Musterlösung zum Übungsblatt 6 des Wiederholungskurses Analysis II

Aufgabe. Zeige, dass die Gleichung

$$\cos(x^2) + \cos(y^2) + (2x - 1)(y - 2) = 3$$

in einer Umgebung des Punktes $(0, 0)$ lokal nach y auflösbar ist. Berechne auch die Tangente, deren Graph den Graphen $(x, y(x))$ im Punkt $(0, 0)$ berührt.

Lösung. Wir definieren die Abbildung

$$f(x, y) = \cos(x^2) + \cos(y^2) + (2x - 1)(y - 2) - 3,$$

dann ist also die Gleichung $f(x, y) = 0$ zu lösen. Die Jacobimatrix ist

$$J_f(x, y) = (-2x \sin(x^2) + 2(y - 2) \quad -2y \cos(y^2) + 2x - 1).$$

Der y-Teil der Jacobimatrix ist bei $(x, y) = (0, 0)$ gegeben durch

$$-2 \cdot 0 \cos(0^2) + 2 \cdot 0 - 1 = -1 \neq 0.$$

Wegen des Satzes der impliziten Funktion existieren daher eine Umgebung U von 0, eine Umgebung V von 0 sowie eine differenzierbare Abbildung $y\colon U \to V$, so dass $f(x, y(x)) = 0$ für alle $x \in U$. Leiten wir diese Gleichung ab, so erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))y'(x) = 0$$

und damit

$$y'(0) = -\frac{-4}{-1} = -4.$$

Die gesuchte Tangente ist also

$$T(x) = y(0) + y'(0)(x - 0) = -4x.$$