Universität Mannheim
Analysis II / FSS 2008
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben dienen dazu das Verständnis der Begriffen offen, abgeschlossen und kompakt zu vertiefen. Es gibt keine Punkte, die Lösungen werden nach Ostern online gestellt.

1. Bestimmen Sie, ob die folgenden Mengen offen, abgeschlossen oder weder offen noch abgeschlossen sind. Benutzen Sie als Menge, in der Sie die Offenheit betrachten für M_1 und M_3 die Menge $\mathbb{R}$, in den anderen Fällen die Menge $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie außerdem den Abschluss $\overline{M_i}$ der Mengen.

$$\begin{aligned}
M_1 &:= \mathbb{Q} \cup \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x^2 < 2\} \\
M_2 &:= (2,5] \times [3,7) \\
M_3 &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x(x+2) > 0\} \\
M_4 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } y = 1/n \text{ und } |x| \leq 1/n\} \\
M_5 &:= (0,1) \times (0,1) \setminus \bigcup_{n \geq 2} \{(1/n, y) \,|\, y < 1/2\} \\
M_6 &:= \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{Q} \text{ oder } y \in \mathbb{Q}\}
\end{aligned}$$

2. Welche der folgenden Mengen $A_j \subset \mathbb{R}^2$ sind kompakt? Beweisen Sie genau!

$$\begin{aligned}
A_1 : &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (1+x^2)e^{y^2} \leq 2\} \\
A_2 : &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 = x^3\} \\
A_3 : &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x^2)^{1/3} + (y^2)^{1/3} < 4\}
\end{aligned}$$

3. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zeigen Sie, dass $\overline{U}$ kompakt ist.

4. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $A \subset K$ eine Teilmenge, zu der eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ existiert, so dass $K \setminus A = U \cap K$ ist. Zeigen Sie, dass A kompakt ist.

5. Der Durchmesser einer Teilmenge A eines metrischen Raums (M,d) ist definiert durch

$$diam(A) := \sup\{d(x,y) \,|\, x,y \in A\}$$

Zeigen Sie, dass in einer kompakten Menge $K \subset M$ stets zwei Elemente $x, y \in K$ existieren mit $diam(K) = d(x,y)$.

6. Seien $K, L \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Zeigen Sie, dass

$$K + L = \{x + y \in \mathbb{R}^n \,|\, x \in K, y \in L\} \subset \mathbb{R}^n$$

ebenfalls kompakt ist. (Hinweis : Betrachten Sie $K \times L$)