Musterlösung zum Übungsblatt 8 des Wiederholungskurses Analysis II

Aufgabe 1. Zeige: die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R} : \text{Es existiert ein } n \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \sqrt{n}x \in \mathbb{Q}\}$$

ist eine Nullmenge.

Aufgabe 2. Die Kreislinie

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$$

zerteilt das Quadrat $[-1, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ in einen äußeren Bereich A und einen inneren Bereich B. Berechne

$$\int_A y \cos(x) \mathrm{d}\mu, \qquad \int_B y \cos(x) \mathrm{d}\mu.$$

Lösung zu Aufgabe 1. Ist $\sqrt{n}x \in \mathbb{Q}$, dann existiert ein $q \in \mathbb{Q}$, so dass $\sqrt{n}x = q$, also $x = q/\sqrt{n}$. Also ist

$$M = \left\{ \frac{q}{\sqrt{n}} : q \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definiere nun für alle $n \in \mathbb{N}$

$$M_n = \left\{ \frac{q}{\sqrt{n}} : q \in \mathbb{Q} \right\},$$

dann ist

$$M \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n.$$

Definiere außerdem für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f_n \colon \mathbb{Q} &\to M_n \\ q &\mapsto \frac{q}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Offensichtlich sind die f_n bijektiv. Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar. Da die f_n bijektiv sind, sind auch die M_n abzählbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Also sind alle M_n Nullmengen. Da die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, folgt dass M eine Nullmenge ist.

Lösung zu Aufgabe 2. Der Integrand ist gegeben durch $f(x, y) = y \cos(x)$. Offenbar ist $f(x, -y) = -f(x, y)$. Also ist das Integral über die obere Hälfte von A bzw. B genau das Negative des Integrals über die untere Hälfte. Also sieht man schon so, dass beide Integrale verschwinden. Zur Übung rechnen wir trotzdem mal die oberen Hälften aus:

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{1} y\cos(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
=&\int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}y^2\cos(x)\right]_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=1} \mathrm{d}x \\
=&\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (\cos(x) - (1-x^2)\cos(x))\mathrm{d}x \\
=&\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\cos(x)\mathrm{d}x \\
=&\frac{1}{2}([x^2\sin(x)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2x\sin(x)\mathrm{d}x) \\
=&\frac{1}{2}(\sin(1) - \sin(-1) - [2x(-\cos(x))]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} 2(-\cos(x))\mathrm{d}x) \\
=&\sin(1) + \cos(1) - (-1)\cos(-1) - \int_{-1}^{1} \cos(x)\mathrm{d}x \\
=&\sin(1) + 2\cos(1) - [\sin(x)]_{-1}^{1} \\
=&\sin(1) + 2\cos(1) - \sin(1) + \sin(-1) \\
=&2\cos(1) - \sin(1).
\end{aligned}
$$

Für die innere Fläche haben wir:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} y\cos(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
=&\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}y^2\cos(x)\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\
=&\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\cos(x)\mathrm{d}x \\
=&\frac{1}{2}([(1-x^2)\sin(x)]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(-2x)\sin(x)\mathrm{d}x \\
=&\int_{-1}^{1} x\sin(x)\mathrm{d}x \\
=&[x(-\cos(x))]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(-\cos(x))\mathrm{d}x \\
=&-\cos(1)-((-1)(-\cos(-1)))+[\sin(x)]_{-1}^{1} \\
=&-\cos(1)-\cos(1)+\sin(1)-\sin(-1) \\
=&-2\cos(1)+2\sin(1).
\end{aligned}$$