Kapitel 6

Wellengleichung

In diesem Abschnitt betrachten wir die homogene und inhomogene Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = 0$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = f$ auf Teilgebieten von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Es ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Matrix der zweiten Ableitung hat im Gegensatz zur Laplacegleichung die Signatur $(1, n)$, ist also weder positiv noch negativ definit. Solche Differentialgleichungen werden hyperbolisch genannt. Ihr Lösungsverhalten unterscheidet sich deutlich von dem Lösungsverhalten von elliptischen Gleichungen. Sie beschreiben in der Physik solche Effekte, die sich nur mit endlicher Geschwindigkeit in Raum und Zeit ausbreiten, wie z.B. elektromagnetische Wellen und Gravitationswellen.

6.1 D'Alembert's Formel für $n = 1$

Wir wollen zunächst folgendes Anfangswertproblem lösen

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & & & &\text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\\
&u(x,0) = g(x) & &\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) & &\text{für} \quad x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

wobei g und h gegebene Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind. Wenn wir diese Differentialgleichung als ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem von $C^2(\mathbb{R})$–wertigen Funktionen in Abhängigkeit von t auffassen, ist aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichung zu erwarten, dass jedes solches Anfangswertproblem genau eine Lösung besitzt.

Für $n = 1$ faktorisiert der Wellenoperator (oder auch d'Alembertoperator)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Sei also
$$v(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t).$$

Dann erfüllt v die lineare Differentialgleichung erster Ordnung $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Das ist eine Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten, die die eindeutige Lösung

$$v(x,t) = a(x-t) \quad \text{mit} \quad a(x) = v(x,0)$$

besitzt. Also erfüllt $u(x,t)$ die inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = a(x-t).$$

Diese inhomogene Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten besitzt die Lösung

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int\limits_0^t a(x + (t-s) - s) ds + b(x+t) \\ &= \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} a(y) dy + b(x+t) \qquad\qquad \text{mit} \quad b(x) = u(x,0). \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingungen $u(x,0) = g(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x)$ ergeben

$$b(x) = g(x) \quad \text{und} \qquad a(x) = v(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = h(x) - g'(x).$$

Setzen wir das in unsere Lösungen ein, so erhalten wir

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} (h(y) - g'(y))\, dy + g(x+t)$$

Also ist die Lösung gegeben durch

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} h(y) dy.$$

Damit haben wir aus der Lösung der homogenen und inhomogenen Transportgleichung die d'Alembertsche Formel bestimmt:

d'Alembertsche Formel 6.1. *Sei g eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$ und h eine einmal stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$. Dann ist*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} h(y)dy$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$, und die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & & & &\textit{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ &u(x,0) = g(x) & &\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) & &\textit{für} \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

An der d'Alembertschen Formel können wir erkennen, dass die allgemeine Lösung der Wellengleichung für $n = 1$ sich schreiben lässt als

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t).$$

Umgekehrt ist auch jede Funktion dieser Form eine Lösung der Wellengleichung. Das liegt daran, dass der Wellenoperator faktorisiert in die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0$$

deren Lösungen gerade allgemeine Funktionen $F(x+t)$ und $G(x-t)$ sind.

Außerdem sind die Lösungen des Anfangswertproblems genau dann k–mal stetig differenzierbar, wenn g k–mal stetig differenzierbar ist und h $(k-1)$–mal. Die Regularität dieses Anfangswertproblems verbessert sich also nicht mit zunehmender Zeit, im Gegensatz zu der Wärmeleitungsgleichung.

Aus der d'Alembertschen Formel folgt mit Hilfe einer Spiegelung auch die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & &\text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & &u(0,t) = 0 & &\text{für} \quad t \in \mathbb{R}_0^+ \\ &u(x,0) = g(x) & &\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) & & & &\text{für} \quad x \in \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

Wir können u, g und h als ungerade Funktionen auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ ausdehnen durch:

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & \text{für } x \geq 0 \\ -u(-x,t) & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$
$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } x \geq 0 \\ -g(-x) & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$
$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{für } x \geq 0 \\ -h(-x) & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Dann löst $\tilde{u}(x,t)$ genau dann das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$
$$\tilde{u}(x,0) = \tilde{g}(x) \qquad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x,0) = \tilde{h}(x) \qquad \text{für} \quad x \in \mathbb{R},$$

wenn u das obige Anfangswertproblem löst. Weil die Funktionen $\tilde{u}$, $\tilde{g}$ und $\tilde{h}$ ungerade sind bezüglich x, verschwindet für $x \leq t$ das erste Integral auf der rechten Seite von

$$\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)dy = \int_{x-t}^{t-x} \tilde{h}(y)dy + \int_{t-x}^{t+x} \tilde{h}(y)dy.$$

Also ist die Lösung gegeben durch

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t) + \int\limits_{x-t}^{x+t} h(y)dy\right) & \text{für } 0 \leq t \leq x \\ \frac{1}{2}\left(g(t+x) - g(t-x) + \int\limits_{t-x}^{t+x} h(y)dy\right) & \text{für } 0 \leq x \leq t. \end{cases}$$

Zu beachten ist hierbei, dass auf den Rand bei $x = 0$ zulaufende Wellen am Rand refelktiert werden und wieder zurücklaufen.

6.2 Sphärische Mittelwerte in der Wellengleichung

Wir werden jetzt sehen, dass die sphärischen Mittelwerte der Wellengleichung eine Differentialgleichung erüllen, die wir später lösen wollen und daraus die allgemeine Lösung folgenden Anfangswertproblems ableiten wollen: Gesucht ist die Lösung u der

Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = 0$ auf $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, die $u(x,0) = g(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x)$ erfüllt. Sei also für alle $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, r > 0$

$$U(x,r,t) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} u(y,t) d\sigma(y) = \fint\limits_{\partial B(x,r)} u(y,t) d\sigma(y).$$

Hier bezeichnet das Symbol $\fint$ den Mittelwert auf dem Gebiet Ω, also das Integral über das Gebiet Ω geteilt durch das Volumen von Ω. Analog definieren wir

$$G(x,t) = \fint\limits_{\partial B(x,r)} g(y) d\sigma(y) \quad \text{und} \qquad H(x,t) = \fint\limits_{\partial B(x,r)} h(y) d\sigma(y).$$

Lemma 6.2. *Wenn $u \in C^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+_o)$ eine m-mal stetig differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t} - \triangle u = 0 & \qquad \textit{auf} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ & \qquad \textit{mit} \\ u(x,0) = g(x) & \qquad \textit{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) & \qquad \textit{ist,} \end{aligned}$$

dann ist für festes $x \in \mathbb{R}^n$ das sphärische Mittel $U(x,r,t)$ eine m-mal differenzierbare Funktion auf $(r,t) \in \mathbb{R}^+_0 \times \mathbb{R}^+_0$, die folgendes Anfangswertproblem der Euler-Poisson-Darbouxgleichung löst:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,r,t) - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,r,t) - \frac{n-1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}(x,r,t) = 0 \quad \textit{auf} \quad (r,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

$$U(x,r,0) = G(x,r) \quad \textit{und} \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x,r,0) = H(x,r)$$

Beweis: Es gilt:

$$U(x,r,t) = \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B(0,1)} u(r \cdot y + x, t) d\sigma(y).$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r}(x,r,t) &= \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B(0,1)} \nabla_x u(r \cdot y + x, t) \cdot y d\sigma(y) \\ &= \frac{r}{n\omega_n} \int\limits_{B(0,1)} \triangle_x u(ry + x, t) d^n y \\ &= \frac{r}{n} \fint\limits_{B(x,r)} \triangle u(y,t) d^n y. \end{aligned}$$

Also ist die partielle Ableitung eines sphärischen Mittelwertes nach dem Radius r gleich $\frac{r}{n}$ mal dem Mittelwert des Laplaceoperators angewandt auf die ursprüngliche Funktion über den entsprechenden Ball. Insbesondere gilt $\lim\limits_{r\to 0}\frac{\partial U}{\partial r}(x,r,t)=0$. Analog gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,r,t) &= \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int\limits_{B(x,r)}\triangle u(y,t)d^n y\\ &= \frac{1-n}{n\omega_n r^n}\int\limits_{B(x,r)}\triangle u(y,t)d^n y+\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int\limits_{\partial B(x,r)}\nabla u(y,t)d\sigma(y).\\ &= \left(\frac{1}{n}-1\right)\fint\limits_{B(x,r)}\triangle u(y,t)d^n y+\fint\limits_{\partial B(x,r)}\triangle u(y,t)d\sigma(y).\end{aligned}$$

Deshalb ist die partielle Ableitung eines Mittelwertes über einen Ball nach dem Radius r gleich $(\frac{1}{n}-1)$ mal diesem Mittelwert plus dem entsprechenden sphärischen Mittelwert. Insbesonder gilt $\lim\limits_{r\to 0}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,r,t)=\frac{1}{n}\triangle u(x,t)$. Durch diese beiden Formeln können wir alle partiellen Ableitungen von den sphährischen Mittelwerten durch Mittelwerte von Potenzen des Laplaceoperators angewandt auf die ursprüngliche Funktion über Sphähren und Bälle ausdrücken. Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}r^{n-1}\frac{\partial U}{\partial r}(x,r,t) &= \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{n\omega_n}\int\limits_{B(x,r)}\triangle u(y,t)d^n y \qquad = \frac{1}{n\omega_n}\int\limits_{\partial B(x,r)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y,t)d\sigma(y)\\ &= r^{n-1}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,r,t).\end{aligned}$$

Dann folgt $$r^{n-1}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=(n-1)r^{n-2}\frac{\partial U}{\partial r}+r^{n-1}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}.$$ **q.e.d.**

6.3 Lösung für $n = 3$

Es wird sich herausstellen, dass die Wellengleichung für ungerade Dimensionen sich durch die sphärischen Mittel auf die eindimensionale Wellengleichung zurückführen lassen, aber nicht für gerade Dimensionen. Deshalb wollen wir als nächstes die dreidimensionale Wellengleichung lösen.

In diesem Fall müssen wir das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}=0 \quad \text{auf} \quad (r,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$$

$$U = G \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial t} = H \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^+ \times \{t = 0\}.$$

lösen. Die Transformation $\tilde{U} = rU$ überführt es in das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{auf } (r,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \qquad & \tilde{U} = 0 \quad \text{auf } (r,t) \in \{0\} \times \mathbb{R}_0^+ \\ \tilde{U} = \tilde{G} = rG \quad \text{und} \qquad & \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = \tilde{H} = rH \quad \text{auf } (r,t) \in \mathbb{R}^+ \times \{0\}. \end{aligned}$$

Dieses Anfangswertproblem haben wir aber schon gelöst. Die Lösung ist:

$$\tilde{U}(x,r,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{G}(x, r+t) - \tilde{G}(x, t-r)\right) + \frac{1}{2}\int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(x,y)dy \quad \text{für } 0 \le r \le t.$$

Wegen der Stetigkeit von $u(x,t)$ gilt

$$u(x,t) = \lim_{r \downarrow 0} U(x,r,t) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{\tilde{U}(x,r,t)}{r}.$$

Also erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}^3, t > 0$.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \lim_{r\downarrow 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{G}(x,t+r) - \tilde{G}(x,t-r)}{r}\right) && + \lim_{r\downarrow 0} \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(y)dy \\ &= \frac{\partial \tilde{G}(x,t)}{\partial t} && + \tilde{H}(x,t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} t \fint_{\partial B(x,t)} g(y)d\sigma(y) && + t \fint_{\partial B(x,t)} h(y)d\sigma(y) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} t \fint_{\partial B(0,1)} g(x+tz)d\sigma(y) && + t \fint_{\partial B(x,t)} h(y)d\sigma(y) \\ &= \fint_{\partial B(x,t)} (th(y) + g(y))\, d\sigma(y) && + t \fint_{\partial B(x,t)} \nabla_y g(y) \cdot (y-x)d\sigma(y) \end{aligned}$$

Das ist die sogenannte Kirchhoff'sche Formel für das Anfangswertproblem der Wellengleichung in drei Dimensionen.

6.4 Lösung für $n = 2$

Für $n = 2$ lässt sich die Euler-Poisson-Darbouxgleichung nicht in die eindimensionale Wellengleichung überführen. Stattdessen wollen wir das Anfangswertproblem der Wellengleichung für $n = 2$ als ein Anfangswertproblem der Wellengleichung für $n = 3$ auffassen, wobei die Anfangsdaten dann nur von den Koordinaten x_1 und x_2 und nicht von der Koordinate x_3 abhängen: Sei also $\bar{u}(x,t)$ auf $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial^2 \bar{u}(x,t)}{\partial t^2} - \triangle \bar{u}(x,t) = 0 \qquad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$$
$$\bar{u}(x,0) = g(\bar{x}) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x,0) = h(\bar{x}) \qquad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Hierbei ist $\bar{x} = (x_1, x_2)$ für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Der Mittelwert über $\partial B(x,r)$ einer Funktion f, die nur von $\bar{x}$ abhängt, hängt auch nur von $\bar{x}$ ab:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \fint_{\partial B(x,r)} f(y) d\sigma(y) = \frac{\partial}{\partial x_3} \fint_{\partial B(0,r)} f(x+y) d\sigma(y) = \fint_{\partial B(0,r)} \frac{\partial f(x+y)}{\partial x_3} d\sigma(y) = 0.$$

Also ist $\bar{u}(x,t)$ von der Form $u(\bar{x},t)$ und diese Funktion $u(\bar{x},t)$ ist die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems für $n = 2$. Diese Funktion wollen wir jetzt ausrechnen. Sei $\gamma(y) = \sqrt{t^2 - (y-\bar{x})^2}$ als Funktion auf dem zweidimensionalen Ball $B(\bar{x},t)$ die Länge der Koordinate x_3, so dass (y, x_3) auf dem Rand des Balles $B\left((\bar{x},0),t\right)$ liegen. Dann können wir die beiden Hemispähren $\{(y, \pm\gamma(y) \in \partial B(x,t) \mid y \in B(\bar{x},t)\}$ durch den Ball $y \in B(\bar{x},t)$ parametrisieren. Die entsprechenden Maße transformieren sich wie $d\sigma(y, \pm\gamma(y) = \sqrt{1 + (\nabla_y \gamma(y))^2} dy^2$ (Übungsaufgabe):

$$\fint_{\partial B(x,t)} g(\bar{y}) d\sigma(y) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B(x,t)} g(\bar{y}) d\sigma(y) = \frac{2}{4\pi t^2} \int_{B(\bar{x},t)} g(y) \sqrt{1 + (\nabla_y \gamma(y))^2} d^2 y$$

$$\text{mit} \quad \sqrt{1 + (\nabla_y \gamma(y))^2} = \sqrt{\frac{t^2 - (y-\bar{x})^2 + (y-\bar{x})^2}{t^2 - (y-\bar{x})^2}} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - (y-x)^2}}.$$

Also haben wir

$$\fint_{\partial B(x,t)} g(\bar{y}) d\sigma(y) = \frac{1}{2\pi t} \int_{B(\bar{x},t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - (y-\bar{x}^2}} d^2 y = \frac{t}{2} \fint_{B(\bar{x},t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - (y-\bar{x})^2}} d^2 y.$$

Dann erhalten wir für $u(\bar{x},t)$ für alle $(\bar{x},t)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
u(\bar{x},t) &= \frac{\partial}{\partial t} t \fint_{\partial B(x,t)} g(\bar{y})d\sigma(y) & &+ t \fint_{\partial B(x,t)} h(\bar{y})d\sigma(y)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\frac{t^2}{2} \fint_{B(\bar{x},t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2-(y-\bar{x})^2}}d^2y & &+ \frac{t^2}{2}\fint_{B(\bar{x},t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2-(y-\bar{x}^2}}d^2y\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\frac{t}{2} \fint_{B(0,1)} \frac{g(\bar{x}+tz)}{\sqrt{1-z^2}}d^2z & &+ \frac{t^2}{2}\fint_{B(\bar{x},t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2-(y-\bar{x})^2}}d^2y\\
&= \frac{t}{2}\fint_{B(\bar{x},t)} \frac{g(y)+th(y)+\nabla_y g(y)(y-x)}{\sqrt{t^2-(y-\bar{x})^2}}d^2y.
\end{aligned}$$

Dies ist Poisson's Formel für die Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung in zwei Dimensionen. Diese Methode, die Lösung des Anfangswertproblems einer niedrigeren Dimension dadurch zu erhalten, dass wir dieses Anfangswertproblem in ein Anfangswertproblem eines höherdimensionalen Raumes verwandeln und dann zeigen, dass die entsprechende Lösung sich in die gesuchte Lösung zurückverwandeln lässt, wird Methode des Abstieges genannt. An dieser Formel können wir sofort ablesen, dass sich die Lösung in zwei Dimensionen mit allen Geschwindigkeiten ausbreiten, deren Längen kleiner als Eins oder gleich Eins sind. In einer und drei Dimensionen breiten sich die Lösungen dagegen nur mit den Geschwindigkeiten der Länge Eins aus. Dies legt nahe, dass wir die Lösung in einer Dimension nicht durch die Methode des Abstiegs aus der Lösung in zwei Dimensionen erhalten können. Woran liegt das ? (Übungsaufgabe)

6.5 Lösung in ungeraden Dimensionen

Wir können die Euler-Poisson-Darboux Gleichung wieder in die eindimensionale Wellengleichung transformieren. Zunächst benötigen wir

Lemma 6.3. *Sei ϕ eine $(k+1)$ mal stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$. Dann gilt für alle $k\in\mathbb{N}$*

(i) $\left(\frac{d}{dr}\right)^2\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1} r^{2k-1}\phi(r) = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^k r^{2k}\frac{d\phi}{dr}(r)$

(ii) $\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1} r^{2k-1}\phi(r) = \sum_{j=0}^{k-1}\beta_j^k r^{j+1}\frac{dj\phi}{drj}(r)$ *mit Konstanten β_j^k $(j=0,\ldots,k-1)$, die nicht von ϕ abhängen.*

(iii) $\beta_0^k = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1) = \frac{(2k-1)!}{2^{(k-1)}(k-1)!}$

Den Beweis mithilfe von vollständiger Induktion überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

Sei jetzt also $n \geq 3$ eine ungerade Dimension $n = 2k + 1$. Wir nehmen an, dass $u \in C^{k+1}(\mathbb{R}^{2k+1} \times \mathbb{R}_0^+)$ das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = 0 \qquad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$$

$$u(x,0) = g(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) \qquad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

löst. Dann definieren wir

$$\begin{aligned}
\tilde{U}(x,r,t) &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{2k-1} r^{2k-1} U(x,r,t) \\
\tilde{G}(x,r) &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{2k-1} r^{2k-1} G(x,r) \\
\tilde{H}(x,r) &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{2k-1} r^{2k-1} H(x,r)
\end{aligned}$$

Lemma 6.4. *Wenn $u \in C^{k+1}(\mathbb{R}^{2k+1} \times \mathbb{R}_0^+)$ das Anfangswertproblem der $(2k+1)$-dimensionalen Wellengleichung löst, dann löst $\tilde{U}(x,r,t)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^{2k+1}$ folgendes Anfangswertproblem der eindimensionalen Wellengleichung:*

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial r^2} = 0 \qquad \textit{für} \quad (r,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

$$\tilde{U}(x,r,0) = \tilde{G}(x,r) \quad \textit{und} \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t}(x,r,0) = \tilde{H}(x,r) \qquad \textit{für} \quad r \in \mathbb{R}^+.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial r^2}(x,r,t) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} r^{2k-1} U(x,r,t) \\
&= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k} r^{2k} \frac{\partial U}{\partial r}(x,r,t) \\
&= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} \left(r^{2k-1}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,r,t) + 2kr^{2k-2}\frac{\partial U}{\partial r}(x,r,t)\right) \\
&= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} r^{2k-1} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,r,t) \\
&= \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2}(x,r,t)
\end{aligned}$$

Hier haben wir $2k = n-1$ benutzt, und dass $U(x,r,t)$ das entsprechende Anfangswertproblem der Euler–Poisson–Darbouxgleichung löst. Wegen dem vorangehenden Lemma verschwindet $\tilde{U}(x,r,t)$ an der Stelle $r = 0$. **q.e.d.**

Die Lösung dieses Anfangswertproblems ist für alle $(x,r,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ mit $0 \le r \le t$ gleich

$$\tilde{U}(x,r,t) = \frac{1}{2}\Big(\tilde{G}(x,t+r) - \tilde{G}(x,t-r)\Big) + \frac{1}{2}\int\limits_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(y)dy.$$

Andererseits ist $u(x,t) = \lim_{r\to 0} U(x,r,t)$ und

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x,r,t) &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} r^{2k-1}U(x,r,t) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} \frac{\partial^j U}{\partial r^j}(x,r,t) \end{aligned}$$

Also ist

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0} U(x,r,t) = \lim_{r\to 0} \frac{\tilde{U}(x,r,t)}{\beta_0^k r}$$

Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung in ungerader Dimension gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{2^{k-1}(k-1)!}{(2k-1)!} \lim_{r\mapsto 0} \left(\frac{\tilde{G}(x,t+r) - \tilde{G}(x,t-r)}{2r} + \frac{1}{2r}\int\limits_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(y)dy \right) \\ &= \frac{2^{k-1}(k-1)!}{(2k-1)!} \left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(x,t) + \tilde{H}(x,t) \right). \end{aligned}$$

Satz 6.5. *Für ungerades $n \ge 3$ und $g \in C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n), h \in C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ ist die Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = 0 && \textit{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ &u(x,0) = g(x) \quad \textit{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) && \textit{für} \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+$ *gegeben durch*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{2^{\frac{n-3}{2}}(\frac{n-3}{2})!}{(n-2)!}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} \int\limits_{\partial B(x,t)} g(y)do(y) \\ &+ \frac{2^{\frac{n-3}{2}}(\frac{n-3}{2})!}{(n-2)!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} \int\limits_{\partial B(x,t)} h(y)do(y). \end{aligned}$$

Beweis Wir beweisen zunächst den Fall $g = 0$. Dann gilt wegen Lemma 6.3 (i)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{2^{\frac{n-3}{2}}(\frac{n-3}{2})!}{(n-2)!}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} \int\limits_{\partial B(x,t)} h(y)do(y) \\ &= \frac{2^{\frac{n-3}{2}}(\frac{n-3}{2})!}{(n-2)!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} t^{n-1}\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\partial B(x,t)} h(y)do(y) \\ &= \frac{2^{\frac{n-3}{2}}(\frac{n-3}{2})!}{(n-2)!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} t^{n-1}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B(0,1)} h(x+ty)do(y) \\ &= \frac{2^{\frac{n-3}{2}}(\frac{n-3}{2})!}{(n-2)!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{t^{n-1}}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B(0,1)} \nabla_x h(x+ty)\cdot y d^n y \\ &= \frac{2^{\frac{n-3}{2}}(\frac{n-3}{2})!}{(n-2)!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B(x,t)} \nabla_x h(y)\cdot n(y) d^n y \\ &= \frac{2^{\frac{n-3}{2}}(\frac{n-3}{2})!}{(n-2)!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{B(x,t)} \triangle h(y) d^n y \\ &= \frac{2^{\frac{n-3}{2}}(\frac{n-3}{2})!}{(n-2)!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{n\omega_n t} \int\limits_{\partial B(x,t)} \triangle h(y) do(y) \\ &= \frac{2^{\frac{n-3}{2}}(\frac{n-3}{2})}{(n-2)!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} \int\limits_{\partial B(x,t)} \triangle h(y) do(y) \\ &= \triangle u(x,t). \end{aligned}$$

Hier haben wir wieder den Gauß'schen Satz und bei der Differentiation eines Integrals über $B(x,t)$ nach t Polarkoordinaten benutzt. Wenn wir h durch g ersetzen und

$u(x,t)$ durch $\frac{\partial u}{\partial t}$ erhalten wir die Lösung für $h=0$. Also erfüllt auch diese Lösung die Wellengleichung. Mithilfe von Lemma 6.3 erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\partial}{\partial t} t \fint_{\partial B(x,t)} g(y)do(y) + t \fint_{\partial B(x,t)} h(y)do(y)\right) + \mathbf{O}(t) \\ &= g(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \lim_{t\to 0}\left(t \fint_{\partial B(x,t)} \triangle g(y)do(y) + \frac{\partial}{\partial t} t \fint h(y)do(y)\right) + \mathbf{O}(t) \\ &= h(x). \end{aligned}$$

q.e.d.

Wir erkennen an der Lösung, dass $u(x,t)$ nur von den Werten von g und h auf $\partial B(x,t)$ abhängt, also breiten sich alle Störungen tatsächlich mit der Geschwindigkeit 1 aus. Das wird Huygen's Prinzip genannt. Außerdem hängt $u(x,t)$ von höheren Ableitungen von g und h ab. Dies heisst, dass sich die Regularität also mit zunehmender Zeit in höheren Dimensionen verschlechtert, im Gegensatz zu der Wärmeleitungsgleichung, bei der sich die Regularität verbessert. Dies ist ein allgemeines Phänomen für hyperbolische Gleichungen.

6.6 Lösung der Wellengleichung für gerade Dimensionen

Wir benutzen jetzt wieder die Methode des Abstiegs, um aus den Lösungen in Dimensionen $2k+1$ die Lösungen in Dimensionen $2k$ zu erhalten. Entscheidend ist dabei, dass die Lösung von Anfangsdaten g und h, die nur von $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{2k})$ für $x = (x_1, \ldots, x_{2k+1})$ abhängen, auch nur von $\bar{x}$ abhängen, also ihre Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_{2k+1}}$ verschwinden. Da die Lösungen in Dimensionen $2k+1$ nur von den Funktionen

$$\fint_{\partial B(x,t)} g(y)do(y) \quad \text{und} \quad \fint_{\partial B(x,t)} h(y)dy$$

abhängen, folgt dies daraus, dass für eine Funktion f, die $\frac{\partial f}{\partial x_{2k+1}} = 0$ erfüllt, auch gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_{2k+1}} \fint_{\partial B(x,t)} f(y)do(y) = \fint_{\partial B(0,t)} \frac{\partial}{\partial x_{2k+1}} f(x+y)do(y) = 0$$

Deshalb ist die Lösung in Dimensionen $2k$ also durch Einschränkung auf den $\mathbb{R}^{2k} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2k+1}, x \mapsto (\bar{x}, 0)$ der Lösungen des Anfangswertproblems in Dimension $2k+1$ mit $\bar{g}(x) = g(\bar{x})$ und $\bar{h}(x) = h(x)$ gegeben. Für eine Funktion $\bar{f}(x)$ von dieser Form $\bar{f}(x) = f(\bar{x})$ gilt aber

$$\begin{aligned}
\fint_{\partial B(x,t)} \bar{f}(y) do(y) &= \frac{1}{(n+1)\omega_{n+1}} \int_{\partial B(x,t)} \bar{f}(y) do(y) \\
&= \frac{2}{(n+1)\omega_{n+1} t^n} \int_{B(\bar{x},t)} f(y)\sqrt{1 + (\nabla\gamma(y))^2} d^n y \\
&= \frac{2}{(n+1)\omega_{n+1} t^n} \int_{B(\bar{x},t)} \frac{f(y) d^n y}{\sqrt{t^2 - (y-\bar{x})^2}} \\
&= \frac{2t\omega_n}{(n+1)\omega_{n+1}} \fint_{B(\bar{x},t)} \frac{f(y) d^n y}{\sqrt{t^2 - (y-\bar{x})^2}}
\end{aligned}$$

Lösung der Wellengleichung in geraden Dimensionen 6.6. *Sei n eine gerade positive Zahl, $g \in C^{\frac{n+4}{2}}(\mathbb{R}^n)$ und $h \in C^{\frac{n+2}{2}}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung:*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = 0 && \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\
&u(x,0) = g(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) && \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \frac{n}{2}!} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} t^n \fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - (y-x)^2}} d^n y \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \frac{n}{2}!} \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} t^n \fint_{B(x,t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2 - (y-x)^2}} d^n y
\end{aligned}$$

Beweis Aus der Formel $\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n+2)}{2})}$ folgt dann $\frac{2^{\frac{n-2}{2}} \cdot \frac{n-2}{2}! 2\omega_n}{(n-1)!\omega_{n+1}} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \frac{n}{2}!}$ **q.e.d.**

Wir bemerken, dass in geraden Dimensionen $u(x,t)$ von den Werten von g und h auf $B(x,t)$ und nicht nur auf $\partial B(x,t)$ abhängt. Also breiten sich Störungen mit Geschwindigkeiten kleiner als 1 aus und nicht nur mit der Geschwindigkeit 1.

Außerdem können wir die Methode des Abstiegs nicht benutzen, um die Lösungen in den Dimensionen $2k-1$ aus den Lösungen in Dimensionen $2k$ zu erhalten. Die Lösungen $u(x,t)$ in Dimensionen $2k$, deren Anfangsdaten g und h nur von den Koordinaten $x_1,\ldots,x_{2k-1}$ abhängen, erfüllen nämlich nicht $\frac{\partial u}{\partial x_{2k}} = 0$. Deshalb ist die Einschränkung auf $\mathbb{R}^{2k-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ keine Lösung der Wellengleichung auf den $\mathbb{R}^{2k-1}$ (Übungsaufgabe).

6.7 Inhomogene Wellengleichung

Wieder können wir die Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = f && \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ &u(x,0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 && \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

mit Hilfe von Duhamel's Prinzip aus der Lösung des homogenen Wellengleichung erhalten: Für alle $s \in \mathbb{R}^+$ sei $u(x,t,s)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = 0 && \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (s,\infty) \\ &u(x,s,s) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,s,s) = f(x,s) && \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Dann ist $u(x,t) = \int\limits_0^t u(x,t,s)ds$ eine Lösung der des obigen Anfangswertproblems der inhomogenen Wellengleichung. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(u(x,t,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(x,t,s)ds\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(x,t,s)ds \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,t,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t,s)ds \\ &= f(x,t) + \int\limits_0^t \triangle u(x,t,s)ds \\ &= f(x,t) + \triangle u(x,t). \end{aligned}$$

Die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = f \qquad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$$
$$u(x,0) = g(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) \qquad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ist dann die Summe von obiger Lösung der inhomogenen Wellengleichung und der Lösung des entsprechenden homogenen Anfangswertproblems. Die Wellengleichung ist offensichtlich invariant unter der Zeitspiegelung $t \to -t$. Deshalb lassen sich aus unseren Formeln für die Lösung des Anfangswertproblems auch solche für das "Endwertproblem"

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = f \qquad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^-$$
$$u(x,0) = g(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) \qquad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

gewinnen. Wir können also nicht nur von der Gegenwart aus in die Zukunft rechnen, sondern auch zurück in die Vergangenheit. Die erste Lösung wird avancierte Lösung und die zweite retardierte Lösung genannt. Beide Lösungen zusammen ergeben eine Lösung auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, die nur durch $u(x,0)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ festgelegt sind.

6.8 Energiemethoden

Hyperbolische Gleichungen erfüllen kein Maximumprinzip. Damit eine Lösung einer homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung im Inneren kein Maximum haben kann, darf die Matrix der Ableitungen zweiter Ordnung nicht negativ definiert werden können. Dies wird aber nur durch eine elliptische Differentialgleichung ausgeschlossen. Allerding lassen sich die Energiemethoden auch auf hyperbolische Differentialgleichungen übertragen und damit die Eindeutigkeit des Anfangswertproblems zeigen:

Eindeutigkeit der Lösungen der Wellengleichung 6.7. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann besitzt folgendes Anfangswertproblem der Wellengleichung*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u &= f && \textit{auf} \quad \Omega \times (0,T] \\ u(x,0) &= g(x,t) && \textit{auf} \quad \Omega \times \{t=0\} \qquad \textit{und auf} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= h(x) && \textit{auf} \quad \Omega \times \{t=0\} \end{aligned}$$

höchstens eine Lösung.

Beweis: Die Differenz zweier Lösungen löst das analoge homogene Anfangswertproblem mit $f = g = h = 0$. Von einer solchen Lösung definieren wir die Energie als

$$e(t) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 + (\nabla u(x,t))^2 \right) d^n x.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla u(x,t) \right) \nabla u(x,t) \right) d^n x \\ &= \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \triangle u(x,t) \right) d^n x = 0 \end{aligned}$$

Hier haben wir einmal partiell integriert (den Gaußschen Satz angewendet). Aufgrund der Anfangsbedingungen erfüllt $e(0) = 0$. Also ist $e(t) = 0$ für alle $t > 0$. Dann folgt $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ und $\nabla u(x,t) = 0$. Also ist u konstant. Dann folgt wieder wegen den Anfangsbedingungen $u = 0$ auf $\Omega \times \mathbb{R}^+$. **q.e.d.**

Zuletzt noch ein einfacher Beweis, dass sich Störungen nur mit Geschwindigkeiten kleiner als 1 ausbreiten

Satz 6.8. *Wenn $u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ auf $B(x_0, t_0)$ bei $t = 0$. Dann ist $u = 0$ auf dem Kegel $\{(x,t) \mid |x - x_0| \leq t_0 - t, t > 0\}$.*

Beweis: Sei

$$e(t) = \frac{1}{2} \int\limits_{B(x_0, t_0 - t)} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 + (\nabla u(x,t))^2 \right) d^n x$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = &\int\limits_{B(x_0, t_0 - t)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla u(x,t)) \nabla u(x,t) \right) d^n x \\ &- \frac{1}{2} \int\limits_{\partial B(x_0, t_0 - t)} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 + (\nabla u(x,t))^2 \right) d\sigma(x) \end{aligned}$$

$$= \int_{B(x_0,t_0-t)} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \triangle u(x,t) \right) d^n x$$

$$+ \int_{\partial B(x_0,t_0-t)} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \nabla u(x,t) \cdot N(x) - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 + (\nabla u(x,t))^2 \right) \right) d\sigma(x)$$

$$= \int_{\partial B(x_0,t_0-t)} \left(\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \nabla u(x,t) \right) \cdot N(x) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla u(x,t))^2 \right) d\sigma(x).$$

Jetzt gilt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) (\nabla u) \cdot N \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla u)^2$$

weil der Normalenvektor N Länge eins hat und mit $a = \nabla u$ und $b = N \frac{\partial u}{\partial t}$ gilt

$$a \cdot b \leq a \cdot b + \frac{1}{2}(a-b) \cdot (a-b) \leq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2.$$

Wegen $\dot{e}(t) \leq 0$ ist dann $e(t)$ monoton fallend. Aus $e(0) = 0$ folgt dann $0 \leq e(t) \leq 0$ für alle $t \in [0, t_0]$. **q.e.d.**

Analog folgt aus $u = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ auf $B(x_0, t_0)$ für $t = 0$, dann dass $u = 0$ ist auf $\{(x,t) \mid |x - x_0| < t_0 + t, t < 0\}$.