Kapitel 5

Wärmeleitungsgleichung

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Wärmeleitungsgleichung

$$\dot{u} - \triangle u = 0$$

und die entsprechende inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\dot{u} - \triangle u = f.$$

Gesucht wird dabei eine Funktion u auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ und für die inhomogenen Gleichung ist f eine gegebene Funktion auf demselben Gebiet. Typischerweise hat jede Aussage über harmonische Funktionen ein Analogon für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung.

Diese Wärmeleitungsgleichung beschreibt Diffusionsprozesse, das heißt die zeitliche Entwicklung solcher räumlich variierender Größen wie Wärme, chemische Konzentration usw.. Dabei ist die Flussdichte gerade proportional zu dem negativen Gradienten, weil der Fluss von der höheren Konzentration zu der niedrigeren zeigt. Damit erhalten wir aus der skalaren Erhaltungsgleichung die Wärmeleitungsgleichung.

5.1 Fundamentallösung

Weil die Wärmeleitungsgleichung linear ist und bzgl. der Zeit nur erste Ableitungen enthält und bzgl. des Raumes nur zweite Ableitungen, ist für jede Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u(x,t)$ und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ eine Lösung. Dieses sogenannte Skalenverhalten legt nahe, nach Lösungen zu suchen, die nur von $\frac{|x|^2}{t}$ abhängen.

Wir wollen den folgenden Ansatz machen:

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+.$$

Hier sind α, β Konstanten und $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine gesuchte Funktion. Dieser Ansatz läßt sich durch das Skalenverhalten $u(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$ rechtfertigen. Mit $\lambda t = 1$ erhalten wir $v(y) = u(y,1)$. Mit diesem Ansatz geht die Wärmeleitungsgleichung über in

$$-\alpha \cdot t^{-(\alpha+1)} v(y) - \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot \nabla v(y) - t^{-(\alpha+2\beta)} \triangle v(y) = 0$$

Hier ist $y = \frac{x}{t^\beta}$. Damit diese Gleichung nicht von t abhängt, setzen wir $\beta = \frac{1}{2}$. Dann reduziert sie sich zu

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot \nabla v + \triangle v = 0.$$

Wir nehmen jetzt wieder an, dass v nur von $|y|$ abhängt, machen also jetzt den Ansatz $u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} w\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)$. Dann erhalten wir:

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0$$

Hier ist $r = \frac{|x|}{\sqrt{t}}$. Wenn wir $\alpha = \frac{n}{2}$ setzen können wir die Gleichung einmal integrieren:

$$\left(r^{n-1} w'\right)' + \frac{1}{2} \left(r^n w\right)' = 0 \qquad\qquad r^{n-1} w' + \frac{1}{2} r^n w = a.$$

Wenn w und w' im Unendlichen verschwinden gilt $a = 0$.

$$w' = -\frac{1}{2} r w. \quad w = b \cdot e^{\frac{-r^2}{4}}.$$

Wieder wählen wir die Integrationskonstanten a und b so, dass sich eine Fundamentallösung ergibt.

Definition 5.1. *Die Funktion*

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n, t < 0 \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.

Lemma 5.2. *Für alle $t > 0$ gilt* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t) d^n x = 1.$

Beweis: $\displaystyle\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} d^n x = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2} d^n x = \frac{1}{\pi^{n/2}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^n = 1.$ **q.e.d.**

Die Fundamentallösung ist also eine Art Mollifier auf dem $\mathbb{R}$, so dass wir erwarten können, dass die Faltung mit $\Phi(x,t)$ im Grenzwert $t \to 0$ wie die Identität wirkt.

Satz 5.3. *Sei h eine beschränkte stetige Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und*

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)h(y)d^n y. \qquad \textit{Dann gilt}$$

(i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$

(ii) $\dot{u} - \triangle u = 0$ *auf* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$

(iii) *u läßt sich stetig auf $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ fortsetsen mit $\lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = h(x)$.*

Beweis: Weil $\Phi(x,t)$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ undendlich of differenzierbar ist, und wegen dem vorangehenden Lemma und der Beschränktheit von h, ist $u(x,t)$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ wohl definiert und stetig. Eine einfache Rechnung zeigt, daß auch alle partiellen Ableitungen von Φ für alle $t \in \mathbb{R}^+$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegen, also integrierbar sind. Dann ist u unendlich oft differenzierbar. Die Behauptung (ii) folgt, weil $\Phi(x,t)$ die Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ löst. Wegen der Stetigkeit von h gibt es für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\mid h(x) - h(y) \mid < \epsilon$ für alle $\mid x - y \mid < \delta$ gilt. Außerdem gibt es ein $T > 0$, so dass für alle $t < T$ gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} \Phi(y,t)d^n y = \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta/\sqrt{t})} \Phi(y,1)d^n y < \epsilon.$$

Daraus folgt $$|u(x,t) - h(x)| \leq \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)(h(y)-h(x))d^n y \right|$$

$$\leq \int\limits_{B(x,\delta)} \Phi(x-y,t) \mid h(y) - h(x) \mid d^n y \quad + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)} \Phi(x-y,t)|h(y)-h(x)|d^n y$$

$$\leq \epsilon + 2\epsilon \sup\{|h(y)| \mid y \in \mathbb{R}^n\} \qquad \text{für alle } t < T.$$

Also konvergiert $u(x,t)$ im Grenzwert $t \to 0$ punktweise gegen $h(x)$. **q.e.d.**

Als Distributionen (und sogar als Maß) konvergiert $\Phi(x,t)$ im Grenzwert $t \to 0$ also gegen die Dirac'sche δ-Funktion. Wir erkennen an dieser Lösung des Anfangswertproblems, dass sich Störungen mit unendlicher Geschwindikeit ausbreiten.

5.2 Inhomogenes Anfangswertproblem.

Im letzten Abschnitt hatten wir eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} - \triangle u = 0 \quad \text{und} \quad u(x,0) = h(x)$$

konstruiert. Duhamel's Prinzip ist ein Verfahren, um aus der Lösung des homogenen Anfangswertproblems eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu gewinnen.

Sei $$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s) d^n y ds.$$ Dann haben wir formal:

$$\dot{u} - \triangle u = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,0) f(y,s) d^n y +$$
$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(\dot{\Phi}(x-y,t-s) - \triangle_x \Phi(x-y,t-s) \right) f(y,s) d^n y ds = f(y,s).$$

Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems 5.4. *Sei f eine zweimal stetig und beschränkt differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$. Dann ist*

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s) d^n y ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) f(x-y,t-s) d^n y ds$$

eine Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\dot{u} - \triangle u = f \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \text{ und } \qquad \lim_{t\to 0} u(x,t) = 0.$$

Beweis: Wir haben bereits gezeigt, dass $v_s(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s) d^n y$ auf $\mathbb{R}^n \times (s,\infty)$ das Anfangswertproblem $\dot{v}_s - \triangle v_s = 0$ mit $\lim_{t\to s} v_s(x,t) = f(x,t)$ erfüllt. Also ist v_s auf $\mathbb{R}^n \times [s,\infty)$ stetig. Dann erfüllt für alle $\epsilon > 0$

$$u_\epsilon(x,t) = \int_0^{t-\epsilon} v_s(x,t) ds = \int_0^{t-\epsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s) d^n y ds$$

$$\dot{u}_\epsilon(x,t) - \triangle u_\epsilon(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-(t-\epsilon)) f(y,t-\epsilon) d^n y = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,\epsilon) f(y,t-\epsilon) d^n y.$$

Also gilt $\lim_{\epsilon\to 0} \dot{u}_\epsilon - \triangle u_\epsilon = f$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$. Andererseits gilt

$$u_\epsilon(x,t) = \int_\epsilon^t \Phi(y,s) f(x-y,t-s) d^n y ds.$$

Aufgrund der Voraussetzungen an f folgt daraus, dass auch

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\dot{u}_\epsilon(x,t) - \triangle u_\epsilon(x,t)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \triangle\right)\lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \triangle\right) u(x,t)$$

gilt. Aufgrund der Stetigkeit von v gilt auch $u(x,0) = 0$. **q.e.d.**

Korollar 5.5. *Zusammenfassend ergibt sich folgende Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{u} - \triangle u = f \qquad u(x,0) = h(x)$$

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,y,t)h(y)d^n y \qquad + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)f(y,s)d^n y ds.$$ **q.e.d.**

5.3 Mittelwerteigenschaft

Die Fundamentallösung $\Phi(x,t)$ kann wieder dazu bentutzt werden, um die Werte von $u(x,t)$ als Mittelwert auf einen "Ball" zu berechnen. Allerdings müssen wir den Ball an die neue Gleichung anpassen.

Definition 5.6. *Für alle* $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *und alle* $r > 0$ *sei*

$$E(x,t,r) = \left\{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \le t, \Phi(x-y,t-s) \ge \frac{1}{r^n}\right\}$$

$$\begin{aligned} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \ge \frac{(4\pi)^{n/2}(t-s)^{n/2}}{r^n} \quad &\Longleftrightarrow \quad e^{\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \le \frac{1}{\pi^{n/2}}\left(\frac{r^2}{4(t-s)}\right)^{n/2} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{\mid x-y\mid^2}{4(t-s)}) \le \frac{n}{2}(2\ln(r) - \ln(4(t-s)) - \ln(\pi)) \\ &\Longleftrightarrow \quad \mid x-y\mid^2 \le 2(t-s)n(2\ln(r) - \ln(t-s) - \ln(4\pi)). \end{aligned}$$

Mittelwerteigenschaft der Wärmeleitungsgleichung 5.7. *Sei* u *eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf einem Gebiet* $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$*. Dann gilt für alle* $(x,t) \in \Omega$ *und* $r > 0$ *mit* $E(x,t,r) \subset \Omega$

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^n} \int\limits_{E(x,t,r)} u(y,s)\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} d^n y ds.$$

Beweis: Aufgrund der Translationsinvarianz können wir $(x,t) = (0,0)$ annehmen. Jetzt definieren wir

$$\phi(r) = \frac{1}{r^n} \int\limits_{E(0,0,r)} u(y,s)\frac{|\ y\ |^2}{s^2} d^n y ds \qquad = \int\limits_{E(0,0,1)} u(ry, r^2 s)\frac{|\ y\ |^2}{s^2} d^n y ds.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \int\limits_{E(0,0,1)} \left(\frac{|y|^2}{s^2} y \cdot \nabla u + 2r\dot{u}\frac{y^2}{s} \right) d^n y ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_{E(0,0,r)} \frac{|y|^2}{s^2} y \cdot \nabla u d^n y ds + \frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_{E(0,0,r)} 2\dot{u}\frac{|\ y\ |^2}{s} d^n y ds \end{aligned}$$

Sei jetzt $\psi = -\frac{n}{2}\ln(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n\ln r$. Dann verschwindet ψ auf dem Rand von $E(0,0,r)$, weil $\Phi(y,-s) = r^{-n}$ gilt auf $\partial E(0,0,r)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_{E(0,0,r)} 2\dot{u}\frac{|\ y\ |^2}{s} d^n y ds &= \frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_{E(0,0,r)} 4\dot{u} y \cdot \nabla\psi d^n y ds \\ &= -\frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_{E(0,0,r)} (4n\dot{u}\psi + 4\psi y \cdot \nabla\dot{u}) d^n y ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_{E(0,0,r)} (-4n\dot{u}\psi + 4\dot{\psi} y \cdot \nabla u) d^n y ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_{E(0,0,r)} \left(-4n\dot{u}\psi + 4\left(-\frac{n}{2s} - \frac{|\ y\ |^2}{4s^2} \right) y \nabla u \right) d^n y ds. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_{E(0,0,r)} \left(-4n\triangle u\psi - \frac{2n}{s} y \cdot \nabla u \right) d^n y ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_{E(0,0,r)} \left(4n\nabla u \cdot \nabla\psi - \frac{2n}{s} y \cdot \nabla u \right) d^n y ds = 0. \end{aligned}$$

Also ist ϕ konstant. Weil u stetig ist und

$$\frac{1}{r^n} \int\limits_{E(0,0,r)} \frac{|\ y\ |^2}{s^2} d^n y ds = \int\limits_{E(0,0,1)} \frac{|\ y\ |^2}{s^2} d^n y ds = 4$$

gilt, folgt $\lim\limits_{r \mapsto 0} \phi(r) = 4u(0,0)$. **q.e.d.**

5.4 Maximumprinzip

Für ein offenes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir als den parabolischen Zylinder $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$. Der parabolische Rand $\partial\Omega_T$ von Ω_T ist definiert als $\bar{\Omega}_T \setminus \Omega_T$. Er besteht also aus $\partial\Omega \times (0,T] \cup \Omega \times 0$ und erhhält keine inneren Punkte von Ω zur Zeit $t = T$.

Starkes Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung 5.8. *Sei Ω wegzusammenhängend (d.h. für je zwei Punkte $x, x' \in \Omega$ gibt es einen stetigen Pfad in Ω von x nach x') und u eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung auf Ω_T, die sich stetig auf $\bar{\Omega}_T$ fortsetzen läßt. Wenn es einen Punkt $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ gibt, an dem u das Maximum annimmt, dann ist u konstant auf Ω_{t_0}.*

Beweis: Sei (x_0, t_0) ein Punkt von Ω_T, an dem u das Maximum annimmt. Dann gibt es ein r_0, so dass $E(x_0, t_0, r_0) \subset \Omega_T$ liegt. Aufgrund der Mittelwerteigenschaften muss u dann auf $E(x_0, t_0, r_0)$ konstant sein. Weil Ω wegzusammenhängend ist gibt es für alle $(x, t) \in \Omega \times (0, t_0)$ offenbar endlich viele $E(x_0, t_0, r_0), E(x_1, t_1, r_1), \ldots, E(x_n, t_n, r_n)$ in $\Omega \times (0, t_0)$, die jeweils die Punkte $(x_1, t_1), \ldots, (x_n, t_n), (x, t)$ enthalten. Also ist u auf dem Abschluss von Ω_{t_0} konstant. **q.e.d.**

Schwaches Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung 5.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes und offenes Gebiet und u eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung auf Ω_T, die sich stetig auf $\bar{\Omega}_T$ fortsetzen läßt. Dann nimmt u das Maximum auf dem parabolischen Rand an.* **q.e.d.**

Daraus folgt wieder die Eindeutigkeit von bestimmten Randwertproblemen:

Eindeutigkeit des Randwertproblems 5.10. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, zusammenhängendes und offenes Gebiet. Dann existiert höchstens eine Lösung u der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung auf Ω_T, die sich stetig auf $\bar{\Omega}_T$ fortsetzen läßt und auf $\partial\Omega_T$ gleich einer gegebenen Funktion g ist.*

Beweis: Wir wenden das Maximumprinzip auf die Differenz zweier Lösungen an. **q.e.d.**

Wir wollen jetzt auch die Eindeutigkeit des Anfangswertproblems auf dem $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ zeigen. Dazu müssen wir, wie bei dem Poissonproblem, ein Abfallverhalten im Unendlichen fordern.

Maximumprinzip für das Cauchyproblem 5.11. *Sei h eine beschränkte stetige Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und u eine Lösung auf $\mathbb{R}^n \times (0,T]$ des Anfangwertproblems*

$$\dot{u} - \triangle u = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \times (0,T) \qquad u(x,0) = h(x) \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \{0\},$$

die das Wachstumsverhalten $\quad u(t,x) \leq Ae^{a|x|^2} \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times [0,T]$
mit Konstanten $A, a > 0$ hat, dann gilt $\quad \sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} h.$

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass $4aT < 1$ gilt. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $4a(T+\epsilon) < 1$. Offensichtlich ist für alle $y \in \mathbb{R}^n$ und alle $\mu > 0$ die Funktion $v(x,t) = u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\epsilon-t)^{n/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}}$ auf $\mathbb{R}^n \times (0, T+\epsilon)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Also können wir das Starke Maximumprinzip auf alle Gebiete der Form $\Omega_T = B(y,r) \times (0,T]$ anwenden. Aufgrund der Voraussetzung an u ist sowohl u als auch h durch $Ae^{a|x|^2}$ beschränkt. Weil $\frac{1}{4(T+\epsilon-t)} > a$ gilt für $t > 0$, gibt es ein $R > 0$, so dass für alle $r > R$ auf $\partial\Omega_T = B(y,r) \times \{0\} \cup \partial B(y,r) \times (0,T]$ gilt $v(x,t) \leq \sup\{h(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Dann folgt aus dem Schwachen Maximumprinzip $v(x,t) \leq \sup\{h(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]$. Weil $\mu > 0$ beliebig war gilt das auch für $\mu = 0$. Wenn $4aT \geq 1$ gilt zerlegen wir das Zeitintervall $[0,T]$ in solche Teilintervalle $[0,T] = [0,T_1] \cup \ldots \cup [T_M, T]$ für die $4a(T_{m+1} - T_m) \geq 1$ gilt. Dann folgt induktiv die Aussage. **q.e.d.**

Eindeutigkeit des Anfangswertproblems 5.12. *Sei $h \in C(\mathbb{R}^n)$, $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$. Dann gibt es höchstens eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{u} - \triangle u = f \text{ auf } \mathbb{R}^n \times (0,T) \qquad\qquad u = h \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \{0\}$$

die auf $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ das Wachstumsverhalten $|u(x,t)| \leq Ae^{a|x|^2}$ hat mit $A > 0$ und $a > 0$.

Beweis: Wir wenden das Maximumprinzip für das Cauchyproblem auf die Differenzen zweier Lösungen an. **q.e.d.**

Ähnlich wie bei der Laplacegleichung läßt sich die Eindeutigkeit des Randwertproblemes 5.10 und des Anfangswertrpoblemes 5.12 auch mit Hife einer Monotonie eines Energiefunktionals zeigen. Sei

$$e(t) = \int_\Omega u^2(x,t) d^n x.$$

Wenn u die homogene Wärmeleitungsgleichung erfüllt und am Rand von Ω verschwindet, dann ist dieses Funkional in Abhängigkeit von t monoton fallend:

$$\dot{e}(t) = 2\int_\Omega u(x,t)\dot{u}(x,t) d^n x = 2\int_\Omega u(x,t)\triangle u(x,t) d^n x = -2\int_\Omega \left(\nabla u(x,t)\right)^2 d^n x \leq 0.$$

Wenn also $u(x,t)$ für $t = 0$ verschwindet, muss u identisch verschwinden. Allerdings gilt dieses Argument nur für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung, die mit ihren ersten Ableitungen quadratintegrabel sind.

5.5 Wärmeleitungskern

In Analogie zu der Greenschen Funktion der Laplacegleichung definieren wir für offene Gebiete Ω einen Wärmeleitungskern H_Ω.

Definition 5.13. *Sei Ω ein offenens Gebiet im $\mathbb{R}^n$, Dann heisst $H_\Omega : \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ Wärmeleitungskern von Ω, wenn H_Ω folgende Eigenschaften hat.*

(i) $H_\Omega(x, y, t) = 0$ *für* $y \in \partial\Omega$.

(ii) $H_\Omega(x, y, t) - \Phi(x - y, t)$ *setzt sich stetig auf* $(x, y, t) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+$ *zu einer Lösung der Wärmeleitungsgleichung fort, die auf* $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times \{0\}$ *verschwindet.*

Lemma 5.14. *Sei Ω ein offenes Gebiet im $\mathbb{R}^n$ und u und v zwei relle Funktionen mit den erforderlichen Regularitätseigenschaften. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega u(x,t)(\partial_t v(x, T-t) + \triangle v(x, T-t)) d^n x dt \\
+ &\int_0^T \int_\Omega (\partial_t u(x,t) - \triangle u(x,t)) v(x, T-t) d^n x dt = \\
= &\int_0^T \int_{\partial\Omega} (u(y,t)\nabla_y v(y, T-t) - \nabla_y u(y,t) v(y, T-t)) N(y) d\sigma(y) dt \\
+ &\int_\Omega (u(x,T)v(x,0) - u(x,0)v(x,T)) d^n x.
\end{aligned}$$

Beweis: Eine partielle Integration bzgl. t von den beiden zeitlichen Ableitungen ergibt als die Randterme die Integrale über Ω und der Gaußsche Satz ergibt für die zweiten räumlichen Ableitungen die Integrale über $\partial\Omega$ **q.e.d.**

Setzen wir $H_\Omega(x, y, t)$ ein und benutzen die entsprechenden Eigenschaften, so folgt

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega (\dot{u}(y,t) - \triangle u(y,t)) H_\Omega(x, y, T-t) d^n y dt = \\
= &\int_0^T \int_{\partial\Omega} u(z,t) \nabla_z H_\Omega(x, z, T-t) N(z) d\sigma(z) dt + u(x,T) - \int_\Omega u(y,0) H_\Omega(x,y,T) d^n y.
\end{aligned}$$

Und damit auch $$u(x,T) = \int_0^T \int_\Omega (\dot{u}(y,t) - \triangle u(y,t)) H_\Omega(x,y,T-t) d^n y dt$$

$$- \int_0^T \int_{\partial\Omega} u(z,t) \nabla_z H_\Omega(x,z,T-t) N(z) d\sigma(z) dt + \int_\Omega u(y,0) H(x,y,T) d^n y.$$

Lösung des Anfangswert und Randwertproblemes 5.15. *Seien f eine Funktion auf $\Omega \times (0,T)$, g eine Funktion auf $\partial\Omega \times [0,T]$ und h eine Funktion auf Ω mit den erforderlichen Regularitätseigenschaften, so dass alle auftauchenden Integrale absolut konvergieren. Dann ist*

$$u(x,T) = \int_0^T \int_\Omega f(y,t) H_\Omega(x,y,T-t) d^n y dt$$
$$- \int_0^T \int_{\partial\Omega} g(z,t) \nabla_z H_\Omega(x,z,T-t) N(z) d\sigma(z) dt + \int_\Omega h(y) H_\Omega(x,y,T) d^n y$$

die eindeutige Lösung des Anfangs- und Randwertproblemes.

$$\dot{u} - \triangle_u = f \text{ auf } \Omega \times (0,T) \qquad u = g \text{ auf } \partial\Omega \times [0,T] \qquad u(x,0) = h(x) \text{ auf } \Omega$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass der Wärmeleitungskern symmetrisch ist.

Lemma 5.16. *Für alle $T > 0$ und $x, y \in \bar{\Omega}$ gilt $H_\Omega(x,y,T) = H_\Omega(y,x,T)$.*

Beweis: Setze die Funktionen $u(z,t) = H_\Omega(x,z,t)$ und $v(z,t) = H_\Omega(y,z,t)$ in Lemma 5.14 ein. Dann erhalten wir wegen der Eigenschaft (ii) und Satz 5.3 (iii)

$$0 = \int_\Omega (H_\Omega(x,z,T) H(y,z,0) - H_\Omega(x,z,0) H_\Omega(y,z,T)) d^n z = H_\Omega(x,y,T) - H_\Omega(y,x,T).$$

q.e.d.

Aus der Definiton des Wärmeleitungskernes folgt die Aussage für $f = 0 = g$.

Als nächstes wollen wir diese Aussage auf das inhomogene Anfangswertproblem verallgemeinern:

$$u(x,T) = \int_0^T \int_\Omega H_\Omega(x,y,T-t) f(y,t) d^n y dt$$

ist eine Lösung des inhomogenen Anfangswertproblemes.

$$\dot{u} - \triangle u = f \text{ auf } \Omega \times (0,T) \qquad u(x,0) = 0 \text{ auf } \Omega \qquad u(x,t) = 0 \text{ auf } \partial\Omega \times [0,T].$$

Wir haben bereits gezeigt, dass
$$v(x,T) = \int_\Omega H_\Omega(x,y,T-t) f(y,t) d^n y$$
das Anfangswertproblem

$$\dot{v} - \triangle v = 0 \text{ auf } \Omega \times (t,\infty) \quad v(x,t) = f(x,t) \text{ auf } \Omega \times \{t\} \quad v(x,t) = 0 \text{ auf } \partial\Omega \times [0,\infty]$$

löst. Wenn jetzt f solche Regularitätseigenschaften hat, dass die entsprechende Funktion sich stetig auf $\bar{\Omega} \times [0,T]$ fortsetzen lassen, dann erfüllt u das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(x,t) - \triangle u(x,t) = f \text{ auf } \Omega \times (0,T) \quad u(x,0) = 0 \text{ auf } \Omega \quad u(x,t) = 0 \text{ auf } \partial\Omega \times [0,T].$$

Zuletzt betrachten wir auch inhomogene Randwertprobleme. Gesucht ist eine Lösung des Randwertproblems

$$\dot{u}(x,t) - \triangle u(x,t) = 0 \text{ auf } \Omega \times (0,T) \quad u(x,0) = 0 \text{ auf } \Omega \quad u(x,t) = g \text{ auf } \partial\Omega \times [0,T].$$

Für eine beliebige Funktion g auf $\partial\Omega \times [0,T]$ mit den erforderlichen Regularitätseigenschaften, setzen wir zunächst g auf $\Omega \times [0,T]$ fort. Von dieser Fortsetzung $\tilde{u}$ ziehen wir die Lösung zu $f = \dot{\tilde{u}} - \triangle\tilde{u}$ und $h(x) = \tilde{u}(x,0)$ ab und erhalten dann eine Lösung des gewünschten Randwertproblemes. **q.e.d.**

Die erforderlichen Regularitätseigenschaften hängen von der Greenschen Funktion und damit von dem Gebiet Ω ab. Bevor wir diese Aussagen über Anfangswert– und Randwertprobleme auf bestimmte Gebiete anwenden, wollen wir zeigen dass für alle beschränkten Gebiete aus dem Maximumprinzip folgt, dass die entsprechenden Wärmeleitungskerne positiv sind. Offensichtlich ist der freie Wärmeleitungskern $\Phi(x-y,t)$ auf dem Gebiet $\mathbb{R}^n$ positiv. Für alle Gebiete Ω ist für festes $x \in \Omega$ der entsprechenden Wärmeleitungskern $H_\Omega(x,y,t)$ die Differenz von $\Phi(x-y,t)$ minus der eindeutigen Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\Omega \times [0,T]$, die auf $\Omega \times \{t=0\}$ verschwindet und auf $\partial\Omega \times [0,T]$ mit $\Phi(x-y,t)$ übereinstimmt. Für sehr kleine ϵ ist also diese Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\Omega \times \{t=\epsilon\}$ und auf $\partial\Omega \times [0,T]$ kleiner oder gleich $\Phi(x-y,t)$. Aus dem Maximumprinzip fogt, dass der Wärmeleitungskern positiv ist.

5.6 Spektraltheorie und Wärmeleitungsgleichung

In diesem Abschnitt wollen wir das Anfangswertproblem

$$\dot{u} - \triangle u = 0 \quad \text{auf} \quad \Omega \times [0,T] \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times [0,T] \qquad u = h \quad \text{auf } \Omega \times \{0\}$$

mit Hilfe des entsprechenden Laplaceoperators auf Ω lösen. Zunächst beobachten wir, dass wenn h folgendes erfüllt:

$$-\triangle h = \lambda h \quad \text{auf} \quad \Omega \quad \text{und} \quad h|_{\partial\Omega} = 0,$$

sich dann das Anfangswertproblem lösen läßt durch den Ansatz:

$$u(x,t) = \varphi(t)h(x) \quad \dot{\varphi}(t)h(x) + \lambda\varphi(t)h(x) = 0.$$

Die allgemeine Lösung ist $\dot{\varphi}/\varphi = -\lambda, \varphi(t) = e^{-\lambda(t-t_o)}$. Weil $\varphi(0) = 1$ sein muss erhalten wir als eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $u(x,t) = e^{-\lambda t}h(x)$. Aufgrund der Linearität ist dann für $h = h_1 + \ldots + h_M$ mit $-\triangle_{h_i} = \lambda_i h_i$ auf Ω und $h_i|_{\partial\Omega} = 0$ die entsprechende Lösung $u(x,t) = e_1^{\lambda_1 t} + \ldots + e^{-\lambda_M t}h_M$. Also genügt es die Funktion h in eine Summe von Eigenfunktionen des Laplaceoperators auf Ω mit Dirichletrandbedingungen zu zerlegen.

Dazu wollen wir zunächst die Fundamentallösung nochmal neu interpretieren. Auf dem $\mathbb{R}^n$ hat der Laplaceoperator folgende Eigenfunktionen:

$$-\triangle e^{2\pi ik\cdot x} = 4\pi^2 k^2 e^{2\pi ikx}.$$

Jetzt gilt $$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\left(2\pi ik\sqrt{t} + \frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2} d^n k = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{(ik+\frac{x}{\pi})^2} d^n k = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}},$$

und damit auch

$$\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\left(2\pi ik\sqrt{t} + \frac{x-y}{2\sqrt{t}}\right)^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d^n k = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 k^2 t} e^{2\pi i(x-y)k} d^n k.$$

Also ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} - \triangle u = 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times [0,T] \qquad\qquad u(x,0) = h \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n$$

gegeben durch

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 k^2 t} e^{2\pi i(x-y)k} g(y) d^n k d^n y.$$

Für eine integrable Funktion können wir den Satz von Fubini anwenden. Für alle stetigen integrablen Funktionen h folgt dann aus $\lim\limits_{t\downarrow 0} u(x,t) = h(x)$ auch

$$h(x) = \lim_{t\downarrow 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 k^2 t} e^{2\pi i(x-y)k} h(y) d^n y d^n k.$$

Wir definieren jetzt die Fouriertransformation durch $\hat{h}(k) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi iky} h(y) d^n y.$

Dann gilt

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 k^2 t} e^{2\pi ikx} \hat{h}(k) d^n k \quad \text{und} \quad h(x) = \lim_{t\downarrow 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 k^2 t} e^{2\pi ikx} \hat{h}(k) d^n k.$$

Definition 5.17. *Sei $\mathcal{S}$ der sogenannte Schwartzraum aller glatten Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$, die mit allen ihren Ableitungen schneller als jede Potenz abfallen.*

Lemma 5.18. *Die Fouriertransformation bildet den Schwartzraum auf sich selber ab.*

Beweis: Offensichtlich ist die Fouriertransformation der Ableitung einer Funktion die Multiplikation mit $2\pi i$ mal der entsprechenden Koordinatenfunktion mit der Fouriertransformation der Funktion. Und es gilt $|\hat{f}(k)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| d^n x$. Also fällt die Fouriertransformation einer Schwartzfunktion schneller ab als jede Potenz. Umgekehrt ist die Fouriertransformierte einer integrablen Funktion stetig, weil es auf jeder beschränkten Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass aus $|k - k'| < \delta$ folgt $\sup\{|e^{2\pi ikx} - e^{2\pi ik'x}| \mid x \in K\} < \epsilon$. Außerdem gibt es für jede integrable Funktion f für jedes $\epsilon > 0$ eine kompakte Menge K, so dass $\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus K} |f(x)| d^n x < \epsilon$ gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned} |\hat{f}(k) - \hat{f}(k')| &\leq \int\limits_K f(x)|e^{2\pi ik} - e^{2\pi ik'}| d^n x + 2 \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus K} |f(x)| d^n x \\ &\leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)| d^n x + 2 \right) \epsilon. \end{aligned}$$

Also ist die Fouriertransformierte einer integrablen Funktion tatsächlich stetig, und die Fouriertransformierte einer Schwartzfunktion unendlich oft differenzierbar. **q.e.d.**

Sei also g eine Schwartzfunktion, dann gilt wegen des Satzes von Fubini:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(k) \bar{\hat{g}}(k) d^n k &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-2\pi ikx} \bar{g}(y) e^{2\pi iky} d^n x d^n y d^n k \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{2\pi ik(y-x)} \bar{g}(y) d^n x d^n k d^n y = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y) \bar{g}(y) d^n y. \end{aligned}$$

Also ist die $L^2(\mathbb{R}^n)$-Norm der Fouriertransformierten gleich der $L^2(\mathbb{R}^n)$-Norm der ursprünglichen Funktion. Weil die Schwartzfunktionen dicht liegen im $L^2(\mathbb{R}^n)$ folgt, dass die Fouriertransformation einen unitären Operator definiert von $L^2(\mathbb{R}^n)$ nach $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Definition 5.19. *Für jedes offene zusammenhängende Gebiet Ω sei $W^{2,2}(\Omega)$ der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ im Hilbertraum mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f, g\rangle_{W^{2,2}(\Omega)} = \int\limits_\Omega (\triangle f)\triangle\bar{g}d^nx + \int\limits_\Omega f\bar{g}d^nx.$$

Für alle Funktionen $g \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt offenbar

$$\langle \triangle g, \triangle g\rangle_{L^2(\Omega} = \int\limits_\Omega (\triangle g)\triangle\bar{g}d^n \leq \langle g, g\rangle_{W^{2,2}(\Omega)}.$$

Für alle $g \in W^{2,2}(\Omega)$ liegt deshalb $\triangle g$ in $L^2(\Omega)$ und für $f \in L^2(\Omega)$ folgt aus der Cauchy–Schwrazen Ungleichung

$$\left|\langle f, \triangle g\rangle_{L^2(\Omega)}\right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|g\|_{W^{2,2}(\Omega)}.$$

Also ist der Operator $H = -\triangle$ ein abgeschlossener selbstadjungierter Operator auf $L^2(\Omega)$ mit dem Domain $W^{2,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Außerdem ist H ein nichtnegativer Operator. Deshalb besitzt H eine Spektraldarstellung und der Operator e^{-tH} ist ein beschränkter Operator von $L^2(\Omega)$ nach $L^2(\Omega)$ dessen Norm höchstens 1 ist.

$$\|e^{-tH}g\|_{L^2(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Sei also $u(x,t) = (e^{-tH}g)(x)$. Dann ist $\dot{u}(x,t) = -(He^{-tH})(x) = \triangle u(x,t)$. Also erfüllt $u(x,t)$ die Wärmeleitungsgleichung mit den Randbedingungen:

$$u(x,0) = g(x) \qquad\qquad u(x,t) = 0 \quad \text{für} \quad x \in \partial\Omega.$$

(Dirichlet Randbedingungen an H). Wir wollen zur Anwendung dieser Aussage den Wärmeleitungskern für den Kreis S^1 und das Intervall $[-1,1]$ ausrechnen.

5.7 Wärmeleitungskern von S^1

Wir identifizieren den Kreis S^1 mit dem Quotientenraum $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Die Eigenfunktion von $-\frac{d^2}{dx^2}$ auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sind gegeben durch $\psi_k = e^{2\pi ikx}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ mit den Eigenwerten $4\pi^2k^2$. Diese Eigenfunktionen bilden offenbar eine Orthonormalsystem von $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Aus dem Satz von Bolzano Weiertraß folgt, das die Algebra der Polynome in $\sin(2\pi x)$ und $\cos(2\pi x)$ dicht liegen im rellen Banachraum $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z},\mathbb{R})$. Dann gilt dasselbe für die Polynome in $e^{2\pi\imath x}$ und $e^{-2\pi\imath x}$ im komplexen Banachraum $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z},\mathbb{C})$. Also ist orthogonale Komplement von dem vorherigen Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ trivial, und das

Orthonormalsystem ist eine Orthonormalbasis. Deshalb besitzt der Wärmeleitungskern von $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ den Integralkern:

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(x,y,t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ikx}e^{-2\pi iky}e^{-4\pi^2k^2t} = \Theta(x-y,4\pi it) \text{ mit} \\ \Theta(x,\tau) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ikx}e^{\pi i\tau k^2}. \end{aligned}$$

Hier ist $\Theta(x,\tau)$ Jacobi's Thetafunktion. Die Summe konvergiert auf dem Gebiet $(x,\tau)\in\mathbb{C}\times\{\tau\in\mathbb{C}\mid\Im(\tau)>0\}$ gegen eine holomorphe Funktion, weil dann $e^{\pi i\tau k^2}$ mit $|k|^2$ exponentiall abfällt. Sie ist im wesentlichen charakerisiert durch die Eigenschaften

$$\Theta(x+1,\tau)=\Theta(x,\tau) \qquad \Theta(x+\tau,\tau)=\Theta(x,\tau)e^{-\pi i\tau}e^{-2\pi ix}$$

$$\Theta(x,\tau)=0 \quad \text{für} \quad x=\frac{1}{2}+\tau/2+\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau.$$

Die erste und dritte Eigenschaften folgen sofort aus der Definition als unendliche Reihe. Für die zweite Eigenschaft berechnen wir

$$\begin{aligned} \Theta(x+\tau,\tau) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ik(x+\tau)}e^{\pi ik^2\tau} && = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ikx}e^{\pi i(k+1)^2\tau}e^{-\pi i\tau} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i(k+1)x}e^{\pi i(k+1)^2\tau}e^{-2\pi ix}e^{-\pi i\tau} && = \Theta(x,\tau)e^{-2\pi ix}e^{-\pi i\tau} \end{aligned}$$

Übungsaufgabe 5.20. **(i)** *Zeige dass für alle $t>0$ die Fundamentallösung $\Phi(x,t)$ als Funktion auf $\mathbb{R}^n$ eine Schwartzfunktion ist.*

(ii) *Berechne für alle $t>0$ die Fouriertransformierte der Fundamentallösung $\Phi(x,t)$ als Funktion auf $x\in\mathbb{R}^n$.*

(iii) *Zeige, dass für jede Schwartzfunktion f auf $\mathbb{R}$, die folgende Summe gegen eine glatte Funktion $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}$ konvergiert, die periodisch ist mit Periode Eins:*

$$\tilde{f}(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n).$$

(iv) *Sei h eine stetige periodische Funktion auf $\mathbb{R}$ mit periode Eins. Zeige, dass die Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswert h für alle $t>0$ periodisch bleibt mit Periode Eins. Folgere daraus, dass die folgende Summe die Eigenschaften eines Wärmeleitungskerns auf S^1 hat:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi(x-y+n,t).$$

(v) *Die Poissonsche Summenformel besagt, dass für jede Schwartzfuntkion f auf $\mathbb{R}$ gilt*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \hat{f}(n).$$

Benutze diese Formel um zu zeigen, dass gilt

$$H_{S^1}(x,y,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi(x-y+n,t).$$

5.8 Wärmeleitungskern von $[-1,1]$

Die Abbildung $x \mapsto \frac{x+1}{2}$ bildet das Intervall $[-1,1]$ auf das Intervall $[0,1]$ ab. Also sind die Eigenfunktionen von $-\frac{d^2}{dx^2}$ auf $[-1,1]$ mit Dirichletrandbedingungen gegeben durch

$$\psi_k = \sin\left(\pi k\left(\tfrac{x+1}{2}\right)\right) \quad k\in\mathbb{N}$$

Diese Funktionen bilden wieder eine Orthonormalbasis

$$\int_{-1}^{1} \sin\left(\pi k\left(\tfrac{x+1}{2}\right)\right)\sin\left(\pi k'\left(\tfrac{x+1}{2}\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\cos\left(\pi(k-k')\left(\tfrac{x+1}{2}\right)\right) - \cos\left(\pi(k+k')\left(\tfrac{x+1}{2}\right)\right)\right)dx = \delta_{k,k'}$$

Also ist der Wärmeleitungskern gegeben durch

$$\begin{aligned} H_{[-1,1]}(x,y,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{-\pi^2k^2t}{4}}\sin\left(\pi k\left(\tfrac{x+1}{2}\right)\right)\sin\left(\pi k\left(\tfrac{y+1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{-\pi^2k^2t}{4}}\left(\cos\left(\pi k\tfrac{x-y}{2}\right) - \cos(\left(\pi k\tfrac{x+y}{2}+1\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\Theta\left(\tfrac{x-y}{4},\tfrac{\pi it}{4}\right) - \frac{1}{4}\Theta\left(\tfrac{x+y}{4}+\tfrac{1}{2},\tfrac{\pi it}{4}\right). \end{aligned}$$

Damit ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} - \triangle u = 0 \text{ auf } \quad (0,1) \qquad\qquad u(x,0)=h(x) \text{ auf } \quad [0,1]$$

gegeben durch $$u(x,t) = \int_{-1}^{1} H_{[-1,1]}(x,y,t)h(y)dy.$$

Übungsaufgabe 5.21. **(i)** *Zeige dass der Wärmeleitungskern $H_{[0,1]}$ gegeben ist durch*

$$H_{[0,1]}(x,y,t) = \frac{1}{2}\Theta(\tfrac{x-y}{2}, \pi\imath t) - \frac{1}{2}\Theta(\tfrac{x+y}{2}, \pi\imath t).$$

(ii) *Sei $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ der Raum aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, dessen Elemente folgendes erfüllen:*

$$f(n+x) = \begin{cases} f(x) & \text{für gerade } n \in 2\mathbb{Z} \text{ und } x \in \mathbb{R} \\ -f(1-x) & \text{für ungerade } n \in 2\mathbb{Z}+1 \text{ und } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Zeige, dass es für jede stetige Funktion f auf $[0,1]$, die auf dem Rand $\partial[0,1]$ verschwindet genau eine Funktion in $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ gibt, die auf $[0,1]$ mit f übereinstimmt, und dass alle Funktionen in $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ von so einer Funktion f induziert werden. Zeige dazu zuerst, dass alle Funktionen in $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ an allen $x \in \mathbb{Z}$ verschwinden, und dann, dass $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ genau aus den stetigen, ungeraden und periodischen Funktionen mit der Periode Zwei besteht.

(iii) *Zeige, dass für jede Schwartzfunktion f auf $\mathbb{R}$ die folgende Summe gegen eine glatte Funktion $\tilde{f}$ in $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ konvergiert:*

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2n+x) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2n-x).$$

(iv) *Sei $h \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$. Zeige, dass die Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswert h für alle $t > 0$ eine glatte Funktion in $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ ist. Folgere daraus, dass die folgende Summe die Eigenschaften eines Wärmeleitungskerns auf $[0,1]$ hat:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi(x+2n-y,t) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi(x+2n+y,t).$$

(v) *Zeige, dass gilt*

$$H_{[0,1]}(x,y,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi(x+2n-y,t) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi(x+2n+y,t).$$

Der Wärmeleitungskern eines kartesischen Produktes läßt sich einfach aus den beiden entsprechenden Wärmeleitungskernen berechnen:

Lemma 5.22. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ und $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ zwei offene, beschränkte und zusammenhängende Gebiete, deren entsprechenden Wärmeleitungskerne H_Ω und $H_{\Omega'}$ existieren. Der Wärmeleitungskern des kartesischen Produktes ist dann gegeben durch*

$$H_{\Omega\times\Omega'}((x,x'),(y,y'),t) = H_\Omega(x,y,t)H_{\Omega'}(x',y',t) \quad (x,x'),(y,y') \in \bar{\Omega}\times\bar{\Omega}' \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Beweis: Offensichtlich ist der Laplaceoperator des kartesischen Produktes einfach die Summe der beiden entsprechenden Laplaceoperatoren. Daraus folgt, dass für alle Funktionen h auf $\Omega\times\Omega'$, die sich als ein Produkt von zwei Funktionen auf Ω und Ω' schreiben lassen, das Produkt der entsprechenden Lösungen Wärmeleitungsgleichung erstens das Anfangswertproblem löst und außerdem die richtigen Randbedingungen hat. Weil Ω und Ω' beschränkt sind, sind ihre Abschlüsse und damit auch $\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}'$ kompakt. Wegen dem Satz von Bolzano Weierstraß liegen auf der kompakten Menge $\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}'$ die Summen aller Produkte von Funktionen auf $\bar{\Omega}$ und $\bar{\Omega}'$ dicht in allen stetigen Funktionen.**q.e.d.**

Damit haben wir also die Wärmeleitungskerne von allen Tori $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ und allen Quadern $[-1,1]^n$ berechnet. Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}-\triangle u=0 \text{ auf } (-1,1)^n,\quad u(x,0)=h(x) \text{ auf } [-1,1]^n,\quad u=0 \quad \text{ auf } \partial[-1,1]^n\times[0,T]$$

ist also gegeben durch
$$u(x,t)=\int\limits_{[-1,1]^n}\prod_{i=1}^n H_{[-1,1]}(x_i,y_i,t)h(y)d^ny.$$

Korollar 5.23. *Sei $u(x,t)$ eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung auf dem Gebiet $[-r,r]^h\times[0,T]$. Dann gilt*

$$u(x,T)=\int\limits_0^T\int\limits_{\partial[-r,r]^n} u(z,t)\nabla_z H_{[-r,r]^n}(x,z,t)N(z)d\sigma(z)dt=$$
$$+\int\limits_{[-r,r]^n} u(y,0)H_{[-r,r]^n}(x,y,t)d^ny.$$
q.e.d.

Es gilt
$$H_{[-r,r]^n}(x,y,t)=\frac{1}{r^n}\prod_{i=1}^n H_{[-1,1]}\left(\tfrac{x_i}{r},\tfrac{y_i}{r},\tfrac{t}{r^2}\right).$$
Weil dieser Wärmeleitungskern analytisch ist, folgt sofort

Korollar 5.24. *Sei u eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung auf einem offenen Gebiet in $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$. Dann ist u analytisch.* **q.e.d.**