Analysis III

Martin Schmidt
Volker Eing

2. Übung

10. September 2018

(Abgabe: A5, C, Eingang Ost, Postfach 46236, Montag, 17. September 2018 bis 16 Uhr)

1. Quadratur des Kreises.

Im Folgenden (betreffend der Gesamtheit aller Übungszettel) sind Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ immer mit der Teilraumtopologie induziert von der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$ versehen, falls nichts anderes gesagt.

(a) Sei $W = [-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$ ein Quadrat mit Mittelpunkt $0 \in \mathbb{R}^2$.
Zeige, dass W homöomorph zur Einheitsscheibe $D := \{x \in \mathbb{R}^2 | \; ||x||^2 \leq 1\}$ ist.

(7 Punkte)

(b) Gebe ein Beispiel für eine bijektive glatte Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die kein Diffeomorphismus ist.

(3 Punkte)

2. Vertragen sie sich?

Sei X ein topologischer Raum.

(a) Für Karten $(\varphi, U), (\psi, \tilde{U})$ sei folgende Relation erklärt:

$$(\varphi, U) \simeq (\psi, \tilde{U}) :\Longleftrightarrow (\varphi, U) \text{ ist verträglich mit } (\psi, \tilde{U}).$$

Zeige oder widerlege: Die Relation '$\simeq$' ist eine Äquivalenzrelation.

(6 Punkte)

(b) Die Relation aus (a) sei wie folgt modifiziert: Für Karten $(\varphi, U), (\psi, U)$ mit demselben Definitionsbereich U sei folgende Relation erklärt:

$$(\varphi, U) \simeq (\psi, U) :\Longleftrightarrow (\varphi, U) \text{ ist verträglich mit } (\psi, U).$$

Zeige oder widerlege: Die Relation '$\simeq$' ist eine Äquivalenzrelation.

(7 Punkte)

3. Eine weitere Äquivalenz.

Seien X, Y zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Zeige, X und Y sind genau dann diffeomorph, wenn es eine glatte Abbildung $f : X \to Y$ gibt, die bijektiv ist und deren Umkehrabbildung auch glatt ist.

(7 Punkte)

4. Ein alter Hut.

Wir betrachten den Zylinder

$$Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3,$$

sowie für jedes $\theta \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi_\theta : \mathbb{R} \times (\theta, \theta + 2\pi) &\to Z \\ (t, s) &\mapsto (t, \cos(s), \sin(s)). \end{aligned}$$

(a) Begründe *kurz*, dass Z ein metrisierbarer, separabler, topologischer Raum ist.

(4 Punkte)

(b) Sei $\theta \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Abbildung ψ_θ ein Homöomorphismus *in* Z ist. Folgere, dass die Umkehrabbildung

$$\phi_\theta := \psi_\theta^{-1} : \psi_\theta[\mathbb{R} \times (\theta, \theta + 2\pi)] \to \mathbb{R}^2$$

eine Karte für Z ist. *(8 Punkte)*

(c) Zeige, dass

$$\mathcal{A} := \{\phi_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

ein Atlas für Z ist und folgere, dass $(Z, \mathcal{A})$ eine 2-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

(8 Punkte)