Analysis III/SS 2006
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

Übungsblatt 9

1. Seien M, N Mannigfaltigkeiten, $X, Y \in Vec^\infty(M)$, $f \in C^\infty(M, N)$ und $\tilde{X}, \tilde{Y} \in Vec^\infty(N)$, so dass $T_p(f)(X(p)) = \tilde{X}(f(p))$ und $T_p(f)(Y(p)) = \tilde{Y}(f(p))$ für alle $p \in M$. Zeige für alle $p \in M$: $T_p(f)([X, Y](p)) = [\tilde{X}, \tilde{Y}](f(p))$.

2. Seien X, Y, Z drei Vektorfelder auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M. Zeige, dass sie die Jacobi-Identität
$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$
erfüllen.

3. (a) Sei $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ fixiert. Sei $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch $\theta(t, (x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + a_1 t, x_2 + a_2 t, x_3 + a_3 t)$. Ist θ ein Fluss auf $\mathbb{R}^3$?
   (b) Sei $F \in Vec^\infty(\mathbb{R}^3)$ gegeben durch $F(x, y, z) = (ax, ay, az)$, wobei $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Bestimme den Fluss von F.

4. Sei $G : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch $G(x_1, x_2, x_3) = (ax_2, -ax_1, 0)$, wobei $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, und $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Zeige, dass G ein Vektorfeld auf S^2 definiert.
   (b) Finde den Fluss ψ_G von G.
   (c) Ist ψ_G ein globaler Fluss?

Abgabe am Mittwoch, den 28. Juni in der Übung!