Musterlösung zum Übungsblatt 10 des Wiederholungskurses Analysis II

Aufgabe. Berechne

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}} \exp\left(-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}-x} - \sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}\right) \mathrm{d}\mu.$$

Hinweis: Substituiere

$$a = \frac{y}{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}},$$
$$b = \sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}.$$

Welche Werte können a und b annehmen? Löse nach x und y auf und benutze die Jacobimethode! Achte dabei auf Eindeutigkeit!
Spezieller Hinweis: Ganz Schlaue können das Integral noch auf andere Weise ganz schnell lösen!

Lösung. Der Integrand ist nicht definiert für $y = 0$ und $x \geq 0$, da dann $\sqrt{x^2+y^2} - x = 0$ ist. Da solche (x, y) jedoch eine Nullmenge in $\mathbb{R}^2$ bilden, ist das Integral a priori definiert. Offensichtlich kann b keine negativen Werte annehmen, a hingegen kann alle Werte annehmen, wie man für den Fall $y = 0$ sieht. Bleibt noch die Frage, ob die Definitionen von a und b eine bijektive Abbildung implizieren. Dazu prüfen wir, ob sich die Gleichungen eindeutig nach x und y auflösen lassen. Offenbar gilt stets $ab = y$. Für $b > 0$ gilt daher

$$\begin{aligned}
&b = \sqrt{\sqrt{x^2+(ab)^2}-x}\\
\Longleftrightarrow\, &b^2 = \sqrt{x^2+(ab)^2}-x\\
\Longrightarrow\, &(b^2-x)^2 = x^2+(ab)^2\\
\Longleftrightarrow\, &b^4+x^2-2b^2x = x^2+(ab)^2\\
\Longleftrightarrow\, &b^4-(ab)^2 = 2b^2x\\
\Longleftrightarrow\, &\frac{1}{2}(a^2-b^2) = x.
\end{aligned}$$

Bleibt noch der Fall $x > b^2$ zu untersuchen; dann ist $\sqrt{(b^2-x)^2} = x - b^2$. Wegen $b^2 > 0$ würde dann aber $x - \sqrt{x^2+(ab)^2} > 0$ folgen, im Widerspruch zu $(ab)^2 \geq 0$. Also kann dieser Fall nicht eintreten und wir haben eine bijektive Zuordnung. Es gilt nun

$$\frac{\partial x}{\partial a} = a, \qquad \frac{\partial x}{\partial b} = -b,$$
$$\frac{\partial y}{\partial a} = b, \qquad \frac{\partial y}{\partial b} = a.$$

Damit ist die Jacobideterminante $|J| = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2$. Wir man sieht ist

$$x^2+y^2 = \frac{1}{4}(a^2-b^2)+a^2b^2 = \frac{1}{4}a^4+\frac{1}{4}b^4-\frac{1}{2}a^2b^2+a^2b^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2)^2 = \frac{1}{4}|J|^2.$$

Also haben wir

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}} \exp\left(-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}-x} - \sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}\right) \mathrm{d}\mu$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{a}{\frac{1}{2}|J|} \exp(-a^2-b)|J| \mathrm{d}b\mathrm{d}a = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} 2ae^{-a^2}e^{-b}\mathrm{d}b\mathrm{d}a$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2ae^{-a^2}[-e^{-b}]_0^{\infty}\mathrm{d}a = \int_{-\infty}^{\infty} 2ae^{-a^2}\mathrm{d}a = \int_{-\infty}^{0} 2ae^{-a^2}\mathrm{d}a + \int_{0}^{\infty} 2ae^{-a^2}\mathrm{d}a$$

Substituiere $u = a^2$, dann ist $u' = 2a$.

$$= \int_{\infty}^{0} e^{-u}\mathrm{d}u + \int_{0}^{\infty} e^{-u}\mathrm{d}u = -\int_{0}^{\infty} e^{-u}\mathrm{d}u + \int_{0}^{\infty} e^{-u}\mathrm{d}u = 0.$$

Schnelle Lösung. Der Integrand ist ungerade in y. Also folgt aus dem Satz von Fubini, dass das Integral 0 ist. Der Satz von Fubini ist anwendbar, da für große x, y der Betrag des Integranden von der Exponentialfunktion unterdrückt wird. Für kleine x, y können wir einen kompakten Integrationsbereich wählen. Da der Integrand stetig ist bzw. für $x \geq 0$ und $y = 0$ stetig hebbar ist, ist das Integral des Absolutbetrages dort dann endlich.