Musterlösung zum Übungsblatt 7 des Wiederholungskurses Analysis II

Allgemeine Hinweise. Wegen der allgemeinen Verwirrung um Aufgabe 1 habe ich noch beispielhaft eine weitere Aufgabe zu Lagrangemultiplikatoren eingefügt. Beide Probleme sind mit der Lagrangemethode lösbar (das folgt u.a. aus dem Maximumprinzip), aber die Lösungen sind vom Prinzip her leicht unterschiedlich. Im Prinzip könnte man sogar behaupten, dass die Aufgabe 1 von der Rechnung her etwas leichter als durchschnittliche Lagrangeaufgaben sind. Von dieser leichten Andersartigkeit sollte man sich keinesfalls ins Bockshorn jagen lassen.

Aufgabe 1. Gesucht werden die lokalen Extrema der Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}, \\ (x,y) &\mapsto x^2 - y^2 \end{aligned}$$

auf der durch die Gleichung $x^2 + 2y^2 = 3$ definierten Ellipse.

Aufgabe 2. Gesucht werden die lokalen Extrema der Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}, \\ (x,y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

auf der durch die Gleichung $x^2 + 2y^2 = 3$ definierten Ellipse.

Aufgabe 3. Gesucht werden die lokalen Extrema der Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon M &\to \mathbb{R}, \\ (x,y) &\mapsto x^2 + y^2 + 2x + 1, \end{aligned}$$

mit

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x \pm 1)^2 + (y \pm 1)^2 \geq 1, \|(x,y)\|_\infty \leq 1\}.$$

(Dabei sollen die $\pm$ unkorreliert sein.)

Skizziere die Menge M in der (x,y)-Ebene und löse die Aufgabe durch Kombination von Kurvendiskussion und der Lagrangemethode. Bleiben noch Punkte übrig, die von Hand darauf untersucht werden müssen, ob sie Extrema sind?

Lösung zu Aufgabe 1. Wir haben eine Zwangsbedingung. Es gilt

$$\nabla(x^2 + 2y^2 - 3) = (2x, 4y).$$

Diese beiden Komponenten sind nur dann beide gleichzeitig nicht invertierbar, wenn $(x,y) = 0$. Dieser Punkt erfüllt jedoch die Zwangsbedingung nicht. Also können wir die Lagrangemethode anwenden. Für die Zwangsbedingung führen wir den Lagrangemultiplikator λ ein und definieren die beschreibende Abbildung

$$g(x,y,\lambda) := x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 - 3).$$

Wir erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} g(x,y,\lambda) &= 2x(1+\lambda) = 0,\\
\frac{\partial}{\partial y} g(x,y,\lambda) &= 2y(-1+2\lambda) = 0,\\
\frac{\partial}{\partial \lambda} g(x,y,\lambda) &= x^2+2y^2-3 = 0.
\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir $\lambda = -1$. Dies löst die zweite Gleichung für $y = 0$ und wir erhalten über die dritte Gleichung die kritischen Punkte $P_{1/2} := (\pm\sqrt{3}, 0)$. Aus der zweiten Gleichung erhalten wir $\lambda = 1/2$. Dies löst die erste Gleichung für $x = 0$ und wir erhalten über die dritte Gleichung die weiteren kritischen Punkte $P_{3/4} := (0, \pm\sqrt{3/2})$. Dies sind alle Lösungen. Nun gilt

$$\begin{aligned}
f(P_1) &= 3, & f(P_2) &= 3,\\
f(P_3) &= -\frac{3}{2}, & f(P_4) &= -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Da die gegebene Ellipse kompakt und f stetig ist, nimmt f auf der Ellipse ein Minimum und ein Maximum an. Also haben wir lokale Maxima bei P_1 und P_2 und lokale Minima bei P_3 und P_4.

Lösung zu Aufgabe 2. Wir haben eine Zwangsbedingung. Es gilt

$$\nabla(x^2+2y^2-3) = (2x, 4y).$$

Diese beiden Komponenten sind nur dann beide gleichzeitig nicht invertierbar, wenn $(x,y) = 0$. Dieser Punkt erfüllt jedoch die Zwangsbedingung nicht. Also können wir die Lagrangemethode anwenden. Für die Zwangsbedingung führen wir den Lagrangemultiplikator λ ein und definieren die beschreibende Abbildung

$$g(x,y,\lambda) := x + y + \lambda(x^2+2y^2-3).$$

Wir erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} g(x,y,\lambda) &= 1 + 2\lambda x = 0,\\
\frac{\partial}{\partial y} g(x,y,\lambda) &= 1 + 4\lambda y = 0,\\
\frac{\partial}{\partial \lambda} g(x,y,\lambda) &= x^2+2y^2-3 = 0.
\end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen ergibt sich

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \qquad y = -\frac{1}{4\lambda}.$$

Setzen wir dies in die Zwangsbedingung ein, so erhalten wir

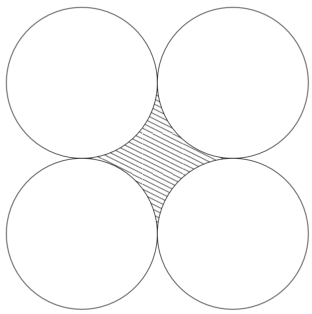
$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{16\lambda^2} - 3 = 0 & \qquad \Longrightarrow\\
4 + 1 = 3\cdot 16\lambda^2 & \qquad \Longrightarrow\\
\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{5}{48}} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{3}}. &
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die kritischen Punkte

$$P_{1/2} = \left(\pm 2\sqrt{\frac{3}{5}}, \pm\sqrt{\frac{3}{5}} \right).$$

Da die gegebene Ellipse kompakt und f stetig ist, nimmt f auf der Ellipse ein Minimum und ein Maximum an. Also haben wir ein lokales Maximum bei P_1 und ein lokales Minimum bei P_2.

Lösung zu Aufgabe 3.



Wir suchen zunächst nach Extrema im Inneren der Menge M (schraffierte Fläche). Dieses ist gegeben durch

$$\mathring{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \pm 1)^2 + (y \pm 1)^2 > 1, \|(x, y)\|_\infty < 1\}.$$

Nun gilt

$$\nabla f(x, y) = (2x + 2, 2y).$$

Damit ergibt sich $P := (-1, 0)$ als kritischer Punkt. Die zugehörige Hessematrix ist

$$H(-1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist P ein lokales Minimum. Nun ist aber $P \notin \mathring{M}$. Aber es ist $P \in M$, und da sich f genausogut auf ganz $\mathbb{R}^2$ definieren ließe, ist P erst recht ein lokales Minimum von M. In $\mathring{M}$ gibt es keine kritischen Punkte, also auch keine Extrema. Nun betrachten wir den Rand ∂M. Wir können die Zwangsbedingungen (durchgezogene Kreislinien) beschreiben als

$$\begin{aligned} &(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1, \qquad && (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1, \\ &(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1, \qquad && (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1. \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass diese vier Zwangsbedingungen *nicht* gleichzeitig gelten sollen, sondern immer nur mindestens eine. Wir definieren also *nicht* eine beschreibende Abbildung mit vier Lagrangemultiplikatoren, sondern vier beschreibende Abbildungen mit je einem Lagrangemultiplikator. Die Ableitungen der Zwangsbedingungen sind

$$\nabla((x \pm 1)^2 + (y \pm 1)^2 - 1) = (2(x \pm 1), 2(y \pm 1)).$$

Die entsprechenden kritischen Punkte $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$ erfüllen aber keine der Zwangsbedingungen. Also können wir die Lagrangemethode zunächst anwenden. Die beschreibenden Abbildungen lauten

$$g_{1/2/3/4}(x, y, \lambda) := x^2 + y^2 + 2x + 1 + \lambda((x \pm 1)^2 + (y \pm 1)^2 - 1),$$

was zu folgenden Gleichungssystemen führt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} g_{1/2/3/4}(x, y, \lambda) &= 2(x + 1) + 2\lambda(x \pm 1) = 0, \\
\frac{\partial}{\partial y} g_{1/2/3/4}(x, y, \lambda) &= 2y + 2\lambda(y \pm 1) = 0, \\
\frac{\partial}{\partial \lambda} g_{1/2/3/4}(x, y, \lambda) &= (x \pm 1)^2 + (y \pm 1)^2 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Zunächst erhalten wir aus der ersten Gleichung für die $(x = -1)$-Zwangsbedingungen die Lösung $x = -1$ unabhängig von λ, was für diese Zwangsbedingungen mit der dritten Gleichung die Lösung $y = 0$ liefert. Also haben wir einen kritischen Punkt bei $(-1, 0)$, den wir oben bereits als Minimum identifiziert hatten. Ansonsten erhalten wir die Gleichungen

$$x = -\frac{1 \pm \lambda}{1 + \lambda}, \qquad y = -\frac{\pm\lambda}{1 + \lambda}.$$

Nun gilt

$$-\frac{1 \pm \lambda}{1 + \lambda} = -\frac{1 \mp 1}{1 + \lambda}, \qquad -\frac{\pm\lambda}{1 + \lambda} \pm 1 = \frac{\pm 1}{1 + \lambda},$$

also haben wir mit der dritten Gleichung

$$\begin{aligned}
\frac{2 \mp 2}{(1 + \lambda)^2} + \frac{1}{(1 + \lambda)^2} - 1 = 0 & \qquad \Longrightarrow \\
(1 + \lambda)^2 = 3 \mp 2 & \qquad \Longrightarrow \\
|1 + \lambda| = \sqrt{3 \mp 2}. &
\end{aligned}$$

Dabei ist $\mp$ bezüglich der x-Koordinate zu verstehen. Damit erhalten wir die Lösungen

$$\lambda_1 = \sqrt{3 \mp 2} - 1, \qquad \lambda_2 = -\sqrt{3 \mp 2} - 1.$$

Eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{1 \pm \sqrt{3 \mp 2} \mp 1}{\sqrt{3 \mp 2}}, & y_1 &= -\frac{\pm\sqrt{3 \mp 2} \mp 1}{\sqrt{3 \mp 2}} \\
x_2 &= \frac{1 \mp \sqrt{3 \mp 2} \mp 1}{\sqrt{3 \mp 2}}, & y_2 &= \frac{\mp\sqrt{3 \mp 2} \mp 1}{\sqrt{3 \mp 2}}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die weiteren kritischen Punkte

$$(-1, 0), \quad \left(-\frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}, -\frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right), \quad (-1, -2), \quad \left(\frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}, \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right).$$

Den ersten haben wir bereits abgehandelt, die übrigen drei liegen außerhalb von M. Aus dem Maximumprinzip folgt, dass f auf M sein Maximum annimmt. Wo ist das Maximum? Des Rätsels Lösung: wir haben unsere Zwangsbedingungen bei den Punkten $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ gewaltsam abgeschnitten. Diese

Punkte müssen wir daher separat betrachten. $(-1,0)$ ist bereits erledigt. Bei den übrigen Punkten haben wir

$$f(1,0)=4, \quad f(0,1)=2, \quad f(0,-1)=2.$$

Aus dem Maximumprinzip folgt, dass f bei $(1,0)$ ein lokales Maximum hat. Bleiben noch die Punkte $(0,1)$ und $(0,-1)$ zu untersuchen. Wegen $f(x,y) = f(x,-y)$ genügt es, $(0,1)$ zu untersuchen. Nun ist aber

$$\left(\pm\frac{1}{n}, \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right) \in M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$f\left(\frac{1}{n}, \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right) = \frac{1}{n^2} + 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} + 1 = 2 + \frac{2}{n} > 2,$$
$$f\left(-\frac{1}{n}, \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right) = \frac{1}{n^2} + 1 - \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n} + 1 = 2 - \frac{2}{n} < 2,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist bei $(0,1)$ (und damit auch bei $(0,-1)$) kein lokales Extremum.