Musterlösung zum Übungsblatt 1 des Wiederholungskurses Analysis II

Allgemeine Hinweise. Der letzte Teil der zweiten Aufgabe ist so zu verstehen, dass ein $w \in \mathbb{R}^4$ zu finden ist, so dass

$$d(v_1, w) + d(v_2, w) = \inf\{d(v_1, w') + d(v_2, w') : w' \in \mathbb{R}^4\}.$$

Diese Art, diese Aufgabe zu formulieren ist Standard; ihr solltet daher in der Lage sein, zu erkennen, was hier von euch verlangt wird.

Aufgabe 1. Überprüfe, ob die folgenden Abbildungen Metriken sind:

$$\begin{aligned} d_1 \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}, \\ (x, y) &\mapsto \max\{|x_1 - y_1|, 2|x_2 - y_2|\}, \\ d_2 \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{R}, \\ (n, m) &\mapsto 2^{-\operatorname{ord}_2(n-m)}. \end{aligned}$$

Die Abbildung $\operatorname{ord}_2(r)$ gibt an, wie oft r durch 2 teilbar ist. Dabei wird $2^{-\infty} = 0$ gesetzt.

Aufgabe 2. Definiere

$$v_1 := (-6, 2, 1, 7) \in \mathbb{R}^4$$

und $v_2 := -v_1$. Berechne den Abstand $d(v_1, v_2)$ im $\mathbb{R}^4$ bezüglich der 1-, 2- und der ∞-Norm. Finde zuletzt einen Vektor $w \in \mathbb{R}^4$, so dass die Summe der Abstände

$$S := d(v_1, w) + d(v_2, w)$$

minimal wird (mit Beweis!).

Lösung zu Aufgabe 1. Die Abbildung d_1 erfüllt die Positivitätseigenschaft wegen der Positivität des Betrages $|\cdot|$.

Ist $x = y$, dann gilt wegen der Definitheit des Betrages $d_1(x, y) = \max\{0, 2 \cdot 0\} = 0$. Ist umgekehrt $d(x, y) = 0$, dann folgt $|x_1 - y_1| \leq 0$ und $2|x_2 - y_2| \leq 0$. Wegen der positiven Definitheit des Betrages folgt $x_1 - y_1 = 0$ und $2(x_2 - y_2) = 0$, also $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$.

Symmetrie folgt aus $|x_1 - y_1| = |y_1 - x_1|$ und $2|x_2 - y_2| = 2|y_2 - x_2|$.

Zum Nachweis der Dreiecksungleichung berechnen wir

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= \max\{|x_1 - y_1|, 2|x_2 - y_2|\} \\ &= \max\{|x_1 - z_1 + z_1 - y_1|, 2|x_2 - z_2 + z_2 - y_2|\} \end{aligned}$$

Nun wenden wir die Dreiecksungleichung für die Betragsfunktion auf die beiden Argumente von max an. Da wir beide Argumente vergrößern, können wir aufgrund der Definition von max die Ungleichung herausziehen und erhalten:

$$\leq \max\{|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|, 2|x_2 - z_2| + 2|z_2 - y_2|\}$$

Das Maximum über die einzelnen, nicht-negativen Summanden genommen ist wegen der Monotonie der Addition jedenfalls größer oder gleich dem Maximum der Summe, d.h. wir erhalten:

$$\begin{aligned}&\leq \max\{|x_1 - z_1|, 2|x_2 - z_2|\} + \max\{|z_1 - y_1|, 2|z_2 - y_2|\}\\ &= d_1(x, z) + d_1(z, y).\end{aligned}$$

Also ist d_1 eine Metrik.

Die Abbildung d_2 erfüllt die Positivitätseigenschaft, da die Potenzierung von 2 stets eine positive Zahl ist.

Ist $n = m$, dann ist $m - n = 0$. Diese Zahl ist beliebig oft durch zwei teilbar, also ist $d_2(m, n) = 2^{-\infty} = 0$. Umgekehrt ist 0 die einzige ganze Zahl, die beliebig oft durch zwei teilbar ist, also impliziert $d_2(m, n) = 0$ die Gleichung $n - m = 0$ und damit $m = n$.

Da -1 nicht durch 2 teilbar ist, ist jede Zahl genauso oft durch zwei teilbar, wie ihr Negatives. Deswegen ist $\mathrm{ord}_2(n-m) = \mathrm{ord}_2(m-n)$ und damit $d_2(m, n) = d_2(n, m)$.

Zur Dreiecksungleichung: wir wollen zeigen, dass $d_2(n, m) \leq d_2(n, l)+d_2(l, m)$ für alle $n, m, l \in \mathbb{N}$. Aus den Teilbarkeitsgesetzen folgt, dass $\mathrm{ord}_2(n + m) \geq \min\{\mathrm{ord}_2(n), \mathrm{ord}_2(m)\}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}d_2(n, m) = 2^{-\mathrm{ord}_2(n-m)} &= 2^{-\mathrm{ord}_2(n-l+l-m)}\\ &\leq 2^{-\min\{\mathrm{ord}_2(n-l), \mathrm{ord}_2(l-m)\}} = \max\{d_2(n, l), d_2(l, m)\}.\end{aligned}$$

Das ist sogar noch besser als $d_2(n, l)+d_2(l, m)$! Also gilt die Dreiecksungleichung.

Damit folgt, dass auch d_2 eine Metrik ist.

Bemerkung. Ist K irgendein Körper mit einer Norm $|\cdot|\colon K \to \mathbb{R}$, die $|ab| = |a||b|$, $|1| = 1$ und $|1 + 1| > 1$ erfüllt, und in dem jede Cauchyfolge konvergiert, dann kann man zeigen (nicht trivial!), dass $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ gilt. In gewisser Weise sind also $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ die einzigen Körper, mit denen man gewöhnliche Analysis betreiben kann. Wenn man aber bereit ist, sich von der Eigenschaft $|1+1| > 1$ zu verabschieden, dann kann man mit einer Metrik ähnlich wie d_2 analysistaugliche so genannte p-adische Zahlkörper definieren, die etwas seltsame Eigenschaften haben, wegen der besseren Dreiecksungleichung sich aber gerade bei Informatikern bei der Implementation schnell konvergierender numerischer Algorithmen großer Beliebtheit erfreuen.

Lösung zu Aufgabe 2. Es gilt

$$v_1 - v_2 = v_1 - (-v_1) = 2v_1.$$

Also folgt

$$\begin{aligned}d_1(v_1, v_2) &= \|v_1 - v_2\|_1 = 2\|v_1\|_1 = 2(|-6| + |2| + |1| + |7|) = 32,\\ d_2(v_1, v_2) &= 2\|v_1\|_2 = 2\sqrt{|-6|^2 + |2|^2 + |1|^2 + |7|^2} = 2\sqrt{90} = 6\sqrt{10},\\ d_\infty(v_1, v_2) &= 2\|v_1\|_\infty = 2\max\{|-6|, |2|, |1|, |7|\} = 14.\end{aligned}$$

Zuletzt war nach einem minimierenden Element w von S gefragt. Es gibt viele Lösungen, und eine ist $w = 0$, weil nämlich 0 auf der Verbindungslinie von v_1 und v_2 liegt. Einen möglichen Beweis liefert die Rechnung

$$\begin{aligned} d(v_1, 0) + d(v_2, 0) &= d(v_1, 0) + d(0, v_2) \\ &= \|v_1 - 0\| + \|0 - v_2\| = 2\|v_1\| = \|v_1 - v_2\| = d(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Wegen der Dreiecksungleichung kann es kein w geben, so dass $d(v_1, w) + d(v_2, w) < d(v_1, v_2)$, also muss $d(v_1, v_2)$ der kleinste Wert, den S annehmen kann, sein.