Übungsblatt 9

Analysis III
SS 06

Aufgabe 1.

Aus der Lösung der ersten Aufgabe vom Übungsblatt 8 haben wir für Vektorfelder $X, Y \in \mathrm{Vec}^\infty(M)$:

$$[X,Y](p) = T_p(X)(Y(p)) - T_p(Y)(X(p)).$$

Also:

$$A = [\tilde{X},\tilde{Y}](f(p)) = T_{f(p)}(\tilde{X})(\tilde{Y}(f(p))) - T_{f(p)}(\tilde{Y})(\tilde{X}(f(p)))$$

$$A = T_{f(p)}(\tilde{X})(T_p(f)(Y(p))) - T_{f(p)}(\tilde{Y})(T_p(f)(X(p)))$$

$$A = \left(T_{f(p)}(\tilde{X}) \circ T_p(f)\right)(Y(p)) - \left(T_{f(p)}(\tilde{Y}) \circ T_p(f)\right)(X(p))$$

$$A = T_p(\tilde{X} \circ f)(Y(p)) - T_p(\tilde{Y} \circ f)(X(p))$$

$$A = T_p(\widetilde{T_p(f) \circ X})(Y(p)) - T_p(\widetilde{T_p(f) \circ Y})(X(p))$$

$$A = \left(T_{X(p)}(T_p(f)) \circ T_p(X)\right)(Y(p)) - \left(T_{Y(p)}(T_p(f)) \circ T_p(Y)\right)(X(p))$$

Da $T_p(f)$ linear ist, gilt: $T_{X(p)}(T_p(f)) = T_p(f)$ & $T_{Y(p)}(T_p(f)) = T_p(f)$

Deshalb:

$$A = \left(T_p(f) \circ T_p(X)\right)(Y(p)) - \left(T_p(f) \circ T_p(Y)\right)(X(p))$$

Wiederum ist $T_p(f)$ linear. Deshalb:

$$A = T_p(f)\Big(T_p(X)(Y(p)) - T_p(Y)(X(p))\Big) = T_p(f)\big([X,Y](p)\big).$$

Aufgabe 2.

Aus der Definition: $\theta_{[X,Y]} = \theta_X \circ \theta_Y - \theta_Y \circ \theta_X$,

wobei θ_* die Derivation bzgl. des Vektorfelds $*$ darstellt. Um zu zeigen:

$$A = [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

zeigen wir: $\theta_A = 0$

Beweis. Da θ linear ist:

$$\theta_A = \theta_{[X,[Y,Z]]} + \theta_{[Y,[Z,X]]} + \theta_{[Z,[X,Y]]}$$

$$= \left(\theta_X \circ \theta_{[Y,Z]} - \theta_{[Y,Z]} \circ \theta_X\right) + \left(\theta_Y \circ \theta_{[Z,X]} - \theta_{[Z,X]} \circ \theta_Y\right)$$

$$+ \left(\theta_Z \circ \theta_{[X,Y]} - \theta_{[X,Y]} \circ \theta_Z\right)$$

$$= \theta_X \circ (\theta_Y \circ \theta_Z - \theta_Z \circ \theta_Y) - (\theta_Y \circ \theta_Z - \theta_Z \circ \theta_Y) \circ \theta_X$$

$$+ \theta_Y \circ (\theta_Z \circ \theta_X - \theta_X \circ \theta_Z) - (\theta_Z \circ \theta_X - \theta_X \circ \theta_Z) \circ \theta_Y$$

$$+ \theta_Z \circ (\theta_X \circ \theta_Y - \theta_Y \circ \theta_X) - (\theta_X \circ \theta_Y - \theta_Y \circ \theta_X) \circ \theta_Z$$

$$= 0$$

Analysis III
SS 06
Üb. 9

Aufgabe 3.

b) Die Integralkurven von F sind Lösungen des Systems:

$$x'(t) = a\,x(t)$$
$$y'(t) = a\,y(t)$$
$$z'(t) = a\,z(t)$$

$\Rightarrow$ Der Fluss von F ist:

$$\begin{cases} \varphi_F(t, x, y, z) = (xe^{at}, ye^{at}, ze^{at}) \\ \varphi_F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Aufgabe 4.

a) Das innere Produkt vom Radiusvektor $r: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $r(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$ und G ist (für $x \in S^2$):

$$\langle G(x), r(x) \rangle = a x_1 x_2 - a x_1 x_2 - 0 = 0$$

$\Rightarrow G(x) \in TS^2, \ \forall x \in S^2$

$\Rightarrow$ G ist ein Vektorfeld auf S^2.

b) und c) Da S^2 kompakt ist, ist der Fluß global:

$$\begin{cases} \varphi_G : \mathbb{R} \times S^2 \longrightarrow S^2 \\ \varphi_G(t, (x_1, x_2, x_3)) = (x_1 \cos at + x_2 \sin at, -x_1 \sin at + x_2 \cos at, x_3) \end{cases}$$

3