Analysis II/FSS 2008
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Endklausur Analysis II

27.06.2008

Zufallszahl:

Bevor Sie beginnen, beachten Sie bitte folgendes:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten, die Gesamtanzahl der erreichbaren Punkte 40.
- Prüfen Sie ihr Klausurexemplar auf Vollständigkeit, es müssen oben rechts die Seitenzahlen 1-11 stehen.
- Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben *ausschließlich* auf dem an Sie ausgeteilten Papier.
- Benutzen Sie keinen Bleistift oder Rotstift zur Bearbeitung der Klausur.
- Bitte schreiben Sie *sauber* und *deutlich*, und geben Sie *alle* Papierbögen wieder ab.
- Sie können ein beidseitig bedrucktes oder beschriftetes DIN A4-Blatt benutzen, ein Taschenrechner ist nicht erlaubt.
- Zu den Lösungen aller Aufgaben gehört die Angabe der von Ihnen verwendeten Notation sowie die Vollständigkeit der Rechnungen und der mathematischen Argumente.
- Die Klausurergebnisse werden unter Angabe der obigen Zufallszahl (ohne Matrikelnummer) im Internet veröffentlicht.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
mögliche Punkte	6	8	8	9	9	40
erreichte Punkte						

Punkte Zwischenklausur :	
Punkte Endklausur :	
gewichtete Gesamtpunktzahl : (Punkte ZK+2*Punkte EK)	

Analysis II/ FSS 2008
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

1. Aufgabe der Endklausur Analysis II am 27.06.2008

Begründen Sie, warum die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = 2xy \end{aligned}$$

auf dem Kreis $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 2\}$ ein globales Maximum und Minimum annehmen muss. Berechnen Sie die Stellen, an denen das Maximum bzw. Minimum angenommen wird.

(6 Punkte)

Analysis II/ FSS 2008
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

2. Aufgabe der Endklausur Analysis II am 27.06.2008

Gegeben ist die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^3 e^y + 2x\cos(xy) \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x, y) = 3$ in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0) = (1, 0)$ lokal nach y auflösbar ist, d.h. es existiert eine Funktion $y(x)$, so dass die Gleichung $f(x, y(x)) = 3$ in einer Umgebung von $(1, 0)$ gilt. *(4 Punkte)*

(b) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $(1, 0)$ an den Graphen von $y = y(x)$. *(4 Punkte)*

Analysis II/FSS 2008
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

3. Aufgabe der Endklausur Analysis II am 27.06.2008

(a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\pi \int_0^x \cos(x+2y)\, dy\, dx$$

Skizzieren Sie das Gebiet, über das integriert wird. *(4 Punkte)*

(b) Sei $Q := [-1,1] \times [-3,3]$ und

$$G := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in Q \text{ und } 0 \leq z \leq 4 - x^3 - y\right\}$$

Berechnen Sie das Volumen von G. *(4 Punkte)*

Analysis II/FSS 2008
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

4. Aufgabe der Endklausur Analysis II am 27.06.2008

Berechnen Sie das Integral

$$\int_G \frac{1}{4x^2 + y^2 + 2y + 1} \, d\mu$$

mit $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq 4x^2 + y^2 + 2y + 1 \leq 25\}$ mit Hilfe der Koordinatentransformation $x = \frac{r}{2}\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi) - 1$. *(9 Punkte)*

Analysis II/FSS 2008
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

5. Aufgabe der Endklausur Analysis II am 27.06.2008

(a) Zeigen Sie in mehreren Schritten, dass

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } x \in (0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

lebesgue-integrabel ist, obwohl der Grenzwert von $f(x)$ für x gegen **1** von links nicht beschränkt ist.

1. Geben Sie eine monoton wachsende Folge lebesgue-integrabler Funktionen (nicht unbedingt Treppenfunktionen) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ an, die punktweise gegen f konvergiert.
2. Begründen Sie, warum alle f_n lebesgue-integrabel sind.
3. Folgern Sie aus 1. und 2., dass f lebesgue-integrabel ist und berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_0^1 f(x)dx$.

Hinweis : Eine Stammfunktion von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist $\arcsin(x)$. *(5 Punkte)*

(b) Geben Sie eine Folge (f_n) von integrablen Funktionen auf $\mathbb{R}$ an, die gleichmäßig gegen 0 konvergiert, deren Integral $\int f_n \, d\mu$ nicht gegen 0 konvergiert. Begründen Sie warum für Ihre Wahl $\int f_n \, d\mu$ nicht gegen Null konvergiert. *(2 Punkte)*

(c) Geben Sie eine Nullmenge M in $\mathbb{R}$ an, deren Abschluss $\overline{M}$ keine Nullmenge ist. Begründen Sie Ihre Wahl. *(2 Punkte)*