Musterlösung zum Übungsblatt 4 des Wiederholungskurses Analysis II

Aufgabe 1. Berechne Jacobi- und Hessematrix der Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}, \\ (x,y,z) &\mapsto xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Definiere

$$\begin{aligned} f\colon (\mathbb{R}^+)^3 &\to \mathbb{R}, \\ (x,y,z) &\mapsto (xy + xz + yz)\ln(xyz). \end{aligned}$$

Berechne das Taylorpolynom ersten Grades von f im Punkt $(1,1,1)$.

Lösung zu Aufgabe 1. Es gilt

$$J_f(x,y,z) = (yz + y + z + 1, xz + x + z + 1, xy + x + y + 1)$$

und

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z+1 & y+1 \\ z+1 & 0 & x+1 \\ y+1 & x+1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 2. Es ist $f(1,1,1) = 3\ln(1) = 0$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) &= (y+z)\ln(xyz) + (xy + xz + yz)\frac{yz}{xyz} \\ &= (y+z)\ln(xyz) + (xy + xz + yz)\frac{1}{x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) &= (x+z)\ln(xyz) + (xy + xz + yz)\frac{1}{y}, \\ \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) &= (x+y)\ln(xyz) + (xy + xz + yz)\frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Also ist

$$(T_{1,(1,1,1)}f)(x,y,z) = 3(x-1) + 3(y-1) + 3(z-1).$$