Kapitel 2

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung in den partiellen Ableitungen einer oder mehrerer gesuchter Funktionen, die von mindestens zwei Variablen abhängen:

Definition 2.1. *Eine gegebenfalls vektorwertige Gleichung der Form*

$$F\left(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \ldots, Du(x), u(x), x\right) = 0$$

heißt partielle Differentialgleichung der Ordnung k. Hierbei ist F eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion. Die Ausdrücke $D^k u$ bezeichnen den Vektor aller k–ten partiellen Ableitungen der Funktion u. Eine Funktion u heißt Lösung der Differentialgleichung, wenn sie k mal differenzierbar ist und der obigen Gleichung genügt.

2.1 Beispiele

2.1.1 Lineare Differentialgleichungen

1. Laplacegleichung.

$$-\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Lösungen der Laplacegleichung heissen harmonische Funktionen. Die Lapacegleichung ist eine homogene lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die ensprechende inhomogene Gleichung heisst Poissongleichung:

$$-\triangle u = f.$$

Hierbei ist die Funktion f gegeben und die Funktion u gesucht.

2. Helmholtzgleichung.

$$-\triangle u - \lambda u = 0.$$

Hierbei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ eine gegebene Zahl und u die gesucht Funktion. Sie ist eine besonders einfache Form der Poissongleichung.

3. Lineare Transportgleichung.

$$\dot{u} + b \cdot \nabla u = 0.$$

Hierbei ist b eine gegebenes $\mathbb{R}^n$–wertiges Vektorfeld auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und u die gesuchte Funktion auf diesem Gebiet.

4. Liouvillegleichung.

$$\dot{u} + \nabla b \cdot u = 0.$$

Hier ist genau wie bei der Transportgleichung b ein gegebenes $\mathbb{R}^n$–wertiges Vektorfeld auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und u die gesuchte Funktion auf diesem Gebiet. Diese beiden linearen Differentialgleichungen erster Ordnung sind sehr ähnlich.

5. Wärmeleitungsgleichung.

$$\dot{u} - \triangle u = 0.$$

6. Schrödingergleichung.

$$\imath \dot{u} + \triangle u = 0.$$

Hierbei ist u eine gesuchte komplexe Funktion. Wir werden noch sehen, dass der Faktor $\imath$, durch den sich die Schrödingergleichung von der Wärmeleitungsgleichung unterscheidet, zu deutlichen Unterschieden dieser beiden Gleichungen führt.

7. Kolmogerovgleichung.

$$\dot{u} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

Sie ist eine Verallgemeinerung der Wärmeleitungsgleichung.

8. Fokker–Planckgleichung.

$$\dot{u} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 a_{ij}(t,x) u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i(t,x) u}{\partial x_i} = 0.$$

Die Fokker–Planckgleicung verhält sich zu der Kolmogorovgleichung wie die Liouvillegleichung zu der Transportgleichung.

9. Wellengleichung.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = 0.$$

10. Allgemeine Wellengleichung.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

Sie verallgemeinert die Wellengleichung genauso wie der Kolmogorovgleichung die Wärmeleitungsgleichung verallgemeinert.

11. Airysche Differentialgleichung.

$$\dot{u} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Hier ist u eine gesuchte Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

12. Balkengleichung.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

2.1.2 Nichtlineare Differentialgleichungen

1. Eikonalgleichung.

$$|\nabla u| = 1.$$

2. Nichlineare Poissongleichung.

$$-\triangle u = f(u).$$

Hier ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

3. Minimalflächengleichung.

$$\nabla \cdot \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 0.$$

Die Graphen von Lösungen der Minimalflächengleichung sind sogneannte Minimalflächen. Das heisst dass sich die Fläche solcher Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$ unter infinitesimalen Deformationen nicht ändert. Seifenhäute sind Beispiele solcher Minimalflächen.

4. Monge–Amperegleichung.

$$\det\left(\nabla\nabla^t u\right) = f.$$

Hier ist f eine gegebene Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und u die gesuchte Funktion. Dabei steht auf der linken Seite die Determinante der Matrix der zweiten Ableitungen von u.

5. Hamilton–Jacobigleichung.

$$\dot{u} + H(\nabla u, x) = 0.$$

Hierbei ist H eine gegebene Hamiltonfunktion auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, und u die gesuchte Funktion auf einem entsprechenden Gebiet in $\mathbb{R}^n$.

6. Skalare Erhaltungsgleichung.

$$\dot{u} + \nabla \cdot F(u).$$

Hierbei ist F eine gegebne $\mathbb{R}^n$–wertige Funktion und u die gesuchte Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Diese Differentialgleichung hat zur Folge, dass sich das Intgeral von u über ein gegebenes Teilgebiet von $\mathbb{R}^n$ so mit der Zeit ändert, wie das Integral von $F(u)$ über den Rand des Gebietes. Deshalb lässt sich $F(u)$ wie eine Flussdichte der Erhaltungsgröße u interpretieten.

7. Burgers Gleichung.

$$\dot{u} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Hier ist u eine gesuchte Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sie ist ein Beispiel für eine skalare Erhaltungsgleichung mit $F(u) = u^2/2$.

8. Reaktions–Diffusionsgleichung.

$$\dot{u} - \triangle u = f(u).$$

Hier ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion.

9. Poröse Mediengleichung.

$$\dot{u} - \triangle\left(u^\gamma\right) = 0.$$

Hier ist $\gamma \geq 1$ ein gegebener Exponent. Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung eines idealen Gases in einem porösen Medium wie Sand.

10. Nichtlineare Wellengleichung.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = f(u).$$

Hier ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion.

11. Korteweg–de–Vries–Gleichung.

$$4\dot{u} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Diese Gleichung besitzt eine sogenannte Laxdarstellung, d.h. sie läßt sich schreiben als

$$\dot{L} = [A, L]$$

mit zwei gewöhnlichen Differentialoperatoren

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u \qquad\qquad A = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3u}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Daraus entwickelte sich eine neues Verständnis von integrablen Sytemen.

2.1.3 Lineare Differentialgleichungssysteme

1. Lineare Elastizität.

$$\mu\triangle u + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) = 0.$$

Hier sind $\lambda > 0$ und $\mu > 0$ gegebene positive Konstanten und u die gesuchte $\mathbb{R}^n$–wertige Funktion.

2. Elstische Wellen.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu\triangle u - (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) = 0.$$

3. Maxwellgleichungen.

$$\begin{aligned} \dot{E} - \nabla \times B &= -4\pi j & \qquad \dot{B} + \nabla \times E &= 0 \\ \nabla \cdot E &= 4\pi\rho & \qquad \nabla \cdot B &= 0. \end{aligned}$$

Hier sind die Ladungsverteilung ρ und die Stromverteilung j gegebene reelle bzw. $\mathbb{R}^3$–wertigen Funktionen auf der Raumzeit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ und das elektrische Feld E und das Magnetfeld B die gesuchten $\mathbb{R}^3$–wertige Funktionen. Die gegebenen Funktionen erfüllen außerdem einen Erhaltungssatz

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot j = 0,$$

weil j ja gerade die Ladungsflussdichte ist.

4. Cauchy–Riemanngleichung.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \beta \partial v \partial y \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Hier sind $(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (u, v)$ Realteil und Imaginärteil einer holomorphen Funktion auf (Teilgebieten) der komplexen Ebene $x + \imath y = z \in \mathbb{C}$.

2.1.4 Nichtlineare Differentialgleichungssysteme

1. Eulergleichung.

$$\dot{u} + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0 \qquad\qquad \nabla \cdot u = 0.$$

Hier ist $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen reibungsfreien Flüssigkeit und p der Druck.

2. Navier–Stokesgleichung.

$$\dot{u} + u \cdot \nabla u - \triangle u + \nabla p = 0 \qquad\qquad \nabla \cdot u = 0.$$

Hier ist $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen viskosen Flüssigkeit und p der Druck.

3. Einsteins Feldgleichungen.

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \kappa T_{ij}.$$

Hier ist der Energieimpulstensor einer gebenen Massenverteilung auf der Raumzeit und g_{ij} ist die entsprechende gesuchte Metrik auf der Raumzeit. Diese Metrik g_{ij} ist eine Lorentzmetrik auf der Raumzeit, d.h. eine symmetrische Bilineraform auf dem Tangentialraum der Raumzeit mit der Signatur $(1, 3)$. R_{ij} ist die dazugehörige Riccikrümmung und R die skalare Krümmung.

$$\begin{aligned}
\Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{3} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \\
R_{ij} &= \sum_{k=0}^{3} g^{kl} \left(\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^k_{ik}}{\partial x^j} + \sum_{l=0}^{3} \left(\Gamma^k_{lk} \Gamma^l_{ij} - \Gamma^k_{lj} \Gamma^l_{ik} \right) \right) \\
\left(g^{ij} \right) &= \left(g_{ij} \right)^{-1} \text{ inverse Metrik} \\
R &= \sum_{i,j=0}^{3} g^{ij} R_{ij}.
\end{aligned}$$

5. Riccifluss.

$$\dot{g}_{ij} = -2R_{ij}.$$

Diese Differentialgleichung beschreibt auf einer beliebigen Riemannschen Mannigfaltigkeit eine diffusionsartigen Fluss der Metrik. Man kann also erwarten, dass sich Inhomogenitäten und Isotropien der Metrik ausgleichen und dieser Fluss nach längeren Zeiten zu Metriken führt die sehr große Isometriegruppen haben. Aufgrund dieser Erwartung hat Hamilton vor rund 30 Jahren ein Programm entworfen um mit Hilfe dieses Flusses die Geometrisierungsvermutung von Thurston zu beweisen. Diese besagt grob gesprochen, dass sich jede kompakte 3–Mannigfaltigkeit in Teile zerlegen läßt, auf denen eine Isometriegruppe transitiv wirkt. Hamilton versucht nun durch eine Kontrolle über das Langzeitverhalten des Ricciflusses, auf beliebigen kompakten 3–Mannigkaltigkeiten solche Metriken zu konstruieren. Seit rund einem Jahr sieht es so aus, dass der Mathematiker Perelman die letzten Hürden in diesem Programm überwunden hat. Das wäre ein großer Erfolg, für die Behandlung von geometrischen Fragen mit Hilfe von partiellen Differentialgleichungen.

2.2 Der Gaußsche Satz

Satz 2.2. *(Gaußscher Satz oder Divergenzsatz) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein offenes Gebiet mit stetig differenzierbarem Rand und f eine auf $\overline{\Omega}$ stetige $\mathbb{R}^d$-wertige Funktion, die auf Ω stetig differenzierbar ist, und deren partielle Ableitungen auf Ω Lebesgue–integrabel sind. Dann gilt:*

$$\int\limits_{\Omega} \nabla \cdot f d\mu = \int\limits_{\partial\Omega} f \cdot N d\sigma$$

Hierbei ist N die äußere Normale auf dem Rand $\partial\Omega$, $d\mu$ ist das d–dimensionale Lebesguemaß und σ ist das auf dem Rand $\partial\Omega$ induzierte Maß.

Dieser Satz ist für Gebiete Ω mit glattem Rand $\partial\Omega$ ein Spezialfall von dem Satz von Stokes:

Satz 2.3. *(Satz von Stokes) Sei Ω eine orientierte d–dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial\Omega$ und ϕ eine stetig differenzierbare $(d-1)$–Differentialform auf Ω, deren äußere Ableitung $d\phi$ auf Ω integrabel ist, dann gilt*

$$\int\limits_{\Omega} d\phi = \int\limits_{\partial\Omega} \phi.$$

Dabei ist die Orientierung von $\partial\Omega$ von der äußeren Normalen und der Orientierung von Ω gegeben: Die Verjüngung mit der äußeren Normalen einer nicht verschwindenden d–Differenrtialform auf Ω ergibt eine nicht verschwindende $(d-1)$–Differentialform auf $\partial\Omega$. Deshalb induziert die äußere Normale und die Orientierung von Ω eine Orientierung von $\partial\Omega$.

Der Zusammenhang mit dem Gaußsche Satz ergibt sich durch

$$\phi = \sum_{i=1}^{d}(-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \ldots \hat{dx_i} \ldots \wedge dx_d \qquad d\mu = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d \qquad d\sigma = i_N(d\mu).$$

Für alle $i = 1, \ldots, d$ gilt offenbar $dx_i|_{\partial\Omega} = dx_i - \langle N, dx_i\rangle \sum_{j=1}^{d} N_j dx_j$. Dann gilt auch

$$\begin{aligned} dx_1 \wedge \ldots \hat{dx_i} \ldots \wedge dx_d\Big|_{\partial\Omega} &= dx_1 \wedge \ldots \hat{dx_i} \ldots \wedge dx_d - \\ &- \sum_{j\neq i} N_j dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge (N_i dx_i + N_j dx_j) \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \hat{dx_i} \ldots \wedge dx_d = \\ \left(1 - \sum_{j\neq i} N_j^2\right) dx_1 \wedge \ldots \hat{dx_i} \ldots \wedge dx_d &+ N_i \sum_{j\neq i} (-1)^{i-j} N_j dx_1 \wedge \ldots \hat{dx_j} \ldots \wedge dx_d = \\ &= (-1)^{i-1} N_i \sum_{j=1}^{d} (-1)^{j-1} N_j dx_1 \wedge \ldots \hat{dx_j} \ldots \wedge dx_d = (-1)^{i-1} N_i d\sigma. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir $N_1^2 + N_2^2 + \ldots + N_d^2 = 1$ benutzt. Daraus folgt

$$\nabla \cdot f d\mu = d\phi \text{ und} \qquad\qquad f \cdot N d\sigma = \phi|_{\partial\Omega}.$$

Deshalb folgt der Gaußsche Satz aus dem Satz von Stokes.

2.3 Existenz von Lösungen

Wir wollen zur Erläuterung ein Beispiel einer Differentialgleichung geben, das keine Lösung besitzt. Dieses Beispiel ist eine Vereinfachung (von Nirenberg) eines Beispieles von H. Lewy: Gegeben ist eine komplexwertige Funktion f auf einem Teilgebiet von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und gesucht ist eine komplexwertige Funktion u auf demselben Teilgebiet, die folgende lineare Differentialgleichung erster Ordnung erfüllt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \imath x \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y).$$

Wir werden zeigen, dass diese Differentialgleichung für bestimmte Wahlen von f in keiner Umgebung der $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung besitzt. Genaugenommen wollen wir zeigen, dass für eine glatte Funktion f, die folgenden beiden Bedingungen erfüllt, es in keiner Umgebung von $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ eine einmal stetig differenzierbare Lösung u gibt:

(i) $f(-x,y) = f(x,y)$

(ii) Es gibt eine Nullfolge $\rho_n \downarrow 0$, so dass f auf einer Umgebung der Kreise $\partial B(0,\rho_n)$ verschwindet, die Integrale $\int\limits_{B(0,\rho_n)} f(x,y)dxdy$ aber ungleich Null sind.

1. Schritt: Aufgrund der Bedingung (i) ist mit $u(x,y)$ auch $-u(-x,y)$ und $w(x,y) = \frac{1}{2}(u(x,y) - u(-x,y))$ eine Lösung. Deshalb können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $u(-x,y) = -u(x,y)$ gilt.
2. Schritt: Jede solche Lösung u verschwindet auf den Kreisen $\partial B(0,\rho_n)$. Um das einzusehen wählen wir kleine Ringe A und transformieren folgendermaßen auf Gebiete $\tilde{A}$ im $\mathbb{R}^2$:

$$A \to \tilde{A}, \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} (x^2/2, y) & \text{für } x \geq 0 \\ (-x^2/2, y) & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Diese Abbildungen sind offenbar Homöomorphismen von A auf $\tilde{A}$. Auf dem Teilgebiet $\tilde{A}_+ = \left\{(s,y) \in \tilde{A} \mid s > 0\right\}$ ist aber die Funktion $\tilde{u}(s,y) = u(x^2/2, y)$ holomorph:

$$2\bar{\partial}\tilde{u} = \frac{\partial \tilde{u}(s,y)}{\partial s} + \imath \frac{\tilde{u}(s,y)}{\partial y} = \frac{dx}{ds}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \imath \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \imath x \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) = 0.$$

Wegen dem 1. Schritt verschwindet sie im Grenzwert $s \to 0$. Dann muss $\tilde{u}$ auf $\tilde{A}_+$ verschwinden, und wegen dem 1. Schritt auf $\tilde{A}$. Damit verschwindet u auf A.
3. Schritt: Wegen dem Gaußschen Satz gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{B(0,\rho_n)} f dxdy &= \int\limits_{B(0,\rho_n)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \imath x \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx \wedge dy \\ &= \int\limits_{B(0,\rho_n)} \nabla \cdot \begin{pmatrix} u \\ \imath x u \end{pmatrix} dxdy = \int\limits_{\partial B(0,\rho_n)} \begin{pmatrix} u \\ \imath x u \end{pmatrix} \cdot n(x,y) d\sigma(x,y) = 0, \end{aligned}$$

im Wiederspruch zu (ii). Also gibt es keine einmal stetig differenzierbare Lösung.

Man kann aus diesem Beispiel sofort folgern, dass die reelle Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \imath x \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \imath x \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} + \imath x \frac{\partial}{\partial y}\right) u = \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = f$$

keine viermal stetig differenzierbare Lösung hat.

2.4 Regularität von Lösungen

Unter der Regularität einer Lösung einer Differentialgleichung versteht man die lokalen Eigenschaften der entsprechenden Funktionen. Wir werden nur solche Lösungen betrachten, die mindestens Distributionen sind. In diesen enthalten sind messbare Funktionen bzw. allgemeiner L^p–Funktionen. Diese enthalten dann auch solche Funktionen deren erste oder n–te Ableitungen ebenfalss solche L^p–Funktionen sind. Die Räume solcher Funktionen werden Sobolevräume genannt. In diesen Funktionen sind dann die glatten Funktionen enthalten. Und schließlich kommen die analytischen Funktionen mit der höchsten Regularität.

2.5 Anfangswert und Randwertprobleme

Bei der Untersuchung von Lösungen von partiellen Differentialgleichungen sterben wir eine möglichst vollständige Charakterisierung aller Lösungen an. Im Allgemeinen haben aber partielle Differentialgleichungen unendlich viele Lösungen. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen wissen wir, das eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung n–ter Ordnung einen n–dimensionalen Lösungsraum hat. Eine Lösung ist dann eindeutig bestimmt durch die Vorgabe der ersten n Ableitungen an einem Punkt. Für partielle Diefferentialgleichungen streben wir nun eine analoge Charakterisierung an. Weil die Lösungen aber auf höherdimensionalen Gebieten definiert sind, liegt es nahe, dass die Vorgabe von Funktionswerten und eventuell einigen Ableitungen auf dem Rand des Gebietes, die Lßong eindeutig festlegt. Solche Vorgaben nennt man Randwertprobleme. Bei Evolutionsgleichungen legt die Physik nahe, als Randwert einen räumlichen Schnitt zu wählen, also die Lösung zu einem gegeben Zeitpunkt festzulegen. Solche Randwertprobleme heißen dann Anfangswertprobleme. In einem zweiten Schritt soll dann noch betimmt werden für welche Randwerte bzw. Anfangswerte auch eine Lösung existiert. Wenn es gelingt diese beiden Fragen zu beantworten sind alle Lßungen eindeutig durch die möglichen Randwerte bzw. Anfangswerte klassifiziert.