Übungsblatt 6

Analysis III/SS 2006
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

1. (a) Sei $S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1\}$. Zeige, dass TS^3 trivialisierbar ist. (Hinweis: Seien X, Y, Z drei glatte Schnitte vom Tangentialbündel $T\mathbb{R}^4$ gegeben durch:

   $$X_P = (-x_2, x_1, x_4, -x_3)$$
   $$Y_P = (-x_3, -x_4, x_1, x_2)$$
   $$Z_P = (-x_4, x_3, -x_2, x_1),$$

   wobei $P = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

   Zeige, dass diese Schnitte drei globale glatte paarweise orthogonale Schnitte vom TS^3 bilden.)

   (b) Sei $S^{2n-1} = \{(x_1, \cdots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \sum_{i=1}^{2n} x_i^2 = 1\}$. Zeige, dass für $n = 1, 4$ das Tangentialbündel TS^{2n-1} trivialisierbar ist.

2. Finde die lokalen Trivialisierungen und die Übergangsfunktionen für das Tangentialbündel TS^2, wobei $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. (Hinweis: Benutze die stereographischen Projektionen.)

3. Sei $f : [0, 2\pi] \times (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch:

   $$f(\theta, t) = (2\cos\theta + t\cos(\tfrac{\theta}{2})\cos\theta, 2\sin\theta + t\cos(\tfrac{\theta}{2})\sin\theta, t\sin(\tfrac{\theta}{2})).$$

   Sei M das Bild von $[0, 2\pi] \times (-1, 1)$ unter f, $M = f[[0, 2\pi] \times (-1, 1)]$

   (a) Zeige, dass M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. M wird das Möbiusband genannt.

   (b) Zeige, dass TM nicht trivialisierbar ist. (Hinweis: Nehme an, es gäbe zwei globale glatte orthogonale Schnitte von TM. Dann sollten die Einschränkungen dieser Schnitte auf die Teilmenge $f[[0, 2\pi] \times \{0\}] = \{(2\cos\theta, 2\sin\theta, 0) \in M \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$ auch glatt und linear unabhänhig sein. Mittels des Mittelwertsatzes bekomme dann einen Widerspruch!)

Abgabe am Mittwoch, den 7. Juni in der Übung!