

Kapitel 3

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

3.1 Homogene Transportgleichung

Eine der einfachsten Differentialgleichungen ist die Transportgleichung:

$$\dot{u} + b \cdot \nabla u = 0.$$

Hier ist $b \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor und $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion. $b \cdot \nabla u$ bezeichnet das Skalarprodukt des Vektors b mit dem Vektor der ersten partiellen Ableitungen von u nach x :

$$b \cdot \nabla u(x, t) = b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}(x, t) + \dots + b_n \frac{\partial u}{\partial x_n}(x, t).$$

Wir nehmen jetzt an, dass $u(x, t)$ eine glatte Lösung der Transportgleichung ist. Dann ist für jedes feste (x, t) die Funktion

$$z(s) = u(x + s \cdot b, t + s)$$

eine glatte Funktion auf \mathbb{R} deren erste Ableitung verschwindet:

$$\dot{z}(s) = b \nabla u(x + s \cdot b, t + s) + \dot{u}(x + s \cdot b, t + s) = 0.$$

Entsprechend muß u auf allen parallelen Geraden in Richtung $(b, 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ konstant sein, und es genügt die Werte von u auf allen diesen Geraden zu kennen.

Anfangswertproblem 3.1. *Gesucht ist eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die die Transportgleichung (mit gegebenem $b \in \mathbb{R}^n$) erfüllt, und für $t = 0$ gleich einer gegebenen Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist.*

Alle parallelen Geraden des $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ in Richtung $(b, 1)$ schneiden die Hyperebene $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ genau einmal:

$$(x + sb, t + s) \in \mathbb{R}^n \times \{0\} \iff s = -t$$

Also ist $u(x, t) = g(x - tb)$. Wenn $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$, dann ist $u(x, t) = g(x - tb)$ eine Lösung der Transportgleichung und damit die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

Wenn aber $g \notin C^1(\mathbb{R}^n)$ dann existiert offensichtlich keine Lösung des Anfangswertproblems. Trotzdem ist $u(x, t) = g(x - tb)$ der einzige Kandidat für eine Lösung. Für eine sehr große Klasse von Funktionen ist dieses u aber eine schwache Lösung der Transportgleichung und sogar die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

3.2 Inhomogene Transportgleichung

Wir betrachten jetzt die entsprechende inhomogene Transportgleichung

$$\dot{u} + b \cdot \nabla u = f.$$

Hier ist wieder $b \in \mathbb{R}^n$ ein gegebener Vektor, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion.

Anfangswertproblem 3.2. *Gesucht ist eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die die inhomogene Transportgleichung (mit gegebenem $b \in \mathbb{R}^n$) erfüllt, und für $t = 0$ gleich einer gegebenen Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist.*

Für jedes $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ erfüllt $z(s) = u(x + sb, t + s)$ die Differentialgleichung

$$\dot{z}(s) = b \cdot \nabla u(x + sb, t + s) + \dot{u}(x + sb, t + s) = f(x + sb, t + s).$$

$$\begin{aligned} \text{Also gilt} \quad u(x, t) - g(x - bt) &= z(0) - z(-t) = \int_{-t}^0 \dot{z}(s) ds \\ &= \int_{-t}^0 f(x + sb, t + s) ds = \int_0^t f(x + (s - t)b, s) ds. \end{aligned}$$

$$\text{Deshalb ist die Lösung gegeben durch} \quad u(x, t) = g(x - bt) + \int_0^t f(x + (s - t)b, s) ds.$$

Wieder ist gegebenenfalls u die eindeutige *schwache* Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems.

Abschließend bemerken wir, dass wir die inhomogene und homogene Transportgleichung in eine gewöhnliche Differentialgleichung übersetzt haben. Diese Methode der Charakteristik werden wir jetzt verallgemeinern.

3.3 Methode der Charakteristik

Wir betrachten eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$F(\nabla u(x), u(x), x) = 0.$$

Hierbei ist u eine reelle Funktion auf einem offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und F eine reelle Funktion auf einer offenen Menge $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Wir versuchen die Lösung ähnlich wie bei der Transportgleichung dadurch zu bestimmen, dass wir aus der partiellen Differentialgleichung die Einschränkung der Lösung auf den Integralkurven von Vektorfeldern bestimmen. Sei also $x(s)$ eine Integralkurve eines noch zu bestimmenden Vektorfeldes und $p(s)$ die entsprechende Ableitung $p(s) = \nabla u(x(s))$. Wir wollen die Integralkurve so wählen, dass wir $z(s) = u(x(s))$ bestimmen können. Dazu differenzieren wir

$$\frac{dp_i(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{\partial u(x(s))}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u(x(s))}{\partial x_j \partial x_i} \frac{dx_j(s)}{ds}.$$

Wenn wir andererseits die Differentialgleichung $F(\nabla u(x), u(x), x) = 0$ total nach dx_i differenzieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dF(\nabla u(x), u(x), x)}{dx_i} = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F(\nabla u(x), u(x), x)}{\partial p_j} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial F(\nabla u(x), u(x), x)}{\partial z} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial F(\nabla u(x), u(x), x)}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Wegen dem Satz von Schwarz vertauschen die partiellen Ableitungen und es gilt

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial p_j} \frac{\partial^2 u(x(s))}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial z} p_i(s) + \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial x_i} = 0.$$

Deshalb setzen wir

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial p_i},$$

und können die Differentialgleichung $\frac{dp_i(s)}{ds} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u(x(s))}{\partial x_j \partial x_i} \frac{dx_j}{ds}(s)$ umschreiben zu

$$\begin{aligned} \frac{dp_i(s)}{ds} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u(x(s))}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial p_i} = \\ &= - \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial x_i} - \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial z} p_i(s). \end{aligned}$$

Zum Abschluss differenzieren wir

$$\frac{dz(s)}{ds} = \frac{du(x(s))}{ds} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(x(s)) \frac{dx_j(s)}{ds} = \sum_{j=1}^h p_j(s) \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial p_j}.$$

Dadurch erhalten wir das gewöhnliche Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(s) &= \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i(s) &= -\frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial x_i} - \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial z} p_i(s) \\ \dot{z}(s) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial p_j} p_j(s).\end{aligned}$$

Es ist ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit $2n + 1$ Unbekannten. Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz 3.3. *Sei F eine differenzierbare reelle Funktion auf einer offenen Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $u \in C^2(\Omega)$ eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der Differentialgleichung $F(\nabla u(x), u(x), x) = 0$. Dann erfüllen für jede Lösung x der gewöhnlichen Differentialgleichung*

$$\dot{x}_i(s) = -\frac{\partial F}{\partial p_i}(\nabla u(x(s)), u(x(s)), x(s))$$

die Funktionen $p(s) = \nabla u(x(s))$ und $z(s) = u(x(s))$ die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{p}_i(s) &= \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial x_i} - \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial z} p_i(s) \text{ und} \\ \dot{z}(s) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial p_j} p_j(s).\end{aligned} \quad \text{q.e.d.}$$

Jetzt wollen wir Randbedingungen von folgender Form betrachten:

$$u(y) = g(y) \text{ für alle } y \in \Omega \cap H \text{ mit } H = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \cdot e_n = x_0 \cdot e_n\}.$$

Dabei ist $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ der n -te Einheitsvektor und H die eindeutige Hyperebene, die senkrecht auf e_n steht und durch $x_0 \in \Omega$ geht. Mit Hilfe des Satzes der impliziten Funktion lassen sich durch geeignete Koordinatentransformationen allgemeinere stetig differenzierbare Hyperebenen auf diese Form bringen: Sei $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ ein stetig

differenzierbarer Homöomorphismus, dessen Umkehrabbildung Φ^{-1} auch stetig differenzierbar ist. Dann ist für eine Funktion $v : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $u = v \circ \Phi$ genau dann eine Lösung der Differentialgleichung

$$F(\nabla u(x), u(x), x) = 0$$

wenn v eine Lösung der Differentialgleichung

$$F(\Phi'(\Phi^{-1}(y)) \cdot \nabla v(y), v(y), \Phi^{-1}(y)) = 0$$

ist. Also erhalten wir mit

$$G(\nabla v(y), v(y), y) = F(\Phi'(\Phi^{-1}(y)) \cdot \nabla v(y), v(y), \Phi^{-1}(y))$$

die entsprechende Differentialgleichung für v . Im Folgenden nehmen wir an, dass die Hyperebene H die Form hat

$$H = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \cdot e_n = x_0 \cdot e_n\}.$$

Durch einen geeigneten Koordinatenwechsel können wir das immer erreichen, wenn die Hyperebene nur hinreichend glatt ist. Weil u und v 2-mal stetig differenzierbar sein müssen, um den vorangehenden Satz anzuwenden, sollten Φ und Φ^{-1} auch 2-mal stetig differenzierbar sein. Also muss auch die Hyperebene 2-mal stetig differenzierbar sein, um sie auf die gewünschte Form zu bringen. Auf $\Omega \cap H$ muss ebenfalls

$$F(\nabla u(y), u(y), y) = 0$$

gelten. Um also auf $y \in \Omega \cap H$ die Anfangsbedingungen

$$z(0) = g(y), \quad p(0) = q(y) \quad \text{und} \quad x(0) = y$$

entsprechend vorzugeben, müssen wir eine Funktion $q : \Omega \cap H \rightarrow \mathbb{R}^n$ finden, so dass für alle $y \in \Omega \cap H$ gilt

$$F(q(y), g(y), y) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial g(y)}{\partial y_i} = q_i(y) \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1.$$

Damit sind also alle Komponenten $q_1(y), \dots, q_{n-1}(y)$ durch $\frac{\partial g(y)}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial g(y)}{\partial y_{n-1}}$ vorgegeben, so dass wir nur noch die Komponente $q_n(y)$ so bestimmen müssen, dass gilt

$$F(q(y), g(y), y) = 0 \quad \text{für alle } y \in \Omega \cap H.$$

Aus dem Satz der impliziten Funktion folgt:

Lemma 3.4. Sei F stetig differenzierbar und $(p_0, z_0, x_0) \in W$ und $x_0 \in \Omega \cap H$ und $z_0 = g(x_0)$. Wenn

$$F(p_0, z_0, x_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(p_0, z_0, x_0)}{\partial p_n} \neq 0$$

gilt, dann gibt es eine Umgebung von $y_0 = x_0 \in \Omega \cap H$ auf der die Gleichungen

$$F(q(y), g(y), y) = 0 \quad \text{und} \quad q_i(y) = \frac{\partial g(y)}{\partial y_i} \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1$$

genau eine Lösung q hat.

q.e.d.

Satz 3.5. Sei $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $F : W \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Sei $(p_0, z_0, x_0) \in W$ mit $F(p_0, z_0, x_0) = 0$ und g eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf der Schnittmenge der Hyperebene $H = \{y \in \mathbb{R}^n \mid e_n \cdot x = e_n \cdot x_0\}$ mit einer Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Wenn $\frac{\partial F}{\partial p_n}(p_0, z_0, x_0) \neq 0$ dann gibt es auf einer Umgebung Ω von x_0 genau eine Lösung des Anfangswertproblems

$$F(\nabla u(x), u(x), x) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega \quad \text{und} \quad u(y) = g(y) \quad \text{für } y \in \Omega \cap H$$

Beweis: Wegen dem vorangehenden Lemma gibt es auf der Schnittmenge einer Umgebung von x_0 mit H genau eine stetig differenzierbare Funktion q nach \mathbb{R}^n , so dass auf der Schnittmenge einer offenen Umgebung von x_0 mit H gilt

$$F(q(y), g(y), y) = 0 \quad \text{und} \quad q_i(y) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(y) \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1.$$

Wegen dem Satz von Picard-Lindelöf gibt es dann für alle y in der Schnittmenge einer Umgebung von x_0 mit H genau eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(s) &= \frac{\partial F}{\partial p_i}(p(s), z(s), x(s)) & \text{mit} \quad x(0) &= y \\ \dot{p}_i(s) &= -\frac{\partial F}{\partial x_i}(p(s), z(s), x(s)) - \frac{\partial F}{\partial z}(p(s), z(s), x(s))p_i(s) & \text{mit} \quad p(0) &= q(y) \\ \dot{z}(s) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j}(p(s), z(s), x(s))p_j(s) & \text{mit} \quad z(0) &= g(y). \end{aligned}$$

Wir bezeichnen diese Familie von Lösungen mit $x(y, s)$, $p(y, s)$ und $z(y, s)$. Wenn $\Omega \ni x_0$ klein genug gewählt ist, sind diese Lösungen sogar alle auf $(\Omega \cap H) \times (-\epsilon, \epsilon)$ eindeutig definiert mit $\epsilon > 0$. Wegen Satz 1.27 sind diese Lösungen zweimal stetig differenzierbar.

Wegen den Anfangsbedingungen und der Bedingung $\frac{\partial F}{\partial p_n}(p_0, z_0, x_0) \neq 0$ besitzt die Funktion

$$(\Omega \cap H) \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Omega, \quad (y, s) \mapsto x(y, s)$$

im Punkt $(y_0, 0) = (x_0, 0)$ eine invertierbare Ableitung. Dann folgt aus dem Satz der inversen Funktion, dass für eine geeignet verkleinerte Umgebung Ω von x_0 und ein geeignetes $\epsilon > 0$ diese Abbildung ein zweimal stetig differenzierbarer Homöomorphismus mit zweimal stetig differenzierbarer Umkehrabbildung ist. Dann definieren wir

$$u(x(y, s)) = z(y, s) \text{ für alle } (y, s) \in (\Omega \cap H) \times (-\epsilon, \epsilon).$$

Wir werden sehen, dass diese Funktion die Differentialgleichung $F(\nabla u(x), u(x), x) = 0$ löst. Zunächst folgt aus der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial s} F(p(y, s), z(y, s), x(y, s)) = 0.$$

Weil $F(q(y), g(y), y) = 0$ für alle $y \in \Omega \cap H$ folgt auch

$$F(p(y, s), z(y, s), x(y, s)) = 0 \text{ für alle } (y, s) \in (\Omega \cap H) \times (-\epsilon, \epsilon).$$

Also genügt es $p(y, s) = \nabla u(x(y, s))$ für alle $(y, s) \in (\Omega \cap H) \times (-\epsilon, \epsilon)$ zu zeigen. Wir zeigen zunächst, dass für alle $(y, s) \in (\Omega \cap H) \times (-\epsilon, \epsilon)$ und alle $i = 1, \dots, n-1$

$$\frac{\partial z(y, s)}{\partial s} = \sum_{j=1}^n p_j(y, s) \frac{\partial x_j(y, s)}{\partial s} \quad \text{und} \quad \frac{\partial z(y, s)}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^n p_j(y, s) \frac{\partial x_j(y, s)}{\partial y_i}$$

gilt. Die erste Gleichung folgt aus der gewöhnlichen Differentialgleichung für $x(y, s)$ und $z(y, s)$. Für $s = 0$ folgt die zweite Gleichung aus den Anfangsbedingungen von $x(y, s)$ und $p(y, s)$. Die Ableitung nach y_i der ersten Gleichung ergibt

$$\frac{\partial^2 z(y, s)}{\partial y_i \partial s} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial p_j(y, s)}{\partial y_i} \frac{\partial x_j(y, s)}{\partial s} + p_j(y, s) \frac{\partial^2 x_j(y, s)}{\partial y_i \partial s} \right).$$

Mit dem Satz von Schwarz folgt

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial z(y, s)}{\partial y_i} - \sum_{j=1}^n p_j(y, s) \frac{\partial x_j(y, s)}{\partial y_i} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial p_j(y, s)}{\partial y_i} \frac{\partial x_j(y, s)}{\partial s} - \frac{\partial p_j(y, s)}{\partial s} \frac{\partial x_j(y, s)}{\partial y_i} \right) = \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_j(y, s)}{\partial y_i} \frac{\partial F(p(y, s), z(y, s), x(y, s))}{\partial p_j} + \\
&+ \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F(p(y, s), z(y, s), x(y, s))}{\partial x_j} + \frac{\partial F(p(y, s), z(y, s), x(y, s)) p_j(y, s)}{\partial z} \right) \frac{\partial x_j}{\partial s}(y, s) \\
&= \frac{\partial}{\partial s} F(p(y, s), z(y, s), x(y, s)) - \\
&- \frac{\partial F(p(y, s), z(y, s), x(y, s))}{\partial z} \left(\frac{\partial z(y, s)}{\partial y_i} - \sum_{j=1}^n p_j(y, s) \frac{\partial x_j(y, s)}{\partial y_i} \right).
\end{aligned}$$

Aus $F(p(y, s), z(y, s), x(y, s)) = 0$ folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial z}{\partial y_i}(y, s) - \sum_{j=1}^n p_j(y, s) \frac{\partial x_j(y, s)}{\partial y_i} \right) = \\
&- \frac{\partial F(p(y, s), z(y, s), x(y, s))}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial y_i}(y, s) - \sum_{j=1}^n p_j(y, s) \frac{\partial x_j(y, s)}{\partial y_i} \right).
\end{aligned}$$

Diese lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit Anfangswert 0 bei $s = 0$ hat die eindeutige Lösung 0. Also folgt die zweite Gleichung

$$\frac{\partial z(y, s)}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^n p_j(y, s) \frac{\partial x_j(y, s)}{\partial y_i}.$$

Damit erhalten wir dann insgesamt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_j} &= \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial z}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \left(\sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial x_k}{\partial s} \right) \frac{\partial s}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^n p^k \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \right) \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \\
&= \sum_{k=1}^n p^k \left(\frac{\partial x_k}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) = \sum_{k=1}^n p^k \frac{\partial x^k}{\partial x_j} = p_j.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Anfangsbedingungen an $z(y, 0)$ gilt für alle $y \in \Omega \cap H$ auch $u(y) = g(y)$. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Satz von Picard–Lindelöf und Satz 3.3. **q.e.d.**

Wir haben das Lösen dieses Randwertproblems auf das Lösen einer gewöhnlichen Differentialgleichung zurückgeführt. Im Fall der inhomogenen Transportgleichung fassen wir x und t zu einer Koordinate (x, t) zusammen. Dann ist $F(p, z, (x, t)) = \tilde{F}(p, x, t) = b_1 p_1 + \dots + b_n p_n + p_{n+1} - f(x, t)$. Die gewöhnliche Differentialgleichung ist

$$\dot{x} = b \quad \dot{t} = 1 \quad \dot{p} = (\nabla f(x, t), \dot{f}(x, t)) \quad \dot{z} = \tilde{F}(p, x, t) + f(x, t) = f(x, t).$$