Kapitel 4

Laplacegleichung

Eine der wichtigsten partiellen Differentialgleichungen ist die Laplacegleichung

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Die entsprechende inhomogene Differentialgleichung heißt Poissongleichung:

$$-\triangle u = f.$$

Beide Gleichungen sind lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für eine gesuchte Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sie tauchen in der Physik auf und beschreiben z.B. das elektrische Feld im Vakuum oder mit einer Ladungsverteilung f.

4.1 Fundamentallösungen

Die Laplacegleichung ist invariant unter allen Rotationen und Translationen des eukidischen Raumes $\mathbb{R}^n$. Deshalb bietet es sich an zunächst nach kugelsymmetrischen Lösungen zu suchen, also Lösungen, die nur von der Länge $r = |x| = \sqrt{x \cdot x}$ des Ortsvektors abhängen. Für eine solche Funktion $u(x) = v(r) = v(\sqrt{x \cdot x})$ ergibt die Kettenregel:

$$\nabla_x u(x) = v'\left(\sqrt{x \cdot x}\right) \nabla_x r = v'\left(\sqrt{x \cdot x}\right) \frac{2x}{2r}.$$

Also geht die Laplacegleichung über in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\triangle_x u(x) = \nabla_x \cdot \nabla_x u = v''(r)\frac{x^2}{r^2} + v'(r)\frac{n}{r} - v'(r)\frac{x^2}{r^2 r} = v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0.$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung können wir folgendermaßen lösen:

$$\frac{v''(r)}{v'(r)} = \frac{1-n}{r} \;\Rightarrow\; \ln(v'(r)) = (1-n)\ln(r) + C \;\Rightarrow\; v(r) = \begin{cases} C'\ln(r) + C'' & \text{für } n = 2 \\ \frac{C'}{r^{n-2}} + C'' & \text{für } n \geq 3. \end{cases}$$

Definition 4.1. *Sei $\Phi(x)$ folgende Lösung der Laplacegleichung:*

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln|x| & \text{für } n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n |x|^{n-2}} & \text{für } n \geq 3. \end{cases}$$

Hier bezeichnet ω_n das Volumen des Einheitsballes im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$.

Die Wahl der Konstanten werden wir später erläutern. Diese Fundamentallösung hat bei $x = 0$ eine Singularität. Als Distribution ist $-\triangle\Phi(x) = \delta(x)$:

Satz 4.2. *Sei $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die Funktion*

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) d^n y = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x-y) d^n y$$

zweimal differenzierbar und erfüllt die Poissongleichung $-\triangle u = f$.

Beweis: Die Gleichheit der beiden Integrale in der Definition von $u(x)$ ergibt sich aus der Substitution $y \to x - y$. Weil f aber zweimal differenzierbar ist und kompakten Träger hat, ist auch das zweite Integral nach x zweimal differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) d^n y.$$

Insbesonder ist $\triangle u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \triangle_x f(x-y) d^n y$. Wir zerlegen jetzt dieses Integral in ein Integral nahe bei der Singulartät von Φ und ein Integral außerhalb der Singularität:

$$\begin{aligned} \triangle u(x) &= \int\limits_{B(0,\epsilon)} \Phi(y)\triangle_x f(x-y) d^n y & &+ \int\limits_{\mathbb{R}\setminus B(0,\epsilon)} \Phi(y)\triangle_x f(x-y) d^n y \\ &= I_\epsilon & &+ J_\epsilon. \end{aligned}$$

Hierbei lassen wir ϵ gegen Null gehen. Das erste Integral konvergiert aber in diesem Grenzwert gegen Null:

$$|I_\epsilon| \leq C \|\triangle_x f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int\limits_{B(0,\epsilon)} |\Phi(y)| d^n y \leq \begin{cases} C\epsilon^2 |\ln\epsilon| & (n = 2) \\ C\epsilon^2 & (n \geq 3). \end{cases}$$

Eine partielle Integration ergibt für das zweite Integral:

$$\begin{aligned}
J_\epsilon &= \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\epsilon)} \Phi(y)\triangle_y f(x-y)d^n y \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\epsilon)} \nabla_y\Phi(y)\cdot\nabla_y f(x-y)d^n y \qquad + \int\limits_{\partial B(0,\epsilon)} \Phi(y)\nabla_y f(x-y)\cdot N d\sigma(y) \\
&= K_\epsilon \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + L_\epsilon.
\end{aligned}$$

Hier ist N die äußere Normale und $d\sigma$ das Maß auf dem Rand von $B(0,\epsilon)$. Der zweite Ausdruck konvergiert wieder gegen Null:

$$|L_\epsilon| \le |\nabla f|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int\limits_{\partial B(0,\epsilon)} |\Phi(y)|d\sigma(y) \le \begin{cases} C\epsilon|\ln\epsilon| & (n=2) \\ C\epsilon & (n\ge 3). \end{cases}$$

Durch nochmaliges partielles Integrieren erhalten wir

$$\begin{aligned}
K_\epsilon &= \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\epsilon)} \triangle_y\Phi(y)f(x-y)d^n y - \int\limits_{\partial B(0,\epsilon)} \nabla_y\Phi(y)f(x-y)\cdot N d\sigma(y) \\
&= -\int\limits_{\partial B(0,\epsilon)} \nabla_y\Phi(y)f(x-y)\cdot N d\sigma(y),
\end{aligned}$$

weil für $y \neq 0$ ϕ harmonisch ist. Nun ist aber der Gradient $\nabla\Phi(y) = -\frac{1}{n\omega_n}\frac{y}{|y|^n}$, und der zum Ursprung zeigende Normalenvektor gleich $-\frac{y}{|y|}$. Wenn σ_n das Volumen der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet, dann berechnet sich das Volumen ω_n des Einheistballes durch

$$\omega_n = \int\limits_0^1 \sigma_n r^{n-1}dr = \frac{\sigma_n}{n}.$$

Weil $n\omega_n\epsilon^{n-1}$ das Volumen von $\partial B(0,\epsilon)$ ist, ist K_ϵ der Mittelwert von $-f$ auf $\partial B(x,\epsilon)$. Weil f stetig ist, konvergiert dieser Mittelwert im Grenzwert $\epsilon\to 0$ gegen $-f(x)$.**q.e.d.**

Wir haben insbesondere gezeigt, dass im Sinne von Distributionen gilt $-\triangle\Phi(x) = \delta(x)$. Hieraus erklärt sich die Wahl der Konstanten bei der Definition von Φ. Die Faltung einer Funktion f mit Φ ist auch definiert, wenn f nur stetig ist, oder sogar nur lokal integrabel ist. Im Allgemeinen ist die einer stetigen Verteilung f entsprechende Lösung der Poissongleichung nicht zweimal stetig differenzierbar. Aber es genügt, dass f Lipschitz–stetig ist, damit die Aussage des Satzes gültig bleibt. Diese Lösung der

Poissongleichung ist sogar für alle Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ wohl definiert, und auch eine schwache Lösung der Poissongleichung. Weil die Poissongleichung eine inhomogene lineare Differentialgleichung ist, ist jede Lösung nur bestimmt bis auf Addition einer Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung, also einer harmonischen Funktion.

4.2 Mittelwerteigenschaften

Für eine harmonische Funktion u auf einem Gebiet, das einen Ball $B(x,r)$ vom Radius r enthält, ist der Mittelwert von u auf dem Rand $\partial B(x,r)$ des Balles gerade gleich dem Wert von u am Mittelpunkt x. Weil das für beliebige Radien gilt und der Mittelwert von u auf dem Ball $B(x,r)$ gerade gleich einem gewichtetem Mittelwert aller Mittelwerte von u auf den Rändern der Bälle $B(x,r')$ mit $0 \leq r' \leq r$ ist, ist dann auch der Mittelwert auf dem Ball $B(x,r)$ gleich dem Wert von u am Mittelpunkt x. Dieser Sachverhalt führt zu aufschlussreichen Schlussfolgerungen.

Mittelwerteigenschaft 4.3. *Sei $u \in C^2(\Omega)$ eine harmonischen Funktion auf einem offenen Gebiet Ω, das den Ball $B(x,r)$ enthält. Dann sind die Mittelwerte von u auf dem Ball $B(x,r)$ und dessen Rand gleich dem Wert von u am Mittelpunkt x. Sind umgekehrt die Mittelwerte einer zweimal differenzierbaren Funktion $u \in C^2(\Omega)$ auf allen Bällen $B(x,r)$, die in Ω enthalten sind, oder auf Rändern dieser Bälle gleich den Werten von u an den entsprechenden Mittelpunkten, dann ist u auf Ω harmonisch.*

Beweis: Sei $\Phi(r)$ definiert als der Mittelwert von u auf den Rändern der Bälle $B(x,r) \subset \Omega$:

$$\Phi(r) = \frac{1}{r^{n-1} n\omega_n} \int\limits_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y) = \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B(0,1)} u(x+rz) d\sigma(z).$$

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Phi'(r) &= \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz) \cdot z d\sigma(z) \\
&= \frac{1}{r^{n-1} n\omega_n} \int\limits_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot N d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{r^{n-1} \omega_n} \int\limits_{B(x,r)} \triangle u(y) d^n y.
\end{aligned}$$

Wenn jetzt u harmonisch ist, dann folgt dass Φ konstant ist solange $B(x,r)$ in Ω liegt. Wegen der Stetigkeit von u konvergiert $\Phi(r)$ im Grenzwert $\lim r \to 0$ gegen $u(x)$. Also sind die Mittelwerte von u auf den Rändern der Bälle in Ω gerade gleich den Werten von u an den entsprechenden Mittelpunkten. Es gilt aber

$$\frac{1}{r^n\omega_n}\int\limits_{B(x,r)} u(y)d^ny = \frac{n}{r^n}\int\limits_0^r \frac{1}{s^{n-1}n\omega_n}\int\limits_{\partial B(x,s)} s^{n-1}u(y)d\sigma(y)ds = \frac{n}{r^n}\int\limits_0^r s^{n-1}\Phi(s)ds.$$

Deshalb folgt aus der Konstanz von Φ, dass auch der Mittelwert von u auf $B(x,r)$ gleich dem Wert von u am Mittelpunkt x ist.

Wenn umkegehrt die Mittelwerte von u auf allen Bällen $B(x,r)$ in Ω gleich den Werten von u an den entsprechenden Mittelpunlkten sind, dann gilt

$$u(x) = \frac{n}{r^n}\int\limits_0^r s^{n-1}\Phi(s)ds.$$

Deshalb verschwindet die Ableitung der rechten Seite nach r:

$$-\frac{n^2}{r^{n+1}}\int\limits_0^r s^{n-1}\Phi(s)ds + \frac{n}{r^n}r^{n-1}\Phi(r) = -\frac{n}{r}u(x) + \frac{n}{r}\Phi(r) = 0.$$

Dann sind auch die Mittelwerte $\Phi(r)$ von u auf den Rändern der Bälle $B(x,r)$ gleich den Werten von u an den Mittelpunkten sind. Weil u zweimal differenzierbar ist, ist nach unser obigen Formel Φ differenzierbar. Wenn die Ableitung $\Phi'(r)$ verschwindet, müssen die Integrale von $\triangle u$ über alle Bälle in Ω verschwinden. Also ist u dann harmonisch. Dasselbe gilt offenbar auch, wenn die Mittelwerte von u auf den Rändern der Bälle $B(x,r)$ gleich den Werten von u an den Mittelpunkten sind. **q.e.d.**

4.3 Maximumprinzip

Wenn eine harmonische Funktion u auf einem offen zusammenhängendem Gebiet Ω ihr Supremum (oder Infimum) in einem Punkt $x \in \Omega$ annimmt, dann gibt es sicherlich einen Ball $B(x,r) \subset \Omega$. Dann folgt aber aus der Mittelwerteigenschaft

$$\frac{1}{r^n\omega_n}\int\limits_{B(x,r)} |u(y) - u(x)|d^ny = 0.$$

Also muss u auf $B(x,r)$ konstant sein. Insbesondere ist die Teilmenge von Ω, auf der u gleich $u(x)$ ist offen und abgeschlossen. Weil aber Ω zusammenhängend ist, muss dann diese Teilmenge ganz Ω sein. Damit fogt aus der Mittelwerteigenschaft ein

Starkes Maximumprinzip 4.4. *Sei u eine harmonische Funktion auf dem offenen und zusammenhängenden Gebiet Ω. Nimmt u das Supremum (oder Infimum) auf Ω an, dann ist u konstsant.* **q.e.d.**

Aus dem Starken Maximumprinzip fogt aber sofort ein

Schwaches Maximumprinzip 4.5. *Sei $u \in C(\bar{\Omega})$ eine auf dem Abschluss eines beschränkten offenen Gebietes Ω stetige Funktion, die auf Ω harmonisch ist. Dann nimmt u sein Maximum (und Minimum) auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω an.*

Beweis: Weil f stetig ist, nimmt sie ihr Maximum und Minimum auf der kompakten Menge Ω an. Wenn diese Extremwerte nicht auf dem Rand liegen, dann ist f aufgrund des Starken Maximumprinzips konstant. **q.e.d.**

4.4 Greensche Funktionen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, durch welche Vorgaben eine harmonische Funktion auf einem offenen zusammenhängendem Gebiet Ω eindeutig bestimmt ist. Es bietet sich an die Werte von u oder einiger ihrere partiellen Ableitungen auf dem Rand $\partial\Omega$ festzulegen.

Die Anwendung des Gaußschen Satzes auf das Vektorfeld $v(x)\nabla u(x)$ ergibt die

Erste Greensche Formel 4.6. *Seien u und v zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf $\bar{\Omega}$. Dann gilt*

$$\int\limits_{\Omega} v(y)\triangle u(y)d^n y + \int\limits_{\Omega} \nabla v(y) \cdot \nabla u(y)d^n y = \int\limits_{\partial\Omega} v(z)\nabla u(z) \cdot N d\sigma(z).$$

q.e.d.

Vertauschen wir in der Ersten Greenschen Formel die Rollen von u und v und subtrahieren das Ergebnis von der ursprünglichen Formel, so erhalten wir die

Zweite Greensche Formel 4.7. *Seien u und v zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf $\bar{\Omega}$. Dann gilt*

$$\int\limits_{\Omega} \left(v(y)\triangle u(y) - u(y)\triangle v(y)\right) d^n y = \int\limits_{\partial\Omega} \left(v(z)\nabla u(z) - u(z)\nabla v(z)\right) \cdot N d\sigma(z).$$

q.e.d.

Wir wenden die Zweite Greensche Formel auf die Fundamentallösung $\Phi(x-y)$ an. Diese Fundamentallösung ist aber für $x \neq y$ harmonisch. Im Beweis von Satz 4.2 haben wir gesehen, dass folgendes gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) \triangle_y \Phi(x-y) d^n y = \int\limits_{B(y,\epsilon)} f(y) \triangle_x \Phi(x-y) d^n y = -f(x).$$

Deshalb folgt der

Greensche Darstellungssatz 4.8. *Sei $u \in C^2(\bar{\Omega})$ eine zweimal differenzierbare Funktion auf dem offenden Gebiet Ω. Dann gilt für $x \in \Omega$:*

$$u(x) = -\int\limits_{\Omega} \Phi(x-y) \triangle u(y) d^n y + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\Phi(x-z) \nabla_z u(z) - u(z) \nabla_z \Phi(x-z)\right) \cdot N d\sigma(z).$$

Deshalb ist auf Ω jede Lösung u der Poissongleichung $-\triangle u = f$ durch die Werte von u und die normal Ableitung von u auf dem Rand $\partial\Omega$ eindeutig bestimmt. Umgekehrt stellt sich dann die Frage für welche solche Daten auch eine Lösung existiert. Aus dem schwachen Maximumprinzip folgt sofort, dass für eine Wahl von f und eine Wahl von Werten von u auf dem Rand $\partial\Omega$ höchstens eine Lösung existiert, weil die Differenz zweier solcher Lösungen harmonisch ist und auf dem Rand verschwindet. Deshalb erscheint es naheliegend folgendes Randwertproblem zu formulieren:

Dirichletproblem 4.9. *Auf einem offenen zusammenhängendem Gebiet Ω ist eine Lösung der Poissongleichung $-\triangle u = f$ gesucht, die auf dem Rand die Werte $u|_{\partial\Omega} = g$ annimmt. Hierbei sind f und g gegebene Funktionen auf Ω bzw. auf $\partial\Omega$.*

Dieses Randwertproblem lösen wir mit einer entsprechenden Greenschen Funktion:

Greensche Funktion 4.10. *Eine Funktion $G_\Omega : \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ heißt Greensche Funktion für das Gebiet Ω, wenn folgendes gilt:*

(i) *$G_\Omega(x, y) = 0$ für $y \in \partial\Omega$.*

(ii) *$G_\Omega(x, y) - \Phi(x-y)$ ist für alle $x \in \Omega$ eine harmonische Funktion auf $y \in \Omega$*

Mit dem Zweiten Greenschen Satz gilt für die Funktion $v(y) = G_\Omega(x, y) - \Phi(x-y)$:

$$\begin{aligned} &-\int\limits_{\Omega} \Phi(x-y) \triangle u(y) d^n y + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\Phi(x-z) \nabla_z u(z) - u(z) \nabla_z \Phi(x-z)\right) \cdot N d\sigma(z) \\ &\qquad = -\int\limits_{\Omega} G_\Omega(x, y) \triangle u(y) d^n y - \int\limits_{\partial\Omega} u(z) \nabla_z G_\Omega(x, z) \cdot N d\sigma(z). \end{aligned}$$

Also ergibt der Greensche Darstellungssatz:

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} G_\Omega(x,y)\triangle_y u(y) d^n y - \int\limits_{\partial\Omega} u(z)\nabla_z G_\Omega(x,z)\cdot N d\sigma(z).$$

Umgekehrt seien $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ und $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ gegebene Funktionen. Ist dann

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} G_\Omega(x,y) f(y) d^n y - \int\limits_{\partial\Omega} g(z)\nabla_z G_\Omega(x,z)\cdot N d\sigma(z)$$

eine Lösung des Diricheletproblems? Die Antwort ist im Wesentlichen ja. Wir benötigen aber wieder Regularitätseigenschaften der Funktionen f und g. Damit reduziert sich das Dirichletproblem auf die Bestimmung der Greenschen Funktion.

Offenbar ist die Differenz $G_\Omega(x,y) - \Phi(x-y)$ eine harmonische Funktion auf $x \in \Omega$, die auf dem Rand gerade gleich $-\Phi(x-y)$ ist. Deshalb genügt es für die Bestimmung der Greenschen Funktion, das Dirchletproblem für die Funktionen $f = 0$ und $g(x) = \Phi(x-y)$ zu lösen.

Satz 4.11. *(Symmetrie der Greenschen Funktion) Sei G_Ω die Greensche Funktion des Gebietes Ω. Dann gilt $G_\Omega(x,y) = G_\Omega(y,x)$ für alle $x \neq y \in \Omega$.*

Beweis: Für $x \neq y \in \Omega$ sei $\epsilon > 0$ so klein, dass die beiden Bälle $B(x,\epsilon)$ und $B(y,\epsilon)$ disjunkt sind und in Ω liegen. Die Zweite Greensche Formel auf dem Gebiet $\Omega\setminus(B(x,\epsilon)\cup B(y,\epsilon))$ mit den Funktionen $u(z) = G(x,z)$ und $v(z) = G(y,z)$ ergibt

$$\int\limits_{\partial B(x,\epsilon)} (G(y,z)\nabla_z G(x,z) - G(x,z)\nabla_z G(y,z))\cdot N d\sigma(z)$$
$$= \int\limits_{\partial B(y,\epsilon)} (G(x,z)\nabla_z G(y,z) - G(y,z)\nabla_z G(x,z))\cdot N d\sigma(z).$$

Im Grenzwert $\epsilon \to 0$ konvergieren die beiden zweiten Summenden genau wie L_ϵ im Beweis von Satz 4.2 gegen Null. Die beiden ersten Summenden konvergieren in diesem Grenzwert $\epsilon \to 0$ genau wir die Umformumg von K_ϵ zu einem Randintegral im Beweis von Satz 4.2 gegen $G(y,x)$ bzw. $G(x,y)$. **q.e.d.**

Wir wollen uns zunächst auf den Fall $\Omega = B(0,1)$ beschränken, auf den sich offensichtlich alle Bälle zurückführen lassen. Dabei benutzen wir Inversionen an der Einheitssphähre $\partial B(0,1)$: Die Abbildung $x \mapsto \tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$ spiegelt das Innere vom Einheitsball auf das Äußere, wobei die Einheitssphähre festgehalten wird. Das Dirichletproblem für den Einheitskreis mit den Funktion $f = 0$ und $g(x) = \Phi(x-y)$ wird durch die Inversion der Singularität bei $y = x$ am Einheitskreis gelöst:

Greensche Funktion vom Einheitsball 4.12. *Die Greensche Funktion vom Einheitsball $B(0,1)$ ist gegeben durch*

$$G_{B(0,1)}(x,y) = \Phi(x-y) - \Phi(|x|(\tilde{x}-y)) = \begin{cases} \Phi(x-y) - |x|^{2-n}\Phi(\tilde{x}-y) & \text{für } n > 2 \\ \Phi(x-y) - \Phi(\tilde{x}-y) - \Phi(x) & \text{für } n = 2. \end{cases}$$

Beweis: Für $|y| = 1$ gilt nämlich $|x|^2|\tilde{x}-y|^2 = 1 - 2y\cdot x + x^2 = |x-y|^2$. Deshalb stimmt auf dem Rand $y \in \partial B(0,1)$ die Funktion $\Phi(|y|(x-\tilde{y})$ tatsächlich mit der Funktion $\Phi(x-y)$ überein. **q.e.d.**

Satz 4.13. *Sei $f \in C^2(\bar{B}(0,1))$ und $g \in C(\partial B(0,1))$. Dann ist*

$$u(x) = \int\limits_{B(0,1)} G_{B(0,1)}(x,y)f(y)d^ny - \int\limits_{\partial B(0,1)} g(z)\nabla_z G_{B(0,1)}(x,z)\cdot N d\sigma(z)$$

die eindeutige Lösung des entsprechenden Diricheletproblems.

Beweis: Wegen $|x|^2|\tilde{x}-y|^2 = 1 - 2x\cdot y + x^2y^2 = |y|^2|\tilde{y}-x|^2$ gilt $G_{B(0,1)}(x,y) = G_{B(0,1)}(y,x)$. Weil die beiden gegebenen Funktionen f und g getrennt in die beiden Summanden eingehen, genügt es die beiden Fälle $g = 0$ und $f = 0$ getrennt zu betrachten. Die Argumente des Satzes 4.2 zeigen auch, dass im Fall $g = 0$ die angegebene Funktion auf $B(0,1)$ die Poissongleichung löst und sich zweimal stetig differenzierbar auf $\bar{B}(0,1)$ fortsetztzen läßt. Weil $G_{B(0,1)}(x,y)$ auf dem Rand $x \in \partial B(0,1)$ verschwindet, erfüllt die angegebene Lösung des Dirichletproblems auch die geforderte Randbedingung auf $\partial B(0,1)$.

Im Fall $f = 0$ zeigen wir zunächst, dass die vermeintliche Lösung des Dirichletproblems sich zweimal stetig differenzierbar auf $\bar{B}(0,1)$ forstsetztzen läßt. Dazu rechnen wir den entsprechenden Integralkern für $|y| = 1$ und $n > 2$ explizit aus (Wir überlassen es dem Leser, sich davon zu überzeugen, dass das Ergebnis auch für $n = 2$ richtig ist):

$$\begin{aligned}
K(x,y) &= -\nabla_y G_{B(0,1)}(x,y)\cdot\frac{y}{|y|} = -\nabla_y G_{B(0,1)}(y,x)\frac{y}{|y|} \\
&= -\frac{1}{n(n-2)\omega_n}\frac{y}{|y|}\nabla_y\left(\frac{1}{|y-x|^{n-2}} - \frac{1}{|y|^{n-2}\,|\tilde{y}-x|^{n-2}}\right) \\
&= \frac{1}{n\omega_n}\frac{y}{|y|}\left(\frac{y-x}{|y-x|^n} - \frac{y}{|y|^n\,|\tilde{y}-x|^{n-2}} - \frac{(\tilde{y}-x)\left(\frac{1}{|y|^2} - 2\frac{y^2}{|y|^4}\right)}{|y|^{n-2}\,|\tilde{y}-x|^n}\right) \\
&= \frac{1}{n\omega_n}\frac{1 - xy - (x^2 - 2xy + 1) + (1 - xy)}{|x-y|^n} \\
&= \frac{1-|x|^2}{n\omega_n|x-y|^n}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt insbesondere, dass der Intgeralkern für $|x| < 1$ positiv ist. Setzen wir die harmonische Funktion $u = 1$ in den Greenschen Darstellungssatz ein, so sehen wir, dass das Integral von dem Integralkern über $\partial B(0,1)$ gleich 1 ist. Weil aber andererseits dieser Integralkern für festes $y \in \partial B(0,1)$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ stetig ist und auf $\partial B(0,1) \setminus \{y\}$ verschwindet, konvergiert für festes $y \in \partial B(0,1)$ die Folge von Funktionen $K(\lambda x, y)$ auf $\partial B(0,1)$ im Grenzwert $\lambda \uparrow 1$ als Distribution gegen die δ–Distribution. Daraus folgt dann, dass für stetiges g die vermeintliche Lösung tatsächlich auf dem Rand mit g übereinstimmt. **q.e.d.**

Aufgrund des Transformationsverhaltens des Laplaceoperators unter der Transformation $x \mapsto r(x - z)$, ist dann die Greensche Funktion für den Ball $B(z, r)$ gegeben durch

$$G_{B(z,r)}(x, y) = r^{2-n} G_{B(0,1)}((x - z)/r, (y - z)/r).$$

Daraus ergibt sich, dass jede harmonische Funktion u auf $B(z, r)$, die sich stetig auf $\partial B(z, r)$ fortsetzten läßt, folgendes gilt:

$$u(x) = \frac{r^2 - |x - z|^2}{nr\omega_n} \int\limits_{\partial B(z,r)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} d\sigma(y) = \frac{1 - \frac{|x-z|^2}{r^2}}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B(0,1)} \frac{u(z + ry)}{|x/r - z/r - y|^n} d\sigma(y).$$

Also sind insbesondere alle Werte von u in $B(z, r)$ allein durch die Werte von u auf $\partial B(z, r)$ bestimmt. Durch Ableiten nach x erhalten wir ähnliche Formeln für die Werte der Ableitungen von u. Diese Formel impliziert auch die Mittelwerteigenschaft. Schließlich zeigt sie sogar, dass jede harmonische Funktion analytisch ist, weil der Integralkern als Funktion von x analytisch ist.

Korollar 4.14. *Jede auf einem offenen Gebiet harmonische Funktion ist analytisch.* **q.e.d.**

Korollar 4.15. *Sei u eine harmonische Funktion auf einem Gebiet $\Omega \supset B(x, r)$. Dann gibt es eine Konstante $C(n, k)$, die nur von der Dimension n und der Ordnung k abhängt, so dass alle partiellen k–ten Ableitungen von u an der Stelle x beschränkt sind durch*

$$\left| \frac{\partial^k u(x)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} \right| \leq \frac{C(n, k)}{r^k} \|u\|_{L^\infty(\partial B(0,r))}.$$

Beweis: Die Ungleichung folgt sofort aus der Poissonschen Darstellungsformel. **q.e.d.**

Satz von Liouville 4.16. *Eine auf $\mathbb{R}^n$ beschränkte harmonische Funktion ist konstant.*

Beweis: Weil u beschränkt ist, sind die Normen $\|u\|_{L^\infty(\partial B(x,r))}$ beschränkt. Dann folgt aus der Poissonschen Darstellungsformel, dass die ersten partiellen Ableitungen von u durch ein Vielfaches von $1/r$ beschränkt sind. Aus dem Grenzwert $r \to \infty$ folgt, dass alle ersten partiellen Ableitungen von u verschwinden und u konstant ist. **q.e.d.**

Lemma 4.17. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet, das 0 enthält, und u sei eine harmonische beschränkte Funktion auf $\Omega \setminus \{0\}$. Dann läßt sich u harmonisch auf Ω fortsetzten.*

Beweis: Wir wählen einen kleinen Kreis $B(0,r) \subset \Omega$. Dann gibt es wegen Satz 4.13 eine eindeutige Lösung $\tilde{u}$ zu dem Dirichletproblem mit den Randwerten von u auf $\partial B(0,r)$. Wir betrachten jetzt die Familie von harmonischen Funktionen $u_\epsilon(x) = \tilde{u}(x) - u(x) + \epsilon G_{B(0,r)}(x,0)$ auf $B(0,r) \setminus \{0\}$. Aufgrund der Konstruktion verschwinden diese Funktionen auf dem Rand $\partial B(0,r)$. Wir behaupten jetzt, dass für jedes $\epsilon > 0$ die Funktion u_ϵ nicht negativ ist auf $B(0,r) \setminus \{0\}$. Wegen der Beschränktheit von u und der Unbeschränktheit von $G_{B(0,r)}(\cdot, 0)$ hätte andernfalls diese harmonische Funktion auf $B(0,r) \setminus \{0\}$ ein negatives Minimum im Innerern, was dem Starken Maximumprinzip wiederpricht. Ananlog gilt für negative ϵ, dass u_ϵ nicht positiv ist, weil andernfalls diese harmonische Funktion ein positives Maximum im Inneren von $B(0,r) \setminus \{0\}$ hätte. Dann muss aber $u_0 = \tilde{u} - u$ identische verschwinden. Also ist $\tilde{u}$ eine harmonische Fortsetzung von u auf $B(0,r)$. **q.e.d.**

4.5 Dirichlet's Prinzip

Es gibt noch eine andere Methode um das Dirichletproblem zu lösen. Die Lösung läßt sich nämlich eindeutig dadurch charakterisieren, dass sie das Minimum eines Energiefunktionales ist.

Dirichlet's Prinzip 4.18. *Für alle stetigen Funktionen f auf Ω und g auf $\partial\Omega$ ist die Lösung des Dirichletproblems:*

$$-\triangle u = f \qquad \text{auf} \qquad \Omega \quad \text{und} \quad u \mid_{\partial\Omega} = g$$

ein Minimum des Funktionals

$$I(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} (\nabla u) \cdot (\nabla u) - uf \right) d^n x.$$

auf der Menge aller zweimal stetig differenzierbaren Funktionen, die sich auf $\bar{\Omega}$ fortsetzen lassen und auf $\partial\Omega$ gleich g sind.

Beweis. Sei u eine Lösung des Dirichletproblems und w eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf Ω, die sich stetig auf $\bar{\Omega}$ fortsetzen läßt und $w \mid_{\partial\Omega} = g$ erfüllt. Dann gilt

$$0 = \int_\Omega (-\triangle u - f)(u - w) d^n x.$$

Weil $u - w$ auf $\partial\Omega$ verschwindet, ergibt eine partielle Integration dann

$$0 = \int_\Omega [(\nabla u) \cdot \nabla(u - w) - f(u - w)] d^n x$$

Dann gilt aber auch

$$\begin{aligned} \int_\Omega [(\nabla u) \cdot (\nabla u) - fu] d^n x &= \int_\Omega [(\nabla u) \cdot (\nabla w) - fw] d^n x \leq \\ &\leq \int_\Omega \frac{1}{2} (\nabla u) \cdot (\nabla u) d^n x + \int_\Omega [\frac{1}{2} (\nabla w) \cdot (\nabla w) - fw)] d^n x \end{aligned}$$

Hier haben wir die Cauchy Schwarz'sche Ungleichung benutzt:

$$\int_\Omega (\nabla u) \cdot (\nabla w) d^n x \leq \int_\Omega \frac{1}{2} (\nabla u) \cdot (\nabla u) d^n x + \int_\Omega \frac{1}{2} (\nabla w) \cdot (\nabla w) d^n x.$$

Dann ergibt sich also $I(u) \leq I(w)$. Sei nun umgekehrt u ein Minimum von $I(u)$, dann gilt für alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen v auf Ω, die auf $\partial\Omega$ verschwinden:

$$\frac{d}{dt} I(u + tv) \mid_{t=0} = 0$$

$$I(u + tv) = I(u) + t \int_\Omega [(\nabla u) \cdot (\nabla v) - fv] d^n x + \frac{t^2}{2} \int_\Omega (\nabla v) \cdot (\nabla v) d^n x.$$

Also gilt wegen partieller Integration auch:

$$0 = \int_\Omega [(\nabla u) \cdot (\nabla v) - fv] d^n x = \int_\Omega (-\triangle u - f) v d^n x.$$

Weil das aber für alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen v auf $\bar{\Omega}$ gilt, die auf $\partial\Omega$ verschwinden, folgt dann $-\triangle u = f$ auf Ω. **q.e.d.**

Zum Abschluss wollen wir noch erwähnen, dass die Eindeutigkeit der Lösung des inhomogenen Dirichletproblems auch aus dem Funktional folgt. Die Differenz zweier Lösungen ist nämlich harmonisch und verschwindet auf dem Rand. Für diese Wahl $f = 0$ und $g = 0$ ist das Funktional aber offensichtlich nicht negativ, und genau dann Null, wenn u konstant ist, also wegen der Randbedingung verschwindet. Mit Hilfe des Dirichletprinzips läßt sich sogar für eine große Klasse von Funktionen f und g zeigen, dass das entsprechende Funktional nur genau einen Extremwert hat, der immer ein Minimum ist, und die Lösung des Dirichletproblem ergibt.