Musterlösung zum Übungsblatt 2 des Wiederholungskurses Analysis II

Aufgabe 1. Gegeben sei die Menge

$$M := \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}.$$

Ist M kompakt? (Beweis!)

Aufgabe 2. Wo ist die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}, \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

stetig, wo nicht?

Lösung zu Aufgabe 1. Definiere

$$\begin{aligned} f\colon [-1, 1] &\to \mathbb{R}^2, \\ x &\mapsto (x, -x). \end{aligned}$$

Nach Definition von M ist das Bild von f in M enthalten. Ist umgekehrt $(x, y) \in M$, dann ist $y = -x$ und $-1 \leq x \leq 1$, also ist $f(x) = (x, y)$. Daraus folgt, dass M gleich dem Bild von f ist. Die einzelnen Komponenten von f sind stetig, also ist auch f stetig. Da $[-1, 1]$ kompakt ist (Vorlesung 9.28 (i)) ist M als Bild einer kompakten Menge unter einen stetigen Abbildung ebenfalls kompakt.

Lösung zu Aufgabe 2. Multiplikation, Addition und Inversenbildung sind stetig, also ist f stetig für $(x, y) \neq (0, 0)$. Es bleibt noch, die Stetigkeit in $(0, 0)$ zu untersuchen. Sei $\epsilon > 0$ und wähle $\delta := \epsilon$. Seien $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|(x, y) - (0, 0)\|_\infty < \delta$. Zu zeigen ist, dass $|f(x, y) - f(0, 0)| < \epsilon$, also $|f(x, y)| < \epsilon$. Ist $x = 0$, dann ist $f(x, y) = 0$ und es ist nichts zu zeigen. Andernfalls gilt

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{y}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \right| \leq |y| \leq \|(x, y)\|_\infty < \delta = \epsilon.$$

Also ist f stetig in $(0, 0)$ und damit überall stetig.