Übungsblatt 10

Analysis III/SS 2006
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

1. Seien Y, Z zwei Vektorfelder über $\mathbb{R}^3$ gegeben durch:

$$Y(x_1, x_2, x_3) = (1, x_3, -x_2) \quad \& \quad Z(x_1, x_2, x_3) = (a, b, c),$$

wobei a, b, c konstante reelle Zahlen sind.

   (a) Berechne $[Y, Z]$.
   (b) Bestimme die Flüsse ψ_Y und ψ_Z.
   (c) Für welche konstante a, b, c kommutieren diese beiden Flüsse?

2. Seien X, Y zwei glatte Vektorfelder über einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit M. Zeige, dass für jedes $m \in M$ und $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ gilt:

$$\lim_{s,t \longrightarrow 0} \frac{f(\psi_Y(-s, \psi_X(-t, \psi_Y(s, \psi_X(t, m)))))}{st} = \theta_{[X,Y]}(f)(m).$$

3. Seien V und W endlich dimensionale normierte Vektorräume über $\mathbb{K}$. Dann ist die Abbildung $\phi : \mathcal{L}(V, W) \longrightarrow \mathcal{L}(V, W', \mathbb{K}),\ A \mapsto \phi(A)$ mit

$$\phi(A) : V \times W' \ \to \mathbb{K},\ (v, B) \mapsto (B \circ A)(v)$$

ein Isomorphismus der normierten Vektorräume $\mathcal{L}(V, W)$ und $\mathcal{L}(V, W', \mathbb{K})$.

4. Seien $V, V_1, \ldots, V_n$ und W endlich dimensionale normierte Vektorräume (oder reflexive Banachräume). Dann sind folgende normierte Vektorräume auf natürliche Weise isomorph

   (i) $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n, W) \simeq \mathcal{L}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n, W)$
   (ii) $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \otimes \simeq V_1 \otimes (V_2 \otimes V) \simeq (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$
   (iii) $\mathcal{L}(V, W) \simeq V' \otimes W$.