Musterlösung zum Übungsblatt 9 des Wiederholungskurses Analysis II

Aufgabe. Sei

$$\begin{aligned} f\colon (0,1) &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}. \end{aligned}$$

Zeige: f ist lebesgueintegrabel.

Hinweis: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin(2x-1) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$.

Lösung. Aus dem Hinweis folgt mit dem Fundamentalsatz der Analysis, dass $\arcsin(2x-1)$ eine Stammfunktion von $1/\sqrt{x(1-x)}$ ist. Definiere nun eine Funktionenfolge (f_n) für $n \geq 2$ via

$$\begin{aligned} f_n\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x)\chi_{[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}]}(x), & \text{falls } x \in (0,1), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Da $f(x) \geq 0$ für alle $x \in (0,1)$ sind die Zahlenfolgen $(f_n(x))$ monoton steigend für alle x. Da f stetig ist, haben die f_n höchstens zwei Unstetigkeitsstellen, nämlich $1/n$ und $1-1/n$. Damit bilden die Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge. Also sind die f_n lebesgueintegrabel und es gilt

$$\int f_n \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \mathrm{d}x = \arcsin\left(1-\frac{2}{n}\right) - \arcsin\left(\frac{2}{n}-1\right).$$

Da der arcsin stetig ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Insbesondere sind also die Integrale der f_n beschränkt. Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt daher, dass f lebesgueintegrabel ist.