamentalform \tilde{h} von \tilde{F} :

$$\tilde{h}_p(u, v) = \varepsilon \cdot h_{\varphi(p)}(d_p \varphi(u), d_p \varphi(v)) \quad \text{für alle } p \in \tilde{G} \text{ und } u, v \in \mathbb{R}^2 .$$

6.3 Die beiden Fundamentalformen bestimmen die Parametrisierung

Teil (b) des folgenden Satzes zeigt, dass eine Flächenparametrisierung durch ihre beiden Fundamentalformen — den Maßtensor und die zweite Fundamentalform — im Wesentlichen eindeutig bestimmt wird. Diese Aussage ist ein Analogon für die Flächentheorie zur entsprechenden Eindeutigkeitsaussage im Hauptsatz der Kurventheorie (siehe Abschnitt 3.2, Theorem (b); Abschnitt 4.3, Theorem (b) und Abschnitt 4.7, Hauptsatz der Kurventheorie (b)).

Satz.

- (a) (*Bewegungsinvarianz der Fundamentalformen.*) Sei $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine C^r -Flächenparametrisierung und $\Phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine orientierungserhaltende Isometrie (d.h. Φ ist eine affine Abbildung mit $\Phi_L \in \text{SO}(\mathbb{E}_L^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, siehe Abschnitt 1.6). Dann ist $\tilde{F} := \Phi \circ F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine weitere Flächenparametrisierung, und für die Maßstensoren g, \tilde{g} und die zweiten Fundamentalformen h, \tilde{h} von F bzw. von \tilde{F} gilt

$$\tilde{g} = g \quad \text{und} \quad \tilde{h} = h .$$

- (b) (*Die Fundamentalformen bestimmen die Flächenparametrisierung im Wesentlichen eindeutig.*) Es seien $F, \tilde{F} : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ zwei C^r -Flächenparametrisierungen. Für ihre Fundamentalformen g, h bzw. \tilde{g}, \tilde{h} gelte

$$\tilde{g} = g \quad \text{und} \quad \tilde{h} = h .$$

Dann existiert eine orientierungserhaltende Isometrie Φ von \mathbb{E}^3 mit $\tilde{F} = \Phi \circ F$.

Bemerkung. Der Satz bleibt richtig, wenn man jeweils an Stelle der zweiten Fundamentalform den Formoperator betrachtet.

Beweis. Zu (a). Für $p \in G$ und $u, v \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{g}_p(u, v) &= \langle d_p \tilde{F}(u), d_p \tilde{F}(v) \rangle = \langle d_p(\Phi \circ F)(u), d_p(\Phi \circ F)(v) \rangle = \langle \Phi_L(d_p F(u)), \Phi_L(d_p F(v)) \rangle \\ &= \langle d_p F(u), d_p F(v) \rangle = g_p(u, v) \end{aligned}$$

und somit $\tilde{g} = g$, daher auch $\rho_{\tilde{F}} = \rho_F$. Weiter ist

$$N_{\tilde{F}} = \frac{1}{\rho_{\tilde{F}}} \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} \times \frac{\partial \tilde{F}}{\partial s} \right) = \frac{1}{\rho_F} \left(\left(\Phi_L \circ \frac{\partial F}{\partial t} \right) \times \left(\Phi_L \circ \frac{\partial F}{\partial s} \right) \right) = \frac{1}{\rho_F} \Phi_L \left(\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s} \right) = \Phi_L \circ N_F$$

und daher nach Satz 2 aus Abschnitt 6.2

$$\tilde{h}_p(u, v) = \langle d_p^2 \tilde{F}(u, v), N_{\tilde{F}}(p) \rangle = \langle \Phi_L \circ d_p^2 F(u, v), \Phi_L \circ N_F(p) \rangle = \langle d_p^2 F(u, v), N_F(p) \rangle = h_p(u, v) .$$

Zu (b). Für $p \in G$ gilt wegen $g_p = \tilde{g}_p$ die Beziehung $\rho_F(p) = \rho_{\tilde{F}}(p)$ und daher $\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_i}, \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_j} \rangle = \langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \rangle$. Deswegen existiert jeweils ein $B_p \in \text{SO}(\mathbb{E}_L^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit

$$B_p \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \right) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_i}(p) \quad \text{und} \quad B_p N_F(p) = N_{\tilde{F}}(p) . \quad (1)$$

Man beachte, dass aus dem ersten Teil dieser Bedingung folgt: $d_p \tilde{F} = B_p \circ d_p F$. — Wir zeigen im Folgenden, dass B_p tatsächlich von p unabhängig ist.

Dazu beachten wir zunächst, dass für beliebige Vektoren $u, w \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\tilde{g}(u, w) = g(u, w)$, also $\langle d\tilde{F}(u), d\tilde{F}(w) \rangle = \langle dF(u), dF(w) \rangle$. Durch Differentiation dieser Gleichung in die Richtung von $v \in \mathbb{R}^2$ ergibt sich:

$$\langle d^2 \tilde{F}(u, v), d\tilde{F}(w) \rangle + \langle d\tilde{F}(u), d^2 \tilde{F}(v, w) \rangle = \langle d^2 F(u, v), dF(w) \rangle + \langle dF(u), d^2 F(v, w) \rangle .$$

Indem man in diese Gleichung für beliebige zueinander orthogonale Vektoren $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ einerseits $u = w = a_1$, $v = a_2$, andererseits $u = w = a_2$, $v = a_1$ setzt, sieht man, dass

$$\langle d^2 \tilde{F}(a_1, a_2), d\tilde{F}(a_k) \rangle = \langle d^2 F(a_1, a_2), dF(a_k) \rangle \quad \text{für } k \in \{1, 2\}$$

gilt, setzt man nun $u = v = a_k$ und $w = a_\ell$, so erhält man unter Verwendung dieser Gleichung auch

$$\langle d^2 \tilde{F}(a_k, a_k), d\tilde{F}(a_\ell) \rangle = \langle d^2 F(a_k, a_k), dF(a_\ell) \rangle \quad \text{für } k, \ell \in \{1, 2\} .$$

Insgesamt gilt daher für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^2$:

$$\langle d^2 \tilde{F}(u, v), d\tilde{F}(w) \rangle = \langle d^2 F(u, v), dF(w) \rangle ,$$

also in $p \in G$:

$$\langle d_p^2 \tilde{F}(u, v), d_p \tilde{F}(w) \rangle = \langle d_p^2 F(u, v), d_p F(w) \rangle = \langle B_p \circ d_p^2 F(u, v), B_p \circ d_p F(w) \rangle = \langle B_p \circ d_p^2 F(u, v), d_p \tilde{F}(w) \rangle .$$

Daraus ergibt sich, dass der \tilde{F} -Tangentialanteil von $d_p^2 \tilde{F}(u, v)$ gleich dem \tilde{F} -Tangentialanteil von $B_p(d_p^2 F(u, v))$ ist. Da außerdem nach Satz 2 aus Abschnitt 6.2

$$\langle d_p^2 \tilde{F}(u, v), N_{\tilde{F}}(p) \rangle = \tilde{h}_p(u, v) = h_p(u, v) = \langle d_p^2 F(u, v), N_F(p) \rangle = \langle B_p d_p^2 F(u, v), B_p N_F(p) \rangle = \langle (B_p d_p^2 F(u, v), N_{\tilde{F}}(p)) \rangle$$

gilt, ergibt sich

$$d_p^2 \tilde{F}(u, v) = B_p d_p^2 F(u, v) .$$

Andererseits ist nach der Leibnizregel (angewendet auf die bilineare Abbildung $O(\mathbb{E}_L^3) \times \mathbb{E}_L^3 \rightarrow \mathbb{E}_L^3$, $(L, v) \mapsto L(v)$)

$$d_p^2 \tilde{F}(u, v) = d_p(d\tilde{F}(u))(v) \stackrel{(1)}{=} d_p(B \circ dF(u))(v) = d_p B(v) \circ dF(u) + B_p \circ d_p^2 F(u, v) .$$

Durch Vergleich der letzten beiden Gleichungen erhält man

$$d_p B(v) \circ dF(u) = 0 . \quad (2)$$

Andererseits erhält man aus der Gleichung $N_{\tilde{F}}(p) = B_p \circ N_F(p)$ in (1) und der Weingarten-Gleichung (wobei A und \tilde{A} die Formoperatoren von F bzw. \tilde{F} bezeichnen):

$$\begin{aligned} -d_p \tilde{F}(\tilde{A}_p(v)) &= d_p N_{\tilde{F}}(v) = d_p(B \circ N_F)(v) = d_p B(v) \circ N_F(p) + B_p \circ d_p N_F(v) \\ &= d_p B(v) \circ N_F(p) - B_p \circ d_p F(A_p V) = d_p B(v) \circ N_F(p) - d_p \tilde{F}(A_p V) . \end{aligned}$$

Andererseits gilt wegen $g = \tilde{g}$ und $h = \tilde{h}$ auch $A = \tilde{A}$, deshalb ergibt sich aus der letzten Gleichung

$$d_p B(v) \circ N_F(p) = 0 . \quad (3)$$

Aus den beiden Gleichungen (2) und (3) folgt $d_p B = 0$. Also ist B_p konstant, etwa gleich einem $B \in \text{SO}(\mathbb{E}_L^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Wir fixieren nun ein $p_0 \in G$ und definieren die orientierungserhaltende Isometrie $\Phi \in I(\mathbb{E}^3)$ durch

$$\forall q \in \mathbb{E}^3 : \Phi(q) := \tilde{F}(p_0) + B(q - F(p_0)) .$$

Dann gilt

$$d(\tilde{F} - \Phi \circ F) = d\tilde{F} - \Phi_L(dF) = B \circ dF - B \circ dF = 0$$

und somit ist $\tilde{F} - \Phi \circ F$ konstant. Da $\Phi(F(p_0)) = \tilde{F}(p_0)$ gilt, ergibt sich $\tilde{F} = \Phi \circ F$. \square

Angesichts dieses Satzes ist es eine natürliche Frage, ob es auch für den Existenz-Teil des Hauptsatzes der Kurventheorie eine Entsprechung in der Flächentheorie gibt, ob also zu einem gegebenen Riemannschen Gebiet (G, g) und einem zusätzlichen Tensorfeld h vom Typ $(0, 2)$ auf G eine Flächenparametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ mit Maßtensor g und zweiter Fundamentalform h existiert. Da diese Forderung auf ein System partieller Differentialgleichungen für F führt, sollte es nicht überraschen, dass eine solche Parametrisierung F nur unter zusätzlichen Voraussetzungen an g und h existiert. Insofern ist die Situation komplizierter als in der Kurventheorie, wo Bahngeschwindigkeit und Frenet-Krümmungen der Kurve beliebig vorgegeben werden konnten. Wir werden auf diese Problematik in Kapitel 7 zurückkommen.

6.4 Normalkrümmung und geodätische Krümmung einer Flächenkurve

Es seien $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine Parametrisierung einer C^r -Fläche und $\gamma = F \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine reguläre C^s -Flächenkurve mit $2 \leq s \leq r$, siehe Definition 1 aus Abschnitt 5.6.

Wir wollen die Geometrie der Kurve γ in Beziehung zur Fläche $[F]$ untersuchen, und führen hierzu ein Orthonormalbasisfeld längs γ ein, das sowohl an die Kurve γ als auch an die Flächenparametrisierung F angepasst ist. Zu diesem Zweck beachten wir, dass T_γ und $N_F \circ \alpha$ zwei ausgezeichnete, zueinander orthogonale Einheitsvektorfelder längs γ sind. Durch Hinzunahme des Vektorfeldes $E := (N_F \circ \alpha) \times T_\gamma$ erhalten wir ein positiv orientiertes Orthonormalbasisfeld $(T_\gamma, E, N_F \circ \alpha)$, das sogenannte *begleitende Darboux'sche 3-Bein der Kurve γ* .

Da das Krümmungsvektorfeld $\frac{d}{ds}T_\gamma$ der Kurve γ senkrecht auf T_γ steht, besitzt es die Darstellung

$$\frac{d}{ds}T_\gamma = \kappa_g \cdot E + \kappa_n \cdot (N_F \circ \alpha)$$

mit den C^{s-2} -Funktionen

$$\kappa_g := \left\langle \frac{d}{ds}T_\gamma, E \right\rangle \quad \text{und} \quad \kappa_n := \left\langle \frac{d}{ds}T_\gamma, N_F \circ \alpha \right\rangle.$$

Diese Funktionen heißen die *geodätische Krümmung* und die *Normalkrümmung* der Flächenkurve γ (man beachte die folgende Aussage 4). Natürlich hängen diese beiden Funktionen mit der Krümmung $\kappa_\gamma = \left\| \frac{d}{ds}T_\gamma \right\|$ der „Raumkurve“ γ durch

$$\kappa_\gamma^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$$

zusammen. Insbesondere gilt daher

$$\kappa_\gamma \geq |\kappa_n|.$$

Diese Abschätzung ist besonders in Verbindung mit der folgenden Aussage 1 von Interesse. Für die geodätische Krümmung gilt

$$\kappa_g = \frac{1}{v_\gamma^3} \cdot \det(\gamma', \gamma'', N_F \circ \alpha). \quad (*)$$

Beweis. Es gilt $\frac{d}{ds}T_\gamma = \frac{1}{v_\gamma} \left(\frac{1}{v_\gamma} \gamma' \right)' = \frac{1}{v_\gamma} \left(\left(\frac{1}{v_\gamma} \right)' \gamma' + \frac{1}{v_\gamma} \gamma'' \right)$ und deswegen

$$\kappa_g = \left\langle \frac{d}{ds}T_\gamma, (N_F \circ \alpha) \times T_\gamma \right\rangle = \det(N_F \circ \alpha, T_\gamma, \frac{d}{ds}T_\gamma) = \frac{1}{v_\gamma^3} \det(N_F \circ \alpha, \gamma', \gamma'') = \frac{1}{v_\gamma^3} \det(\gamma', \gamma'', N_F \circ \alpha).$$

□

Genauere Auskunft über die Normalkrümmung gibt der folgende Satz. Darin bezeichnet N_γ das Hauptnormalenfeld von γ .

Satz von Meusnier. Besitzt die Flächenkurve γ positive Krümmung κ_γ , so berechnet sich die Normalkrümmung von γ durch

$$\kappa_n = \kappa_\gamma \cdot \cos(\angle(N_\gamma, N_F \circ \alpha)).$$

Beweis. $\kappa_n = \left\langle \frac{d}{ds}T_\gamma, N_F \circ \alpha \right\rangle = \left\langle \kappa_\gamma \cdot N_\gamma, N_F \circ \alpha \right\rangle = \kappa_\gamma \cdot \cos(\angle(N_\gamma, N_F \circ \alpha)).$

□

Außerdem können wir die Normalkrümmung von γ durch die zweite Fundamentalform h der Parametrisierung F ausdrücken; es gilt nämlich

Aussage 1. Für alle $t \in I$ ist

$$\kappa_n(t) = \frac{h_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))}{g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \kappa_n(t) &= \left\langle \frac{d}{ds} T_\gamma, N_F \circ \alpha \right\rangle(t) = \frac{1}{v_\gamma} \langle T'_\gamma, N_F \circ \alpha \rangle(t) = -\frac{1}{v_\gamma} \langle T_\gamma, (N_F \circ \alpha)' \rangle(t) \\ &= -\frac{1}{v_\gamma(t)^2} \langle \gamma'(t), d_{\alpha(t)} N_F(\alpha'(t)) \rangle = \frac{1}{v_\gamma(t)^2} \langle d_{\alpha(t)} F(\alpha'(t)), d_{\alpha(t)} F(A_{\alpha(t)} \alpha'(t)) \rangle \\ &= \frac{1}{v_\gamma(t)^2} g(\alpha'(t), A_{\alpha(t)}(\alpha'(t))) = \frac{1}{g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} h_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)). \end{aligned}$$

□

Dieses Ergebnis ist verblüffend, zeigt es doch, dass man die Normalkrümmung von γ durch *einmaliges* Differenzieren von α berechnen kann, andererseits ist für diese Berechnung die *zweifache* Differentiation von F nötig. κ_n gibt demnach weniger eine Auskunft über die Krümmung von γ als über die Krümmung von F in Richtung von α . Aus diesem Grund bezeichnet man für jedes $p \in G$ die Funktion

$$\text{NK}_p : v \mapsto h_p(v, v) \quad \text{für } v \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } g_p(v, v) = 1$$

als die *Normalkrümmung der Parametrisierung* F in p . Wir werden sie in dem folgenden Abschnitt weiter untersuchen.

Aufgabe 1. Unter Berücksichtigung von Aussage 1 mache man sich den Satz von Meusnier klar, indem man eine Wurst unter verschiedenem Neigungswinkel zerschneidet und die Krümmung der Schnittkurve betrachtet.

Natürlich ist es naheliegend nach den Kurven verschwindender geodätischer Krümmung bzw. verschwindender Normalkrümmung zu fragen. Dazu folgende

Definition. Es sei $\gamma = F \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine C^2 -Kurve der Fläche $[F]$.

- (a) γ heißt eine *geodätische Linie* (kurz: eine *Geodätische*) der Fläche $[F]$, wenn für alle $t \in I$ der Beschleunigungsvektor $\gamma''(t)$ in Richtung von $N_F \circ \alpha(t)$ weist, wenn also

$$\gamma'' = \langle \gamma'', N_F \circ \alpha \rangle \cdot (N_F \circ \alpha)$$

ist.

- (b) γ heißt eine *Asymptotenlinie* der Fläche $[F]$, wenn ihre Normalkrümmung κ_n überall verschwindet.

- (c) Ist $p \in G$, so sagt man, dass ein Vektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in p in *Asymptotenrichtung* der Parametrisierung F weist, wenn $h_p(v, v) = 0$ ist.

Asymptotenlinien werden durch folgende geometrische Tatsache charakterisiert:

Aussage 2. Hat die Kurve $\gamma = F \circ \alpha$ positive Krümmung, so ist sie genau dann eine Asymptotenlinie der Fläche $[F]$, wenn für alle $t \in I$ der Richtungsvektorraum $\text{Spann}\{T_\gamma(t), N_\gamma(t)\}$ der Schmiegeebene von γ mit dem Tangentialraum $T_{\alpha(t)}F$ der Parametrisierung F übereinstimmt.

Beweis. Man beachte den Satz von MEUSNIER. \square

Die Geodätischen einer Fläche sind gerade die Flächenkurven, die sich *innerhalb* der Fläche nicht krümmen. Denn es gilt:

Aussage 3. Die reguläre Kurve $\gamma = F \circ \alpha$ ist genau dann eine Geodätische der Fläche $[F]$, wenn

$$\|\gamma'\| \equiv \text{const.} \quad \text{und} \quad \kappa_g \equiv 0$$

ist.

Beweis. Aus $\gamma' = v_\gamma \cdot T_\gamma$ folgt $\gamma'' = v'_\gamma \cdot T_\gamma + v_\gamma^2 \cdot (\kappa_g \cdot E + \kappa_n \cdot N_F \circ \alpha)$. Daher ist γ genau dann eine Geodätische der Fläche $[F]$, wenn $v'_\gamma \equiv \kappa_g \equiv 0$ ist, woraus die Behauptung folgt. \square

Beispiel 1. Es seien $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ die kanonische Parametrisierung einer singularitätenfreien Rotationsfläche zu einer nach der Bogenlänge parametrisierten C^2 -Profilkurve $\alpha = (r, b)$ und $\gamma := F^s$ ein Meridian der Rotationsfläche zu einem festen Parameter $s \in \mathbb{R}$; es gilt $\gamma = F \circ \alpha_s$ mit $\alpha_s : t \mapsto (t, s)$. Wir zeigen nun, dass γ eine Geodätische der Rotationsfläche ist. Zunächst ist

$$v_\gamma^2 = \|\gamma'\|^2 = (r')^2 + (b')^2 \equiv 1.$$

Daher ist nach (*) die geodätische Krümmung von γ durch $\kappa_g = \det(\gamma', \gamma'', N_F \circ \alpha_s)$ gegeben. Nun ist

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= p_0 + r(t) \cdot \Gamma_{\mathbf{a}}(s) + b(t) \cdot a_3, \quad \text{also} \\ \gamma'(t) &= r'(t) \cdot \Gamma_{\mathbf{a}}(s) + b'(t) \cdot a_3, \quad \text{also} \\ \gamma''(t) &= r''(t) \cdot \Gamma_{\mathbf{a}}(s) + b''(t) \cdot a_3 \quad \text{und} \\ N_F \circ \alpha_s(t) &= r'(t) a_3 - b'(t) \Gamma_{\mathbf{a}}(s), \end{aligned}$$

womit $\kappa_g = 0$ folgt.

Beispiel 2. Eine reguläre Flächenkurve $\gamma = F \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ ist genau dann gleichzeitig eine Geodätische und eine Asymptotenlinie der Fläche, wenn es einen Punkt $p_0 \in \mathbb{E}^3$ und einen Vektor $a \neq 0$ in \mathbb{E}^3 gibt, so dass $\gamma(t) = p_0 + t \cdot a$ für alle $t \in I$ ist. Insbesondere sind die Erzeugenden einer Regelfläche sowohl Geodätische als auch Asymptotenlinien der Regelfläche.

Aussage 4. Es sei $\gamma = F \circ \alpha$ eine reguläre Flächenkurve der Fläche $[F]$. In der Situation der Aussage 2 aus Abschnitt 6.1 gilt mit $\tilde{\alpha} := \varphi^{-1} \circ \alpha$

$$\begin{aligned} \gamma &= \tilde{F} \circ \tilde{\alpha}, \quad N_{\tilde{F}} \circ \tilde{\alpha} = \varepsilon \cdot (N_F \circ \alpha), \quad \tilde{E} = \varepsilon \cdot E, \\ \tilde{\kappa}_g &= \varepsilon \cdot \kappa_g \quad \text{und} \quad \tilde{\kappa}_n = \varepsilon \cdot \kappa_n. \end{aligned}$$

Daher sind auch die Definitionen der Begriffe „geodätische Linie“ und „Asymptotenlinie“ von der Wahl der Parametrisierung der Fläche $[F]$ unabhängig.

Aufgabe 2. Es seien $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ die kanonische Parametrisierung einer singularitätenfreien Rotationsfläche zu einer nach der Bogenlänge parametrisierten C^2 -Profilkurve $\alpha = (r, b)$ und $\gamma := F_t$ ein Breitenkreis der Rotationsfläche zu einem festen Parameter $t \in I$; es gilt $\gamma = F \circ \alpha_t$ mit $\alpha_t : s \mapsto (t, s)$.

- (a) Man beweise, dass γ die konstante geodätische Krümmung $r'(t)/r(t)$ hat.
- (b) Man zeige, dass es (im Wesentlichen genau) eine singularitätenfreie Rotationsfläche gibt, deren Breitenkreise alle die geodätische Krümmung 1 haben, und bestimme die Profilkurve dieser Fläche. Man nennt diese Profilkurve eine *Traktrix*.

6.5 Die skalaren Krümmungsgrößen

Wir betrachten wie zuvor eine C^r -Flächenparametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ zusammen mit ihrem Maßtensor g , ihrer Volumenform ω , ihrem Formoperator A , und ihrer zweiten Fundamentalform h .

Um die Untersuchung des Formoperators A zu erleichtern, führen wir nun mehrere skalare Funktionen ein, die Aspekte des Krümmungstensors beschreiben. Diese heißen die *skalaren Krümmungsgrößen* von F . Wem die Menge der verschiedenen skalaren Krümmungsgrößen etwas unübersichtlich erscheint, der mache sich klar, dass es sich bei ihnen nicht um neuartige Objekte handelt, sondern sie alle aus ein-und-derselben Größe, nämlich dem Formoperator von F , hergeleitet sind.

Satz und Definition 1. Für $p \in G$ ist das charakteristische Polynom des selbstadjungierten Endomorphismus A_p

$$\lambda^2 - 2H_F(p) \cdot \lambda + K_F(p)$$

gegeben durch die Funktionen

$$H_F : G \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \frac{1}{2} \text{Spur}(A_p) \quad \text{und} \quad K_F : G \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \det(A_p).$$

K_F heißt die *Gaußsche Krümmung* von F und H_F die *mittlere Krümmung* von F . Weil A_p jeweils selbstadjungiert ist, gilt auf jeden Fall $H_F^2 - K_F \geq 0$, und die Eigenwerte von A_p werden durch $\lambda_1(p)$ und $\lambda_2(p)$ mit den Funktionen

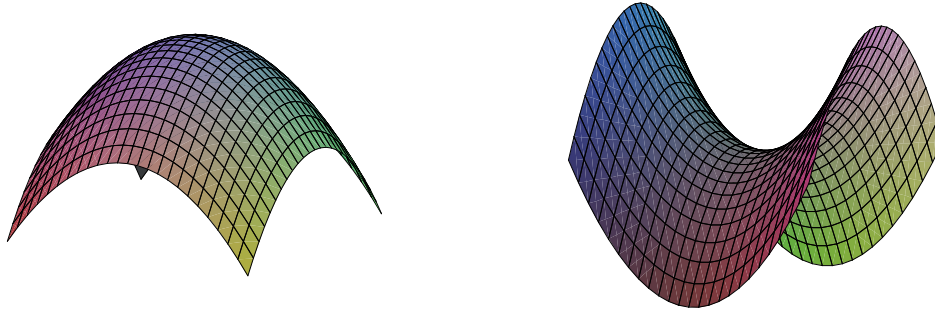
$$\lambda_1 := H_F - \sqrt{H_F^2 - K_F} \quad \text{und} \quad \lambda_2 := H_F + \sqrt{H_F^2 - K_F}$$

gegeben. λ_1 und λ_2 heißen die *Hauptkrümmungen* von F . Es gilt

$$K_F \equiv \lambda_1 \cdot \lambda_2, \quad H_F \equiv \frac{1}{2} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) \quad \text{und} \quad H_F^2 - K_F \equiv \frac{1}{4} \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)^2.$$

Die Funktionen K_F und H_F sind $(r-2)$ -mal stetig differenzierbar; hingegen sind die Funktionen λ_1 und λ_2 zwar stetig, aber im Allgemeinen nur in den „Nicht-Nabelpunkten“ (vgl. die folgende Definition 2 (b)) $(r-2)$ -mal stetig differenzierbar.

Die folgenden beiden Bilder zeigen die typische Gestalt von Flächen positiver bzw. negativer Gaußscher Krümmung. Eine Möglichkeit, sich dies klarzumachen, besteht darin, die gegebene Fläche lokal als Graphenfläche aufzufassen (siehe das Theorem aus Abschnitt 5.5), und dafür die Beschreibung der zweiten Fundamentalform von Graphenflächen aus Beispiel 2(a) in Abschnitt 6.2, sowie die Extremwerttheorie auszunutzen.



Beispiel 1. Ist F eine ebene Flächenparametrisierung (siehe Beispiel 1(a) aus Abschnitt 6.2), so verschwinden die Krümmungsfunktionen K_F, H_F, λ_1 und λ_2 . Ist F eine sphärische Flächenparametrisierung, sagen wir $F(G) \subset S_R(q_0)$ (siehe Beispiel 1(b) aus Abschnitt 6.2), so gilt $K_F = 1/R^2$ und $H_F = \lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1/R$.

Aussage 1. In der Situation der Aussage aus Abschnitt 6.2 hängen die skalaren Krümmungsgrößen der Parametrisierungen F und \tilde{F} durch folgende Beziehungen zusammen:

$$K_{\tilde{F}} = K_F \circ \varphi \quad , \quad H_{\tilde{F}} = \varepsilon \cdot (H_F \circ \varphi) \quad , \quad \tilde{\lambda}_1 = \varepsilon \cdot (\lambda_1 \circ \varphi) \quad \text{und} \quad \tilde{\lambda}_2 = \varepsilon \cdot (\lambda_2 \circ \varphi) \quad .$$

Man präge sich also ein: Wechselt man die Orientierung der Parametrisierung F , so bewirkt dies einen Vorzeichenwechsel bei der mittleren Krümmung und den Hauptkrümmungen; hingegen ist die Gaußsche Krümmung von der Orientierungswahl unabhängig.

Aufgabe 1. Die äußeren Krümmungsgrößen spezieller affiner Bilder von Flächen.

Ist $\Phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ ein C^r -Diffeomorphismus, so ist unter den Voraussetzungen dieses Abschnittes auch $\tilde{F} := \Phi \circ F$ eine Parametrisierung einer singularitätenfreien C^r -Fläche. In zwei Spezialfällen sollen die äußeren Krümmungsgrößen von \tilde{F} untersucht werden:

- (a) Ist Φ eine *orientierungstreue Isometrie* von \mathbb{E}^3 , so haben F und \tilde{F} dieselben Maßtensoren und Formoperatoren. Daher stimmen auch die zweiten Fundamentalformen, die Gaußschen Krümmungen, die mittleren Krümmungen und die Hauptkrümmungen der beiden Parametrisierungen überein.
- (b) Es sei Φ eine *Homothetie* von \mathbb{E}^3 , d.h.: Es existiert ein Punkt $q_0 \in \mathbb{E}^3$ und ein „Streckungsfaktor“ $c \in \mathbb{R}_+$, so dass für alle $q \in \mathbb{E}^3$

$$\Phi(q) = q_0 + c \cdot (q - q_0)$$

gilt. Kennzeichnen wir die zu \tilde{F} gehörigen Größen durch eine Schlange \sim , so gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= c^2 \cdot g \quad , \quad \tilde{\omega} = c^2 \cdot \omega \quad , \quad N_{\tilde{F}} = N_F \quad , \quad \tilde{A} = \frac{1}{c} \cdot A \quad , \quad \tilde{h} = c \cdot h \quad , \\ K_{\tilde{F}} &= \frac{1}{c^2} \cdot K_F \quad , \quad H_{\tilde{F}} = \frac{1}{c} \cdot H_F \quad \text{und} \quad \tilde{\lambda}_i = \frac{1}{c} \cdot \lambda_i \quad \text{für } i = 1, 2 \quad . \end{aligned}$$

Definition 2. Ein Punkt $p \in G$ bzw. sein Bildpunkt $F(p)$ heißt ein

- (a) *planarer Punkt* von F bzw. von $[F]$, wenn $A_p = 0$ ist,
- (b) *Nabelpunkt* von F bzw. von $[F]$, wenn $A_p = c \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ mit einem $c \in \mathbb{R}$ gilt,
- (c) *elliptischer Punkt* von F bzw. von $[F]$, wenn $K_F(p) > 0$ ist,
- (d) *hyperbolischer Punkt* von F bzw. von $[F]$, wenn $K_F(p) < 0$ ist, und ein
- (e) *parabolischer Punkt* von F bzw. von $[F]$, wenn $K_F(p) = 0$ ist.

Beispiel 2. Ist F eine ebene oder sphärische Flächenparametrisierung, so sind alle ihre Punkte Nabelpunkte; im ebenen Fall sind sie sogar planar (daher der Name „planarer Punkt“); siehe die Beispiele 1 aus Abschnitt 6.2 und vor allem den folgenden Satz.

Aussage 2.

- (a) Jeder planare Punkt von $[F]$ ist auch ein Nabelpunkt und ein parabolischer Punkt von $[F]$.
- (b) Jeder Nabelpunkt von $[F]$ ist entweder ein elliptischer oder ein planarer Punkt von $[F]$.

Satz. Eine singularitätenfreie C^3 -Flächenparametrisierung F ist genau dann eben oder sphärisch, wenn jeder ihrer Punkte ein Nabelpunkt ist.

Beweis. Für die Implikation „ \Rightarrow “ vergleiche man Beispiel 2. Zum Beweis der Implikation „ \Leftarrow “ gehen wir davon aus, dass $A = \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ mit einer geeigneten Funktion $\lambda : G \rightarrow \mathbb{R}$ gilt. Mit A ist auch λ eine C^1 -Funktion. Die Weingartengleichung lautet in diesem Fall

$$dN_F = -\lambda \cdot dF. \quad (*)$$

Durch Differentiation erhalten wir daraus jeweils $d_p^2 N_F(u, v) = -d_p \lambda(u) \cdot d_p F(v) - \lambda(p) \cdot d_p^2 F(u, v)$. Aufgrund der Symmetrie der Differentiale zweiter Ordnung folgt daher $d_p \lambda(u) \cdot d_p F(v) = d_p \lambda(v) \cdot d_p F(u)$ für alle $p \in G$ und $u, v \in \mathbb{R}^2$. Wäre nun $d_p \lambda \neq 0$, etwa $d_p \lambda(u) = 1$ für ein $u \in \mathbb{R}^2$, so würde für beliebiges $v \in \mathbb{R}^2$ folgen: $d_p F(v) = d_p \lambda(v) \cdot d_p F(u)$; somit wäre $d_p F(\mathbb{R}^2)$ höchstens eindimensional, im Widerspruch zur Injektivität von $d_p F$. Also gilt $d_p \lambda = 0$ und somit ist λ konstant. Im Falle $\lambda \equiv 0$ ist $A \equiv 0$ und somit F eben nach dem Beispiel 1(a) aus Abschnitt 6.2. Ist aber $\lambda \neq 0$, so differenzieren wir die Abbildung $Q : G \rightarrow \mathbb{E}^3$, $p \mapsto F(p) + \frac{1}{\lambda} \cdot N_F(p)$ und erhalten wegen $(*)$ $dQ \equiv 0$; d.h.: Es existiert ein Punkt $q_0 \in \mathbb{E}^3$, so dass $F - q_0 = -\frac{1}{\lambda} \cdot N_F$ ist. Somit ist $\langle F - q_0, F - q_0 \rangle \equiv R^2$ mit $R := |1/\lambda|$. \square

Definition 3. Die Eigenvektoren v des Formoperators A_p mit $g_p(v, v) = 1$ heißen *Hauptkrümmungsrichtungen* von F in p . Eine reguläre C^1 -Flächenkurve $\gamma = F \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ nennt man eine *Krümmungslinie* der Fläche $[F]$, wenn für alle $t \in I$ der Tangentenvektor $\alpha'(t)$ in eine Hauptkrümmungsrichtung von F weist, wenn also jeweils

$$A_{\alpha(t)} \alpha'(t) = \lambda_1(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \quad \text{oder} \quad A_{\alpha(t)} \alpha'(t) = \lambda_2(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$$

ist.

Obwohl in diese Definition der Krümmungslinie die Parametrisierung F wesentlich eingeht, ist der Begriff „Krümmungslinie“ von der speziellen Wahl der Parametrisierung unabhängig. Dies folgt aus der Aussage 4 aus Abschnitt 6.4 und aus

Aussage 3. Für eine reguläre C^1 -Flächenkurve $\gamma = F \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ mit Normalkrümmung κ_n sind die folgenden Aussagen paarweise äquivalent:

- (a) γ ist eine Krümmungslinie der Fläche $[F]$.
- (b) Für jedes $t \in I$ sind die Vektoren $(N_F \circ \alpha)'(t)$ und $\gamma'(t)$ linear abhängig.
- (c) $(N_F \circ \alpha)' = -\kappa_n \cdot \gamma'$
- (d) $\forall t \in I : A_{\alpha(t)} \alpha'(t) = \kappa_n(t) \cdot \alpha'(t)$

Für eine Krümmungslinie $\gamma = F \circ \alpha$ stimmt also die Normalkrümmung $\kappa_n(t)$ jeweils mit der zu der Krümmungslinie korrespondierenden Hauptkrümmung von F im Punkt $\alpha(t)$ überein.

Beweis. Wegen $\gamma'(t) = d_{\alpha(t)} F(\alpha'(t))$ und $(N_F \circ \alpha)'(t) = -d_{\alpha(t)} F(A_{\alpha(t)} \alpha'(t))$ gilt genau dann $(N_F \circ \alpha)'(t) = c \cdot \gamma'(t)$, wenn $A_{\alpha(t)} \alpha'(t) = -c \cdot \alpha'(t)$ ist, womit insbesondere die Äquivalenz (a) \Leftrightarrow (b) bewiesen ist. Im Falle (b) gilt $(N_F \circ \alpha)' = \|\gamma'\|^{-2} \cdot \langle (N_F \circ \alpha)', \gamma' \rangle \cdot \gamma'$. Wegen $\langle N_F \circ \alpha, \gamma' \rangle \equiv 0$ ist $\langle (N_F \circ \alpha)', \gamma' \rangle = -\langle N_F \circ \alpha, \gamma'' \rangle$; setzt man hier $\gamma'' = v_\gamma' \cdot T_\gamma + v_\gamma^2 \cdot (dT_\gamma/ds)$ ein, so folgt (c) mit der Definition von κ_n . Hieraus ergibt sich (d) mit den ersten beiden Zeilen dieses Beweises. (d) \Rightarrow (a) ist trivial. \square

Beispiele 3.

- (a) Ist F eine ebene oder sphärische C^r -Flächenparametrisierung, so ist jede reguläre Flächenkurve $\gamma = F \circ \alpha$ eine Krümmungslinie.
- (b) Es seien $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ und $\tilde{F} : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ zwei singularitätenfreie C^r -Parametrisierungen, die sich längs einer regulären C^1 -Kurve $\alpha : I \rightarrow G$ berühren oder unter einem konstanten Winkel schneiden, für die also gilt

$$F \circ \alpha = \tilde{F} \circ \alpha =: \gamma \quad \text{und} \quad \langle N_F \circ \alpha, N_{\tilde{F}} \circ \alpha \rangle \equiv \text{const.}$$

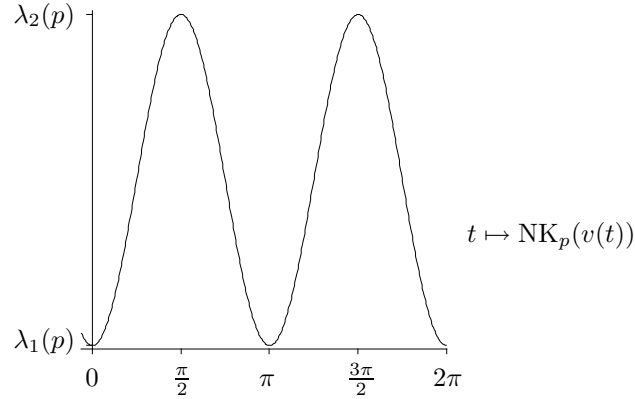
In dieser Situation gilt:

- (i) Die Kurve γ ist genau dann eine Krümmungslinie von $[F]$, wenn sie eine Krümmungslinie von $[\tilde{F}]$ ist.
- (ii) Ist \tilde{F} eben oder sphärisch, so ist γ auf jeden Fall eine Krümmungslinie auch von $[F]$.
- (c) Die Meridiane und Breitenkreise einer Rotationsfläche sind Krümmungslinien.

[Tipp: Wie kippt das Einheitsnormalenfeld, wenn man sich entlang eines Meridians bewegt? Wieso sind die Breitenkreise Krümmungslinien, wenn man weiß, dass die Meridiane es sind?]

Satz von Euler. Es sei (a_1, a_2) eine ONB von Hauptkrümmungsrichtungen von F in p , wobei die Orthonormalität bezüglich des Skalarproduktes g_p gemeint ist; und zwar sei $A_p a_i = \lambda_i(p) \cdot a_i$ für $i = 1, 2$. Dann gilt für die Normalkrümmung von F in p und in Richtung $v(t) := \cos(t) \cdot a_1 + \sin(t) \cdot a_2$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \text{NK}_p(v(t)) &= \lambda_1(p) \cdot \cos^2(t) + \lambda_2(p) \cdot \sin^2(t) \\ &= \lambda_1(p) + (\lambda_2(p) - \lambda_1(p)) \cdot \sin^2(t). \end{aligned}$$



Beweis. Man hat einfach $h_p(v(t), v(t))$ auszurechnen, indem man die Bilinearität von h_p und $h_p(a_i, a_k) = \lambda_i \cdot \delta_{ik}$ ausnutzt. \square

Feststellung. Für jedes $p \in G$ sind $\lambda_1(p)$ und $\lambda_2(p)$ das Minimum bzw. das Maximum der Normalkrümmungs-Funktion NK_p . (Aber klar doch: Die Existenz von Eigenwerten eines selbst-adjungierten Operators beweist man doch gerade durch eine derartige Extremwertuntersuchung.)

Folgerung 1. Über die Anzahl von Asymptotenrichtungen. Es bezeichne

$$AR_F(p) := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid g_p(v, v) = 1 \text{ und } NK_p(v) = 0\}$$

die Menge der Asymptotenrichtungen einer singularitätenfreien C^r -Parametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ in einem Punkt $p \in G$. Natürlich ist $-v \in AR_F(p)$, wenn $v \in AR_F(p)$ ist. Es sind nun folgende und keine weiteren Fälle möglich:

- (a) $\#AR_F(p) = 0$, wenn nämlich p ein elliptischer Punkt von F ist,
- (b) $\#AR_F(p) = 2$, wenn nämlich p ein parabolischer, nicht-planarer Punkt von F ist,
- (c) $\#AR_F(p) = 4$, wenn nämlich p ein hyperbolischer Punkt von F ist,
- (d) $AR_F(p) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid g_p(v, v) = 1\}$, wenn nämlich p ein planarer Punkt von F ist.

Beweis. Es ist klar, dass für $p \in G$ genau einer der vier Fälle (a) p ist elliptischer Punkt von F , (b) p ist parabolischer, aber nicht planarer Punkt von F , (c) p ist hyperbolischer Punkt von F oder (d) p ist planarer Punkt von F vorliegt.

Ist p ein elliptischer Punkt von F , so gilt $0 < K_F(p) = \lambda_1(p) \cdot \lambda_2(p)$, und somit haben $\lambda_1(p)$ und $\lambda_2(p)$ dasselbe Vorzeichen. Nach dem Satz von Euler nimmt NK_p nur Werte zwischen $\lambda_1(p)$ und $\lambda_2(p)$ an, und ist daher nullstellenfrei. Damit gilt $AR_F(p) = \emptyset$.

Ist p ein parabolischer, aber nicht planarer Punkt von F , so ist eine der beiden Hauptkrümmungen $\lambda_1(p)$ und $\lambda_2(p)$ gleich Null, die andere von Null verschieden. Ist etwa $\lambda_1(p) = 0$, so ist nach dem Satz von Euler $AR_F(p) = \{v(0), v(\pi)\}$ (mit der Bezeichnung $v(t)$ wie im Satz von Euler) und damit $\#AR_F(p) = 2$.

Ist p ein hyperbolischer Punkt von F , so haben die beiden Hauptkrümmungen $\lambda_1(p)$ und $\lambda_2(p)$ entgegengesetztes Vorzeichen. Daher hat die Funktion $t \mapsto NK_p(v(t))$ in den Intervallen $]0, \frac{\pi}{2}[$, $]\frac{\pi}{2}, \pi[$, $]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ und $]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ nach dem Satz von Euler jeweils genau eine Nullstelle. Also ist $\#AR_F(p) = 4$.

Ist schließlich p ein planarer Punkt von F , so gilt $A_p = 0$ und somit auch $h_p = 0$. Somit ist $AR_F(p) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid g_p(v, v) = 1\}$. \square

Folgerung 2. Regelflächen haben in ihren regulären Punkten stets eine nicht-positive Gaußsche Krümmung.

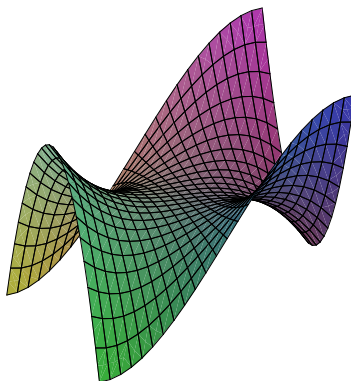
Beweis. Die Erzeugenden sind Asymptotenlinien. □

Aufgabe 2. Es sei p ein Punkt von G und v ein Einheitsvektor des euklidischen Vektorraumes (\mathbb{R}^2, g_p) , der in eine Asymptotenrichtung von F weist. In diesem Fall ist v genau dann auch eine Hauptkrümmungsrichtung von F , wenn p ein parabolischer Punkt von F ist.

Aufgabe 3. Als *Affensattel* wird die Graphenfläche zu der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (t, s) \mapsto s \cdot (s^2 - 3t^2)$$

bezeichnet. Man überlege, dass in dem Affensattel durch den Punkt $p_0 := (0, 0, 0)$ drei Geraden verlaufen, und begründe damit, dass der Punkt p_0 ein planarer Punkt des Affensattels ist.



6.6 Zur Berechnung der skalaren Krümmungsgrößen

Basis für das Folgende ist das

Lemma. Ist L ein Endomorphismus eines n -dimensionalen euklidischen Vektorraumes $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und sind $v_1, \dots, v_n \in V$, so gilt

$$\det(\langle L(v_i), v_k \rangle) = \det(L) \cdot \det(\langle v_i, v_k \rangle) .$$

Beweis. Man wende auf $\det(\langle L(v_i), v_k \rangle)$ und $\det(\langle v_i, v_k \rangle)$ die Formel der Aussage 2 aus Abschnitt 1.7 an und beachte, dass für jedes $\omega \in \text{Alt}^n(V)$ gilt

$$\omega(L(v_1), \dots, L(v_n)) = \det(L) \cdot \omega(v_1, \dots, v_n) .$$

□

Satz. Es seien $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine Parametrisierung einer singularitätenfreien C^2 -Fläche, g_{ik} und h_{ik} die Komponenten ihres Maßtensors bzw. ihrer zweiten Fundamentalfarm und ρ_F ihr Flächenelement. Dann sind die Gaußsche und die mittlere Krümmung durch

$$K_F = \frac{1}{\rho_F^2} \cdot \det(h_{ik}) \quad \text{und} \quad H_F = \frac{1}{2\rho_F^2} \cdot (g_{11} \cdot h_{22} - 2g_{12} \cdot h_{12} + g_{22} \cdot h_{11})$$

gegeben.

Beweis. Für jedweden Punkt $p \in G$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ erhält man durch Anwendung des obigen Lemmas auf $L = A_p - \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^2}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle = g_p$ und $(v_1, v_2) = (e_1, e_2)$

$$\begin{aligned} \det(h_{ik}(p) - \lambda \cdot g_{ik}(p)) &= \det(g_p(A_p e_i - \lambda \cdot e_i, e_k)) \\ &= \det(A_p - \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^2}) \cdot \det(g_p(e_i, e_k)) \\ &= (\lambda^2 - 2H_F(p) \cdot \lambda + K_F(p)) \cdot \rho_F(p)^2. \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \det(h_{ik} - \lambda \cdot g_{ik}) &= (h_{11} - \lambda g_{11}) \cdot (h_{22} - \lambda g_{22}) - (h_{12} - \lambda g_{12})^2 \\ &= h_{11} h_{22} - \lambda h_{11} g_{22} - \lambda g_{11} h_{22} + \lambda^2 g_{11} g_{22} - h_{12}^2 + 2\lambda h_{12} g_{12} - \lambda^2 g_{12}^2 \\ &= (g_{11} g_{22} - g_{12}^2) \lambda^2 + (-g_{11} h_{22} + 2g_{12} h_{12} - g_{22} h_{11}) \lambda + (h_{11} h_{22} - h_{12}^2) \\ &= \rho_F^2 \cdot \lambda^2 + (-g_{11} h_{22} + 2g_{12} h_{12} - g_{22} h_{11}) \lambda + \det(h_{ik}). \end{aligned}$$

Führt man nun einen Koeffizientenvergleich bezüglich λ durch, so erhält man die fraglichen Formeln. \square

Aufgabe 1. Gaußsche Krümmung von Graphenflächen. Die Graphenflächenparametrisierung F einer C^r -Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ ($G \subset \mathbb{R}^2$, $r \geq 2$) hat die Gaußsche Krümmung

$$K_F = \frac{1}{\rho_F^4} \cdot \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right).$$

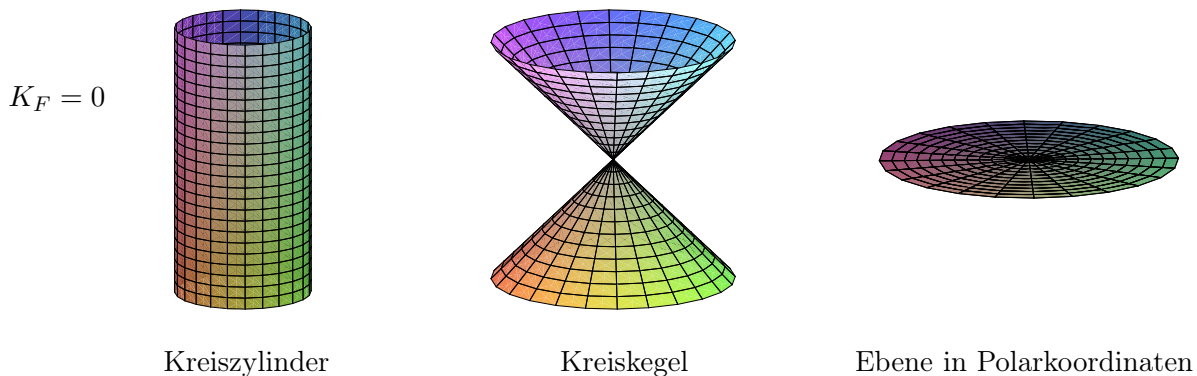
Aussage. Ist $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine singularitätenfreie C^2 -Flächenparametrisierung und gilt $g_{12}(p) = h_{12}(p) = 0$ für einen Punkt $p \in G$, so weisen die kanonischen Basisvektoren e_1 und e_2 in Hauptkrümmungsrichtungen von F in p , und $h_{11}(p)/g_{11}(p)$ bzw. $h_{22}(p)/g_{22}(p)$ sind die zugehörigen Hauptkrümmungen.

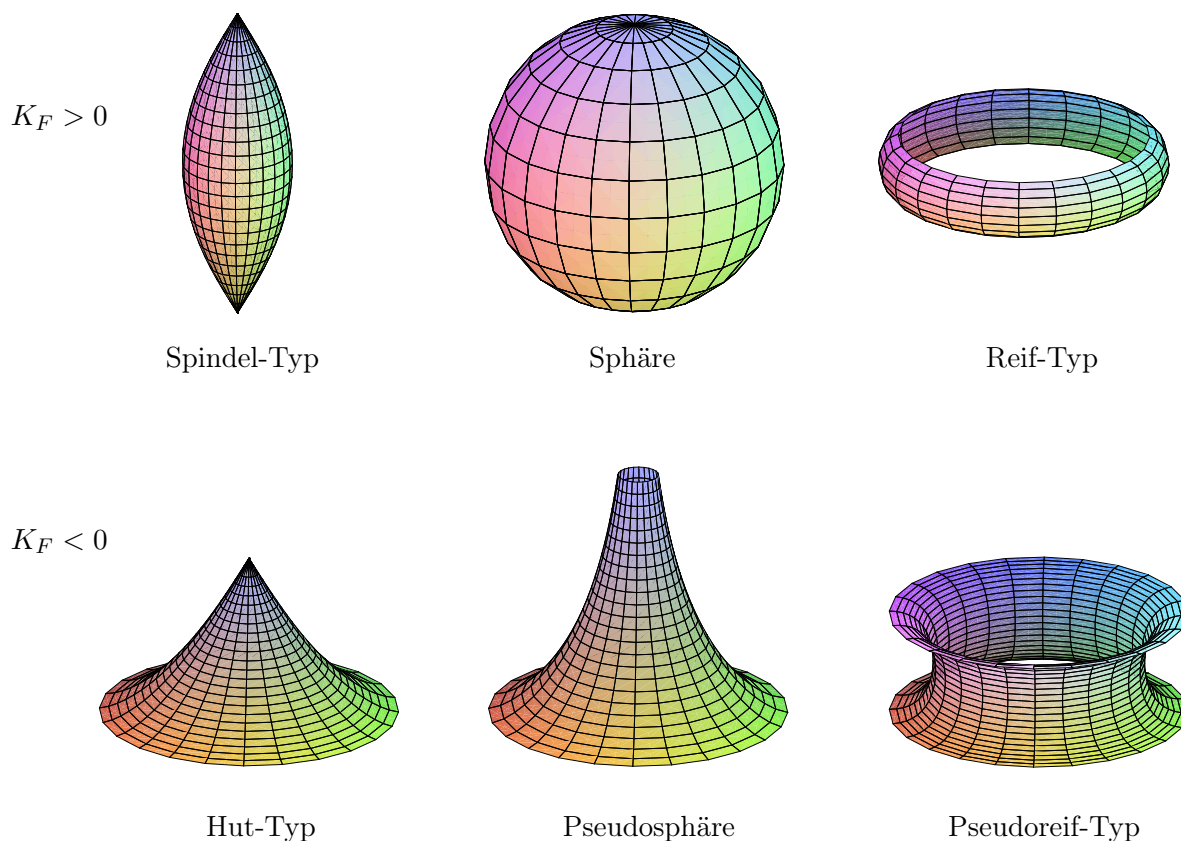
Ist sogar $g_{12} \equiv h_{12} \equiv 0$, so sind die Parameterlinien von F Krümmungslinien der Fläche.

Aufgabe 2. Ist F die kanonische Parametrisierung einer singularitätenfreien C^2 -Rotationsfläche, für welche die Profilkurve $\alpha = (r, b)$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist, so gilt für deren Gaußsche Krümmung

$$K_F(t, s) = -\frac{r''(t)}{r(t)}.$$

Man zeige, daß für Rotationsflächen konstanter Gaußscher Krümmung folgende (und keine weiteren) Typen vorkommen, und gebe die Profilkurven dieser Typen so explizit wie möglich an.





Wegen Aufgabe 1 (b) aus Abschnitt 6.5 kann man sich hierbei auf die Fälle $K_F \in \{0, 1, -1\}$ beschränken. Die allgemeinen Lösungen r für die Differentialgleichung

$$r'' + K_F \cdot r = 0$$

lautet bekanntlich

$$\begin{aligned} \text{für } K_F = 0 : \quad r(t) &= a t + c , \\ \text{für } K_F = 1 : \quad r(t) &= a \cos(t) + c \sin(t) , \\ \text{für } K_F = -1 : \quad r(t) &= a \cosh(t) + c \sinh(t) . \end{aligned}$$

Bei bekanntem r ist dann die Funktion b vermittle

$$(b')^2 = 1 - (r')^2$$

berechenbar. In fast allen Fällen muss der Definitionsbereich von (r, b) auf ein geeignetes Intervall I eingeschränkt werden, damit die Bedingungen $r(t) > 0$ und $|r'(t)| \leq 1$ erfüllt sind. [†]

Bemerkung. Die Profilkurve der Pseudosphäre ist übrigens die *Traktrix* (*Schleppkurve*) mit „Seillänge“ 1; siehe z.B. das *Taschenbuch der Mathematik* von BRONSTEIN/SEMENDJAJEW.

[†]Die Bezeichnungen „Spindel“, „Reif“, „Hut“ und „Pseudoreif“ gehören nicht zum allgemeinen mathematischen Sprachgebrauch.

Aufgabe 3. Die Gaußsche Krümmung von Regelflächen. Es sei $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ die Parametrisierung einer Regelfläche, wie sie in Abschnitt 5.3 beschrieben wurde (siehe diesen Abschnitt insbesondere für die Bedeutung von $S(t)$ und $\Delta(t)$); allerdings seien α und E nun als mindestens zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt. Im folgenden müssen die Singularitäten von F aus der Betrachtung ausgeschlossen werden. Daher setzen wir $R(t) := \mathbb{R} \setminus S(t)$ und $G_F := \bigcup (\{t\} \times R(t))$. Für jedes $t \in I$ sei $K_t : R(t) \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $s \mapsto K_F(t, s)$. Man zeige:

(a) Für alle $(t, s) \in G_F$ gilt

$$K_F(t, s) = - \frac{\det(\alpha'(t), E(t), E'(t))^2}{\rho_F(t, s)^4},$$

insbesondere erkennt man erneut $K_F \leq 0$.

(b) Tangentenflächen haben verschwindende Krümmung.

(c) Für jedes $t \in I$ gilt folgende Sequenz von Äquivalenzen:

$$K_F(t, s) = 0 \text{ für ein } s \in R(t) \iff \det(\alpha'(t), E(t), E'(t)) = 0 \iff K_t \equiv 0.$$

(d) Ist $t \in I$ ein Parameter, für den $K_t \equiv 0$ gilt, so ist F_t Krümmungslinie zur Hauptkrümmung 0, mit anderen Worten: $\frac{\partial}{\partial s} N_F(t, \cdot) \equiv 0$.

(e) Es sei $\det(\alpha'(t), E(t), E'(t)) \neq 0$ (dann ist also $R(t) = \mathbb{R}$ nach der Folgerung aus 5.3). Für die Funktion K_t gilt dann

$$K_t < 0, \quad \min K_t = -1/\Delta(t)^2 \quad \text{und} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} K_t(s) = \lim_{s \rightarrow -\infty} K_t(s) = 0.$$

Man skizziere den Funktionsverlauf von K_t . Ist α Striktionslinie, so hat man für K_t die besonders einfache Darstellung

$$K_t(s) = - \left(\frac{\Delta(t)}{s^2 + \Delta(t)^2} \right)^2.$$

Bemerkung. Parametrisiert F eine Regelfläche mit verschwindender Gaußscher Krümmung, so ist nach (c) die Identität $\det(\alpha', E, E') \equiv 0$ erfüllt. Beispiele hierfür sind Kegel und Zylinder (vgl. Abschnitt 5.3). Ist die Regelfläche nirgends zylindrisch und nirgends kegelförmig (letzteres soll heißen, dass die Striktionslinie regulär ist), so handelt es sich bei der betrachteten Regelfläche um eine Tangentenfläche (vgl. Aufgabe 3 aus 5.3). Es sei auch bemerkt, dass alle Kegel, Zylinder und Tangentenflächen lokal aus Papier modelliert werden können (vgl. Aufgabe 3 aus 5.6).

Aufgabe 4. Weitere Beispiele von Flächen verschwindender Krümmung. Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine reguläre C^3 -Kurve positiver Krümmung; weiterhin sei E ein paralleles Einheitsnormalenfeld von γ , vgl. Aufgabe 1 aus Abschnitt 4.1. Man zeige (unter Benutzung der zitierten Aufgabe), dass die durch die Kurve γ und das Einheitsvektorfeld E beschriebene Regelfläche verschwindende Gaußsche Krümmung hat. Man sollte also annehmen, dass diese „in der Regel“ die Tangentenfläche einer anderen Kurve β ist. Man

überprüfe dies, indem man „in der Regel“ durch eine exakte Bedingung ersetzt und die Kurve β gegebenenfalls bestimmt.

Man folgere auch: Ist $\gamma = F \circ \alpha$ eine Krümmungslinie einer C^2 -Fläche $[F]$, so hat die Regelfläche, die mit Hilfe von γ und $N_F \circ \alpha$ definiert ist, verschwindende Gaußsche Krümmung. Man mache sich diese Behauptung am Beispiel von Kurven klar, die auf einer Kugel verlaufen.

6.7 Die Gaußsche Krümmung als Maß der Flächenverzerrung der Gaußabbildung

Es sei $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine C^2 -Flächenparametrisierung. Das Einheitsnormalenfeld $N_F : G \rightarrow \mathbb{E}_L^3$ von F kann auch als Abbildung in die Einheitskugel $S_1(\mathbb{E}_L^3) := \{v \in \mathbb{E}_L^3 \mid \langle v, v \rangle = 1\}$ angesehen werden; betrachtet man N_F unter diesem Gesichtspunkt, so spricht man auch von der *Gauß-Abbildung der Flächenparametrisierung* F . Die Gauß-Abbildung ist also eine C^1 -mS-Flächenparametrisierung einer sphärischen Fläche in \mathbb{E}_L^3 .

Aufgabe 1. Die Flächenelemente der Parametrisierung F und der zugehörigen Gauß-Abbildung N_F sind miteinander durch

$$\rho_{N_F} = |K_F| \cdot \rho_F$$

verbunden. Insbesondere gilt: N_F hat genau dann in $p \in G$ eine Singularität, wenn p ein parabolischer Punkt von F ist.

[Tipp: Man wende das Lemma aus Abschnitt 6.6 auf das Quadrat des Formoperators an.]

Es sei $p \in G$ gegeben. Mit Hilfe des Maßtensors g von F definieren wir

$$U_r(p) := \{q \in \mathbb{R}^2 \mid g_p(q - p, q - p) < r^2\} \quad \text{und} \quad B_r(p) := \overline{U_r(p)}.$$

Natürlich existiert ein $r \in \mathbb{R}_+$, so dass $U_r(p)$ in G liegt. Daher kann man für $0 < \varepsilon < r$ die Flächeninhalte

$$\begin{aligned} \text{Area}(F|B_\varepsilon(p)) &:= \int_{B_\varepsilon(p)} \rho_F \, d\lambda^2 \quad \text{des Flächenstückes } F|B_\varepsilon(p) \text{ und} \\ \text{Area}(N_F|B_\varepsilon(p)) &:= \int_{B_\varepsilon(p)} \rho_{N_F} \, d\lambda^2 \quad \text{des Flächenstückes } N_F|B_\varepsilon(p) \end{aligned}$$

definieren, vergleiche den Schluss von Abschnitt 5.1.

Aufgabe 2.

$$|K_F(p)| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Area}(N_F|B_\varepsilon(p))}{\text{Area}(F|B_\varepsilon(p))}.$$

Natürlich wird hier insbesondere die Existenz des Grenzwertes behauptet.

Aufgabe 3. Ist p ein nicht-parabolischer Punkt von F , so existiert ein $\varepsilon < r$, so dass $N_F|U_\varepsilon(p)$ eine C^{r-1} -Immersion in die Einheitskugel von \mathbb{E}_L^3 ist.

6.8 Minimalflächen

Einleitung. Taucht man eine irgendwie gebogene Drahtschleife in eine Seifenlösung, so wird sich beim Herausziehen der Drahtschleife in dieser ein Seifenhäutchen spannen, und zwar derartig, dass es einen möglichst kleinen Flächeninhalt hat. Zur Bestimmung dieser Fläche hat man den Raum \mathcal{R} aller Flächen, deren Rand mit der Drahtschleife zusammenfällt, einzuführen und eine solche Fläche $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{R}$ zu suchen, für welche die Funktion

$$\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{F} \mapsto \text{Flächeninhalt von } \mathcal{F}$$

ein Minimum hat. Diese Aufgabe der Variationsrechnung ist als *Plateausches Problem* bekannt. Natürlich denkt man dabei sofort an das notwendige Kriterium für lokale Extrema differenzierbarer Funktionen. Diese Idee wollen wir nun verfolgen.

Wir starten mit einer singularitätenfreien C^2 -Flächenparametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ und leiten eine notwendige Bedingung dafür her, dass bei lokalen (normalen) Deformationen von F , sich der Flächeninhalt von F nicht verkleinert. Um dies genauer auszuführen, zunächst eine

Definition 1. Unter dem *Träger* $\text{Tr}(\lambda)$ einer stetigen Funktion $\lambda : G \rightarrow \mathbb{R}$ versteht man die abgeschlossene Hülle von $\{p \in G \mid \lambda(p) \neq 0\}$, und zwar ist die abgeschlossene Hülle in dem Gebiet G zu bilden.

Mit $C_c^1(G)$ bezeichnen wir die Menge aller stetig differenzierbarer Funktionen $\lambda : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit *kompaktem* Träger $\text{Tr}(\lambda)$.

Ist nun $\lambda \in C_c^1(G)$, so sei $(F_r^\lambda)_{r \in \mathbb{R}}$ die C^1 -Einparameterfamilie der Abbildungen

$$F_r^\lambda : G \rightarrow \mathbb{E}^3, p \mapsto F(p) + r \lambda(p) \cdot N_F(p). \quad (*)$$

Diese Familie stellt über der Menge $\text{Tr}(\lambda)$ eine Deformation der Parametrisierung F in Normalenrichtung dar. (Deformationen in Tangentialrichtung braucht man nicht weiter zu untersuchen, weil diese zu keiner Flächeninhaltsänderung führen.)

Da $(r, p) \mapsto \rho_{F_r^\lambda}(p)$ eine stetige Funktion ist, ist $U_\lambda := \{(r, p) \mid \rho_{F_r^\lambda}(p) > 0\}$ eine offene Umgebung von $\{0\} \times \text{Tr}(\lambda)$. (Man beachte, dass F als singularitätenfrei vorausgesetzt wurde und $F_0^\lambda = F$ ist.) Wegen der Kompaktheit von $\text{Tr}(\lambda)$ existiert ein $\varepsilon_\lambda \in \mathbb{R}_+$, so dass $]-\varepsilon_\lambda, \varepsilon_\lambda[\times \text{Tr}(\lambda) \subset U_\lambda$ ist. Weil die Abbildungen F_r^λ über $G \setminus \text{Tr}(\lambda)$ mit $F|(G \setminus \text{Tr}(\lambda))$ übereinstimmen, sind also die Parametrisierungen F_r^λ für $r \in]-\varepsilon_\lambda, \varepsilon_\lambda[$ singularitätenfrei.

Theorem.

(a) Für jede Funktion $\lambda \in C_c^1(G)$ ist die Funktion

$$f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, r \mapsto \int_{\text{Tr}(\lambda)} \rho_{F_r^\lambda} d\lambda^2 = \text{Flächeninhalt von } F_r^\lambda|_{\text{Tr}(\lambda)}$$

in $r = 0$ differenzierbar und

$$f'_\lambda(0) = -2 \int_{\text{Tr}(\lambda)} \lambda \cdot H_F \cdot \rho_F d\lambda^2.$$

(b) Es gilt genau dann

$$f'_\lambda(0) = 0 \quad \text{für alle } \lambda \in C_c^1(G),$$

wenn die mittlere Krümmung H_F identisch verschwindet.

Ist der Flächeninhalt von F in der oben beschriebenen Weise minimal, so gilt nach diesem Theorem notwendigerweise $H_F \equiv 0$. Aus diesem Grund definiert man:

Definition 2. Eine C^2 -Fläche $[F]$ heißt eine *Minimalfläche*, wenn $H_F \equiv 0$ ist.

Beispiele. Die Flächen $[F_\tau]$ aus Aufgabe 2 des Abschnittes 5.6 sind Minimalflächen. Insbesondere sind also die Wendelfläche und das Katenoid Minimalflächen. Trivialerweise sind ebene Flächen minimal.

Beweis des Theorems. Zum Beweis von (a) fixieren wir ein $\lambda \in C_c^1(G)$. Die (nach obigem) positive Funktion

$$]-\varepsilon_\lambda, \varepsilon_\lambda[\times G \rightarrow \mathbb{R}, \quad (r, p) \mapsto \rho_{F_r^\lambda}(p)$$

ist nach r stetig partiell differenzierbar. Daher ist nach dem Satz über die differenzierbare Abhängigkeit eines Integrals von einem Parameter die Funktion f_λ in $r = 0$ differenzierbar und es gilt

$$f'_\lambda(0) = \int_{\text{Tr}(\lambda)} \left(\frac{\partial}{\partial r} \rho_{F_r^\lambda} \right) (0, p) \, d\lambda^2(p).$$

Um den Beweis von (a) zu beenden, haben wir daher

$$\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} \rho_{F_r^\lambda} = -2 \lambda \cdot H_F \cdot \rho_F \quad (1)$$

zu zeigen. Durch Differentiation von (*) nach p erhalten wir

$$d_p F_r^\lambda(v) = d_p F(v - r \lambda(p) \cdot A_p v) + r d_p \lambda(v) \cdot N_F(p)$$

und daher für den Maßtensor g_r von F_r^λ

$$\begin{aligned} g_{r,p}(u, v) &= g_p(u - r \lambda(p) A_p u, v - r \lambda(p) A_p v) + r^2 d_p \lambda(u) \cdot d_p \lambda(v) \\ &= g_p(u, v) - 2 r \lambda(p) \cdot h_p(u, v) + r^2 \cdot (\lambda(p)^2 \cdot g_p(A_p u, A_p v) + d_p \lambda(u) \cdot d_p \lambda(v)). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} g_{r,ik}(p) = -2 \lambda(p) \cdot h_{ik}(p),$$

also wegen $g_{r=0} = g$ und dem Satz aus 6.6

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} \det(g_{r,ik}(p)) &= \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} (g_{r,11}(p) \cdot g_{r,22}(p) - g_{r,12}(p)^2) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} g_{r,11}(p) \right) \cdot g_{22}(p) + g_{11}(p) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} g_{r,22}(p) \right) \\ &\quad - 2 g_{12}(p) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} g_{r,12}(p) \right) \\ &= -2 \lambda(p) \cdot (h_{11}(p) \cdot g_{22}(p) + g_{11}(p) \cdot h_{22}(p) - 2 g_{12}(p) \cdot h_{12}(p)) \\ &= -4 \lambda(p) \cdot \rho_F(p)^2 \cdot H_F(p). \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Definition von $\rho_{F_r^\lambda}$ in 5.1 ergibt sich somit

$$\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} \rho_{F_r^\lambda}(p) = \frac{1}{2 \rho_F(p)} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} \det(g_{r,ik}(p)) = -2 \lambda(p) \cdot H_F(p) \cdot \rho_F(p),$$

womit Formel (1) bewiesen ist.

Zu (b). Ist $H_F \equiv 0$, so gilt infolge von (a) natürlich $f'_\lambda(0) = 0$ für jede Funktion $\lambda \in C_c^1(G)$. Ist jedoch $H_F(p_0) \neq 0$ für ein $p_0 \in G$, so existiert ein Teilgebiet $U \subset G$ mit $p_0 \in U$, auf dem H_F keine Nullstelle hat. Dann kann man eine Funktion $\lambda \in C_c^1(G)$ mit folgenden Eigenschaften finden: $0 \leq \lambda \leq 1$, $\lambda(p_0) = 1$ und $\text{Tr}(\lambda) \subset U$. Es ist $\lambda \cdot H_F \cdot \rho_F$ eine stetige Funktion, die überall ≥ 0 oder überall ≤ 0 ist und nicht identisch verschwindet. Für diese Funktion λ gilt nach (a) $f'_\lambda(0) \neq 0$. \square

Aufgabe 1. Klassifikation der minimalen Rotationsflächen, Bonnet 1860. In dieser Aufgabe soll bewiesen werden, dass eine Parametrisierung einer singularitätenfreien Rotationsfläche genau dann minimal ist, wenn sie einen Teil einer Ebene oder eines Katenoids parametrisiert. Sei also

$$F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3, (t, s) \mapsto (r(t) \cdot \cos(s), r(t) \cdot \sin(s), b(t))$$

eine Parametrisierung einer singularitätenfreien minimalen C^2 -Rotationsfläche in \mathbb{E}^3 .

- (a) Gilt $b' \equiv 0$, so ist F eben.
- (b) Gilt $b'(t) \neq 0$ überall, so ist $F(I \times \mathbb{R})$ in einem Katenoid von \mathbb{E}^3 enthalten; siehe Aufgabe 2 aus Abschnitt 5.6.
 [Tipp: $\mathbb{E}(?)$ darf man $b(t) = t$ für alle $t \in I$ annehmen. Zur Behandlung der Differentialgleichung $yy'' = 1 + (y')^2$ vgl. z.B. W. WALTER, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, § 11.VI, oder man löse sie mit Maple.]
- (c) Gilt $b'(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in I$, so hat b' keine Nullstellen.
 [Tipp: $\mathbb{E} \ b'|]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[> 0$; dann beachte man (b).]

Aufgabe 2. Klassifikation der minimalen Regelflächen, Catalan 1842. In dieser Aufgabe soll bewiesen werden, dass eine C^2 -Regelfläche genau dann minimal ist, wenn sie eben oder Stück einer Wendelfläche ist. Wenn wir sagen, dass eine Regelfläche minimal ist, so meinen wir, dass auf ihrem singularitätenfreien Teil die mittlere Krümmung verschwindet. – Sei im folgenden $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ die Parametrisierung einer Regelfläche zu einem C^2 -Paar (α, E) ; siehe Abschnitt 5.3.

- (a) In *diesem* Teil werde angenommen, dass F nirgends zylindrisch ist. Dann können wir \mathbb{E} voraussetzen, dass $\langle E', E' \rangle = 1$ und $\langle \alpha', E \rangle = 0$ ist (warum eigentlich?). In dieser Situation beweise man:

- (i) $[F]$ ist genau dann minimal, wenn

$$\det(E, \alpha' + s E', \alpha'' + s E'') = 0 \quad \text{für alle } (t, s) \in I \times \mathbb{R} \quad (\dagger)$$

gilt. Aussage (\dagger) ist zu folgendem Gleichungssystem äquivalent

$$\begin{aligned} \det(E, \alpha', \alpha'') &\equiv 0, \quad \det(E, \alpha', E'') + \det(E, E', \alpha'') \equiv 0, \\ \det(E, E', E'') &\equiv 0. \end{aligned} \quad (\ddagger)$$

- (ii) Aus (\ddagger) folgt: Es ist $E'' = -E$ und es existiert ein Einheitsvektor $a_3 \in \mathbb{E}^3$, so dass $E \times E' \equiv a_3$ und $\langle \alpha', a_3 \rangle = \text{const.} =: c$ ist.

[Man betrachte E als Tangentenvektor einer Raumkurve γ (wie denn?) und folgere $\kappa_\gamma = 1$ und $\tau_\gamma = 0$. Somit(?) beschreibt γ einen Kreisbogen; folglich existiert eine positiv orientierte ONB (a_1, a_2, a_3) von \mathbb{E}^3 , so dass $E = \cos \cdot a_1 + \sin \cdot a_2$ ist. Daraus folgt unter anderem $\langle \alpha', a_3 \rangle = \det(\alpha', E, E') = \text{const.}$]

- (b) $[F]$ ist genau dann Stück einer Wendelfläche, wenn $[F]$ minimal ist und $\det(\alpha'(t), E(t), E'(t)) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt.
 [„ \Leftarrow “: $\alpha' = \lambda \cdot E' + c \cdot a_3$, wobei wegen (\ddagger) λ konstant ist. Daher(?) ist α eine Schraubenlinie.]

(c) $[F]$ ist genau dann eben, wenn $[F]$ minimal ist und $\det(\alpha', E, E') \equiv 0$ gilt.

[„ \Leftarrow “: Nach Aufgabe 3 aus 5.5 gilt dann neben $H_F = 0$ auch noch $K_F = 0$.]

Aus (b) und (c) folgere man nun: Ist $[F]$ minimal, so ist $[F]$ eben oder Stück einer Wendelfläche. Dass keine weiteren Fälle auftreten können, zeigt ein Blick auf die Gaußsche Krümmung K_F .

Eine mit der Frage nach der Gestalt der von einer Drahtschleife umschlossenen Seifenhaut eng verwandte Frage ist die Frage nach der Gestalt von Seifenhäuten, die frei im Raum schwebend ein festes Luftvolumen umschließen. Eine solche Seifenhaut spannt sich so, dass sie *unter der Nebenbedingung, dass das von ihr umschlossene Volumen konstant sein möge*, eine minimale Oberfläche hat. Um diese Fläche zu bestimmen, hat man den Raum $\tilde{\mathcal{R}}$ aller geschlossenen Flächen, die ein bestimmtes, fest vorgegebenes Raumvolumen umschließen, zu betrachten, und eine solche Fläche \mathcal{F}_0 zu suchen, für welche die Funktion

$$\tilde{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{F} \mapsto \text{Flächeninhalt von } \mathcal{F}$$

ein Minimum hat. Man kann dieses Problem ähnlich wie das vorherige behandeln; als die zur Bedingung des Teil (b) des obigen Theorems analoge lokale Charakterisierung ergibt sich in dieser Situation die Bedingung, dass die mittlere Krümmung H_F konstant ist. Aus diesem Grunde interessiert man sich für die wie folgt definierten Flächen:

Definition 3. Eine C^2 -Fläche $[F]$ ist eine Fläche *konstanter mittlerer Krümmung* (andere Namen: eine *constant mean curvature surface*, eine *CMC-Fläche*), wenn H_F konstant ist.

Beispiele. Einfache Beispiele für CMC-Flächen, die keine Minimalflächen sind, sind Sphären und Kreiszylinder.

Man kann zeigen, dass die Sphären die einzigen kompakten CMC-Flächen ohne Selbstdurchdringungen (d.h. derart, dass F injektiv ist) sind. Das entspricht ja auch unserer Anschauung: Jedes Kind weiß, dass Seifenblasen Kugelgestalt haben.

Lange Zeit war unklar, ob es neben den Sphären noch andere kompakte CMC-Flächen gibt; H. HOPF hatte Mitte des 20. Jahrhunderts die Vermutung aufgestellt, dass dem nicht so ist. Erst 1986 hat H. WENTE diese Vermutung widerlegt, in dem er Beispiele für kompakte CMC-Flächen konstruiert hat, die die Topologie eines Torus besitzen. 1991 hat dann KAPOULEAS gezeigt, dass es auch kompakte CMC-Flächen „vom Geschlecht g “ für jedes $g \geq 2$ gibt. Dabei benutzten sowohl Wente als auch Kapouleas für ihre Konstruktionen auf sehr anspruchsvolle Weise Methoden der Theorie partieller Differentialgleichungen. — Da alle diese CMC-Flächen Selbstdurchdringungen aufweisen, kommen sie als Seifenblasen nicht vor.

Kapitel 7

Innere Geometrie räumlicher Flächen

Wir wenden uns nun dem Studium der inneren Geometrie von Flächen zu, das heißt, der Untersuchung der Geometrie Riemannscher Gebiete. Anschaulich gesprochen entspricht das der Untersuchung der Flächen unter alleiniger Verwendung von „Messungen“ (etwa Längen- und Winkelmessung) *innerhalb* der Fläche. (Dabei sollen auch Ableitungen derartiger Größen inbegriffen sein.)

Das Ziel unserer Untersuchungen ist es, die Mittel zur *Berechnung von Geodätischen* zur Verfügung zu stellen, sowie das *Theorema egregium* herzuleiten, welches zeigt, dass die Gaußsche Krümmung, die wir in Abschnitt 6.5 zunächst mit den Mitteln der äußeren Geometrie eingeführt haben, tatsächlich eine Größe der inneren Geometrie ist. Das heißt also, dass zwei Flächen mit demselben Maßtensor auch dieselbe Gaußsche Krümmung besitzen.

Ein grundlegender Schritt zur Erreichung dieser Ziele ist die Einführung einer *Differentiation für Vektorfelder eines Riemannschen Gebiets*, die der zugrundeliegenden Riemannschen Metrik angepasst ist. Ihre Definition beruht auf dem sogenannten *Christoffelsymbol* eines Riemannschen Gebietes, dem wir uns deshalb als erstes zuwenden.

7.1 Das Christoffelsymbol eines Riemannschen Gebiets

Um die im folgenden Satz 2 beschriebene Konstruktion des Christoffelsymbols eines Riemannschen Gebiets zu motivieren, betrachten wir zunächst die Situation, dass das Riemannsche Gebiet von einer Flächenparametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ bestimmt wird.

Wir interessieren uns in dieser Situation für das zweite Differential d^2F der Parametrisierung F . Ihr Normalenanteil wird gemäß Satz 2 aus Abschnitt 6.2 durch die zweite Fundamentalform von F gegeben. Über ihren Tangentialanteil gibt der folgende Satz Auskunft:

Satz 1. Es sei $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine C^r -Flächenparametrisierung mit $r \geq 2$, N_F ihr Einheitsnormalenfeld, g ihr Maßtensor und h ihre zweite Fundamentalform. Für $p \in G$ gilt dann die Gleichung

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^2 : d_p^2 F(u, v) = d_p F(\Gamma_p(u, v)) + h_p(u, v) \cdot N_F(p) \quad (*)$$

mit der hierdurch bestimmten Abbildung $\Gamma_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; sie ist bilinear und symmetrisch, und die Abbildung

$$\Gamma : G \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), \quad p \mapsto \Gamma_p$$

ist eine C^{r-2} -Abbildung, die man das *Christoffelsymbol der Parametrisierung* F nennt. Bezeichnen wir für festes $u, v \in \mathbb{R}^2$ mit $g(u, v)$ die Funktion $G \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto g_p(u, v)$, so gilt für jedes $(p, w) \in G \times \mathbb{R}^2$

$$d_p(g(u, v))(w) = g_p(\Gamma_p(w, u), v) + g_p(u, \Gamma_p(w, v)) . \quad (\dagger)$$

Bemerkungen.

- (a) Da für festes $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ die Abbildung $L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $b \mapsto b(u, v)$ linear ist, gilt $(d_p g(w))(u, v) = d_p(g(u, v))(w)$, daher wird das Differential der Riemannschen Metrik g mittels der Formel (\dagger) durch das Christoffelsymbol beschrieben.
- (b) Ist die Riemannsche Metrik g nicht vom Punkt abhängig, das heißt, eine konstante Funktion $G \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, so gilt $\Gamma = 0$. Das ist der Grund, warum uns die Christoffelsymbole nicht schon in den Analysis-Vorlesungen begegnet sind.
- (c) Wie der folgende Satz 3 zeigt, ist das Transformationsverhalten des Christoffelsymbols unter Isometrien nicht das Transformationsverhalten eines Tensorfelds. Aus diesem Grunde ist das Christoffelsymbol kein Tensorfeld der Fläche, sondern ein andersartiges Objekt, nämlich ein sogenannter *kovarianter Ableitungsprozeß*. Das wird besser zu verstehen sein, wenn wir *Riemannsche Geometrie*, das heißt, Geometrie für Mannigfaltigkeiten betreiben.

Beweis von Satz 1. Wir verwenden die Formel $(*)$ als Definition von Γ . Aufgrund der Bilinearität und Symmetrie des zweiten Differentials $d_p^2 F$ ist klar, dass Γ_p jeweils bilinear und symmetrisch ist. Für vorgegebene $u, v \in \mathbb{R}^2$ ist $p \mapsto d_p F(\Gamma_p(u, v)) = d_p^2 F(u, v) - h_p(u, v) \cdot N_F(p)$ ein C^{r-2} -Tangentialvektorfeld an F ; nach der Folgerung in Abschnitt 5.5 ist daher $p \mapsto \Gamma_p(u, v)$ ein C^{r-2} -Vektorfeld auf G . Daraus folgt, dass die Abbildung $\Gamma : p \mapsto \Gamma_p$ eine C^{r-2} -Abbildung ist. Es verbleibt, die Formel (\dagger) zu zeigen. Dazu: Es gilt:

$$\begin{aligned} d_p(g(u, v))(w) &= d_p(q \mapsto \langle d_q F(u), d_q F(v) \rangle)(w) \\ &= \langle d_p^2 F(u, w), d_p F(v) \rangle + \langle d_p F(u), d_p^2 F(v, w) \rangle \\ &\stackrel{(*)}{=} \langle d_p F(\Gamma_p(u, w)) + h_p(u, w) N_F(p), d_p F(v) \rangle + \langle d_p F(u), d_p F(\Gamma_p(v, w)) + h_p(v, w) N_F(p) \rangle \\ &= \langle d_p F(\Gamma_p(u, w)), d_p F(v) \rangle + \langle d_p F(u), d_p F(\Gamma_p(v, w)) \rangle \\ &= g(\Gamma_p(u, w), v) + g(u, \Gamma_p(v, w)) . \end{aligned}$$

□

Wir imitieren nun diese Konstruktion des Christoffelsymbols für beliebige Riemannsche Gebiete:

Satz 2. Ist (G, g) ein n -dimensionales Riemannsches C^r -Gebiet mit $r \geq 1$, so existiert genau eine C^{r-1} -Abbildung $\Gamma : G \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, welche über die Gleichung (\dagger) aus Satz 1 das Differential der Riemannschen Metrik g beschreibt (man beachte die obige Bemerkung (a)); Γ ist durch die folgende Formel festgelegt: Für $p \in G$ und $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$2 \cdot g_p(\Gamma_p(u, v), w) = d_p(g(v, w))(u) + d_p(g(u, w))(v) - d_p(g(u, v))(w) . \quad (\ddagger)$$

Das Christoffelsymbol einer Flächenparametrisierung F im Sinne von Satz 1 ist offenbar genau dasjenige Γ , das in der in Satz 2 beschriebenen Weise durch den Maßtensor g von F bestimmt

wird. Aus diesem Grunde bezeichnet man das in Satz 2 definierte Γ das *Christoffelsymbol des Riemannschen Gebiets* (G, g) .

Satz 2 zeigt auch, dass das Christoffelsymbol einer Flächenparametrisierung F tatsächlich eine Größe der inneren Geometrie der Fläche $[F]$ ist, obwohl es in Satz 1 zunächst mit Hilfe der äußeren Geometrie, d.h. unter Heranziehung des Einheitsnormalenfeldes N_F und der zweiten Fundamentalform h , definiert worden ist.

Beweis von Satz 2. Wir verwenden die Formel (†) zur Definition von Γ_p . Weil die rechte Seite der Formel (†) in u, v jeweils linear und symmetrisch ist, wird hierdurch eine bilineare, symmetrische Abbildung $\Gamma_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, und damit eine Abbildung $\Gamma : G \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $p \mapsto \Gamma_p$ definiert. Da aufgrund der Formel (†) für jeweils feste $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ $p \mapsto g_p(\Gamma_p(u, v), w)$ ein C^{r-1} -Vektorfeld ist, ist auch Γ selbst eine C^{r-1} -Abbildung.

Zum Beweis der Formel (†) in dieser Situation sei $p \in G$ und $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} & g_p(\Gamma_p(w, u), v) + g_p(u, \Gamma_p(w, v)) \\ & \stackrel{(\dagger)}{=} \frac{1}{2} \cdot (d_p(g(u, v))(w) + d_p(g(w, v))(u) - d_p(g(w, u))(v) + d_p(g(v, u))(w) + d_p(g(w, u))(v) - d_p(g(w, v))(u)) \\ & = d_p(g(u, v))(w). \end{aligned}$$

Zur Eindeutigkeit von Γ : Es sei $\tilde{\Gamma}$ eine weitere derartige Abbildung, die (†) erfüllt. Dann gilt

$$\begin{aligned} 2g_p(\Gamma_p(u, v), w) & \stackrel{(\dagger)}{=} d_p(g(v, w))(u) + d_p(g(u, w))(v) - d_p(g(u, v))(w) \\ & \stackrel{(\tilde{\dagger})}{=} g_p(\tilde{\Gamma}_p(u, v), w) + g_p(v, \tilde{\Gamma}(u, w)) + g_p(\tilde{\Gamma}(v, u), w) + g_p(u, \tilde{\Gamma}_p(v, w)) - g_p(\tilde{\Gamma}(w, u), v) - g_p(u, \tilde{\Gamma}_p(w, v)) \\ & = 2g_p(\tilde{\Gamma}_p(u, v), w) \end{aligned}$$

und damit $\tilde{\Gamma} = \Gamma$. □

Satz 3. Verhalten der Christoffelsymbole unter Isometrien. Seien (G, g) und (\tilde{G}, \tilde{g}) zwei n -dimensionale Riemannsche Gebiete mit Christoffelsymbol Γ bzw. $\tilde{\Gamma}$ und $\varphi : (G, g) \rightarrow (\tilde{G}, \tilde{g})$ eine Isometrie (siehe Abschnitt 5.6, Definition 3). Dann gilt für $p \in G$:

$$(d_p\varphi) \circ \Gamma_p = \tilde{\Gamma}_{\varphi(p)} \circ (d_p\varphi \times d_p\varphi) + d_p^2\varphi.$$

Beweis. Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Aufgrund der Isometrie-Eigenschaft von φ haben wir die Gleichung $g_p(u, v) = \tilde{g}_{\varphi(p)}(d_p\varphi(u), d_p\varphi(v))$. Durch Differentiation dieser Gleichung nach $p \in G$ ergibt sich

$$\begin{aligned} d_p(g(u, v))(w) & = d_{\varphi(p)}(\tilde{g}(d_p\varphi(u), d_p\varphi(v)))(d_p\varphi(w)) + \tilde{g}_{\varphi(p)}(d_p^2\varphi(u, w), d_p\varphi(v)) + \tilde{g}_{\varphi(p)}(d_p\varphi(u), d_p^2\varphi(v, w)) \\ & \stackrel{(\dagger)}{=} \tilde{g}_{\varphi(p)}(\tilde{\Gamma}_p(d_p\varphi(w), d_p\varphi(u)), d_p\varphi(v)) + \tilde{g}_{\varphi(p)}(d_p\varphi(u), \tilde{\Gamma}_p(d_p\varphi(w), d_p\varphi(v))) \\ & \quad + \tilde{g}_{\varphi(p)}(d_p^2\varphi(u, w), d_p\varphi(v)) + \tilde{g}_{\varphi(p)}(d_p\varphi(u), d_p^2\varphi(v, w)) \\ & = g_p((d_p\varphi)^{-1}\tilde{\Gamma}_p(d_p\varphi(w), d_p\varphi(u)), v) + g_p(u, (d_p\varphi)^{-1}\tilde{\Gamma}_p(d_p\varphi(w), d_p\varphi(v))) \\ & \quad + g_p((d_p\varphi)^{-1}d_p^2\varphi(u, w), v) + g_p(u, (d_p\varphi)^{-1}d_p^2\varphi(v, w)) \\ & = g_p(\hat{\Gamma}_p(w, u), v) + g_p(u, \hat{\Gamma}_p(w, v)) \end{aligned}$$

mit der Abbildung $\hat{\Gamma} : p \mapsto \hat{\Gamma}_p := (d_p\varphi)^{-1} \circ (\tilde{\Gamma}_{\varphi(p)} \circ (d_p\varphi \times d_p\varphi) + d_p^2\varphi)$. Da $\hat{\Gamma}$ somit die Gleichung (†) für das Riemannsche Gebiet (G, g) erfüllt, gilt nach der Eindeutigkeitsaussage aus Satz 2 $\hat{\Gamma} = \Gamma$, und damit die behauptete Formel. □

Die Komponenten des Christoffelsymbols Γ . Sei (G, g) ein n -dimensionales Riemannsches Gebiet mit Christoffelsymbol Γ . Bezeichnen wir mit (e_1, \dots, e_n) die Standard-Basis des

\mathbb{R}^n , so können wir Γ durch die insgesamt n^3 Funktionen

$$\Gamma_{ik}^j : G \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \langle \Gamma_p(e_i, e_k), e_j \rangle$$

beschreiben, wobei allerdings aufgrund der Symmetrie von Γ_p

$$\Gamma_{ik}^j = \Gamma_{ki}^j \quad \text{für alle } i, k, j \in \{1, \dots, n\}$$

gilt. Mit diesen Funktionen gilt nämlich

$$\forall p \in G, \quad u, v \in \mathbb{R}^n : \quad \Gamma_p(u, v) = \sum_{i,k,j} \Gamma_{ik}^j(p) \cdot u_i \cdot v_k \cdot e_j.$$

Die Funktionen Γ_{ik}^j werden in der Literatur als *die* Christoffelsymbole der Riemannschen Metrik g bezeichnet. Man berechnet sie folgendermaßen mit Hilfe der zu $(g_{ik}(p))$ inversen Matrix $(g^{ik}(p))$:

$$\Gamma_{ik}^j = \sum_m \Gamma_{ikm} \cdot g^{mj} \quad \text{mit} \quad \Gamma_{ikm} := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_m} \right). \quad (\diamond)$$

Ist g der Maßtensor einer Flächenparametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ (also insbesondere $n = 2$), so gilt aufgrund der Formel (*)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} = \Gamma_{ik}^1 \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1} + \Gamma_{ik}^2 \cdot \frac{\partial F}{\partial x_2} + h_{ik} \cdot N_F,$$

woraus man die Γ_{ik}^j ebenfalls berechnen kann.

Beweis für die Formel (\diamond). Für $p \in G$ gilt $\Gamma_p(e_i, e_k) = \sum_j \Gamma_{ik}^j(p) \cdot e_j$ und daher

$$g_p(\Gamma_p(e_i, e_k), e_m) = \sum_j \Gamma_{ik}^j(p) \cdot g_p(e_j, e_m) = \sum_j \Gamma_{ik}^j(p) \cdot g_{jm}(p).$$

Andererseits ist wegen der Formel (\ddagger)

$$g_p(\Gamma_p(e_i, e_k), e_m) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x_i}(p) + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_k}(p) - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_m}(p) \right) = \Gamma_{ikm}(p).$$

Durch Vergleich dieser beiden Gleichungen ergibt sich: Die „Unbekannten“ $\Gamma_{ik}^j(p)$ werden für jeweils feste $i, k \in \{1, \dots, n\}$ durch das lineare Gleichungssystem

$$\forall m : \quad \sum_j g_{jm}(p) \cdot \Gamma_{ik}^j(p) = \Gamma_{ikm}(p)$$

bestimmt; durch Multiplikation mit der zur Koeffizientenmatrix $(g_{jm}(p))$ inversen Matrix $(g^{jm}(p))$ ergibt sich die behauptete Formel (\diamond). \square

Beispiele.

(a) Gilt jeweils $g_{ik} = 0$ für $i \neq k$, so erhalten wir aus der Formel (\diamond)

$$\Gamma_{ik}^j = \frac{1}{g_{jj}} \cdot \Gamma_{ikj}$$

und damit für $i, k = 1, \dots, n$ mit $i \neq k$ insbesondere

$$\Gamma_{ii}^i = \frac{1}{2g_{ii}} \cdot \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_i}, \quad \Gamma_{ik}^i = \Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2g_{ii}} \cdot \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_k} \quad \text{und} \quad \Gamma_{ii}^k = -\frac{1}{2g_{kk}} \cdot \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_k}.$$

Ist außerdem $g_{11} = \dots = g_{nn} = \lambda^2$ mit einer Funktion $\lambda : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ (ist also g konform äquivalent zur kanonischen Riemannschen Metrik des \mathbb{R}^n), so vereinfacht sich der letztere Sachverhalt beträchtlich, nämlich zu

$$\Gamma_{ii}^i = \Gamma_{ik}^k = \Gamma_{ki}^k = -\Gamma_{kk}^i = \frac{\partial(\ln \circ \lambda)}{\partial x_i}.$$

Natürlich sind diese Formeln insbesondere auf das Christoffelsymbol einer orthogonalen bzw. konformen Flächenparametrisierung anwendbar (siehe die Abschnitte 5.7 und 5.8).

- (b) Ist $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ die Rotationsflächenparametrisierung zu einer nach der Bogenlänge parametrisierten C^2 -Profilkurve $\alpha = (r, b)$ (siehe Abschnitt 5.2 und das Beispiel 2(b) in Abschnitt 5.6), so ergibt sich aus dem ersten Teil von (a):

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -(r \cdot r') \circ x_1 \quad \text{und} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{r'}{r} \circ x_1.$$

Hierbei bezeichnet $x_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Projektion auf die erste Komponente von \mathbb{R}^2 .

7.2 Die Levi-Civita-Ableitung einer Riemannschen Metrik

Sei (G, g) ein Riemannsches Gebiet. Wir wollen nun das Christoffelsymbol von (G, g) verwenden, um einen an die Riemannsche Metrik g angepassten „Ableitungsprozeß“ für Vektorfelder auf G zu definieren, die sogenannte (kovariante) *Levi-Civita-Ableitung*.

Dabei wollen wir auch Vektorfelder *längs* einer weiteren C^1 -Abbildung $f : M \rightarrow G$ (wobei $M \subset \mathbb{R}^d$ ein weiteres Gebiet ist) betrachten. Ein solches C^s -Vektorfeld längs f ist dann einfach eine C^s -Abbildung $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei wir $X_p := X(p)$ für $p \in M$ jeweils als einen in $f(p) \in G$ angetragenen Vektor denken. Den Raum derartiger Vektorfelder bezeichnen wir mit $\mathfrak{X}_f(G)$.

Wir werden solche Vektorfelder hauptsächlich in den folgenden beiden Situationen verwenden:

- $M = G$ und $f = \text{id}_G$. Dann stimmen die Vektorfelder längs f mit den üblichen Vektorfeldern auf G überein.
- $d = 1$, M ist ein Intervall I und f eine C^1 -Kurve $\alpha : I \rightarrow G$.

Beispiele.

- (a) Ist $Y \in \mathfrak{X}^s(M)$ und ist $f : M \rightarrow G$ eine C^{s+1} -Abbildung, so ist $f_*Y : p \mapsto d_p f(Y_p)$ (vergleiche das Beispiel in Abschnitt 5.4) ein Vektorfeld in $\mathfrak{X}_f^s(G)$.
- (b) Ist $X \in \mathfrak{X}^s(G)$ und ist $f : M \rightarrow G$ eine C^s -Abbildung, so ist $X \circ f \in \mathfrak{X}_f^s(G)$.
- (c) Ist $\alpha : I \rightarrow G$ eine C^{s+1} -Kurve, so ist $\alpha' \in \mathfrak{X}_\alpha^s(G)$.

Um die Definition der Levi-Civita-Ableitung zu motivieren, betrachten wir zunächst wieder die Situation der äußeren Geometrie, d.h. den Fall, wo g der Maßtensor einer C^2 -Flächenparametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ ist. Sei $X \in \mathfrak{X}^1(G)$. Wir wollen den tangentialen Anteil der Ableitung von $F_*X \in \mathfrak{X}_F^1(\mathbb{E}^3)$ als ein Vektorfeld auf G ausdrücken. Dazu rechnen wir für $p \in G$ und $v \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} d_p(F_*X)(v) &= d_p(q \mapsto d_q F(X_q))(v) = d_p^2 F(X_p, v) + d_p F(d_p X(v)) \\ &\stackrel{(*)}{=} d_p F(\Gamma_p(X_p, v)) + h_p(X_p, v) \cdot N_F(p) + d_p F(d_p X(v)) \\ &= d_p F(d_p X(v) + \Gamma_p(X_p, v)) + h_p(X_p, v) \cdot N_F(p), \end{aligned}$$

wobei das mit $(*)$ bezeichnete Gleichheitszeichen aus Satz 1 in Abschnitt 7.1 folgt, und Γ das Christoffelsymbol zu F bezeichnet. Wir sehen also, dass der Tangentialanteil von $d_p(F_*X)(v)$, auf G zurückgezogen, den folgenden Wert hat:

$$d_p X(v) + \Gamma_p(X_p, v).$$

Bemerkenswert ist hierbei, dass es sich um eine Größe der inneren Geometrie handelt. Durch diese Rechnung inspiriert, definieren wir deshalb:

Definition. Sei (G, g) ein Riemannsches C^r -Gebiet, Γ sein Christoffelsymbol (siehe Satz 2 in Abschnitt 7.1) $f : M \rightarrow G$ eine C^1 -Abbildung, $X \in \mathfrak{X}_f^1(G)$, $p \in M$ und $v \in \mathbb{R}^d$. Dann definieren wir die *Levi-Civita-Ableitung* von X an der Stelle p und in Richtung von v bezüglich der Riemannschen Metrik g durch

$$\nabla_{(p,v)} X := d_p X(v) + \Gamma_{f(p)}(d_p f(v), X_p) \in \mathbb{R}^n.$$

Im Falle einer C^1 -Kurve $\alpha : I \rightarrow G$ und einem Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}_\alpha^1(G)$ schreiben wir

$$\nabla_{\partial_t} X := \nabla_{(t,1)} X \quad \text{für alle } t \in I.$$

Ist α eine C^s -Kurve mit $s \leq r$ und $X \in \mathfrak{X}_\alpha^s(G)$, so ist also

$$(\nabla_{\partial_t} X : t \mapsto \nabla_{\partial_t} X = X'(t) + \Gamma_{\alpha(t)}(\alpha'(t), X(t))) \in \mathfrak{X}_\alpha^{s-1}(G).$$

Wir nennen ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}_f^1(G)$ *parallel*, wenn $\nabla_{(p,v)} X = 0$ für alle $p \in G$ und $v \in \mathbb{R}^d$ ist.

Wichtiger Hinweis. Natürlich können wir die Levi-Civita-Ableitung insbesondere bezüglich des Maßtensors einer Flächenparametrisierung F bilden; dies ist sogar einer der wichtigsten Anwendungsfälle. Für diese Situation sollte festgehalten werden, dass dieser Ableitungsprozeß aus alleiniger Kenntnis des Maßtensors „abgeleitet“ ist, es sich also um einen Prozeß der inneren Geometrie von $[F]$ handelt. Die in Abschnitt 7.3 folgende Gaußsche Ableitungsgleichung zeigt – in Verallgemeinerung der obigen Motivationsrechnung – auf welche Weise die Levi-Civita-Ableitung in dieser Situation mit der äußeren Geometrie von $[F]$ zusammenhängt.

Satz 1. Rechenregeln für die Levi-Civita-Ableitung. Für die Levi-Civita-Ableitung ∇ des Riemannschen Gebiets (G, g) gilt:

- (a) Für jede C^1 -Abbildung $f : M \rightarrow G$ und jedes $p \in M$ ist die Abbildung

$$\mathbb{R}^d \times \mathfrak{X}_f(G) \rightarrow \mathbb{R}^n, (v, X) \mapsto \nabla_{(p,v)} X$$

\mathbb{R} -bilinear; zusätzlich gilt hinsichtlich der Multiplikation von X mit C^1 -Funktionen $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ die „Produktregel“

$$\nabla_{(p,v)}(\lambda \cdot X) = d_p \lambda(v) \cdot X_p + \lambda(p) \cdot \nabla_{(p,v)} X .$$

- (b) Sind die Größen $f : M \rightarrow G$ und $X \in \mathfrak{X}_f^s(G)$ C^s -differenzierbar mit $1 \leq s \leq r$, so ist für jedes $v \in \mathbb{R}^d$

$$(\nabla_{(\dots,v)} X : M \rightarrow \mathbb{R}^n, p \mapsto \nabla_{(p,v)} X) \in \mathfrak{X}_f^{s-1}(G) .$$

- (c) Die sog. *Torsionsfreiheit* der Levi-Civita-Ableitung: Für je zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}^1(G)$ und jeden Punkt $p \in G$ gilt

$$\nabla_{(p,X_p)} Y - \nabla_{(p,Y_p)} X = d_p Y(X_p) - d_p X(Y_p) .$$

- (d) Für jede C^1 -Abbildung $f : M \rightarrow G$ und je zwei C^1 -Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}_f^1(G)$ gilt die sog. *Ricci-Identität*

$$\forall (p, v) \in M \times \mathbb{R}^n : d_p(g(X, Y))(v) = g_{f(p)}(\nabla_{(p,v)} X, Y_p) + g_{f(p)}(X_p, \nabla_{(p,v)} Y) .$$

wobei wir mit $g(X, Y)$ die Funktion $p \mapsto g_{f(p)}(X_p, Y_p)$ bezeichnen.

Beweis. Die Aussagen (a) und (b) folgen direkt aus der Definition, und (c) folgt aus der Symmetrie von Γ_p . Zu (d): Mit Hilfe der Bemerkung (a) und der Formel (†) aus Abschnitt 7.1 berechnen wir

$$\begin{aligned} d_p(g(X, Y))(v) &= (d_p(g \circ f)(v))(X_p, Y_p) + g_{f(p)}(d_p X(v), Y_p) + g_p(X_p, d_p Y(v)) \\ &= (d_{f(p)} g(d_p f(v)))(X_p, Y_p) + g_{f(p)}(d_p X(v), Y_p) + g_p(X_p, d_p Y(v)) \\ &= g_{f(p)}(\Gamma_{f(p)}(d_p f(v), X_p), Y_p) + g_{f(p)}(X_p, \Gamma_{f(p)}(d_p f(v), Y_p)) + g_{f(p)}(d_p X(v), Y_p) + g_p(X_p, d_p Y(v)) \\ &= g_{f(p)}(d_p X(v) + \Gamma_{f(p)}(d_p f(v), X_p), Y_p) + g_{f(p)}(X_p, d_p Y(v) + \Gamma_{f(p)}(d_p f(v), Y_p)) \\ &= g_{f(p)}(\nabla_{(p,v)} X, Y_p) + g_{f(p)}(X_p, \nabla_{(p,v)} Y) . \end{aligned}$$

□

Aufgabe 1. In der Situation von Satz 1 gilt für jede C^1 -Abbildung $f : M \rightarrow G$, $X \in \mathfrak{X}^1(G)$, $p \in M$ und $v \in \mathbb{R}^d$

$$\nabla_{(p,v)}(X \circ f) = \nabla_{(f(p), d_p f(v))} X .$$

(Siehe auch Beispiel (b) aus diesem Abschnitt.) Insbesondere gilt für jede C^1 -Kurve $\alpha : I \rightarrow G$

$$\forall t \in I : \nabla_{\partial_t}(X \circ \alpha) = \nabla_{(\alpha(t), \alpha'(t))} X .$$

Satz 2. Verhalten der Levi-Civita-Ableitung unter Isometrien. Ist $\varphi : (G, g) \rightarrow (\tilde{G}, \tilde{g})$ eine C^2 -Isometrie zwischen zwei n -dimensionalen Riemannschen Gebieten und sind ∇ bzw. $\tilde{\nabla}$ die Levi-Civita-Ableitungen der Riemannschen Metriken g bzw. \tilde{g} , so gilt für jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}^1(G)$ und das dadurch induzierte Vektorfeld $\varphi_* X \in \mathfrak{X}^1(\tilde{G})$,

$$\varphi_* X : G \rightarrow \mathbb{R}^n, p \mapsto d_p \varphi(X_p)$$

die Beziehung

$$\forall (p, v) \in G \times \mathbb{R}^n : d_p \varphi(\nabla_{(p,v)} X) = \tilde{\nabla}_{(p,v)}(\varphi_* X) .$$

Die Beziehung zwischen den beiden Levi-Civita-Ableitungen ist also die denkbar einfachste.

Beweis. Gemäß Satz 3 aus Abschnitt 7.1 sind die Christoffelsymbole Γ und $\tilde{\Gamma}$ der beiden Riemannschen Gebiete durch die Beziehung

$$\forall p \in G : (d_p \varphi) \circ \Gamma_p = \tilde{\Gamma}_{\varphi(p)} \circ (d_p \varphi \times d_p \varphi) + d_p^2 \varphi$$

miteinander verbunden. Unter Ausnutzung dieser Formel berechnen wir

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{(p,v)} \varphi_* X &= d_p(q \mapsto d_q \varphi(X_q))(v) + \tilde{\Gamma}_{\varphi(p)}(d_p \varphi(v), d_p \varphi(X_p)) \\ &= d_p^2 \varphi(v, X_p) + d_p \varphi(d_p X(v)) + \tilde{\Gamma}_{\varphi(p)}(d_p \varphi(v), d_p \varphi(X_p)) \\ &= d_p \varphi(d_p X(v)) + d_p \varphi(\Gamma_p(v, X_p)) = d_p \varphi(\nabla_{(p,v)} X) . \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2. In der Situation obiger Definition sei $\alpha : I \rightarrow G$ eine C^1 -Kurve.

- (a) Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}_\alpha^1(G)$ ist genau dann parallel, wenn es die lineare Differentialgleichung

$$\forall t \in I : X'(t) = -\Gamma_{\alpha(t)}(\alpha'(t), X(t))$$

erfüllt.

- (b) Sind $X, Y \in \mathfrak{X}_\alpha^1(G)$ Parallelfelder, so gilt $g(X, Y) \equiv \text{const.}$, also insbesondere $\|X\| := \sqrt{g(X, X)} \equiv \text{const.}$
- (c) Zu jedem $t_0 \in I$ und jedem Anfangswert $v \in \mathbb{R}^n$ gibt es genau ein Parallelfeld $X \in \mathfrak{X}_\alpha^1(G)$ mit $X(t_0) = v$. [Man verwende die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen.]

7.3 Die Gaußsche Ableitungsgleichung erster Ordnung

Ist die Riemannsche Metrik des Riemannschen Gebiets (G, g) der Maßtensor einer Flächenparametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$, so besteht ein Zusammenhang zwischen der Levi-Civita-Ableitung von (G, g) und der äußeren Geometrie von F . Dieser wird durch die Gaußsche Ableitungsgleichung gegeben:

Satz. Es sei $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine C^2 -Flächenparametrisierung, deren Maßtensor bzw. zweite Fundamentalform wir mit g bzw. h bezeichnen, und $X \in \mathfrak{X}_f^1(G)$ ein Vektorfeld längs der C^1 -Abbildung $f : M \rightarrow G$. Dann ist das Differential des Vektorfelds $F_* X \in \mathfrak{X}_{F \circ f}^1(\mathbb{E}^3)$ mit der Levi-Civita-Ableitung von X durch die *Ableitungsgleichung erster Ordnung von Gauß* verbunden: Für alle $p \in M$ und $v \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$d_p(F_* X)(v) = d_{f(p)} F(\nabla_{(p,v)} X) + h_{f(p)}(d_p f(v), X_p) \cdot N_F(f(p)) ;$$

demzufolge ist $d_{f(p)}F(\nabla_{(p,v)}X)$ die Tangentialkomponente und $h_{f(p)}(d_p f(v), X_p) \cdot N_F(f(p))$ die Normalkomponente von $d_p(F_*X)(v)$.

Die beiden wichtigsten Spezialfälle notieren wir noch einmal ausdrücklich:

- Ist $X \in \mathfrak{X}^1(G)$ (also $M = G$, $f = \text{id}_G$), so gilt für $p \in G$ und $v \in \mathbb{R}^2$

$$d_p(F_*X)(v) = d_pF(\nabla_{(p,v)}X) + h_p(v, X_p) \cdot N_F(p) .$$

- Ist $\gamma = F \circ \alpha$ eine C^2 -Flächenkurve, so gilt (für die Situation $X = \alpha' \in \mathfrak{X}_\alpha^1(G)$)

$$\forall t : \gamma''(t) = d_{\alpha(t)}F(\nabla_{\partial_t}\alpha') + h_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) \cdot N_F(\alpha(t)) ,$$

somit

$$\forall t : d_{\alpha(t)}F(\nabla_{\partial_t}\alpha') = \gamma''(t) - \langle \gamma''(t), N_F(\alpha(t)) \rangle \cdot N_F(\alpha(t)) .$$

Bemerkung. Damit entpuppt sich unsere „Motivationsrechnung“ am Anfang von Abschnitt 7.2 als nichts anderes als die Gaußsche Ableitungsgleichung für den Spezialfall $M = G$, $f = \text{id}_G$. Ferner sehen wir rückblickend, dass die Definition des Christoffelsymbols in Satz 1 in Abschnitt 7.1 (in Verbindung mit der Definition der Levi-Civita-Ableitung in Abschnitt 7.2) gerade die Gaußsche Ableitungsgleichung im Spezialfall $X = \text{const.} \in \mathfrak{X}^\infty(G)$ ist.

Beweis des Satzes. Wir adaptieren die Motivationsrechnung am Anfang von Abschnitt 7.2 für Vektorfelder längs f : Für $p \in M$ und $v \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\begin{aligned} d_p(F_*X)(v) &= d_p(q \mapsto d_{f(q)}F(X_q))(v) = d_{f(p)}^2F(X_p, d_p f(v)) + d_{f(p)}F(d_p X(v)) \\ &\stackrel{(*)}{=} d_{f(p)}F(\Gamma_{f(p)}(X_p, d_p f(v))) + h_{f(p)}(X_p, d_p f(v)) \cdot N_F(f(p)) + d_{f(p)}F(d_p X(v)) \\ &= d_{f(p)}F(d_p X(v) + \Gamma_{f(p)}(X_p, d_p f(v))) + h_{f(p)}(X_p, d_p f(v)) \cdot N_F(f(p)) \\ &= d_{f(p)}F(\nabla_{(p,v)}X) + h_{f(p)}(X_p, d_p f(v)) \cdot N_F(f(p)) , \end{aligned}$$

wobei das mit $(*)$ bezeichnete Gleichheitszeichen wieder aus Satz 1 in Abschnitt 7.1 folgt. \square

7.4 Geodätische Linien

Wir haben geodätische Linien einer Fläche $[F]$ in Abschnitt 6.4 als Flächenkurven, deren Beschleunigungsvektor in Richtung der Flächennormalen weist, eingeführt und gezeigt, dass eine Flächenkurve genau dann eine Geodätische ist, wenn sie konstante Bahngeschwindigkeit und verschwindende geodätische Krümmung besitzt (siehe Aussage 3 in Abschnitt 6.4).

Die folgende Aussage zeigt, dass Geodätische tatsächlich ein Konzept der inneren Flächengeometrie sind:

Aussage. Es sei $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine C^r -Flächenparametrisierung und ∇ die Levi-Civita-Ableitung zu ihrem Metensor. Eine reguläre C^2 -Flächenkurve $\gamma = F \circ \alpha$ ist genau dann eine Geodätische, wenn $\nabla_{\partial_t}\alpha' \equiv 0$ ist.

Beweis. Nach der Gaußschen Ableitungsgleichung, angewendet auf das Vektorfeld $\alpha' \in \mathfrak{X}_\alpha^1(G)$, gilt für $t \in I$ jeweils

$$\gamma''(t) = d_{\alpha(t)}F(\nabla_{\partial_t}\alpha') + h_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) \cdot N_F(\alpha(t)) .$$

Wir sehen daher, dass $\gamma''(t)$ genau dann in die Richtung der Flächennormalen $N_F(\alpha(t))$ zeigt, wenn $\nabla_{\partial_t}\alpha' = 0$ ist. \square

Durch diese Aussage motiviert, definieren wir:

Definition. Sei (G, g) ein n -dimensionales Riemannsches C^1 -Gebiet mit Levi-Civita-Ableitung ∇ . Dann heißt eine C^2 -Kurve $\alpha : I \rightarrow G$ eine *Geodätische* des Riemannschen Gebiets (G, g) , wenn α' ein Parallelfeld längs α ist, wenn also $\nabla_{\partial}\alpha' = 0$ gilt.

Man beachte, dass wir damit für den Fall, dass die Riemannsche Metrik Maßtensor einer Flächenparametrisierung ist, die Definition einer Geodätischen im Vergleich mit Abschnitt 6.4 dahingehend verallgemeinert haben, dass wir nun auch nicht-reguläre Kurven als Geodätische zulassen. Die nicht-regulären Geodätischen sind gerade die Kurven $\alpha \equiv \text{const.}$ (Dies ist eine Konsequenz der Folgerung aus dem nächsten Satz.)

Satz. Sei (G, g) ein n -dimensionales Riemannsches C^1 -Gebiet und Γ das Christoffelsymbol von g . Dann ist eine C^2 -Kurve $\alpha : I \rightarrow G$ genau dann eine Geodätische von (G, g) , wenn sie eine Lösung der gewöhnlichen, nicht-linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\forall t \in I : \alpha''(t) = -\Gamma_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))$$

ist. Diese Differentialgleichung kann man mittels der Komponentendarstellung $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ der Kurve α auch in der Form

$$\alpha_j'' = - \sum_{i,k=1}^n (\Gamma_{ik}^j \circ \alpha) \cdot \alpha_i' \cdot \alpha_k' \quad \text{für } j \in \{1, \dots, n\}$$

schreiben.

Beweis. Nach der Definition der Levi-Civita-Ableitung gilt für $t \in I$

$$\nabla_{\partial_t}\alpha' = \alpha''(t) + \Gamma_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) ;$$

der Satz folgt aus dieser Gleichung unmittelbar in Verbindung mit der Definition der Geodätischen. \square

Folgerung. Ist (G, g) ein n -dimensionales Riemannsches C^2 -Gebiet, so existiert zu jeder „Anfangsbedingung“ $(p, v) \in G \times \mathbb{R}^n$ genau eine maximale, auf dem Intervall $I_{(p,v)} \subset \mathbb{R}$ definierte, Geodätische

$$\alpha_{(p,v)} : I_{(p,v)} \rightarrow G$$

mit

$$0 \in I_{(p,v)} , \quad \alpha_{(p,v)}(0) = p \quad \text{und} \quad \alpha'_{(p,v)}(0) = v .$$

Beweis. Dies folgt, indem man den Existenz- und Eindeigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichung (Satz von Picard/Lindelöf) auf die im Satz angegebene Differentialgleichung anwendet. \square

Aufgabe. Sei $\alpha : I \rightarrow G$ eine Geodätische, und seien $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\tilde{I} := \{t \in \mathbb{R} \mid at + b \in I\} \neq \emptyset$$

gilt. Dann ist

$$\beta : \tilde{I} \rightarrow G, t \mapsto \alpha(at + b)$$

ebenfalls eine Geodätische. Insbesondere gilt für $p \in G$ und $v \in \mathbb{R}^n$:

- (a) Ist $a \in \mathbb{R}_+$, so ist $I_{(p, a \cdot v)} = \frac{1}{a} \cdot I_{(p, v)}$ und $\alpha_{(p, a \cdot v)}(t) = \alpha_{(p, v)}(a \cdot t)$ für $t \in I_{(p, a \cdot v)}$.
- (b) Ist $s \in I_{(p, v)}$ und setzen wir $q := \alpha_{(p, v)}(s)$ und $w := \alpha'_{(p, v)}(s)$, so gilt $I_{(q, w)} = I_{(p, v)} - s$ und $\alpha_{(q, w)}(t) = \alpha_{(p, v)}(t + s)$ für $t \in I_{(q, w)}$.

Beispiel 1. Geodätische auf Rotationsflächen. Sei F die übliche Parametrisierung der C^2 -Rotationsfläche zur nach Bogenlänge parametrisierten Profilkurve $\alpha = (r, b) : I \rightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Wie wir in Abschnitt 6.4 (Beispiel 1 und Aufgabe 2) gesehen haben, sind sämtliche Meridiane, sowie die Breitenkreise zu Parametern $t \in I$ mit $r'(t) = 0$, Geodätische von F . Wir wollen nun die Geodätischen von F allgemein untersuchen.

Aus dem Satz dieses Abschnittes folgt in Verbindung mit Beispiel (b) aus Abschnitt 7.1: Eine C^2 -Flächenkurve $\gamma = F \circ y$ mit $y = (y_1, y_2)$ ist genau dann eine Geodätische von F , wenn sie das folgende Differentialgleichungssystem erfüllt:

$$y_1'' = ((r \cdot r') \circ y_1) \cdot (y_2')^2 \quad (1)$$

$$y_2'' = -2 \cdot \left(\frac{r'}{r} \circ y_1 \right) \cdot y_1' \cdot y_2'. \quad (2)$$

Wir können an diesem Differentialgleichungssystem erneut unsere bisherigen Ergebnisse zu Geodätischen auf F ablesen:

- (a) Für jedes $s_0 \in \mathbb{R}$ ist $y : I \rightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, t \mapsto (t, s_0)$ eine Lösung des Differentialgleichungssystems; die dazugehörigen Flächenkurven $F \circ y$ sind die Meridiane von F , die wir schon in Abschnitt 6.4 als Geodätische erkannt haben.
- (b) Ist $t_0 \in I$ mit $r'(t_0) = 0$, so ist $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, s \mapsto (t_0, s)$ ebenfalls eine Lösung des Differentialgleichungssystems; die hierzu gehörige Flächenkurve $F \circ y$ ist ein Breitenkreis von F .

Gleichung (2) ist zu

$$(r^2 \circ y_1) \cdot y_2' \equiv \text{const.} \quad (2')$$

äquivalent. Bei der folgenden Betrachtung dürfen wir wegen Aufgabe 1 ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass die Geodätische γ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Bezeichnen wir mit $\vartheta(t)$ den Winkel zwischen $\gamma'(t)$ und dem durch $\gamma(t)$ verlaufenden Breitenkreis, so gilt, weil γ nach Bogenlänge parametrisiert ist,

$$\cos \vartheta(t) = \frac{\langle \gamma'(t), d_{y(t)} F(e_2) \rangle}{\|d_{y(t)} F(e_2)\|} = \frac{g_{y(t)}(y'(t), e_2)}{\sqrt{g_{22}(y(t))}} = (r \circ y_1(t)) \cdot y_2'(t);$$

für das letzte Gleichheitszeichen siehe Beispiel 2(b) in Abschnitt 5.6. Daher ist die Gleichung (2') zu der geometrisch aussagekräftigen *Clairautschen Gleichung*

$$(r \circ y_1(t)) \cdot (\cos \circ \vartheta) \equiv \text{const.} =: c \quad (2'')$$

äquivalent. Dabei ist der Wert der Konstanten c natürlich durch die Anfangsbedingung für die Geodätische γ eindeutig bestimmt.

Die Clairautsche Gleichung besagt insbesondere, dass die Kurve γ sich nur in einer solchen Zone auf der Rotationsfläche bewegen kann, in der $r \geq |c|$ ist. Für $c = 0$ erhalten wir erneut die Meridiane der Fläche; für $c \neq 0$ sehen wir insbesondere, dass die Geodätische die Rotationsachse stets in einer Richtung umläuft.

Setzen wir die Gleichung (2') in der Gestalt $(r^2 \circ y_1) \cdot y_2' = c \in \mathbb{R}$ in die Beziehung $1 = \langle \gamma', \gamma' \rangle = g(y', y') = (y_1')^2 + (r^2 \circ y_1) \cdot (y_2')^2$ ein, so erhalten wir den „Energie-Erhaltungssatz“

$$\frac{1}{2}(y_1')^2 + U \circ y_1 = \frac{1}{2} \equiv \text{const.}$$

mit dem „Potential“

$$U := \frac{c^2}{2} \cdot r^{-2} : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dies ist die Gleichung eines konservativen mechanischen Systems mit einem Freiheitsgrad, und als solche bestens bekannt. Siehe beispielsweise den Abschnitt 2.6 aus V. I. ARNOLD, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer 1980. Aufgrund der dort beschriebenen Theorie bekommt man in einfacher Weise eine qualitative Übersicht über die Geodätischen einer jeden Rotationsfläche.

Beispiel 2. Die hyperbolische Halbebene. Die *hyperbolische Halbebene* ist das Riemannsche Gebiet $\mathbb{H} := (G, g)$ mit $G := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ und der Riemannschen C^∞ -Metrik g , die durch

$$g_{(t,s)} := \frac{1}{s^2} \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle \quad \text{für } (t, s) \in G$$

gegeben ist (siehe auch Beispiel 3(a) in Abschnitt 5.6).

Nach Beispiel (a) aus Abschnitt 7.1 gilt für die Komponenten Γ_{ik}^j des Christoffelsymbols von \mathbb{H}

$$-\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = \frac{\partial(\ln \circ \frac{1}{y})}{\partial y} = -\frac{1}{y} \quad \text{und} \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0.$$

Daher ist nach dem Satz dieses Abschnittes eine Kurve $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : I \rightarrow \mathbb{H}$ genau dann eine Geodätische, wenn

$$\alpha_1'' = -\frac{2\alpha_1' \cdot \alpha_2'}{\alpha_2} \quad \text{und} \quad \alpha_2'' = \frac{(\alpha_2')^2 - (\alpha_1')^2}{\alpha_2}$$

gilt.

Daran liest man ab: Die Geodätischen von \mathbb{H} sind, abgesehen von den konstanten Kurven, genau die vertikalen Geraden $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$, $t \mapsto (c, \exp(t))$ (sie sind nach Bogenlänge parametrisiert) und die Halbkreise, deren Mittelpunkt auf dem „Horizont“ $\mathbb{R} \times \{0\}$ liegt (sie müssen allerdings geeignet parametrisiert werden).

Dieses Beispiel ist von großem historischen Interesse. Betrachtet man nämlich die Geodätischen als die „Geraden“ der hyperbolischen Halbebene, so sind in der so definierten *hyperbolischen*

Geometrie alle Axiome der euklidischen Geometrie erfüllt, mit Ausnahme des Parallelenaxioms. Diese Tatsache lieferte den Beweis, dass man das Parallelenaxiom nicht aus den anderen Axiomen der euklidischen Geometrie herleiten kann. Die Entdecker dieses Tatbestandes waren unabhängig voneinander J. BOLYAI (1823), N. I. LOBATSCHESKY (1825) und GAUSS, wobei letzterer seine diesbezüglichen Notizen nie veröffentlicht hat.

7.5 Differentialformen in zwei Dimensionen

In den Abschnitten 7.6–7.7 werden wir den Zusammenhang zwischen der Gaußschen Krümmung einer Flächenparametrisierung und den Größen der inneren Geometrie beschreiben. Dazu müssen wir mit Differentialformen auf 2-dimensionalen Gebieten, und deren Cartanschen Ableitungen arbeiten. Wir stellen daher die Theorie derartiger Differentialformen kurz dar.

Definition 1. Es sei G ein Gebiet des \mathbb{R}^2 und $r \geq 1$.

- (a) Eine C^r -Differentialform α vom Grad 1 auf G ist eine C^r -Abbildung $\alpha : G \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $p \mapsto \alpha_p$. Für $p \in G$ ist α_p also jeweils eine Linearform auf \mathbb{R}^2 .
- (b) Eine C^r -Differentialform μ vom Grad 2 auf G ist eine C^r -Abbildung $\mu : G \rightarrow \text{Alt}^2(\mathbb{R}^2)$, $p \mapsto \mu_p$. Für $p \in G$ ist μ_p also jeweils eine Bilinearform auf \mathbb{R}^2 , die *alternierend* ist, d.h. es gilt

$$\mu_p(v, w) = -\mu_p(w, v) \quad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^2.$$

Beispiele 1.

- (a) Sei (G, g) ein Riemannsches C^r -Gebiet und $E \in \mathfrak{X}^s(G)$ mit $s \leq r$. Dann ist $g(E, \cdot) : p \mapsto g_p(E_p, \cdot)$ eine C^s -Differentialform vom Grad 1 auf G . Die Volumenform ω von (G, g) ist eine C^{r-1} -Differentialform vom Grad 2 auf G .
- (b) Sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^r -Funktion. Dann ist das Differential df von f eine C^{r-1} -Differentialform vom Grad 1 auf G .
- (c) Sind $x, y : G \rightarrow \mathbb{R}$ die üblichen Koordinatenfunktionen auf $G \subset \mathbb{R}^2$, so sind insbesondere ihre Differentiale dx und dy C^∞ -Differentialformen vom Grad 1 auf G . Ist α eine andere C^r -Differentialform vom Grad 1 auf G , so existieren C^r -Funktionen $f_1, f_2 : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\alpha = f_1 \cdot dx + f_2 \cdot dy$, das soll heißen:

$$\forall p \in G : \alpha_p = f_1(p) \cdot d_p x + f_2(p) \cdot d_p y.$$

Definition 2. Seien α, β zwei C^r -Differentialformen vom Grad 1 auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$. Dann wird durch

$$(\alpha \wedge \beta)_p(v, w) := \alpha_p(v) \cdot \beta_p(w) - \alpha_p(w) \cdot \beta_p(v) \quad \text{für alle } p \in G \text{ und } v, w \in \mathbb{R}^2$$

eine C^r -Differentialform $\alpha \wedge \beta$ vom Grad 2 auf G definiert. $\alpha \wedge \beta$ heißt das *äußere Produkt* oder das *Wedge-Produkt* von α mit β .

Beispiel 2. Ist in der Situation von Beispiel 1(c) eine C^r -Differentialform μ vom Grad 2 auf G gegeben, so existiert eine C^r -Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mu = f \cdot (dx \wedge dy)$, d.h.

$$\forall p \in G : \mu_p = f(p) \cdot (dx \wedge dy)_p.$$

In Verallgemeinerung von Beispiel 1(c) und Beispiel 2 gilt:

Aussage 1. Es sei (E_1, E_2) ein C^r -Basisfeld auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ und (θ_1, θ_2) das zu (E_1, E_2) duale Basisfeld, das heißt, θ_1 und θ_2 seien die C^r -Differentialformen vom Grad 1, die durch

$$\theta_1(E_1) \equiv \theta_2(E_2) \equiv 1 \quad \text{und} \quad \theta_1(E_2) \equiv \theta_2(E_1) \equiv 0 \quad (*)$$

charakterisiert sind. Dann gilt:

- (a) Für jede Differentialform α vom Grad 1 auf G gilt $\alpha = \alpha(E_1) \cdot \theta_1 + \alpha(E_2) \cdot \theta_2$.
- (b) Für jede Differentialform μ vom Grad 2 auf G gilt $\mu = \mu(E_1, E_2) \cdot (\theta_1 \wedge \theta_2)$.

Beweis. Für (a). Es genügt, die Gleichung bei Einsetzung von E_k ($k \in \{1, 2\}$) zu überprüfen. Aufgrund von (*) gilt

$$\alpha(E_1) \cdot \theta_1(E_k) + \alpha(E_2) \cdot \theta_2(E_k) = \alpha(E_k).$$

Für (b). Man beachte, dass $\text{Alt}^2(\mathbb{R}^2)$ eindimensional ist, und daher $\text{Alt}^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \mapsto \omega((E_1)_p, (E_2)_p)$ für $p \in G$ jeweils ein Vektorraum-Isomorphismus ist. Deshalb genügt es, die behauptete Gleichung bei Einsetzung von (E_1, E_2) zu überprüfen. Es gilt

$$(\mu(E_1, E_2) \cdot (\theta_1 \wedge \theta_2))(E_1, E_2) = \mu(E_1, E_2) \cdot (\theta_1(E_1) \cdot \theta_2(E_2) - \theta_1(E_2) \cdot \theta_2(E_1)) \stackrel{(*)}{=} \mu(E_1, E_2). \quad \square$$

Definition 3. Es seien $G, \tilde{G} \subset \mathbb{R}^2$ zwei Gebiete und $f : \tilde{G} \rightarrow G$ eine C^{r+1} -Abbildung.

- (a) Ist α eine C^r -Differentialform vom Grad 1 auf G , so wird durch

$$(f^*\alpha)_p(v) := \alpha_{f(p)}(d_p f(v)) \quad \text{für alle } p \in \tilde{G} \text{ und } v \in \mathbb{R}^2$$

eine C^r -Differentialform $f^*\alpha$ vom Grad 1 auf \tilde{G} definiert.

- (b) Ist μ eine C^r -Differentialform vom Grad 2 auf G , so wird durch

$$(f^*\mu)_p(v, w) := \mu_{f(p)}(d_p f(v), d_p f(w)) \quad \text{für alle } p \in \tilde{G} \text{ und } v, w \in \mathbb{R}^2$$

eine C^r -Differentialform $f^*\mu$ vom Grad 2 auf \tilde{G} definiert.

Man nennt $f^*\alpha$ bzw. $f^*\mu$ den *Pullback* von α bzw. μ unter f .

Wir wollen nun für Differentialformen α vom Grad 1 einen *Differentiationsprozeß* einführen. Dabei denkt man natürlich zuerst an das übliche Differential $d\alpha$. Dieses ordnet jedem $p \in G$ eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $v \mapsto d_p \alpha(v)$ zu. Das hierdurch definierte Tensorfeld vom Typ $(0, 2)$ $(d_p \alpha(v))(w)$ ist jedoch *keine* Differentialform, weil es in den Einträgen (v, w) nicht alternierend ist. Betrachten wir von diesem Tensorfeld jedoch nur den „alternierenden Anteil“, so erhalten wir eine Differentialform vom Grad 2, die sogenannte *Cartansche Ableitung* von α :

Definition 4. Sei α eine C^r -Differentialform vom Grad 1 auf G mit $r \geq 1$. Dann heißt die durch

$$(\underline{d}\alpha)_p(v, w) := \underline{d}_p\alpha(v, w) := (d_p\alpha(v))(w) - (d_p\alpha(w))(v) \quad \text{für } p \in G \text{ und } v, w \in \mathbb{R}^2$$

definierte C^{r-1} -Differentialform $\underline{d}\alpha$ vom Grad 2 auf G die *Cartansche Ableitung* oder *uere Ableitung* von α .

Aussage 2. Berechnung der Cartanschen Ableitung in Riemannschen Gebieten. Es sei (G, g) ein 2-dimensionales Riemannsches C^1 -Gebiet mit Levi-Civita-Ableitung ∇ , α eine C^1 -Differentialform vom Grad 1 auf G , und $X, Y \in \mathfrak{X}^1(G)$. Dann gilt für $p \in G$

$$\underline{d}_p\alpha(X_p, Y_p) = d_p(\alpha(Y))(X_p) - d_p(\alpha(X))(Y_p) - \alpha_p(\nabla_{(p, X_p)}Y - \nabla_{(p, Y_p)}X).$$

Beweis. Es gilt nach der Leibniz-Regel

$$d_p(\alpha(Y))(X_p) = (d_p\alpha(X_p))(Y_p) + \alpha_p(d_pY(X_p))$$

und daher

$$\begin{aligned} \underline{d}_p\alpha(X_p, Y_p) &= (d_p\alpha(X_p))(Y_p) - (d_p\alpha(Y_p))(X_p) \\ &= d_p(\alpha(Y_p))(X_p) - d_p(\alpha(X_p))(Y_p) \\ &= d_p(\alpha(Y))(X_p) - \alpha_p(d_pY(X_p)) - d_p(\alpha(X))(Y_p) + \alpha_p(d_pX(Y_p)) \\ &= d_p(\alpha(Y))(X_p) - d_p(\alpha(X))(Y_p) - \alpha_p(d_pY(X_p) - d_pX(Y_p)) \\ &= d_p(\alpha(Y))(X_p) - d_p(\alpha(X))(Y_p) - \alpha_p(\nabla_{(p, X_p)}Y - \nabla_{(p, Y_p)}X), \end{aligned}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen aus der Torsionsfreiheit von ∇ folgt, siehe Satz 1(c) in Abschnitt 7.2. \square

Aussage 3. Vertauschbarkeit von Cartanscher Ableitung und Pullback. Seien G, \tilde{G} zwei Gebiete in \mathbb{R}^2 , $f : \tilde{G} \rightarrow G$ eine C^2 -Abbildung und α eine C^1 -Differentialform vom Grad 1 auf G . Dann gilt

$$\underline{d}(f^*\alpha) = f^*(\underline{d}\alpha).$$

Beweis. Es seien $\tilde{p} \in \tilde{G}$ und $\tilde{v}, \tilde{w} \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Wir setzen $p := f(\tilde{p}) \in G$, $v := d_{\tilde{p}}f(\tilde{v})$ und $w := d_{\tilde{p}}f(\tilde{w})$. Dann gilt aufgrund der Kettenregel

$$\underline{d}_{\tilde{p}}(f^*\alpha)(\tilde{v}, \tilde{w}) = d_{\tilde{p}}((f^*\alpha)(\tilde{v}))(\tilde{w}) - d_{\tilde{p}}((f^*\alpha)(\tilde{w}))(\tilde{v}) = d_p(\alpha(v))(w) - d_p(\alpha(w))(v) = \underline{d}_p\alpha(v, w) = (f^*(\underline{d}\alpha))_{\tilde{p}}(\tilde{v}, \tilde{w}).$$

\square

7.6 Die Zusammenhangsform eines 2-dimensionalen Riemannschen Gebiets

Voraussetzungen. Wir machen für die nächsten beiden Abschnitte die folgenden Generalvoraussetzungen: Es sei (G, g) ein 2-dimensionales Riemannsches C^r -Gebiet mit $r \geq 2$, und ∇ dessen Levi-Civita-Ableitung. Wir bezeichnen mit $\text{Alt}_+^2(\mathbb{R}^2)$ die kanonische Orientierung von \mathbb{R}^2 , siehe Abschnitt 1.7; es seien ω und J die induzierte Volumenform bzw. komplexe Struktur von (G, g) , siehe Abschnitt 5.6.

Wir fixieren nun ein normiertes Vektorfeld $E \in \mathfrak{X}^r(G)$. Dabei soll sich die „Normierung“ auf die Riemannsche Metrik g beziehen, d.h. es soll gelten

$$\forall p \in G : g_p(E_p, E_p) = 1.$$

Außerdem betrachten wir das Vektorfeld

$$JE : G \rightarrow \mathbb{R}^2, p \mapsto J_p(E_p) .$$

Damit ist offenbar $JE \in \mathfrak{X}(G)$ ein weiteres Einheitsvektorfeld, und (E, JE) ein positiv orientiertes C^r -ONB-Feld bezüglich g .

Satz. Es existiert genau eine C^{r-1} -Differentialform $\zeta : G \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $p \mapsto \zeta_p$ vom Grad 1 auf G , so dass

$$\forall p \in G, v \in \mathbb{R}^2 : \nabla_{(p,v)} E = \zeta_p(v) \cdot JE_p \quad \text{und} \quad \nabla_{(p,v)}(JE) = -\zeta_p(v) \cdot E_p$$

gilt. Diese Differentialform nennen wir die *Zusammenhangsform der Konfiguration* (G, g, E) . Sie misst die infinitesimale Änderung von E und JE relativ zum ONB-Feld (E, JE) (siehe auch die Frenet-Gleichungen der Kurventheorie).

Beweis. Für $p \in G$ und $v \in \mathbb{R}^2$ setzen wir

$$\zeta_p(v) := g_p(\nabla_{(p,v)} E, JE_p) ;$$

hierdurch wird offenbar eine C^{r-1} -Differentialform ζ vom Grad 1 auf G definiert. Damit gilt, weil (E_p, JE_p) eine g_p -ONB von \mathbb{R}^2 ist,

$$\nabla_{(p,v)} E = g_p(\nabla_{(p,v)} E, E_p) E_p + g_p(\nabla_{(p,v)} E, JE_p) JE_p = \zeta_p(v) JE_p ;$$

hierbei ergibt sich das zweite Gleichheitszeichen aus der Differentiation der Gleichung $g(E, E) \equiv 1$ und der Anwendung der Ricci-Identität (Abschnitt 7.2, Satz 1(d)):

$$0 = d_p(g(E, E))(v) = 2 g_p(\nabla_{(p,v)} E, E_p) .$$

In entsprechender Weise folgt aus $g(E, JE) \equiv 0$:

$$0 = d_p(g(E, JE))(v) = g_p(\nabla_{(p,v)} E, JE_p) + g_p(E_p, \nabla_{(p,v)}(JE)) = g_p(E_p, \nabla_{(p,v)}(JE)) + \zeta_p(v)$$

und aus $g(JE, JE) \equiv 1$:

$$0 = d_p(g(JE, JE))(v) = 2 g_p(\nabla_{(p,v)}(JE), JE_p) .$$

Mit diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$\nabla_{(p,v)}(JE) = g_p(\nabla_{(p,v)}(JE), E_p) E_p + g_p(\nabla_{(p,v)}(JE), JE_p) JE_p = -\zeta_p(v) E_p .$$

□

Aussage 1. Es sei (θ_1, θ_2) das zu (E, JE) duale Basisfeld (siehe Aussage 1 in Abschnitt 7.5). Dann gilt:

$$(a) \quad \forall p \in G : \theta_{1,p} = g_p(E_p, \cdot) \quad \text{und} \quad \theta_{2,p} = g_p(JE_p, \cdot)$$

$$(b) \quad \omega = \theta_1 \wedge \theta_2 .$$

$$(c) \quad \zeta = \sum_i \underline{d}\theta_i(E, JE) \cdot \theta_i$$

(d) Die Zusammenhangsform ζ ist durch die Gleichungen

$$\underline{d}\theta_1 = \zeta \wedge \theta_2 \quad \text{und} \quad \underline{d}\theta_2 = -\zeta \wedge \theta_1$$

charakterisiert.

Beweis. (a) ist klar. Zu (b). Nach Aussage 1(b) aus Abschnitt 7.5 gilt $\omega = \omega(E, JE) \cdot (\theta_1 \wedge \theta_2) = \theta_1 \wedge \theta_2$. Zu (c). Aufgrund von Aussage 2 aus Abschnitt 7.5 und der Definition der Zusammenhangsform ζ im Satz dieses Abschnitts gilt für $p \in G$

$$\begin{aligned} \sum_i \underline{d}_p \theta_i(E, JE) \cdot \theta_{i,p} &= \sum_i (d_p(\theta_i(JE))(E_p) - d_p(\theta_i(E))(JE_p) - \theta_{i,p}(\nabla_{(p,E_p)}(JE) - \nabla_{(p,JE_p)}E)) \cdot \theta_{i,p} \\ &= - \sum_i \theta_{i,p}(\nabla_{(p,E_p)}(JE) - \nabla_{(p,JE_p)}E) \cdot \theta_{i,p} \\ &= - \sum_i \theta_{i,p}(-\zeta_p(E_p) \cdot E_p - \zeta_p(JE_p) \cdot JE_p) \cdot \theta_{i,p} \\ &= \sum_i (\zeta_p(E_p) \cdot \theta_{i,p}(E_p) + \zeta_p(JE_p) \cdot \theta_{i,p}(JE_p)) \cdot \theta_{i,p} \\ &= \zeta_p(E_p) \cdot \theta_{1,p} + \zeta_p(JE_p) \cdot \theta_{2,p} = \zeta_p, \end{aligned}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen aus Aussage 1(a) in Abschnitt 7.5 folgt.

Zu (d). Nach (c) gilt

$$\zeta \wedge \theta_2 = (\underline{d}\theta_1(E, JE) \cdot \theta_1 + \underline{d}\theta_2(E, JE) \cdot \theta_2) \wedge \theta_2 = \underline{d}\theta_1(E, JE) \cdot (\theta_1 \wedge \theta_2) = \underline{d}\theta_1,$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen aus Aussage 1(b) in Abschnitt 7.5 folgt. Die zweite behauptete Gleichung folgt auf entsprechende Weise. \square

Beispiel. In der hyperbolischen Halbebene \mathbb{H} (siehe das Beispiel 2 in Abschnitt 7.4) ist $E := y \cdot e_2$ ein C^∞ -Einheitsvektorfeld. Es gilt $JE = -y \cdot e_1$, $\theta_1 = (1/y) \cdot dy$, $\theta_2 = -(1/y) \cdot dx$ und daher $\omega = \theta_1 \wedge \theta_2 = (1/y^2) \cdot dx \wedge dy$. Weiter gilt für $p = (x, y) \in \mathbb{H}$

$$\underline{d}_p \theta_1(e_1, e_2) = (d_p \theta_1(e_1))(e_2) - (d_p \theta_1(e_2))(e_1) = 0 + (\frac{1}{y^2} d_p y)(e_1) = 0$$

und deshalb $\underline{d}\theta_1 = 0$. Entsprechend ist

$$\underline{d}_p \theta_2(e_1, e_2) = (d_p \theta_2(e_1))(e_2) - (d_p \theta_2(e_2))(e_1) = 0 - \frac{1}{y^2} d_p x(e_1) = -\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{y^2} \cdot (dx \wedge dy)(e_1, e_2)$$

und deshalb $\underline{d}\theta_2 = -\frac{1}{y^2} \cdot (dx \wedge dy) = -\omega$. Damit ergibt sich nach Aussage 1(c)

$$\zeta = \underline{d}\theta_1(E, JE) \cdot \theta_1 + \underline{d}\theta_2(E, JE) \cdot \theta_2 = -\omega(E, JE) \cdot \theta_2 = -\theta_2 = \frac{1}{y} \cdot dx.$$

Aussage 2. Verhalten der Zusammenhangsform unter Isometrien. Sei (\tilde{G}, \tilde{g}) ein weiteres 2-dimensionales Riemannsches C^r -Gebiet, die mittels der orientierungserhaltenden C^{r+1} -Isometrie $\varphi : (\tilde{G}, \tilde{g}) \rightarrow (G, g)$ zu (G, g) isometrisch ist. Dann existiert genau ein C^r -Einheitsvektorfeld \tilde{E} des Riemannschen Gebietes (\tilde{G}, \tilde{g}) mit

$$\forall p \in \tilde{G}, v \in \mathbb{R}^2 : d_p \varphi(\tilde{E}_p) = E_{\varphi(p)}.$$

Die Volumen- und Zusammenhangsformen $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\zeta}$ der Konfiguration $(\tilde{G}, \tilde{g}, \tilde{E})$ stehen mit den entsprechenden Größen der Konfiguration (G, g, E) durch die folgenden einfachen Formeln in Verbindung:

$$\tilde{\omega} = \varphi^* \omega, \quad \tilde{\zeta} = \varphi^* \zeta \quad \text{und deshalb auch} \quad \underline{d}\tilde{\zeta} = \varphi^*(\underline{d}\zeta).$$

Beweis. Die Existenz und Eindeutigkeit von \tilde{E} folgt aus der Tatsache, dass $d_p \varphi : (\mathbb{R}^2, g_p) \rightarrow (\mathbb{R}^2, g_{\varphi(p)})$ jeweils ein skalarprodukttreuer Vektorraum-Isomorphismus ist. Ferner gilt $d_p \varphi \circ \tilde{J}_p = J_{\varphi(p)} \circ d_p \varphi$ und deshalb auch $d_p \varphi(\tilde{J}\tilde{E}_p) = JE_{\varphi(p)}$. Daraus ergibt sich $\tilde{\theta}_k = \varphi^* \theta_k$ für $k \in \{1, 2\}$ und daher nach Aussage 1(b)

$$\tilde{\omega} = \tilde{\theta}_1 \wedge \tilde{\theta}_2 = (\varphi^* \theta_1) \wedge (\varphi^* \theta_2) = \varphi^*(\theta_1 \wedge \theta_2) = \varphi^* \omega.$$

Außerdem gilt nach Aussage 1(c) unter Verwendung von Aussage 3 aus Abschnitt 7.5

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta} &= \sum_i \underline{d}\tilde{\theta}_i(\tilde{E}, \tilde{J}\tilde{E}) \cdot \tilde{\theta}_i = \sum_i \underline{d}(\varphi^*\theta_i)(\tilde{E}, \tilde{J}\tilde{E}) \cdot (\varphi^*\theta_i) = \sum_i \varphi^*(\underline{d}\theta_i)(\tilde{E}, \tilde{J}\tilde{E}) \cdot (\varphi^*\theta_i) \\ &= \sum_i (\underline{d}\theta_i)_{\varphi(p)}(d_p\varphi(\tilde{E}), d_p\varphi(\tilde{J}\tilde{E})) \cdot (\varphi^*\theta_i) = \sum_i (\underline{d}\theta_i(E, JE) \circ \varphi) \cdot \varphi^*\theta_i = \varphi^*\zeta.\end{aligned}$$

Die Gleichung $\underline{d}\tilde{\zeta} = \varphi^*(\underline{d}\zeta)$ folgt nun aus Aussage 3 aus Abschnitt 7.5. \square

7.7 Die Gaußsche Krümmung als Größe der inneren Geometrie

Aussage 1. Die Cartansche Ableitung $\underline{d}\zeta$ der Zusammenhangsform ζ der Konfiguration (G, g, E) hängt *nicht* von der Wahl des Einheitsvektorfeldes E ab. Wir nennen $\underline{d}\zeta$ die *Krümmungsform* des Riemannschen Gebiets (G, g) . Da sie eine Differentialform vom Grad 2 ist, kann man sie mit Hilfe einer – eindeutig bestimmten – Funktion $K : G \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\underline{d}\zeta = -K \cdot \omega$$

beschreiben. K heißt die *Krümmung* des 2-dimensionalen Riemannschen Gebiets (G, g) .

Beweis. Ist \tilde{E} ein zweites Einheitsvektorfeld von (G, g) , so gilt $\tilde{E} = a \cdot E + b \cdot JE$ mit $a := g(\tilde{E}, E)$ und $b := g(\tilde{E}, JE)$. Dabei ist $a^2 + b^2 \equiv 1$, also

$$a \cdot da + b \cdot db \equiv 0. \quad (*)$$

Durch Anwendung von J auf die Formel für \tilde{E} erhalten wir auch $J\tilde{E} = -b \cdot E + a \cdot JE$. Daher folgt nach dem Satz aus Abschnitt 7.6 für die Zusammenhangsform $\tilde{\zeta}$ der Konfiguration (G, g, \tilde{E})

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}_p(v) &= g_p(\nabla_{(p,v)}\tilde{E}, J\tilde{E}_p) \\ &= g_p(\nabla_{(p,v)}(a \cdot E + b \cdot JE), -b(p) \cdot E_p + a(p) \cdot JE_p) \\ &= g_p(d_p a(v) \cdot E_p + a(p) \cdot \nabla_{(p,v)}E + d_p b(v) \cdot JE_p + b(p) \cdot \nabla_{(p,v)}(JE), -b(p) \cdot E_p + a(p) \cdot JE_p) \\ &= g_p(d_p a(v) \cdot E_p + a(p) \cdot \zeta_p(v) \cdot JE_p + d_p b(v) \cdot JE_p - b(p) \cdot \zeta_p(v) \cdot E_p, -b(p) \cdot E_p + a(p) \cdot JE_p) \\ &= -d_p a(v) \cdot b(p) + a(p)^2 \cdot \zeta_p(v) + d_p b(v) \cdot a(p) + b(p)^2 \cdot \zeta_p(v) \\ &= a(p) \cdot d_p b(v) - b(p) \cdot d_p a(v) + \zeta_p(v),\end{aligned}$$

und deswegen

$$\begin{aligned}\underline{d}\tilde{\zeta}_p(v, w) &= d_p(a \cdot db(v) - b \cdot da(v))(w) - d_p(a \cdot db(w) - b \cdot da(w))(v) + \underline{d}\zeta_p(v, w) \\ &= d_p a(w) \cdot d_p b(v) + a(p) \cdot d_p^2 b(v, w) - d_p b(w) \cdot d_p a(v) - b(p) \cdot d_p^2 a(v, w) \\ &\quad - d_p a(v) \cdot d_p b(w) - a(p) \cdot d_p^2 b(w, v) + d_p b(v) \cdot d_p a(w) + b(p) \cdot d_p^2 a(w, v) + \underline{d}\zeta_p(v, w) \\ &= 2(d_p b(v) \cdot d_p a(w) - d_p b(w) \cdot d_p a(v)) + \underline{d}\zeta_p(v, w),\end{aligned}$$

also $\underline{d}\tilde{\zeta} = 2db \wedge da + \underline{d}\zeta$. Wegen $(*)$ sind $d_p a$ und $d_p b$ jeweils linear abhängig. Daher ist $db \wedge da \equiv 0$ und somit $\underline{d}\tilde{\zeta} = \underline{d}\zeta$. \square

Wir wollen nun die Krümmung des Riemannschen Gebiets (G, g) für den Spezialfall bestimmen, dass g der Maßtensor einer C^{r+1} -Flächenparametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ ist. Als Vorbereitung führen wir eine Betrachtung durch, die der in Abschnitt 4.1 beschriebenen Herleitung der Frenet-Gleichungen für eine Kurve im \mathbb{E}^3 sehr ähnelt:

Aussage 2. Es seien $E_1, E_2, E_3 : G \rightarrow \mathbb{E}_L^3$ drei C^r -Funktionen derart, dass für jedes $p \in G$ $(E_1(p), E_2(p), E_3(p))$ eine ONB von \mathbb{E}_L^3 ist. Dann existieren C^{r-1} -Differentialformen ω_{ik} vom

Grad 1 auf G (mit $i, k \in \{1, 2, 3\}$), so dass

$$\forall p \in G, v \in \mathbb{R}^2 : d_p E_i(v) = \sum_{k=1}^3 \omega_{ik,p}(v) \cdot E_k(p) \quad \text{für } i \in \{1, 2, 3\}$$

gilt. Diese Differentialformen besitzen die Symmetrien

$$\omega_{ik} = -\omega_{ki} \quad \text{für } i, k \in \{1, 2, 3\}, \quad \text{also insbesondere } \omega_{ii} = 0$$

und erfüllen die *Strukturgleichungen*

$$\underline{d}\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}, \quad \underline{d}\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23} \quad \text{und} \quad \underline{d}\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13}.$$

Beweis. Die Existenz der ω_{ik} ist klar. Für $i, k \in \{1, 2, 3\}$ gilt $\langle E_i, E_k \rangle \equiv \delta_{ik}$ und somit

$$0 = d_p(\langle E_i, E_k \rangle)(v) = \langle d_p E_i(v), E_k(p) \rangle + \langle E_i(p), d_p E_k(v) \rangle = \omega_{ik,p}(v) + \omega_{ki,p}(v).$$

Hieraus folgen die Symmetriegleichungen.

Zum Beweis der Strukturgleichungen: Für $i \in \{1, 2, 3\}$ und $u, v \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} d_p^2 E_i(u, v) &= d_p(q \mapsto d_q E_i(u))(v) \\ &= d_p \left(\sum_{k=1}^3 \omega_{ik}(u) \cdot E_k \right) (v) \\ &= \sum_{k=1}^3 (d_p(\omega_{ik}(u))(v) \cdot E_k(p) + \omega_{ik,p}(u) \cdot d_p E_k(v)) \\ &= \sum_{k=1}^3 (d_p(\omega_{ik}(u))(v) \cdot E_k(p) + \omega_{ik,p}(u) \cdot \sum_{j=1}^3 \omega_{kj,p}(v) E_j(p)) \\ &= \sum_{k=1}^3 \left(d_p(\omega_{ik}(u))(v) + \sum_{j=1}^3 \omega_{ij,p}(u) \omega_{jk,p}(v) \right) \cdot E_k(p) \\ &= \sum_{k=1}^3 \left((d_p \omega_{ik})(u)(v) + \sum_{j=1}^3 \omega_{ij,p}(u) \omega_{jk,p}(v) \right) \cdot E_k(p) \end{aligned}$$

und daher wegen der Symmetrie des zweiten Differentials $d_p^2 E_i$

$$\begin{aligned} 0 &= d_p^2 E_i(u, v) - d_p^2 E_i(v, u) \\ &= \sum_{k=1}^3 \left((d_p \omega_{ik}(v))(u) - (d_p \omega_{ik}(u))(v) + \sum_{j=1}^3 (\omega_{ij,p}(u) \omega_{jk,p}(v) - \omega_{ij,p}(v) \omega_{jk,p}(u)) \right) \cdot E_k(p) \\ &= \sum_{k=1}^3 \left(-\underline{d}_p \omega_{ik}(u, v) + \sum_{j=1}^3 (\omega_{ij} \wedge \omega_{jk})_p(u, v) \right) \cdot E_k(p). \end{aligned}$$

Da die $E_k(p)$ (mit $k \in \{1, 2, 3\}$) linear unabhängig sind, ergibt sich hieraus

$$\forall i, k \in \{1, 2, 3\} : \underline{d}\omega_{ik} = \sum_{j=1}^3 \omega_{ij} \wedge \omega_{jk}$$

und somit für $i = 1, k = 2$ wegen $\omega_{jj} = 0$

$$\underline{d}\omega_{12} = \sum_{j=1}^3 \omega_{1j} \wedge \omega_{j2} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}$$

und analog die anderen beiden Strukturgleichungen. □

Anwendung. Wir benutzen die vorhergehende Aussage 2 nun, um eine C^{r+1} -Flächenparametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ zu untersuchen. Hierfür sei g der Maßtensor von F , $E \in \mathfrak{X}^s(G)$ ein Einheitsvektorfeld bezüglich g , und N_F das Einheitsnormalenfeld von F . Wir wenden Aussage 2 auf das positiv orientierte ONB-Feld (E_1, E_2, E_3) längs F an, das durch

$$E_1 := F_*E : p \mapsto d_p F(E_p), \quad E_2 := F_*(JE) \quad \text{und} \quad E_3 := N_F$$

definiert ist. In diesem Fall haben die Differentialformen ω_{ik} aus Aussage 2 die folgende geometrische Bedeutung:

- (a) ω_{12} ist mit der Zusammenhangsform ζ der Konfiguration (G, g, E) identisch, also eine Größe der *inneren Geometrie* von F .
- (b) ω_{13} und ω_{23} beschreiben den Formoperator A von F , und werden umgekehrt durch diesen bestimmt; sie sind in diesem Sinne Größen der *äußeren Geometrie* von F . Genauer gesagt, es gilt:

$$A = \omega_{13} \otimes E + \omega_{23} \otimes JE,$$

das soll per Definition bedeuten:

$$\forall p \in G, v \in \mathbb{R}^2 : A_p v = \omega_{13,p}(v) \cdot E_p + \omega_{23,p}(v) \cdot JE_p. \quad (\dagger)$$

Beweis. Für $p \in G$ und $v \in \mathbb{R}^2$ gilt einerseits nach Aussage 2

$$d_p E_1(v) = \omega_{12,p}(v) E_2(p) + \omega_{13,p}(v) E_3(p),$$

andererseits gilt nach der Gaußschen Ableitungsgleichung (Abschnitt 7.3) und dem Satz in Abschnitt 7.6

$$\begin{aligned} d_p E_1(v) &= d_p(F_*E)(v) \\ &= d_p F(\nabla_{(p,v)} E) + h_p(v, E_p) \cdot N_F(p) \\ &= \zeta_p(v) \cdot JE_p + g_p(A_p v, E_p) \cdot N_F(p) \\ &= \zeta_p(v) \cdot E_2(p) + g_p(A_p v, E_p) \cdot E_3(p). \end{aligned}$$

Durch „Koeffizientenvergleich“ in diesen beiden Gleichungen ergibt sich einerseits

$$\omega_{12,p}(v) = \zeta_p(v),$$

andererseits

$$\omega_{13,p}(v) = g_p(A_p v, E_p).$$

Durch eine analoge Rechnung für $d_p E_2(v)$ erhält man auch

$$\omega_{23,p}(v) = g_p(A_p v, JE_p)$$

und damit die behauptete Gleichung (\dagger) . □

Theorem. Die Krümmungsgleichung von Gauß. Sei g der Maßtensor einer C^3 -Parametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}$ und K_F ihre Gaußsche Krümmung. Weiter sei ω die Volumenform des Riemannschen Gebiets (G, g) . Dann gilt für die Krümmungsform $\underline{d}\zeta$ von (G, g)

$$\underline{d}\zeta = -K_F \cdot \omega.$$

Mit anderen Worten: Die Krümmung des Riemannschen Gebiets (G, g) (siehe Aussage 1) stimmt mit der Gaußschen Krümmung von F überein.

Als Folge dieses Theorems sehen wir:

Die Gaußsche Krümmung einer Flächenparametrisierung ist eine Größe ihrer inneren Geometrie.

Beweis. Nach Aussage 1 gilt für die Krümmung K des Riemannschen Gebiets (G, g) : $\underline{d}\zeta = -K \cdot \omega$. Verwenden wir nun die Aussage 2 in der in der vorhergehenden Anwendung beschriebenen Situation, so gilt $\zeta = \omega_{12}$ und deshalb $\underline{d}\zeta = \omega_{13} \wedge \omega_{32}$ und somit

$$\begin{aligned} K &= -\underline{d}\zeta(E, JE) = -(\omega_{13} \wedge \omega_{32})(E, JE) \\ &= -\omega_{13}(E) \omega_{32}(JE) + \omega_{13}(JE) \omega_{32}(E) \\ &= g(AE, E) g(AJE, JE) - g(AJE, E) g(AE, JE) \\ &\stackrel{(\diamond)}{=} \det(A) = K_F, \end{aligned}$$

wobei das mit (\diamond) gekennzeichnete Gleichheitszeichen aus der Tatsache folgt, dass (E, JE) ein positiv orientiertes ONB-Feld auf G ist. \square

Aufgabe. Gaußsche Krümmung in orthogonalen und konformen Koordinaten. Es sei (G, g) ein 2-dimensionales Riemannsches C^2 -Gebiet.

- (a) Die Riemannsche Metrik g sei *orthogonal*, das soll heißen, dass es zwei C^2 -Funktionen $f, h : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall p \in G, u, v \in \mathbb{R}^2 : g_p(u, v) = f(p)^2 \cdot u_1 \cdot v_1 + h(p)^2 \cdot u_2 \cdot v_2$$

gibt. Dann zeige man:

$$E := (1/f) \cdot e_1$$

ist bezüglich g ein Einheitsvektorfeld auf G , die Zusammenhangsform ζ der Konfiguration (G, g, E) ist durch

$$\zeta = -\frac{f_y}{h} \cdot dx + \frac{h_x}{f} \cdot dy$$

gegeben, und die Krümmung K des Riemannschen Gebiets (G, g) ist durch

$$K = -\frac{\left(\frac{h_x}{f}\right)_x + \left(\frac{f_y}{h}\right)_y}{f \cdot h}$$

gegeben. Dabei bezeichnet der Index x bzw. y die partielle Ableitung nach x bzw. y .

- (b) Ist die Riemannsche Metrik g *konform*, das soll heißen, dass es eine C^2 -Funktion $\lambda : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit

$$g = \lambda^2 \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle$$

gibt, so hat das Riemannsche Gebiet (G, g) die Krümmung

$$K = -\frac{1}{\lambda^2} \cdot \Delta(\ln \circ \lambda).$$

Dabei bezeichnet Δ den *Laplace-Operator*, d.h. $\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

- (c) Man verwende (a), um erneut zu zeigen, dass die Gaußsche Krümmung der Rotationsflächenparametrisierung zur nach der Bogenlänge parametrisierten Profilkurve $\alpha = (r, b)$ gleich $K = -(r''/r) \circ x_1$ ist.
- (d) Man verwende (b), um zu zeigen, dass der hyperbolische Raum \mathbb{H} (siehe Beispiel 2 in Abschnitt 7.4 und das Beispiel in Abschnitt 7.6) die konstante Krümmung -1 besitzt.

Mitteilung. Der Vollständigkeit halber gebe ich auch an, wie man die Krümmung eines Riemannschen Gebiets (G, g) mittels seiner Christoffelsymbole Γ_{ik}^j berechnen kann:

$$g_{11} \cdot K = \frac{\partial}{\partial x_2} \Gamma_{11}^2 - \frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{21}^2 \cdot (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2) + \Gamma_{11}^2 \cdot (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{21}^1) .$$

Theorema egregium. (Gauß 1827) Es seien (G, g) und (\tilde{G}, \tilde{g}) zwei 2-dimensionale Riemannsche Gebiete mit der Krümmung K bzw. \tilde{K} . Dann gilt für jede C^3 -Isometrie $\varphi : (G, g) \rightarrow (\tilde{G}, \tilde{g})$

$$K = \tilde{K} \circ \varphi .$$

Beweis. Wir wissen $\omega = \varphi^* \tilde{\omega}$ und $\zeta = \varphi^* \tilde{\zeta}$. Hieraus ergibt sich

$$-K \cdot \omega = \underline{d}\zeta = \underline{d}(\varphi^* \tilde{\zeta}) = \varphi^*(\underline{d}\tilde{\zeta}) = \varphi^*(-\tilde{K} \cdot \tilde{\omega}) = -(\tilde{K} \circ \varphi) \cdot \varphi^* \tilde{\omega} = -(\tilde{K} \circ \varphi) \cdot \omega$$

und damit die Behauptung. \square

Das Theorema egregium ist das zentrale Ergebnis der berühmten Arbeit *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (Allgemeine Untersuchung von gekrümmten Flächen) von GAUSS aus dem Jahre 1827. 12 Jahre später hat F. A. MINDING eine gewisse Umkehrung dieses Satzes gefunden.

Satz von Minding. Sind (G, g) und (\tilde{G}, \tilde{g}) zwei 2-dimensionale Riemannsche C^r -Gebiete mit $r \geq 2$, und haben diese beiden Riemannschen Gebiete dieselbe *konstante* Krümmung, so existiert zu jedem Punktepaar $(p_0, \tilde{p}_0) \in G \times \tilde{G}$ eine C^{r-1} -Isometrie φ von einer Umgebung U von p_0 in G auf eine Umgebung \tilde{U} von \tilde{p}_0 in \tilde{G} mit $\varphi(p_0) = \tilde{p}_0$.

Der Satz von Minding zeigt unter anderem, dass jede Fläche mit verschwindender Gaußscher Krümmung lokal isometrisch zur Ebene ist. Er zeigt ebenfalls, dass die Pseudosphäre (siehe Aufgabe 2 in Abschnitt 6.6) *lokal* isometrisch zum hyperbolischen Raum \mathbb{H} (siehe Aufgabe (d) in diesem Abschnitt) ist. Jedoch kann man zeigen, dass der hyperbolische Raum *global* nicht durch eine Flächenparametrisierung realisiert werden kann.

7.8 Der Fundamentalsatz der Flächentheorie

Die Codazzi-Gleichung. Es sei A der Formoperator einer singularitätenfreien Flächenparametrisierung $F : G \rightarrow \mathbb{E}$ einer singularitätenfreien C^r -Fläche mit $r \geq 3$ und $X, Y : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ zwei C^1 -Vektorfelder auf G . Bezeichnen wir mit AX und $\nabla_X Y$ die Vektorfelder

$$AX : p \mapsto A_p X_p \quad \text{bzw.} \quad \nabla_X Y : p \mapsto \nabla_{(p, X_p)} Y ,$$

so gilt

$$\nabla_X (AY) - A(\nabla_X Y) = \nabla_Y (AX) - A(\nabla_Y X) .$$

In der Literatur erscheint diese Symmetrie-Beziehung des Formoperators auch unter dem Namen Gleichung von Mainardi-Codazzi; sie wurde unabhängig voneinander 1856 von MAINARDI und 1860 von CODAZZI gefunden. – Den folgenden Satz publizierte 1867 O. BONNET.

Der Fundamentalsatz der Flächentheorie. Es sei G ein Gebiet von \mathbb{R}^2 . Dann gilt:

- (a) Sind $F, \tilde{F} : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ Parametrisierungen zweier singularitätenfreier C^3 -Flächen und sind die Maßtensoren und Formoperatoren dieser beiden Parametrisierungen gleich, so sind die beiden Flächen zueinander kongruent, d.h.: Es existiert eine Isometrie Φ des \mathbb{E}^3 , so dass $\tilde{F} = \Phi \circ F$ ist. [Siehe Abschnitt 6.3.]
- (b) Es sei $g : G \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ eine Riemannsche C^2 -Metrik und $A : G \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^2)$ ein C^1 -Tensorfeld vom Typ (1,1), welches mit g folgendermaßen verbunden ist:
 - (i) für jedes p ist A_p bezüglich g_p selbstadjungiert,
 - (ii) $\det(A)$ ist die Krümmung des Riemannschen Gebietes (G, g) ,
 - (iii) A erfüllt die Codazzi-Gleichung bezüglich der Levi-Civita-Ableitung von (G, g) .

Ist G einfach zusammenhängend, so existiert eine Parametrisierung einer singularitätenfreien C^3 -Fläche, deren Maßtensor und Formoperator gerade g bzw. A sind.

Diesen Satz sollte man mit dem Hauptsatz der ebenen Kurventheorie (siehe Abschnitt 3.2) vergleichen. Dem Maßtensor g und dem Formoperator A entsprechen in der ebenen Kurventheorie die Bahngeschwindigkeit v_α und die orientierte Krümmung κ_α . Dass in der Flächentheorie für die Existenzaussage (b) zusätzliche Bedingungen gefordert werden müssen, sollte nicht wundern. Zur Bestimmung der fraglichen Parametrisierung muss nämlich eine partielle Differentialgleichung gelöst werden; und bei partiellen Differentialgleichungen existieren nur dann Lösungen, wenn die Gleichungen eine „Integrabilitätsbedingung“ erfüllen, in der vorliegenden Situation gerade die Bedingungen (ii) – (iii).

Aufgabe. Es sei $F : G \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine singularitätenfreie C^3 -Flächenparametrisierung mit Formoperator A . Hierzu seien die 1-Formen ω_{ik} wie in der „Anwendung“ in Abschnitt 7.7 definiert. Aus dem Beweis der Krümmungsgleichung von GAUSS (siehe Abschnitt 7.7) weiß man, dass $\det(A) \cdot \omega = -\omega_{13} \wedge \omega_{32}$ ist. Man zeige nun, dass die Codazzi-Gleichung zu den Gleichungen

$$\underline{d}\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23} \quad \text{und} \quad \underline{d}\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13} \quad (*)$$

äquivalent ist. (Man beachte, dass $\omega_{12} = -\omega_{21}$ die Zusammenhangsform der Konfiguration (G, g, E) ist.)

Bemerkung. Teil (b) des Fundamentalsatzes der Flächentheorie wirft unmittelbar die Frage auf, ob jedes einfach zusammenhängende, 2-dimensionale Riemannsche Gebiet (G, g) von einer Flächenparametrisierung erzeugt werden kann. Diese Frage wurde erstmals von L. SCHLAEFLI um 1872 formuliert. In zwei Arbeiten mit dem gleichlautenden Titel „*Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien*“ (vgl. Annales Soc. Pol. Math. **5** bzw. **6**, 1926 bzw. 1927) haben M. JANET und E. CARTAN mit unterschiedlichen Methoden eine Antwort gegeben: Sie finden, dass das Problem *lokal* eine Lösung besitzt, allerdings unter der sehr starken Voraussetzung, dass die Riemannsche Metrik reell-analytisch (d.h. lokal in Potenzreihen entwickelbar) ist. Mit der letzten Aufgabe haben wir Cartans Beweismethode eingeleitet. Wie hat man danach zu verfahren? Bezeichnen ω und K die Volumenform bzw. Krümmung von (G, g) , so hat man Differentialformen ω_{13} und ω_{23} zu suchen, die obige Gleichungen $(*)$ und $K \cdot \omega =$

$-\omega_{13} \wedge \omega_{32}$ erfüllen. Wenn das möglich ist, so kann man mithilfe eines Einheitsvektorfeldes E des Riemannschen Gebietes (G, g) den Operator $A := \omega_{13} \otimes E + \omega_{23} \otimes JE$ definieren (vgl. das „Anwendung“ aus 7.7); dieser erfüllt dann nach obiger Aufgabe die Voraussetzungen des Teiles (b) des Fundamentalsatzes der Flächentheorie, weswegen also das Riemannsche Gebiet von einer Flächenparametrisierung erzeugt wird.

Im Jahr 1950 konnten PH. HARTMAN/A. WINTNER in der Arbeit *“On the embedding problem in differential geometry”* (Amer. J. Math. **72**, 1950) die lokale Lösbarkeit des Problems für Riemannsche C^3 -Metriken beweisen, allerdings unter der Zusatzvoraussetzung, dass $K(p) \neq 0$ ist oder dass K in einer Umgebung von p identisch verschwindet. (Der letzte Teil wird bereits durch den Satz von Minding abgedeckt.) Tatsächlich sind die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen von Hartman/Wintner noch etwas schwächer als C^3 .