Analysis III/SS 2006
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

Übungsblatt 2

Eine glatte Abbildung $F : M \longrightarrow N$ von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M der Dimension m in die differenzierbare Mannigfaltigkeit N der Dimension n mit $m \leq n$ heisst eine Immersion genau dann, wenn zu jedem Punkt $p \in M$ der Rang von F im Punkt p gleich m ist. (Seien (ϕ, U) bzw. (ψ, V) Karten um den Punkt $p \in M$ bzw. $F(p) \in N$. Mit dem Rang von F im Punkt p ist der Rang der Ableitung von $\hat{F} = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$ im Punkt $\phi(p) \in \mathbb{R}^m$ gemeint.)

1. Welche der folgenden Abbildungen bildet eine Immersion?

   (a) $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $F(t) = (\cos 2t, \sin 2t, t)$. Ist F injektiv?

   (b) $F : (1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F(t) = (\frac{t+1}{2t} \cos 2t, \frac{t+1}{2t} \sin 2t)$.

2. Sei $M \neq \emptyset$ eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension m, und sei $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung. Zeige, dass f keine Immersion ist.

3. (*) Seien M bzw. N differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m bzw. n, und sei $f : M \longrightarrow N$ eine bijektive Immersion. Zeige, dass f ein Diffeomorphismus ist. (Hinweis: Beweise zuesrt für den Fall $m = n$. Zeige danach, dass der Fall $m < n$ nicht passieren kann!)

Abgabe am Mittwoch, den 10. Mai in der Übung!