Differentialgleichungen

HS 06

Martin U. Schmidt

Inhaltsverzeichnis

1 Gewöhnliche Differentialgleichungen **5**
- 1.1 Einführung . . . 5
- 1.2 Gewöhnliche Differentialgleichungssysteme . . . 8
- 1.3 Lineare Differentialgleichungen . . . 10
- 1.4 Existenz und Eindeutigkeit . . . 22
- 1.5 Elementare Lösungsverfahren . . . 30

2 Partielle Differentialgleichungen **35**
- 2.1 Beispiele . . . 35
  - 2.1.1 Lineare Differentialgleichungen . . . 35
  - 2.1.2 Nichtlineare Differentialgleichungen . . . 37
  - 2.1.3 Lineare Differentialgleichungssysteme . . . 39
  - 2.1.4 Nichtlineare Differentialgleichungssysteme . . . 40
- 2.2 Der Gaußsche Satz . . . 41
- 2.3 Existenz von Lösungen . . . 42
- 2.4 Regularität von Lösungen . . . 44
- 2.5 Anfangswert und Randwertprobleme . . . 44

3 Differentialgleichungen erster Ordnung **45**
- 3.1 Homogene Transportgleichung . . . 45
- 3.2 Inhomogene Transportgleichung . . . 46
- 3.3 Methode der Charakteristik . . . 47

4 Laplacegleichung **53**
- 4.1 Fundamentallösungen . . . 53
- 4.2 Mittelwerteigenschaften . . . 56
- 4.3 Maximumprinzip . . . 57
- 4.4 Greensche Funktionen . . . 58
- 4.5 Dirichlet's Prinzip . . . 63

5 Wärmeleitungsgleichung **65**
5.1 Fundamentallösung 65
5.2 Inhomogenes Anfangswertproblem. 67
5.3 Mittelwerteigenschaft 69
5.4 Maximumprinzip 71
5.5 Wärmeleitungskern 73
5.6 Spektraltheorie und Wärmeleitungsgleichung 75
5.7 Wärmeleitungskern von S^1 78
5.8 Wärmeleitungskern von $[-1,1]$ 80

6 Wellengleichung **83**
6.1 D'Alembert's Formel für $n = 1$ 83
6.2 Sphärische Mittelwerte in der Wellengleichung 86
6.3 Lösung für $n = 3$ 88
6.4 Lösung für $n = 2$ 90
6.5 Lösung in ungeraden Dimensionen 91
6.6 Lösung der Wellengleichung für gerade Dimensionen 95
6.7 Inhomogene Wellengleichung 97
6.8 Energiemethoden 98

Kapitel 1

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1.1 Einführung

Differentialgleichungen sind Gleichungen, die Funktionen zu ihren Ableitungen in Beziehung setzen. Wenn diese Funktionen von mehreren Variablen anhängen, dann sind die Ableitungen, die in der entsprechenden Differentialgleichung mit der Funktion in Beziehung gebracht werden, partielle Ableitungen. Dann spricht man von partiellen Differentialgleichungen. Typischerweise sind Differentialgleichungen im folgenden Sinne *lokale* Gleichungen, dass sie nur die Werte einer gesuchten Funktion und endlich vieler Ableitungen für *einen* Wert der Variablen miteinender in Beziehung bringen. Mit Differentialgleichungen werden also im Allgemeinen Gleichungen von der folgenden Form bezeichnet

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \ldots, Du(x), u(x), x) = 0.$$

Hierbei ist $x \mapsto u(x)$ die gesuchte Funktion, die auch vektorwertig sein kann, und $x \mapsto D^k u(x)$ bezeichnet die vektorwertige Funktion aller k–ten (partiellen) Ableitungen von u nach den Variablen x. Zuletzt ist F eine möglicherweise vektorwertige Funktion.

In diesem Abschnitt betrachten wir zunächst Funktionen, die nur von einer Variablen abhängen, so dass auch nur die Ableitungen nach einer Variablen auftauchen.

Definition 1.1. *Differentialgleichungen, in denen nur die Ableitungen nach einer Variablen auftauchen, heißen gewöhnliche Differentialgleichungen.*

Historisch wurden solche Differentialgleichungen von Newton gleichzeitig mit der Entdeckung der Differentialrechnung eingeführt um die Bewegung von massiven Teilchen im Gravitationsfeld zu beschreiben. Im einfachsten Fall des Apfels nehmen die

Newton'schen Gleichungen die Form an:

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = -mg.$$

In dieser Gleichung taucht nur die zweite Ableitung der gesuchten Koordinatenfunktion von u des Apfels nach der Zeit auf, so dass wir deren Lösung aus der Differential– und Integralrechnung schon kennen:

$$u(t) = u_0 + u_1(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}.$$

Die Lösung können wir aus der Differentialgleichung durch zweimaliges Integrieren der linken und rechten Seite erhalten. Das Ziel unserer Untersuchung einer Differentialgleichung ist dabei möglichst alle Lösungen zu bestimmen und dann solche zusätzlichen Eigenschaften der Lösungen zu finden, die die Lösung eindeutig festlegen.

Definition 1.2. *Eine Lösung ist eine Funktion u, die so oft differenzierbar ist, dass alle in der Differentialgleichung vorkommenden Ableitungen existieren, und die zusammen mit diesen Ableitungen die Differentialgleichung erfüllt.*

In der Differentialgleichung

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = -mg$$

hängen m (die Masse des Apfels) und g (das Schwerefeld) nicht von t ab. Deshalb ist dei Differentialgleichung äquivalent zu

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -g.$$

Wenn wir die linke und die rechte Seite integrieren erhalten wir nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

$$\dot{u}(t) - \dot{u}(t_0) = -g(t - t_0) \text{ bzw.} \quad \dot{u}(t) = \dot{u}(t_0) - g(t - t_0).$$

Nach nochmaligem Integrieren erhalten wir schließlich

$$u(t) = u(t_0) + \dot{u}(t_0)(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}.$$

Die Funktion $u(t) = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + u_1(t - t_0) + u_0$ ist auf $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und es gilt:

$$\frac{du}{dt}(t) = -g(t - t_0) + u_1 \text{ und} \quad \frac{d^2u}{dt^2}(t) = -g.$$

Also sind alle Lösungen von der Form

$$u(t) = -\frac{g(t-t_0)^2}{2} + u_1(t-t_0) + u_0, \text{ wobei } u(t_0) = u_0 \text{ und } \frac{du}{dt}(t_0) = u_1.$$

Damit haben wir in diesem einfachen Beispiel unser Ziel erreicht.

Zusammenfassung 1.3. *Die höchste vorkommende Ableitung der Differentialgleichung* $m\frac{d^2u}{dt^2} = -gm$ *ist die zweite Ableitung. Durch geeignetes zweimaliges Integrieren konnten wir die Differentialgleichung lösen. Dabei entstanden zwei Integrationskonstanten und die Lösungen waren dann eindeutig durch die Wahl dieser Integrationskonstanten bestimmt. Diese Integrationskonstanten konnten wir schließlich als die Werte der Lösung und ihrer ersten Ableitung zu dem Zeitpunkt* t_0 *interpretieren. Deshalb ist der Lösungsraum dieser Differentialgleichung zweidimensional und wird parametrisiert durch* $(u(t_0), \frac{du}{dt}(t_0)) \in \mathbb{R}^2$. *Zu jeder solchen Wahl eines Anfangszustandes* (u_0, u_1) *gibt es dann genau eine Lösung, die gegeben ist durch*

$$u(t) = -\frac{g}{2}(t-t_0)^2 + u_1(t-t_0) + u_0.$$

Typischerweise beschreiben solche Differentialgleichungen die zeitliche Entwicklung von veränderlichen Größen in der Natur. Diese Differentialgleichungen geben dann ein kausales Verhalten der veränderlichen Größen vor. Durch das Lösen der Differentialgleichung können wir dann aus der Kenntnis der veränderlichen Größen und genügend vieler Ableitungen von ihnen zu einem (Anfangs–)Zeitpunkt t_0 das Verhalten von ihnen sowohl in der Zukunft, als auch in der Vergangenheit ausrechnen und damit ihr Verhalten in der Zukunft vorhersagen und auf ihr Verhalten in der Vergangenheit zurückschließen. Die Anzahl der Ableitungen, die wir zum Zeitpunkt t_0 kennen müssen, ist dann gegeben durch die Anzahl der Integrationskonstanten, also die Anzahl der Integrale, die wir benötigen, um die Gleichung zu lösen. Da wir uns typischerweise auch die Funktionswerte vorgeben, also die Nullte–Ableitung, sollten wir im Allgemeinen alle Ableitungen bis zu einer Ordnung niedriger als der höchsten vorkommenden Ableitung vorgeben.

Definition 1.4. *Die Ordnung einer Differentialgleichung ist die höchste vorkommende Ordnung aller auftauchenden Ableitungen einer Differentialgleichung.*

Definition 1.5. *(Anfangswertproblem) Die Suche nach einer Lösung* u *einer gewöhnlichen Differentialgleichung der Ordnung* n*, die zu einem gegebenen Wert* t_0 *der Variablen* t *(nach der abgeleitet wird) zusammen mit den ersten* $n-1$ *Ableitungen die Werte*

$$u(t_0) = u_0, \frac{du}{dt}(t_0) = u_1, \ldots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}(t_0) = u_{n-1}$$

annimmt, heißt Anfangswertproblem.

Aufgrund unserer Vorüberlegungen erwarten wir, dass jedes solches Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung hat. Wir werden später auch Bedingungen angeben, unter denen wir die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen solcher Anfangswertprobleme beweisen können. Es stellt sich heraus, dass mache dieser Anfangswertprobleme viele Lösungen besitzen und andere gar keine.

Beispiel 1.6. **(i)** *Das Anfangswertproblem* $\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 4u$ *mit* $u(0) = 0$ *hat offenbar die Lösungen*

$$u(t) = \begin{cases} (t-b)^2 & \text{für } b < t \\ 0 & \text{für } -a \leq t \leq b \\ (t+a)^2 & \text{für } t < -a \end{cases}$$

Hier sind a *und* b *zwei beliebige nichtnegative reelle Zahlen, die beide auch* ∞ *sein können.*

(ii) *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine Funktion, die keine Stammfunktion besitzt (z.B. die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen). Dann hat das Anfangswertproblem* $\frac{du}{dt} = f$ *mit* $u(0) = 0$ *keine Lösung.*

Die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen besitzt auf keinem offenen Intervall (a, b) *eine Stammfunktion. Wenn nämlich* F *eine solche Stammfunktion wäre, dann wäre* $x \to F(x)$ *monoton wachsend und* $x \to F(x) - x$ *monoton fallend. Wegen dem Mittelwertsatz muß für alle* $x_1, x_2 \in (a, b)$ *entweder gelten*

$$F(x_1) - F(x_2) = x_1 - x_2 \text{ oder } F(x_1) - F(x_2) = 0.$$

Im zweiten Fall folgt aus der Monotonie von F, *dass* F *zwischen* x_1 *und* x_2 *konstant ist und im ersten Fall folgt aus der Monotonie von* $x \mapsto F(x) - x$, *dass diese Funktion zwischen* x_1 *und* x_2 *konstant ist. Also ist die Ableitung von* F *zwischen* x_1 *und* x_2 *entweder konstant gleich* 0 *oder konstant gleich* 1. *Damit ist* F *keine Stammfunktion der charakteristischen Funktion der rationalen Zahlen.*

1.2 Gewöhnliche Differentialgleichungssysteme

Bisher haben wir stillschweigend angenommen, dass die Funktionen, die mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung erfüllen soll, reelle Funktionen sind. In diesem Fall hat eine gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung n die Form

$$f(t, u(t), \dot{u}(t), \ldots, u^{(n)}(t)) = 0,$$

wobei

$$f : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$$

eine reelle Funktion ist. Hierbei haben wir angenommen, dass nur die Werte einer reellen Funktion und aller ihrer Ableitungen bis zur Ordnung n zu einem Zeitpunkt t mit einander in Beziehung gebracht werden. Wenn wir zusätzlich noch annehmen, dass sich die Differentialgleichung nach der höchsten Ableitung auflösen läßt, dann nimmt sie die Form

$$\frac{d^n u}{dt^n} = f(t, u, \dot{u}, \ldots, u^{(n-1)})$$

an, mit einer Funktion

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}.$$

Wenn wir jetzt $\mathbb{R}^m$-wertige Funktionen u betrachten, dann nimmt sie die Form

$$\frac{d^n u}{dt^n} = f(t, u, \dot{u}, \ldots, u^{(n-1)})$$

an, mit einer Funktion

$$f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^n \to \mathbb{R}^m.$$

Solche Differentialgleichungen heißen Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen oder gewöhnliche Differentialgleichungssysteme. Um die folgende Untersuchung zu vereinfachen, machen wir von folgender Beobachtung Gebrauch.

Satz 1.7. *Jedes gewöhnliche Differentialgleichungssystem läßt sich durch Vergrößerung von m auf $m \cdot n$ in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung verwandeln.*

Beweis: Fassen wir die Funktionen $(u, \dot{u}, \ldots, u^{(n-1)})$ zu einer $\mathbb{R}^{n \cdot m}$-wertigen Funktion zusammen, so ist die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^n u}{dt^n} = f(t, u, \dot{u}, \ldots, u^{(n-1)})$$

offenbar äquivalent zu

$$\frac{d}{dt}(u, \dot{u}, \ldots, u^{(n-1)}) = (\dot{u}, \ldots, u^{n-1}, f(t, u, \dot{u}, \ldots, u^{(n-1)})).$$

Hierbei geht das entsprechende Anfangswertproblem

$$u(t_0) = u_0, \ldots, u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1}$$

über in

$$(u, \dot{u}, \ldots, u^{(n-1)})(t_0) = (u_0, \ldots, u_{n-1}).$$ **q.e.d.**

Im Folgenden werden wir uns also bei der Untersuchung der Existenz und Eindeutigkeit von gewöhnlichen Differentialgleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungssysteme erster Ordnung beschränken können.

Beispiel 1.8. *Die Differentialgleichung* $m\frac{d^2u}{dt^2} = -gm$ *ist äquivalent zu dem Differentialgleichungssystem*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

1.3 Lineare Differentialgleichungen

Definition 1.9. *Eine Differentialgleichung von der Form*

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$$

heißt lineare gewöhnliche Differentialgleichung auf einem (offenen) Intervall $I \subset \mathbb{R}$*. Hierbei ist* u *eine gesuchte Funktion von* I *mit Werten in einem Banachraum* V *(z.B.* $\mathbb{K}^n$*) und* A *eine Abbildung von* I *in die linearen stetigen Abbildungen von* V *auf* V *(also* $\mathcal{L}(V)$*). Im Fall von* $V = \mathbb{K}^n$ *können wir* $\mathcal{L}(V)$ *mit den* $n \times n$ *Matrizen* $\mathbb{K}^{n\times n}$ *identifizieren und* V *mit den Spaltenvektoren in* $\mathbb{K}^n$*. Dann ist* $A(t)u(t)$ *das Matrix–Produkt der* $n\times n$*–Matrix* $A(t)$ *mit dem Spaltenvektor* $u(t)$*, also wieder ein Spaltenvektor in* $\mathbb{K}^n$*. Schließlich ist* b *eine Abbildung von* I *nach* V*. Wenn* $b(t) = 0$ *ist, dann heißt die Differentialgleichung homogen, andernfalls inhomogen. Wenn* A *nicht von* t *abhängt, also als Abbildung konstant ist, heißt die Differentialgleichung autonom, andernfalls nicht autonom.*

Satz 1.10. *Die Menge aller Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung bildet einen Vektorraum über* $\mathbb{K}$*. Wenn also* u *und* $\tilde{u}$ *Lösungen sind, dann sind auch* $u+\tilde{u}$ *und* λu *für alle* $\lambda \in \mathbb{K}$ *Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung. Die Menge aller Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung bildet einen affinen Raum. Eine allgemeine Lösung ist die Summe einer speziellen Lösung und einer allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen linearen Differentialgleichung.*

Beweis: Seien u und $\tilde{u}$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$ bzw. $\dot{\tilde{u}}(t) = A(t)\tilde{u}(t) + b(t)$, dann erfüllt $u - \tilde{u}$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}(u(t) - \tilde{u}(t)) = A(t)(u(t)) - \tilde{u}(t)),$$

also die entsprechende homogene Differentialgleichung. Genauso gilt auch für alle $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\frac{d}{dt}\lambda(u(t) - \tilde{u}(t)) = A(t)\lambda(u(t)) - \tilde{u}(t)).$$

Deshalb ist der Raum aller Lösungen eines homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems ein Vektorraum und die allgemeine Lösung eines inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems ist die Summe einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung des entsprechenden Systems. **q.e.d.**

Einer der wichtigsten mathematischen Hilfsmittel um die Existenz und Eindeutigkeit von Differentialgleichungen zu beweisen ist der Banachsche Fixpunktsatz.

Satz 1.11. *(***Banachscher Fixpunktsatz***) Sei X ein vollständiger metrischer Raum und f eine Lipschitz–stetige Abbildung von X nach X mit Lipschitzkonstante L, d.h. für alle $x, y \in X$ gilt $d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y)$. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt und für jedes $x_0 \in X$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gegen den Fixpunkt.*

Beweis: Aus der Lipschitz–Stetigkeit von f folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in X$:

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq L^n d(x, y).$$

Hier bezeichnet f^n die n–fache Verknüpfung von f mit sich selber. Also folgt aus der Dreiecksungleichung für alle $m > n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(f^m(x_0), f^n(x_0)) &\leq \sum_{l=n}^{m-1} d(f^{l+1}(x_0)), f^l(x_0)) \\ &\leq \sum_{l=n}^{m-1} L^l d(f(x_0), x_0) \\ &= (1 - L^{m-n}) \frac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0) \\ &\leq \frac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0). \end{aligned}$$

Weil $0 < L < 1$ konvergiert $\frac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0)$ gegen Null und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge. Wegen der Vollständigkeit konvergiert sie. Wegen der Stetigkeit von f gilt

$$f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Also ist der Grenzwert ein Fixpunkt von f. Wegen der Lipschitzstetigkeit von f ist der Abstand von zwei Fixpunkten kleiner oder gleich als L mal dem Abstand. Also ist $(1 - L)$ mal dem Abstand kleiner oder gleich Null. Dann ist wegen $L < 1$ der Abstand nicht positiv, also gleich Null und beide Fixpunkte stimmen überein. **q.e.d.**

Satz 1.12. *(Existenz und Eindeutigkeit des linearen Anfangswertproblems). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes (nicht notwendig beschränktes) Teilintervall von $\mathbb{R}$ und $A : I \to \mathcal{L}(V)$ eine stetige Abbildung von $\mathbb{R}$ in die beschränkten stetigen linearen Abbildungen des Banachraumes V. Außerdem sei $b : I \to V$ stetig. Dann besitzt für jedes $u_0 \in V$ und jedes $t_0 \in I$ das Anfangswertproblem $\dot{u}(t) = A(t) \cdot u(t) + b(t)$ mit $u(t_0) = u_0$ genau eine stetig differenzierbare Lösung $u : I \to V$.*

Bemerkung 1.13. *Jede Lösung der Differentialgleichung muß differenzierbar sein und damit auch stetig. Dann muß sie sogar stetig differenzierbar sein. Deshalb gibt es also auch nur genau eine Lösung.*

Beweis: Sei $[\alpha, \beta] \subset I$ ein kompaktes Teilintervall von I, das t_0 enthält. Weil A auch auf $[\alpha, \beta]$ stetig ist, ist A auf $[\alpha, \beta]$ beschränkt und $\|A\|_\infty = \sup\limits_{t \in [\alpha,\beta]} \|A(t)\| < \infty$. Wir nehmen zunächst an, dass $L = (\beta - \alpha)\|A\|_\infty$ kleiner ist als 1. Dann erfüllt die Abbildung

$$f : C([\alpha, \beta], V) \to C([\alpha, \beta], V), \quad u \mapsto f(u) \text{ mit } f(u)(t) = \int\limits_{t_0}^{t} (A(s)u(s) + b(s))ds + u_0$$

für alle $u, \tilde{u} \in C([\alpha, \beta], V)$ die Gleichung

$$(f(u) - f(\tilde{u}))(t) = \int\limits_{t_0}^{t} A(s)(u(s) - \tilde{u}(s))ds.$$

Also gilt auch

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(\tilde{u})\|_\infty &\leq \|u - \tilde{u}\|_\infty \cdot \|A\|_\infty(\beta - \alpha) \\ &= \|u - \tilde{u}\|_\infty \cdot L. \end{aligned}$$

Also ist die Abbildung Lipschitz–stetig mit Lipschitz–Konstante $L < 1$. Wegen dem Banachschen Fixpunktsatz hat diese Abbildung genau einen Fixpunkt $u \in C([\alpha, \beta], V)$ der dann für alle $t \in [\alpha, \beta]$

$$u(t) = \int\limits_{t_0}^{t} (A(s)u(s) + b(s))ds + u_0$$

erfüllt. Dann gilt wegen dem Hauptsatz der Integral– und Differentialrechnung:

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ und } u(t_0) = u_0.$$

Also ist u eine Lösung des Anfangswertproblems auf (α,β).

Wenn $\tilde{u}$ eine zweite Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)\tilde{u}(t) + b(t) \text{ und } u(t_0) = u_0$$

auf (α,β) ist, dann folgt wieder aus dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

$$\tilde{u}(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)\tilde{u}(s) + b(s))ds.$$

Daraus folgt dann, dass auch $\tilde{u}$ ein Fixpunkt von f ist und dass wegen dem Banachschen Fixpunktsatz $u = \tilde{u}$ gelten muß.

Wenn $(\beta-\alpha)\|A\|_\infty > 1$, dann wählen wir eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (α,β), so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ der Punkt t_n in der Vereinigung der offenen Bälle um $t_0,\ldots,t_{n-1}$ mit Radius $\frac{1}{3\|A\|_\infty}$ liegt. Induktiv folgt, dass die Anfangswertprobleme $\dot{u}_n(t) = A(t)u_n(t) + b(t)$ mit $u_n(t_n) = u_{n-1}(t_n)$ auf der Vereinigung aller offenen Bälle um $t_0,\ldots,t_n$ mit Radius $\frac{1}{3\|A\|_\infty}$ genau eine Lösung haben und mit der einzigen Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblemes übereinstimmen. Also hat das ursprüngliche Anfangswertproblem im Inneren jedes kompakten Teilintervalls von I, das t_0 enthält, genau eine Lösung. Dann hat es auf der Vereinigung I aller solchen Teilintervalle genau eine Lösung. **q.e.d.**

Aus den beiden vorangehenden Sätzen folgt sofort:

Korollar 1.14. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenens Intervall, V ein Banachraum, und $A : I \to \mathcal{L}(V)$ und $b : I \to V$ stetige Abbildungen. Dann induziert für jedes $t_0 \in I$ die Abbildung $C(I,V) \to V, u \mapsto u(t_0)$ einen linearen Isomorphismus des Lösungsraumes der Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$ auf V. Für jede Lösung $\tilde{u}$ der inhomogenen Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$ induziert die Abbildung $C(I,V) \mapsto V, u \mapsto u(t_0) - \tilde{u}(t_0)$ einen affinen Isomorphismus des Lösungsraumes der inhomogenen Differentialgleichung nach V.* **q.e.d.**

Insbesondere haben also die Lösungsräume der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungssysteme erster Ordnung dieselbe Dimension wie der Vektorraum, in dem die Werte der gesuchten Funktion liegen. Insbesondere stimmt also für reelle gewöhnliche Differentialgleichungen n–ter Ordnung die Dimension des Lösungsraumes mit der Ordnung überein, wie wir das erwartet haben. Nachdem wir jetzt also für eine erste Klasse von Differentialgleichungen die Existenz und Eindeutigkeit des Anfangswertproblemes gezeigt haben, wollen wir uns der Frage zuwenden, wie wir diese Lösungen auch ausrechnen können.

Beispiel 1.15. *Wir stellen uns eine Insel vor, die von Störchen, Fröschen und Fliegen bewohnt wird. Dabei stellen wir uns die Nahrungskette so vor, dass die Störche $S(t)$ sich* *sowohl von den Fröschen als auch von den Fliegen ernähren, die Frösche $F(t)$ nur von den Fliegen und die Fliegen $f(t)$ von dem Aas der Frösche und Störche. Wir nehmen jetzt an, dass das Tierwachstum nur von der vorhandenen Nahrungsmenge gesteuert wird:*

$$\begin{aligned}
\dot{S}(t) &= F(t) + f(t) & -2S(t) \\
\dot{F}(t) &= -S(t) + f(t) & \\
\dot{f}(t) &= S(t) + F(t) & -2f(t)
\end{aligned}$$

Beispiel 1.16. *Seien $A : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $b : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ stetige, reelle Funktionen. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t), \quad u(t_0) = u_0$$

eine eindeutige Lösung, die wir jetzt bestimmen wollen. Dazu betrachten wir zunächst das entsprechende homogene Anfangswertproblem mit $b = 0$. Das können wir umformen zu

$$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = \frac{d}{dt}\ln(u(t)) = A(t) \text{ mit } u(t_0) = u_0$$

Also erhalten wir

$$\ln(u(t)) = \int_{t_0}^{t} A(s)ds + \ln(u_0) \text{ bzw.} \qquad u(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) u_0.$$

Das entsprechende inhomogene Anfangswertproblem hat die Lösung

$$u(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) u_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{s}^{t} A(r)dr\right) b(s)ds.$$

Dann gilt nämlich

$$\begin{aligned}
\dot{u}(t) &= A(t)\exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) u_0 + \exp(0)b(t) + A(t)\int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{s}^{t} A(r)dr\right) b(s)ds \\
&= A(t) \cdot u(t) + b(t) \text{ und } u(t_0) = u_0.
\end{aligned}$$

Also löst die angegebene Funktion das Anfangswertproblem und ist dann wegen dem vorangehenden Satz die eindeutige Lösung.

Der zweite Summanden erklärt sich daraus, dass $u_s(t) = \exp\left(\int_s^t A(r)dr\right) b(s)$ das Anfangswertproblem $\dot{u}(t) = u_s(t)A(t)$ mit $u(s) = b(s)$ löst. Dann folgt

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{t_0}^{t} u_s(t)ds = u_t(t) + \int\limits_{t_0}^{t} A(t)u_s(t)ds = b(t) + A(t)\int\limits_{t_0}^{t} u_s(t)ds.$$

Also löst $\int\limits_{t_0}^{t} u_s(t)ds$ das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ mit } u(t_0) = 0.$$

Wir erhalten also die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems als die Summe des homogenen Anfangswertproblems mit dem Integral über alle Anfangswertprobleme des homogenen Problems, wobei wir als Anfangswerte jeweils den inhomogenen Term einsetzen. Dieses Verfahren wollen wir jetzt verallgemeinern.

Satz 1.17. *(Variation der Parameter) Sei $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und V ein Banachraum. Dann ist die Abbildung*

$$C([\alpha,\beta],\mathcal{L}(V)) \times C([\alpha,\beta],V) \times [\alpha,\beta] \times V \to C([\alpha,\beta],V) \qquad (A,b,t_0,u_0) \to u$$

auf die eindeutige Lösung u des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ mit } \qquad u(t_0) = u_0$$

stetig. Die Einschränkung dieser Abbildung auf ein festes t_0 hängt analytisch von A, b und u_0 ab. Für jedes $(A, b) \in C([\alpha,\beta],\mathcal{L}(V)) \times C([\alpha,\beta],V)$ ist dann die entsprechende Einschränkung der Abbildung ein affiner Isomorphismus von $(t_0, u_0) \in [\alpha,\beta] \times V$ auf den Lösungsraum der Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t).$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, berechnen wir mit ihm die Lösung eines inhomogenen Anfangswertproblemes aus der Lösung des homogenen Anfangswertproblems.

Korollar 1.18. *Sei $A : I \to \mathcal{L}(V)$ eine stetige Abbildung auf einem offenen nicht notwendigerweise beschränktem Intervall und $b : I \to V$ auch. Dann setzt sich wegen der Variation der Parameter die eindeutige Lösung $u_s(t)$ des Anfangswertprobleme*

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) \text{ mit } \qquad u(s) = b(s)$$

zu einer stetigen Abbildung $I \mapsto C(I,V) \quad s \mapsto u_s$ *zusammen. Die eindeutige Lösung des inhomogenen Anfanswertproblems*

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ mit } \qquad u(t_0) = u_0$$

ist dann die Summe des entsprechenden homogenen Anfansgwertproblems und des Integrals

$$\int_{t_0}^{t} u_s(t)ds.$$

Beweis: Wegen dem vorangehenden Satz ist die Abbildung $s \to u_s(t)$ auf allen Teilintervallen $[\alpha,\beta] \subset I$ stetig von $[\alpha,\beta]$ nach $C([\alpha,\beta],V)$. Dann existiert für alle $t \in I$ das Integral $\int_{t_0}^{t} u_s(t)ds$. Aus dem Hauptsatzes der Differential– und Integralrechnung folgt

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} u_s(t)ds = u_t(t) + A(t)\int_{t_0}^{t} u_s(t)ds = b(t) + A(t)\int_{t_0}^{t} u_s(t)ds \text{ und } \quad \int_{t_0}^{t_0} u_s(t)ds = 0.$$

Diese Funktion löst das inhomogene Anfangswertproblem mit $u_0 = 0$. Wegen Satz 1.10 ist die eindeutige Lösung des allgemeinen Anfangswertproblems die Summe dieser Funktion und der Lösung des entsprechenden homogenen Anfanswertproblems. **q.e.d.**
Beweis von Satz 1.17: Offenbar ist die Abbildung

$$\begin{aligned} C([\alpha,\beta],\mathcal{L}(V)) \times C([\alpha,\beta],V) \times [\alpha,\beta] \times V \times C([\alpha,\beta],V) \quad &\to \quad C([\alpha,\beta],V) \\ (A,b,t_0,u_0,u) \mapsto f_{A,b,t_0,u_0}(u) \text{ mit } f_{A,b,t_0,u_0}(u)(t) = u_0 + &\int_{t_0}^{t}(A(s)u(s)+b(s))ds \end{aligned}$$

stetig und hängt für festes t_0 analytisch von A, b, u_0 und u ab. Weil das Integral linear ist, ist sie sogar eine Summe von linearen Abbildungen und einer bilinearen Abbildung. Damit ist f sogar ein Polynom in A, b, u_0, und u. Die Lipschitzkonstante $\tilde{L}$ der Abbildung $\tilde{f} = f_{\tilde{A},\tilde{b},\tilde{t}_0\tilde{u}_0}$, mit einem Element $(\tilde{A},\tilde{b},\tilde{t}_0,\tilde{u}_0) \in C([\alpha,\beta],\mathcal{L}(V)) \times C([\alpha,\beta],V) \times [\alpha,\beta] \times V$ können wir abschätzen durch

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{f}(u) - \tilde{f}(\tilde{u})\right\|_\infty &= \left\|\int_{\tilde{t}_0}^{t} A(s)(u(s)-\tilde{u}(s))ds + \int_{\tilde{t}_0}^{t}(\tilde{A}(s)-A(s))(u(s)-\tilde{u}(s))ds\right\|_\infty \\ &\leq |\beta-\alpha|\|u-\tilde{u}\|_\infty\left(\|A\|_\infty + \|\tilde{A}-A\|_\infty\right). \end{aligned}$$

Wir wählen wieder das Intervall $[\alpha,\beta]$ klein genug, so dass alle $\tilde{f}$, die den Elementen $(\tilde{A},\tilde{b},\tilde{t}_0,\tilde{u}_0)$ in einem ϵ–Ball von (A,b,t_0,u_0) entsprechen, Lipschitz–stetig sind mit Lipschitzkonstante $\tilde{L}\le L_0<1$. Für $n>m\ge N\in\mathbb{N}$ können wir dann abschätzen

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{f}^n(u)-\tilde{f}^m(u)\right\|_\infty &\le \left\|\tilde{f}^m(\tilde{f}^{n-m}(u)-\tilde{f}^0(u)\right\|_\infty\\ &\le \tilde{L}^m\left\|\sum_{l=1}^{n-m}(\tilde{f}^l(u)-\tilde{f}^{l-1}(u))\right\|_\infty\\ &\le \tilde{L}^N\left(\sum_{l=0}^{n-m-1}\tilde{L}^l\|\tilde{f}(u)-u\|_\infty\right)\\ &\le \frac{\tilde{L}^N}{1-\tilde{L}}\|\tilde{f}(u)-u\|_\infty.\end{aligned}$$

Wir wählen die Startfunktion u identisch gleich Null. Dann ist $\|\tilde{f}(u)-u\|$ beschränkt durch

$$\|f(0)-0\|_\infty\le\|u_0\|+\|\tilde{u}_0-u_0\|+|\beta-\alpha|\left(\|b\|_\infty+\|\tilde{b}-b\|_\infty\right).$$

Weil auf dem ϵ–Ball um (A,b,t_0,u_0) die Lipschitzkonstant uniform durch $L_0<1$ beschränkt ist, konvergiert dann die Folge $(\tilde{f}^n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Lösung des Anfangswertproblems. Dann definiert der Grenzwert eine stetige Funktion, die für festes t_0 analytisch von A, b und u_0 abhängt (also eine konvergente Potenzreihe besitzt).

Wenn die Liptschitzkonstante größer als 1 ist, überdecken wir das Intervall durch hinreichend kleine Teilintervalle und stezten die entsprechenden Lösungen fort. **q.e.d.**

Damit haben wir die Berechnung der Lösung auf das Lösen des homogenen Anfangswertproblem zurückgeführt.

Satz 1.19. *(Exponentialfunktion) Die Potenzreihe* $\exp(A)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$ *konvergiert für alle* $A\in\mathcal{L}(V)$*, wenn* V *ein Banachraum ist. Außerdem gilt*

$$\frac{d}{dt}\exp((t-t_0)A)=A\exp((t-t_0)A)=\exp((t-t_0)A)A.$$

Beweis: Wegen $\|A\cdot B\|\le\|A\|\cdot\|B\|$ folgt $\|A^n\|\le\|A\|^n$. Dann folgt die Behauptung aus den entsprechenden Aussagen für die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$. **q.e.d.**

Korollar 1.20. *(Lösung des autonomen Anfangswertproblems) Das inhomogene Anfangswertproblem*

$$\dot{u}(t)=Au(t)+b(t)\ \textit{mit}\ u(t_0)=u_0$$

mit $A \in \mathcal{L}(V)$ und stetigem $b : I \to V$ besitzt die eindeutige Lösung

$$u(t) = \exp((t - t_0)A)u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \exp((t - s)A)b(s)ds.$$

Beweis: Es genügt wegen der Variation der Parameter zu zeigen, dass das homogene Anfangswertproblem ($b = 0$) durch $u(t) = \exp((t - t_0)A)u_0$ gelöst wird. Das folgt aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion. **q.e.d.**

Damit bleibt noch das Problem der Berechnung der Exponentialfunktion. Dazu benutzen wir die Diagonalisierung bzw. Jordannormalform von Matrizen.

Übungsaufgabe 1.21. (i) *Aus der Analysis wissen wir, dass das Anfangswertproblem der Differentialgleichung*

$$u^{(n)}(t) = 0 \text{ mit } u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1, \ldots, u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}$$

die Lösung

$$u(t) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{u_l t^l}{l!}$$

besitzt. Dieses Anfangswertproblem ist äquivalent zu den Anfangswertproblemen

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} u(t_0) \\ \dot{u}(t_0) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n_1} \end{pmatrix}.$$

Deshalb gilt

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{1} + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{t^l}{l!}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}^l$$

Zeige direkt diese Identität.

(ii) *Zeige, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) gilt*

$$\exp\left(t\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \exp(t\lambda) \cdot \exp\left(t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

(iii) *Die Matrix A lasse sich durch die invertierbare Matrix B diagonalisieren:*

$$A = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} B^{-1}$$

Zeige, dass dann gilt

$$\exp(tA) = B \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(t\lambda_n) \end{pmatrix} B^{-1}.$$

Beispiel 1.22. *Die Matrix*

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

läßt sich diagonalisieren auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Also ist die Lösung des Beispiels der Störche, Frösche und Fliegen gegeben durch

$$\begin{pmatrix} S(t) \\ F(t) \\ f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(0) \\ F(0) \\ f(0) \end{pmatrix}.$$

Lemma 1.23. *(Fundamentallösung) Sei $A : I \to \mathcal{L}(V)$ eine stetige Funktion von einem Intervall in die stetigen linearen Abbildungen des Banachraumes V. Dann konvergiert die Reihe $F : I \to \mathcal{L}(V)$*

$$F(t) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} A(t_n) \int_{t_0}^{t_n} A(t_{n-1}) \ldots \int_{t_0}^{t_2} A(t_1) dt_1 \ldots dt$$

gegen die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{F}(t) = A(t)F(t) \text{ mit } F(t_0) = \mathbb{1}.$$

Beweis: Wenn wir zunächst annehmen, dass die Reihe für alle $t, t_0 \in I$ gleichmäßig konvergiert, dann folgt aus dem Hauptsatz der Integral– und Differentialrechnung

$$\dot{F}(t) = A(t) + \sum_{n=1}^{\infty} A(t) \int_{t_0}^{t} A(t_{n-1}) \int_{t_0}^{t_{n-1}} A(t_{n-2}) \ldots \int_{t_0}^{t_2} A(t_1) dt_1 \ldots dt_{n-1} = A(t)F(t).$$

Für alle $t, t_0 \in I$ ist A auf (t, t_0) beschränkt durch $\|A\|_\infty$. Also folgt

$$\left\| \int_{t_0}^{t} A(t_n) \int_{t_0}^{t_{n-1}} A(t_{n-1}) \ldots \int_{t_0}^{t_2} A(t_1) dt_1 \ldots dt_n \right\|$$
$$\leq \|A\|_\infty^n \left| \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t_{n-1}} \ldots \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \ldots dt_n \right| = \|A\|_\infty^n \cdot \frac{|t - t_0|^n}{n!}.$$

Dann konvergiert die Reihe wieder aus den gleichen Gründen wie die Potenzreihe der Exponentialfunktion. **q.e.d.**

Diese Lösung $F(t)$ heisst Fundamentallösung des Anfangswertproblems.

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ mit } u(t_0) = u_0.$$

Offenbar ist dann $F(t)$ die lineare Abbildung, die jedem u_0 den entsprechenden Wert der Lösung an der Stelle t zuordnet. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung der beiden Anfangswertprobleme

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ mit } u(t_0) = u_0 \text{ und } \quad \dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ mit } u(t_1) = u_1$$

ist die Fundamentallösung des ersten Anfanswertproblems an der Stelle t_1 als lineare Abbildung invers zu der Fundamentallösung des zweiten Anfanswertproblems an der Stelle t_0. Deshalb ist die Fundamentallösung eine einmal stetig differentzierbare Abbildung von I in die invertierbaren Elemente von $\mathcal{L}(V)$.

Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) \text{ mit } u(s) = b(s)$$

ist dann gegeben durch

$$u_s(t) = F(t)F^{-1}(s)b(s).$$

Wegen der Variation der Parameter ist dann die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ mit } u(t_0) = u_0$$

gegeben durch

$$u(t) = F(t)u_0 + \int_{t_0}^{t} F(t)F^{-1}(s)b(s)ds.$$

Deshalb genügt es zum Lösen einer gewöhnlichen, linearen Differentialgleichung, die Fundamentallösung zu bestimmen. Wenn alle $A(t)$ miteinander kommutieren:

$$A(t)A(t') = A(t')A(t) \text{ für alle } t, t' \in I,$$

wie das im Fall $V = \mathbb{R}$ gilt, dann ist $F(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right)$, im Allgemeinen aber nicht. Im endlichdimensionalen Fall, wenn wir A durch $n \times n$ Matrizen darstellen können, ist allerdings folgende Beziehung sehr nützlich.

Satz 1.24. *(Spur und Determinante) Sei $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ eine stetige Abbildung des offenen Intervalles I in die $\mathbb{K}$–wertigen $n\times n$ Matrizen. Dann gilt für die entsprechende Fundamentallösung*

$$F : I \to \mathbb{K}^{n\times n} \text{ mit } \quad \dot{F}(t) = A(t)F(t) \text{ und } \quad F(t_0) = \mathbb{1},$$

$$\frac{d}{dt}\det(F(t)) = \operatorname{Spur}(A(t))\det(F(t)) \text{ mit } \quad \det(F(t_0)) = 1.$$

Also hat $\det(F(t))$ auf I keine Nullstellen und $F(t)$ ist für alle $t \in I$ invertierbar.

Beweis: Weil die Determinante $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ ein Polynom in den Einträgen der entsprechenden Matrix ist, ist sie eine analytische Funktion. Wir zeigen zunächst, dass die Ableitung dieser Abbildung bei allen invertierbaren Matrizen A gegeben ist durch

$$\frac{d}{dt}\det(A + tB)\mid_{t=0} = \det(A)\operatorname{Spur}(A^{-1}B).$$

Es gilt nämlich

$$\det(A + tB) = \det(A)\det(\mathbb{1} + tA^{-1}B).$$

Offenbar ist $\det(\mathbb{1} + tA^{-1}B)$ ein Polynom in t vom Grad n, und die Koeffizienten sind Polynome in den Koeffizienten von $A^{-1}B$. Weil die Unterdeterminanten von $\mathbb{1}$ genau dann nicht verschwinden, wenn die genausovielte Spalte wie Zeile gestrichen wird und dann die Unterdeterminanten gleich Eins sind, gilt

$$\det(\mathbb{1} + tA^{-1}B) = 1 + t\operatorname{Spur}(A^{-1}B) + \text{Terme höherer Ordnung}.$$

Damit folgt

$$\frac{d}{dt}\det(A+tB)\bigg|_{t=0} = \det(A)\,\mathrm{Spur}(A^{-1}B).$$

Wenden wir diese Formel auf $F(t)$ an, so erhalten wir mit der Kettenregel an den Stellen, an denen $F(t)$ invertierbar ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\det(F(t)) &= \mathrm{Spur}(\dot{F}(t)F^{-1}(t))\det(F(t))\\ &= \mathrm{Spur}(A(t))\det(F(t)).\end{aligned}$$

Dann folgt aus dem Beispiel, dass $\det(F(t))$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = \mathrm{Spur}(A(t))u(t) \text{ mit } u(t_0) = 1$$

ist. Also gilt

$$\det(F(t)) = \exp\left(\int_{t_0}^{t}\mathrm{Spur}(A(s))ds\right)$$

und F ist auf ganz I invertierbar. **q.e.d.**

1.4 Existenz und Eindeutigkeit

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir den Beweis der Existenz und Eindeutigkeit auf nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen. Dabei müssen wir allerdings an die Nichtlinearität gewisse Einschränkungen machen.

Definition 1.25. *Eine Funktion f von einem metrischen Raum X in dem metrischen Raum Y heißt lokal Lipschitz–stetig, wenn es für jedes $x_0 \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ von x_0 gibt und eine Lipschitzkonstante $L > 0$, so dass für alle $x, x' \in U$ gilt*

$$d(f(x), f(x')) \leq Ld(x, x').$$

Satz 1.26. *(Lokale Existenz und Eindeutigkeit) Sei I ein offenes Intervall und $U \subset V$ die offene Teilmenge eines Banachraumes V und $f : I \times U \to V$ eine stetige Abbildung, die bezüglich der zweiten Variablen lokal Lipschitzstetig ist, d.h. für jedes $(t_0, u_0) \in I \times U$ gibt es ein $\delta > 0$ und ein $L > 0$, so dass für alle $(t, u), (t, \tilde{u}) \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times B(u_0, \delta)$ gilt*

$$\|f(t, u) - f(t, \tilde{u})\| \leq L\|u - \tilde{u}\|.$$

Dann gibt es für jedes $(t_0, u_0) \in I \times U$ ein $\epsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$ mit $u(t_0) = u_0$ auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ genau eine Lösung besitzt.

Beweis: Wegen der lokalen Lipschitzstetigkeit gibt es $\delta > 0$ und $L > 0$, so dass für alle $(t,u),(t,\tilde{u}) \in [t_0-\delta, t_0+\delta] \times \overline{B(u_0,\delta)}$ auch $\|f(t,u) - f(t,\tilde{u})\| \leq L\|u-\tilde{u}\|$ gilt. Wegen der Stetigkeit von f ist die Abbildung

$$F : u \mapsto F(u) \text{ mit } F(u)(t) = u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s,u(s))ds$$

eine stetige Abbildung von $C([t_0-\delta,t_0+\delta],\overline{B(u_0,\delta)})$ nach $C([t_0-\delta,t_0+\delta],V)$. Sei

$$\|f(\cdot,u_0)\|_\infty = \sup_{s\in[t_0-\delta,t_0+\delta]} \|f(s,u_0)\|.$$

Wenn $\epsilon \leq \delta$ und $\epsilon\left(\|f(\cdot,u_0)\|\infty + L\delta\right) \leq \delta$, dann ist für alle $u \in C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],\overline{B(u_0,\delta)})$

$$\|F(u)-u_0\|_\infty \leq \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \left(f(s,u_0) + f(s,u(s)) - f(s,u_0)\right)ds \right\| \leq \epsilon\left(\|f(\cdot,u_0)\|_\infty + L\delta\right) \leq \delta.$$

Also bildet F den vollständigen metrischen Raum $C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],\overline{B(u_0,\delta)})$ auf sich selber ab. Für $u,\tilde{u} \in C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],\overline{B(u_0,\delta)})$ gilt

$$\|F(u)-F(\tilde{u})\|_\infty \leq \int\limits_{t_0}^{t} \|f(s,u(s) - f(s,\tilde{u}(s))\|\, ds \leq \epsilon L\|u-\tilde{u}\|_\infty.$$

Sei also ϵ kleiner als $$\epsilon < \min\left\{\delta, \frac{\delta}{\|f(\cdot,u_0)\|_\infty + L\delta}, \frac{1}{L}\right\} = \min\left\{\delta, \frac{1}{L}\right\}.$$

Dann definiert die Abbildung F eine Lipschitzstetige Abbildung mit Lipschitzkonstante $\epsilon \cdot L < 1$ von dem vollständigen metrischen Raum $C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],\overline{B(u_0,\delta)})$ auf sich selber. Jeder Fixpunkt ist wegen dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung stetig differenzierbar und es gilt $\dot{u}(t) = f(t,u)$ für alle $t \in (t_0-\epsilon,t_0+\epsilon)$ mit $u(t_0) = u_0$. Also löst u dieses Anfangswertproblem auf $(t_0-\epsilon,t_0+\epsilon)$. Wenn u umgekehrt auf $(t_0-\epsilon,t_0+\epsilon)$ dieses Anfangswertproblem löst, dann ist die Ableitung von $F(u)-u$ gleich Null, und beide Funktionen $F(u)$ und u sind bei $t=t_0$ gleich u_0. Also stimmen beide Funktionen überein und jede Lösung des obigen Anfangswertproblems ist ein Fixpunkt von F. Also folgt die Existenz und Eindeutigkeit dieses Anfangswertproblems auf $(t_0-\epsilon,t_0+\epsilon)$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz. **q.e.d.**

Wir wollen jetzt analog zu der Variation der Parameter untersuchen, wie die Lösungen der Anfangswertprobleme, also die Fixpunkte von F, von y und f abhängen. Die

Ableitung der Abbildung

$$(t_0, y, x) \mapsto F(t_0, y, x) \quad \text{mit } F(t_0, y, x)(t) := y + \int_{t_0}^{t} f(x(s))ds$$

nach t_0 ist offenbar gleich $-f(x(t_0))$. Deshalb existieren höhere Ableitungen nach t_0 nur, wenn x differenrzierbar ist. Um also höhere Ableitungen der Lösungen nach t_0 zu kontrolieren, müssten wir die Abbildung F auf differenzierbare Abbildungen x einschränken und die Supremumsnorm durch eine Sobolevnorm ersetzen. Wir beschränken uns hier auf solche f, die nicht von t abhängen. Dann sind die Lösungen auch bezüglich t translationsinvariant, so dass wir t_0 beliebig wählen können.

Satz 1.27. *Sei $t_0 \in \mathbb{R}$, und U eine offene Umgebung von x_0 in dem Banachraum V. Sei $f : U \to V$ eine r mal stetig differenzierbare Abbildung mit $r \in \mathbb{N}$, deren erste Ableitung lokal beschränkt ist. Dann gibt es eine offene Umgebung W von x_0 in U, ein $\epsilon > 0$ und eine r mal stetig differenzierbare Funktion $g : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times W \to V$, so dass für alle $y \in W$ die Funktion*

$$x : \quad (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to V, \quad t \mapsto g(t, y)$$

die eindeutige Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) \text{ für alle } t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \text{ mit } \quad x(t_0) = y.$$

Die partielle Ableitung von g nach t ist sogar auch r mal stetig differenzierbar.

Beweis: Wir benutzen den Satz der impliziten Funktion. Weil f' lokal beschränkt ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass U den abgeschlossenen Ball $\overline{B(x_0, \delta)}$ enthält und f' auf $\overline{B(x_0, \delta)}$ durch L beschränkt ist. Wegen dem Schrankensatz ist dann f Lipschitz–stetig auf $\overline{B(x_0, \delta)}$ mit Lipschitzkonstante $L > 0$. Sei also $0 < \epsilon < \frac{\delta}{2\|f(x_0)\| + 2L\delta}$ analog gewählt wie in dem Beweis des Satzes von Picard–Lindelöf. Sei I das abgeschlossene Intervall $I = [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ und $\tilde{W} = B(x_0, \delta/2)$. Für alle $y \in \tilde{W}$ definiert

$$F_y : C(I, \overline{B(x_0, \delta)}) \to C(I, V), \ x \mapsto F_y(x) \text{ mit } \ F_y(x)(t) = y + \int_{t_0}^{t} f(x(s))ds$$

eine Lipschitz–stetige Abbildung von dem abgeschlossenen Unterraum $C(I, \overline{B(x_0, \delta)})$ des Banachraumes $C(I, V)$ auf $C(I, V)$ mit Lipschitzkonstante $\epsilon L < 1/2$. Wegen der

Ungleichung $\delta/2 + \epsilon(\|f(x_0)\| + 2L\delta) < \delta/2 + \delta/2 = \delta$ liegen die Bilder aller Abbildungen $(F_y)_{y\in\tilde{W}}$ sogar in der offenen Teilmenge $C(I, B(x_0, \delta))$ des Banachraumes $C(I, V)$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Deshalb erfüllen diese Abbildungen die Vorrausetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes und die entsprechenden Fixpunkte liegen in $C(I, B(x_0, \delta))$. Für alle $y \in \tilde{W}$ ist die Ableitung der Abbildung $x \mapsto F_y(x)$, als Abbildung der offenen Teilmenge $C(I, B(x_0, \delta))$ von $C(I, V)$ auf sich selber gegeben durch

$$F'_y(x) : \qquad C(I, V) \to C(I, V), \qquad z \mapsto F'_y(x)(z)$$

$$\text{mit} \qquad F'_y(x)(z)(t) = \int_{t_0}^{t} f'(x(s))(z(s))ds.$$

Weil die Ableitungen $f'(s, x(s))$ beschränkt sind durch L, ist die Ableitung $F'_y(x)$ beschränkt durch $L\epsilon < 1/2$. Also konvergiert für alle $y \in \tilde{W}$ und alle $x \in C(I, B(x_0, \delta))$ die Neumannsche Reihe

$$\left(\mathbb{1}_{C(I,V)} - F'_y(x)\right)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(F'_y(x)\right)^l$$

in $\mathcal{L}(C(I, V))$ gegen den inversen Operator von $\mathbb{1}_{C(I,V)} - F'_y(x)$. Offenbar ist für alle y und $z \in \tilde{W}$ die punktweise Differenz der entsprechenden Abbildungen eine konstante Abbildung in $C(I, V)$:

$$F_y(x) - F_z(x) = y - z.$$

Deshalb ist für jedes $x \in C(I, B(x_0, \delta))$ die Abbildung $y \mapsto F_y(x)$ eine glatte Abbildung von $\tilde{W}$ nach $C(I, V)$. Also ist die Abbildung

$$G : \tilde{W} \times C(I, B(x_0, \delta)) \to C(I, V), \quad (y, x) \mapsto \left(\mathbb{1}_{C(I,B(x_0,\delta))} - F_y\right)(x) = x - F_y(x)$$

eine stetig differenzierbare Abbildung und besitzt auf dem gesamten Definitionsbereich eine invertierbare partielle Ableitung nach $x \in C(I, B(x_0, \delta))$. Das Urbild der $0 \in C(I, V)$ besteht genau aus den Fixpunkten der Abbildungen F_y. Dann folgt aus dem Satz der impliziten Funktion, dass es eine stetig differenzierbare Abbildung g von einer Umgebung W von $x_0 \in \tilde{W}$ auf die entsprechenden Fixpunkte der Abbildungen F_y gibt. Diese Abbildung ist außerdem genauso oft stetig differenzierbar, wie G. An den expliziten Formeln für die ersten partiellen Ableitungen von F_y erkennt man, dass die partiellen Ableitungen von G bis zur selben Ordnung stetig sind, bis zu der auch die partiellen Ableitungen von f stetig sind. Also ist G genauso oft wie f stetig differenzierbar. Für alle $y \in W$ ist dann $g(y)$ die eindeutig Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)) \text{ für alle } t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \text{ mit } \quad x(t_0) = y.$$

Alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung r von der Abbildung

$$(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times W \to \mathbb{R}, \quad (t, y) \mapsto g(y)(t)$$

sind stetig. Deshalb ist diese Abbildung auch r mal stetig differenzierbar. Weil sie eine Lösung des obigen Anfangswertproblems ist, ist die partielle Ableitung nach t sogar auch r mal stetig differenzierbar. **q.e.d.**

Satz 1.28. *(Globale Existenz und Eindeutigkeit) Sei $O \subset \mathbb{R} \times V$ eine offene Teilmenge und $f : O \to V$ eine stetige Abbildung, die wie bei der lokalen Existenz und Eindeutigkeit lokal Lipschitz–stetig ist. Dann gibt es für jedes $(t_0, u_0) \in O$ genau ein maximales Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$, das t_0 enthält, und auf dem das Anfangswertproblem*

$$\dot{u}(t) = f(t, u) \quad \textit{mit} \quad u(t_0) = u_0$$

genau eine Lösung u enthält. Das Intervall ist in dem Sinne maximal, dass an beiden Rändern, also bei a und b, eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $a = -\infty$ *(bzw. $b = \infty$).*

(ii) $t \mapsto \|f(t, u(t))\|$ *ist für alle $\epsilon > 0$ auf $(a, a + \epsilon)$ (bzw. $(b - \epsilon, b)$) unbeschränkt.*

(iii) *Die Lösung u läßt sich stetig auf $[a, b)$ (bzw. $(a, b]$) fortsetzen, der Graph der Fortsetzung liegt aber nicht in O, d.h. $\lim_{t \downarrow a}(t, u(t)) \notin O$ (bzw. $\lim_{t \uparrow b}(t, u(t)) \notin O$).*

Beweis: Zunächst bemerken wir, dass für jedes Intervall (a, b), das t_0 enthält, und auf dem das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)) \text{ mit } u(t_0) = u_0$$

eine Lösung $\tilde{u}$ besitzt, so das sich $\tilde{u}$ auf $[a, b)$ oder $(a, b]$ stetig fortsetzen läßt, und der Graph der Fortsetzung in O liegt, das neue Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)) \text{ mit } u(a) = \lim_{t \to a+} \tilde{u}(t) \text{ bzw. } u(b) = \lim_{t \to b-} \tilde{u}(t)$$

wegen dem vorangehenden Satz eine Lösung in einer Umgebung von a bzw. b besitzt, die dann auf $[a, a+\epsilon)$ bzw. $(b-\epsilon, b]$ mit $\tilde{u}$ übereinstimmt. Also existiert ein maximales Intervall (a, b), auf dem das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung besitzt. Wenn am linken bzw. rechten Rand die Bedingungen (i) und (ii) nicht erfüllt sind, dann ist die Ableitung der Lösung auf einer offenen Menge $(a, a + \epsilon)$ bzw. $(b - \epsilon, b)$ beschränkt und deshalb ist die Lösung dort Lipschitz–stetig. Dann konvergiert für jede Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen a bzw. b konvergiert auch die Folge $((t_n, u(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \times V$. Der Grenzwert kann dann aber nicht in O liegen, weil sonst die Lösung eine Fortsetzung auf eine Umgebung von a bzw. b hätte. **q.e.d.**

Bemerkung 1.29. **(i)** *Wenn (ii) erfüllt ist, kann* $t \mapsto f(t, u(t))$ *nicht stetig auf* $[a, a-\epsilon)$ *bzw.* $(b-\epsilon, b]$ *fortgesetzt werden. Also können* u *und* f *nicht so stetig auf größere Definitionsbereiche fortgesetzt werden, dass* a *(bzw.* b*) im Definitionsbereich von* u *und* $(a, u(a))$ *(bzw.* $(b, u(b))$*) im Definitionsbereich von* f *liegt.*

(ii) *Jede in* u *stetig differenzierbare Funktion* f *ist in* u *lokal Lipschitz–stetig, weil für stetig differenzierbare Funktionen die Ableitungen lokal beschränkt sind und nach dem Schrankensatz lokal Lipschitz–stetig sind. Also ist die Existenz und Eindeutigkeit des linearen Anfansgwertproblems ein Spezialfall dieses Satzes.*

Wenn $\dim V < \infty$ kann man die Existenz, aber nicht die Eindeutigkeit (wir kennen schon ein Gegenbeispiel), auf stetige Funktionen f verallgemeinern. Anstatt dem Banchschen Fixpunktsatz verwenden wir dann den Schauderschen Fixpunktsatz.

Satz 1.30. *(Schauderscher Fixpunktsatz) Sei* F *eine stetige Abbildung von einer konvexen abgeschlossenen Teilmenge* A *eines Banachraumes auf sich selber. Wenn* F *alle beschränkten Teilmengen von* A *auf Teilmengen abbildet, deren Abschlüsse kompakt sind, dann hat* F *mindestens einen Fixpunkt.*

Wir werden diesen Satz nicht beweisen. In M. Berger: Nonlinearity and functional analysis, Academic Press 1977, ist auf Seite 90 ein Beweis angegeben. Um die Existenz für stetige Funktionen f zu verallgemeinern, zeigen wir die Kompaktheit des Integrals.

Satz 1.31. *(Kompaktheit des Integrals) Sei* $[\alpha, \beta]$ *ein kompaktes Intervall und* $t_0 \in [\alpha, \beta]$ *und* V *ein endlichdimensionaler Banachraum. Dann ist der lineare Operator*

$$C([\alpha, \beta], V) \to C([\alpha, \beta], V) \text{ mit } u \mapsto \left(t \mapsto \int_{t_0}^{t} u(s) ds \right)$$

kompakt, d.h. die Abschlüsse der Bilder aller beschränkten Mengen sind kompakt.

Wir beweisen diesen Satz mit dem Satz von Arzela–Ascoli.

Satz 1.32. *(Arzela–Ascoli) Sei* K *ein kompakter metrischer Raum und* V *ein endlich dimensionaler Banachraum. Eine Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $C(K, V)$ *besitzt eine konvergente Teilfolge, wenn*

(i) *für jedes* $x \in K$ *die Folge* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt ist und*

(ii) *für jedes* $x \in K$ *die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichgradig stetig ist in* x*, d.h. für jedes* $x \in K$ *und jedes* $\epsilon > 0$ *gibt es ein* $\delta > 0$*, so dass aus* $x' \in B(x, \delta) \subset K$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *folgt* $f_n(x') \in B(f_n(x), \epsilon) \subset V$*.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar auf K gleichgradig stetig ist. Für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $y \in K$ gibt es wegen (ii) ein $\delta_y > 0$, so dass aus $d(x,y) < 2\delta_y$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $d(f_n(x), f_n(y)) < \frac{\epsilon}{2}$. Wegen der Kompaktheit von K hat die Überdeckung $\{B(y,\delta_y)|y \in K\}$ eine endliche Teilüberdeckung $K = B(y_1,\delta_1) \cup \ldots \cup B(y_N,\delta_N)$. Sei δ das Minimum von $\delta_1,\ldots,\delta_N$. Dann entält für alle Paare $x,x' \in K$ mit $d(x,x') < \delta$ einer der Bälle $B(y_1,\delta_1),\ldots,B(y_N,\delta_N)$ den einen Punkt x. Damit sind beide in einem der Bälle $B(y_1,2\delta_1),\ldots,B(y_N,2\delta_N)$ enthalten. Daraus folgt $d(f_n(x), f_n(x')) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig auf ganz K.

Sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die in K dicht liegt. Wegen (i) ist dann für alle $m \in \mathbb{N}$ der Abschluss A_m der Menge der Folge $(f_n(x_m))_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Teilmenge von V. Wir definieren jetzt induktiv eine Teilfolge von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Folge $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in V, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $n \geq m$ gilt $d(g_n(x_m), a_m) < \frac{1}{n}$. Dafür wählen wir zunächst einen Häufungspunkt a_1 von $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Teilfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $d(g_n(x_1), a_1) \leq \frac{1}{n}$. Induktiv wählen wir danach für jedes $M \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ einen Häufungspunkt a_M von $(g_n(x_M))_{n\in\mathbb{N}}$ und ersetzen alle Folgenglieder von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Indizes größer als $M-1$ durch eine Teilfolge von $(g_n)_{n\geq M}$, so dass für alle $n \geq M$ gilt $d(g_n(x_M), a_M) < \frac{1}{n}$. Dann gilt für alle $m = 1,\ldots,M$ und alle $n \geq m$ auch $d(g_n(x_m), a_m) < \frac{1}{n}$.

Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass aus $x,x' \in K$ mit $d(x,x') < \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $d(g_n(x), g_n(x')) < \frac{\epsilon}{3}$. Die Überdeckung $(B(x_m,\delta))_{m\in\mathbb{N}}$ von K besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Also gibt es ein $M \in \mathbb{N}$, so dass alle $l,n \geq M$ an den Zentren der Bälle der Teilüberdeckung $d(g_l(x_m), g_n(x_m)) < \frac{\epsilon}{3}$ erfüllen. Dann folgt für alle $x \in K$ und alle $l,n \geq M$

$$d(g_l(x), g_n(x)) \leq d(g_l(x), g_l(x_m)) + d(g_l(x_m), g_n(x_m)) + d(g_n(x_m), g_n(x)) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Also ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(K,V)$ eine Cauchyfolge und konvergiert. **q.e.d.**

Beweis der Kompaktheit des Integrals. Die Funktion $t \mapsto \int_{t_0}^t u(s)ds$ ist auf $[\alpha,\beta]$ beschränkt durch $|\beta-\alpha| \cdot \|u\|_\infty$, und wegen dem Schrankensatz Lipschitz–stetig mit Lipschitzkonstante $\|u\|_\infty$. Also erfüllt das Bild jeder beschränkten Menge die Voraussetzungen von Arzela–Ascoli. Dann ist der Abschluss des Bildes einer beschränkten Menge folgenkompakt. **q.e.d.**

Satz 1.33. *(Lokale Existenz) Sei I ein offenes Intervall und $U \subset V$ eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen Banachraumes und f eine stetige Abbildung $f : I \times U \to V$. Dann gibt es für jedes $(t_0,u_0) \in I \times U$ ein $\epsilon > 0$ und auf $(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon) \subset I$ eine Lösung des Anfangswertproblems* $\dot{u}(t) = f(t,u(t))$ *mit* $u(t_0) = u_0$.

Beweis: Für jedes $(t_0,u_0) \in I \times U$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$, so dass

$$[t_0-\epsilon, t_0+\epsilon] \times \overline{B(u_0,\delta)} \subset I \times U.$$

Auf dieser kompakten Menge ist dann f beschränkt durch $\|f\|_\infty < \infty$. Die Abbildung

$$F : C\left([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(u_0, \delta)}\right) \to C\left([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V\right) \qquad u \mapsto F(u) \text{ mit}$$

$$F(u)(t) = u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds$$

ist offenbar kompakt. Verkleinere also gegebenenfalls ϵ, so dass $\|f\|_\infty \cdot \epsilon \leq \delta$ ist. Dann bildet diese Abbildung den konvexen Raum $C\left([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(u_0, \delta)}\right)$ auf sich selber ab, und die Aussage folgt aus dem Schauderschen Fixpunktsatz. **q.e.d.**

Wenn u_1 eine Lösung des Anfangswertproblems $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$ mit $u(t_1) = u_0$ auf $[t_1 - \epsilon, t_1]$ ist und u_2 auf $[t_1, t_1 + \epsilon]$. Dann ist

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) & \text{für } t \in [t_1 - \epsilon, t_1] \\ u_2(t) & \text{für } t \in [t_1, t_1 + \epsilon] \end{cases}$$

eine Lösung auf $[t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon]$. Also können wir Lösungen wieder nach links bzw. rechts fortsetzen. Dann erhalten wir genauso wie in der Globalen Existenz und Eindeutigkeit:

Satz 1.34. *(Globale Existenz) Sei V ein endlichdimensionaler Banachraum und $O \subset \mathbb{R} \times V$ eine offene Teilmenge und $f : O \to V$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es für jedes $(t_0, u_0) \in O$ eine (nicht notwendiger Weise eindeutige) maximale Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)) \text{ mit } u(t_0) = u_0$$

auf einem Intervall (a, b), das t_0 enthält. Die Lösung ist in dem Sinne maximal, dass an beiden Rändern, also bei a und b, eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $a = -\infty$ *(bzw.* $b = \infty$*)*

(ii) $t \to \|f(t, u(t))\|$ *ist für alle* $\epsilon > 0$ *auf* $(a, a + \epsilon)$ *(bzw.* $(b - \epsilon, b)$*) unbeschränkt.*

(iii) *Die Lösung u läßt sich stetig auf $[a, b)$ (bzw. $(a, b]$) fortsetzen, der Graph der Fortsetzung liegt aber nicht in O.* **q.e.d.**

Jede maximale Lösung kann also nicht als Lösung auf ein größeres Intervall fortgesetzt werden, aber zwei verschiedene maximale Lösungen können auf unterschiedlichen Intervallen definiert sein und auf Teilintervallen übereinstimmen.

1.5 Elementare Lösungsverfahren

In diesem Abschnitt wollen wir uns auf gewöhnliche Differentialgleichungen beschränken, in denen die gesuchte Funktion eine reelle Funktion ist. Die Differentialgleichungen 1.ter Ordnung haben also die Form

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)).$$

Wenn es uns gelingt die Funktion f als einen Quotienten zu schreiben

$$f(t, u) = \frac{g(t)}{h(u)}$$

dann können wir die Differentialgleichung umformen zu

$$\dot{u}(t)h(u(t)) = g(t).$$

Wenn H eine Stammfunktion von h ist und G eine Stammfunktion von G, dann gilt

$$\frac{d}{dt}H(u(t)) = \frac{d}{dt}G(t).$$

Also folgt dann für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = \frac{g(t)}{h(u(t))} \text{ mit } u(t_0) = u_0$$

$$H(u(t)) - H(u_0) = G(t) - G(t_0).$$

Wenn wir jetzt noch annehmen, dass H eine Umkehrfunktion besitzt, was natürlich auf allen Intervallen gilt, auf denen h positiv bzw. negativ ist, dann erhalten wir also als Lösung des Anfangswertproblems

$$u(t) = H^{-1}(G(t) - G(t_0) + H(u_0)).$$

Satz 1.35. *(Trennung der Variablen) Seien g und h stetige Funktionen auf einem offenen Intervall I und h sei entweder positiv oder negativ. Dann sind sowohl g als auch h auf allen kompakten Teilintervallen von I Riemann–integrabel. Seien G und H Stammfunktionen von g bzw. h. Dann ist h entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend, besitzt also eine Umkehrabbildung $H^{-1} : I' \to I$ von einem offenen Intervall I' auf I. Dann ist die eindeutige Lösung der Anfangswertprobleme*

$$\dot{u}(t) = \frac{g(t)}{h(u(t))} \textit{ mit } u(t_0) = u_0$$

gegeben durch $$u(t) = H^{-1}(G(t) - G(t_0) + H(u_0)).$$

Sie ist auf dem Intervall definiert, auf dem $G(t) - G(t_0) + H(u_0)$ in I' liegt. **q.e.d.**

Wenn es uns gelingt eine Funktion $F(t,u)$ zu finden, so dass gilt

$$f(t,u) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}(t,u)}{\frac{\partial F}{\partial u}(t,u)},$$

dann können wir die Differentialgleichung umformen zu

$$\frac{d}{dt}F(t,u(t)) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,u) + \frac{du}{dt}(t)\frac{\partial F}{\partial u}(t,u(t)) = 0.$$

Also gilt dann für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t)\frac{\partial F}{\partial u}(t,u(t)) + \frac{\partial F}{\partial t}(t,u(t)) = 0 \text{ mit } u(t_0) = u_0$$

$$F(t,u(t)) = F(t_0,u_0).$$

Diese Gleichung beschreibt implizit die Lösung des Anfangswertproblems.

Satz 1.36. *(Exakte Differentialgleichungen) Sei $(t,u) \mapsto F(t,u)$ differenzierbar. Dann sind alle Lösungen des Anfangswertproblems*

$$\dot{u}(t)\frac{\partial F}{\partial u}(t,u(t)) + \frac{\partial F}{\partial t}(t,u(t) = 0 \textit{ mit } u(t_0) = u_0$$

implizit gegeben durch $\qquad F(t,u(t)) = F(t_0,u_0).$ **q.e.d.**

Für zwei Funktionen $g(t,u)$ und $h(t,u)$ mit $\quad f(t,u) = -\dfrac{g(t,u)}{h(t,u)},\quad$ gibt es nicht immer eine Funktion $F(t,u)$ mit $\quad \dfrac{\partial F(t,u)}{\partial t} = g(t,u) \quad$ und $\quad \dfrac{\partial F(t,u)}{\partial u} = h(t,u).$

Lemma 1.37. *(Stammfunktion) Seien g und h zwei stetig differenzierbare Funktionen auf einem konvexen offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Dann gibt es auf Ω genau dann eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $F(t,u)$ mit*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,u) = g(t,u) \textit{ und } \frac{\partial F}{\partial u}(t,u) = h(t,u) \textit{ wenn gilt } \frac{\partial g}{\partial u}(t,u) = \frac{\partial h}{\partial t}(t,u).$$

Beweis: Sei $(t_0,u_0) \in \Omega$ beliebig. Dann definieren wir die Funktion

$$F(t,u) = (t-t_0)\int_0^1 g(t_s,u_s)ds + (u-u_0)\int_0^1 h(t_s,u_s)ds,$$

mit $t_s = t_0+s(t-t_0)$ und $u_s = u_0+s(u-u_0)$. Weil die Funktionen g und h differenzierbar sind, sind sie stetig und damit auch integrierbar. Die Ableitungen von F sind dann

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t}(t,u) &= \int_0^1 g(t_s,u_s)ds + (t-t_0)\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_1}(t_s,u_s)sds + (u-u_0)\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x_1}(t_s,u_s)sds \\
&= \int_0^1 g(t_s,u_s)ds + \int_0^1 \frac{dg}{ds}(t_s,u_s)sds = g(t,u) \\
\frac{\partial F}{\partial u}(t,u) &= \int_0^1 h(t_s,u_s)ds + (u-u_0)\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x_2}(t_s,u_s)sds + (t-t_0)\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_2}(t_s,u_s)sds \\
&= \int_0^1 h(t_s,u_s)ds + \int_0^1 \frac{dh}{ds}(t_s,u_s)sds = h(t,u)
\end{aligned}$$

Wenn umgekehrt $\frac{\partial F}{\partial t}(t,u) = g(t,u)$ und $\frac{\partial F}{\partial u}(t,u) = h(t,u)$ gilt, dann folgt aus dem Satz von Schwarz

$$\frac{\partial g}{\partial u}(t,u) = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t}(t,u) = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial u}(t,u) = \frac{\partial h}{\partial t}(t,u).$$ **q.e.d.**

Wir können diese Aussage auf Vereinigungen von konvexen Gebieten verallgemeinern, solange nur die Vorschrift, in der wir F fortsetzen eindeutig ist. Das gilt für alle einfach zusammenhängenden Gebiete Ω, d.h. solche Gebiete, die für jede stetige Abbildung $p : S^1 \to \Omega$ eine Homotopie zu einer konstanten Abbildung besitzen, d.h. es gibt eine stetige Abbildung $[0,1]\times S^1 \to \Omega$, die auf $\{0\}\times S^1$ gerade gleich p ist und für $\{1\}\times S^1$ eine konstante Abbildung. Anschaulich bedeutet das, dass jeder geschlossene Weg in Ω zu einem Punkt zusammengezogen werden kann.

Es gibt auch Fälle, in denen die Differentialgleichung

$$\dot{u}(t)h(t,u(t)) + \dot{g}(t,u(t)) = 0$$

erst mit einer Funktion erweitert werden muß bevor sie exakt ist.

Beispiel 1.38. *Die Differentialgleichung* $$2t\dot{u} + u(t) = 0$$

ist nicht exakt, weil gilt $$\frac{\partial u}{\partial u} = 1 \neq 2 = \frac{\partial 2t}{\partial t}.$$

die Differentialgleichung $$2tu(t)\dot{u}(t) + u^2(t)$$

ist aber exakt, weil gilt $$\frac{\partial u^2}{\partial u} = 2u = \frac{\partial}{\partial t} 2ut.$$

Satz 1.39. *(Eulersche Multiplikator) Wenn eine Differentialgleichung durch Multiplikation mit eine Funktion auf die Form gebracht werden kann*

$$\dot{u}(t)h(t,u(t)) + g(t,u(t)) = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial h}{\partial t}(t,u) = \frac{\partial g}{\partial u}(t,u),$$

dann existiert (auf einfach zusammenhängenden) Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine Funktion F, so dass die Differentialgleichung exakt ist

$$\frac{d}{dt} F(t,u(t)) = \dot{u}(t)\frac{\partial F}{\partial u}(t,u(t)) + \frac{\partial F}{\partial t}(t,u(t)) = 0.$$

Dann gilt für die Lösungen des entsprechenden Anfangswertproblems mit $u(t_0) = u_0$

$$F(t,u(t)) = F(t_0,u_0).$$ **q.e.d.**

Um für eine Differentialgleichung von der Form

$$\dot{u}(t)h(t,u(t)) + g(t,u(t)) = 0$$

einen Eulerschen Multiplikator $M(t,u(t))$ zu finden, müssen wir die Gleichung

$$\frac{\partial M}{\partial t}(t,u)h(t,u) + M(t,u)\frac{\partial h}{\partial t}(t,u) = \frac{\partial M}{\partial u}(t,u)g(t,u) + M(t,u)\frac{\partial g}{\partial u}(t,u)$$

lösen. Das ist eine partielle Differentialgleichung, die im Allgemeinen nicht leichter zu lösen ist als die ursprüngliche gewöhnliche Differentialgleichung. In einigen Fällen können wir Lösungen aber erraten oder einfache Lösungen berechnen, die nur von t bzw. u abhängen.

Zum Abschluss wollen wir noch erwähnen, dass einige Differentialgleichungen durch eine Substitution in eine der Differentialgleichungen verwandelt werden können, die wir lösen können.

Beispiel 1.40. (i)

$$\dot{u}(t) = f(at + bu(t) + c) \text{ mit } a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Wenn $b = 0$ können wir die Differentialgleichung direkt integrieren. Wenn $b \neq 0$, dann führt die Substitution $v(t) = at + bu(t) + c$ auf die Differentialgleichung $\dot{v}(t) = a + bf(v(t))$ oder auch $\frac{\dot{v}(t)}{a+bf(v(t))} = 1$. Diese Differentialgleichung können wir mit der Methode der Trennung der Variablen lösen: Sei F eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{a+f(x)}$. Dann erfüllen die Lösungen des Anfanswertproblems

$$\dot{u}(t) = f(at + bu(t) + c) \text{ mit } \qquad u(t_0) = u_0$$

die Gleichung $$F(at + bu(t) + c) - F(at_0 + bu_0 + c) = t - t_0.$$

(ii) $\dot{u} = f\left(\frac{u(t)}{t}\right)$ *homogene Differentialgleichung. Die Substitution* $v(t) = \frac{u(t)}{t}$ *führt zu der Differentialgleichung*

$$\dot{v}(t) = \frac{f(v(t)) - v(t)}{t}.$$

Diese Differentialgleichung können wir wieder mit mit Hilfe der Trennung der Variablen lösen:

$$\frac{\dot{v}(t)}{f(v(t)) - v(t)} = \frac{1}{t}.$$

(iii)

$$\dot{u} = f\left(\frac{at + bu(t) + c}{\alpha t + \beta u(t) + \gamma}\right) \text{ mit } a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Wenn die Determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$ *ist, dann ist entweder* $\alpha t + \beta u(t)$ *ein Vielfaches von* $at + bu(t)$ *oder umgekehrt. Deshalb haben wir dann ein Beispiel der Art in (i). Wenn diese Determinante* $\neq 0$ *ist, dann hat das lineare Gleichungssystem*

$$at + bu + c = 0 \qquad\qquad \alpha t + \beta u + \gamma = 0$$

genau eine Lösung (t_0, u_0)*. Die Differentialgleichung können wir umformen zu*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t + t_0) - u_0) &= f\left(\frac{at + b(u(t + t_0) - u_0) + at_0 + bu_0 + c}{\alpha t + \beta(u(t + t_0) - u_0) + \alpha t_0 + \beta u_0 + \gamma}\right) \\ &= f\left(\frac{a + b\frac{u(t+t_0)-u_0}{t}}{\alpha + \beta\frac{u(t+t_0)-u_0}{t}}\right). \end{aligned}$$

Also erhalten wir ein Beispiel von der Form (ii).

(iv) *Bernoullis Differentialgleichung:*

$$\dot{u}(t) + g(t)u(t) + h(t)u^{\alpha}(t) = 0 \quad \alpha \neq 1.$$

Die Substitution $v(t) = u^{1-\alpha}(t)$ *führt zu der Differentialgleichung*

$$\dot{v}(t) = (1 - \alpha)\dot{u}(t)u^{-\alpha}(t) = (\alpha - 1)g(t)v(t) + (\alpha - 1)h(t).$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung, die wir im letzten Abschnitt gelöst haben.