Musterlösung zum Übungsblatt 3 des Wiederholungskurses Analysis II

Aufgabe 1. Definiere

$$\begin{aligned} A\colon C_{\mathbb{R}}([0,1]) &\to C_{\mathbb{R}}([0,1]),\\ f &\mapsto (x \mapsto x^2 f(x)). \end{aligned}$$

Zeige: A ist eine lineare Abbildung auf $C_{\mathbb{R}}([0,1])$. Ist A stetig bezüglich der Maximumsnorm?

Aufgabe 2. Sei V ein reeller Banachraum. Definiere

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{L}(V) &\to \mathcal{L}(V),\\ A &\mapsto A^2. \end{aligned}$$

Was sind Definitions- und Wertebereich von f'? Berechne f'!

Lösung zu Aufgabe 1. Seien $f, g \in C_{\mathbb{R}}([0,1])$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A(f+g) &= (x \mapsto x^2(f+g)(x)) = (x \mapsto x^2(f(x)+g(x))\\ &= (x \mapsto x^2 f(x) + x^2 g(x)) = (x \mapsto x^2 f(x)) + (x \mapsto x^2 g(x))\\ &= A(f) + A(g). \end{aligned}$$

Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$A(\lambda f) = (x \mapsto x^2(\lambda f)(x)) = (x \mapsto x^2 \lambda f(x)) = \lambda(x \mapsto x^2 f(x)) = \lambda A(f).$$

Also ist A eine lineare Abbildung. Sei nun $f \in C_{\mathbb{R}}([0,1])$ mit $\|f\|_\infty \leq 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|A(f)\|_\infty = \|x \mapsto x^2 f(x)\|_\infty &= \max_{x\in[0,1]} |x^2 f(x)|\\ &\leq \left(\max_{x\in[0,1]} |x^2|\right)\left(\max_{x\in[0,1]} |f(x)|\right) = \|f\|_\infty \leq 1. \end{aligned}$$

Also ist A beschränkt und daher stetig.

Lösung zu Aufgabe 2. Nach Definition ist

$$f'\colon \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(\mathcal{L}(V), \mathcal{L}(V)).$$

Bekanntlich ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A} A = \mathrm{id} = (B \mapsto B).$$

Jetzt können wir die Produktregel anwenden und erhalten

$$f'(A) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A} A^2 = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A} A\right) A + A\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A} A\right) = (B \mapsto BA + AB).$$