Übungsblatt 11

Analysis III/SS 2006
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

1. Zeige durch ein Beispiel, dass das Tensorprodukt ($\otimes$) der Vektoren im allgemeinen nicht kommutativ ist.

2. Sei X ein nicht verschwindendes Vektorfeld über $\mathbb{R}^3$ mit $X(x,y,z) = (f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z))$, wobei $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Finde eine $1-$Differentialform α über $\mathbb{R}^3$, so dass der Kern von α orthogonal ist zu X (bzgl. des normalen Innerprodukts in $\mathbb{R}^3$).

3. Eine $2-$Differentialform ω über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M heißt symplektisch, wenn ω abgeschlossen ist (d.h. $d\omega = 0$) und fogende Eigenschaft erfüllt:

   Zu jedem $m \in M$ und jedem $v \neq 0$ in T_mM gibt es ein $u \in T_mM$, so dass $\omega(v,u) \neq 0$.

   Sei nun ω eine symplektische $2-$Differentialform über M. Zeige, dass die Dimension von M gerade ist, und die Abbildung

   $TM \longrightarrow TM'$ mit $X \mapsto \omega(X, .)$

   ein Isomorphismus zwischen Vektorraumbündeln ist. (TM' ist das duale Bündel von TM.)

4. Seien M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension 3, $m \in M$ und α eine nicht verschwindende $1-$Differentialform über M, so dass es eine (eingebettete) Untermannigfaltigkeit $P \subset M$ der Dimension 2 mit $m \in P$ und $\alpha|_{TP} = 0$ gibt. Zeige:

   $(\alpha \wedge d\alpha)(m) = 0.$

Abgabe am Mittwoch, den 12. Juli in der Übung!