Musterlösung zum Übungsblatt 5 des Wiederholungskurses Analysis II

Aufgabe. Finde alle lokalen Minima und Maxima der Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}, \\ (x,y) &\mapsto -2x^3 + y^3 + 6x - 3y. \end{aligned}$$

Lösung. f ist ein Polynom und daher überall beliebig oft differenzierbar. Es ist

$$\nabla f(x,y) = (-6x^2 + 6, 3y^2 - 3).$$

Aus $\nabla f(x,y) = 0$ erhalten wir $x^2 = 1$ und $y^2 = 1$ und damit die kritischen Punkte

$$P_1 = (1,1), \quad P_2 = (-1,1), \quad P_3 = (1,-1), \quad P_4 = (-1,-1).$$

Wir berechnen nun die Hessematrix:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -12x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten damit

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad H_f(P_2) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$
$$H_f(P_3) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \qquad H_f(P_4) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Da all diese Matrizen diagonal sind, können wir die Eigenwerte direkt ablesen und sehen, dass $H_f(P_1)$ und $H_f(P_4)$ indefinit sind und wir daher bei P_1 und bei P_4 Sattelpunkte haben. $H_f(P_2)$ ist positiv definit, also haben wir ein Minimum bei P_2. $H_f(P_3)$ ist negativ definit, also haben wir ein Maximum bei P_3.