Übungsblatt zur Klausurvorbereitung

Universität Mannheim
Analysis II / FSS 2008
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

1. Suchen Sie den Punkt p auf dem Graphen der Funktion $g(x, y) = 4x + y$, bei denen der euklidische Abstand zwischen p und $a = (0, 0, 8)$ ein absolutes Minimum annimmt.

2. Bestimmen Sie den größten Wert der Funktion

$$f(x, y) := \sin x + \sin y - \sin(x + y)$$

auf der Menge

$$D := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\pi\right\}$$

3. Bestimmen Sie alle lokalen Extremwerte von $f(x, y) = x^2 - y^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

4. Wo ist die Funktion

$$f(x, y) = (\cosh y \cos x, \sinh y \sin x)$$

lokal umkehrbar?

5. Sei

$$f(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2) \qquad x, y > 0$$

Berechnen Sie die Jacobimatrix der Umkehrfunktion mit Hilfe des Satzes über die inverse Funktion.

6. Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$F(x, y) = \frac{2x^2 y}{1 + x^2 + y^2} + y^2 \cos x - 1$$

Es gilt $F(0, 1) = 0$.

   (a) Gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $y : U \to \mathbb{R}$, die auf einer offenen Umgebung U von 0 definiert ist und für alle $x \in U$ gilt

$$F(x, y(x)) = 0 \qquad y(0) = 1$$

   (b) Gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $x : V \to \mathbb{R}$, die auf einer offenen Umgebung V von 1 definiert ist und für alle $y \in V$ gilt

$$F(x(y), y) = 0 \qquad x(1) = 0$$

7. Bestimmen Sie alle Punkte, in denen die folgende Gleichung keine Singularität besitzt, die Gleichung somit nach einer der beiden Variablen auflösbar ist
$$4x^2(1-x^2) = y^2$$

8. Berechnen Sie die folgenden Integrale :

   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\exp(y)} xe^{-y}\,dx\,dy$

   (b) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\int_{1/2}^{1/x} y^{-2}\,dy\right)\,dx$

9. Zeigen Sie mit dem Satz der monotonen Konvergenz, dass die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ lebesgue-integrabel ist und berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$.

10. Sei $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ die Einheitskugel im R^3. Bestimmen Sie das Integral $\int\int_S (x^2 + y + z)d\mu$. (Hinweis : Benutzen Sie die Kugelkoordinaten $x = r\sin\phi\cos\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$, $z = r\cos\phi$ mit $0 < \theta < 2\pi$, $r \geq 0$ und $0 < \phi < \pi$.)

11. Bestimmen Sie das Volumen des Tetraeders mit den Ecken $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 3)$, $(3, 1, 0)$ und $(4, 2, 3)$. (Hinweis : Benutzen Sie eine geeignete Koordinatentransformation um zu dem Tetraeder T_3 aus Blatt 11 Aufgabe 2 zu kommen.)

12. Untersuchen Sie die Gültigkeit der Gleichung
$$\int_\Omega \nabla \cdot f\,d\mu = \int_{\partial\Omega} f \cdot N d\sigma$$
für $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}^3$ mit
$$f(x, y, z) = \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3}\right)$$
mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und $\Omega = \{(x, y, z,) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$.