Übungsblatt 8

Analysis III/SS 2006
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

1. Sei $S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1\}$, und seien X, Y, Z die drei glatten globalen Schnitte vom Tangentialbündel $T\mathbb{R}^4$ gegeben durch:

   $$\begin{aligned} X(P) &= (-x_2, x_1, x_4, -x_3) \\ Y(P) &= (-x_3, -x_4, x_1, x_2) \\ Z(P) &= (-x_4, x_3, -x_2, x_1), \end{aligned}$$

   wobei $P = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

   (a) Berechne $[X, Y]$, $[Y, Z]$ und $[X, Z]$.

   (b) Zeige, dass folgende Gleichung (bekannt als Jacobi-Identität) erfüllt wird:

   $$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

2. Sei $\gamma : I \longrightarrow M$ eine Integralkurve eines Vektorfelds F auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M, so dass $\gamma'(t_0) = 0$ für ein $t_0 \in I$, wobei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ ist. Zeige, dass γ eine konstante Abbildung ist.

3. (a) Sei $M = \mathbb{R}^2$, und sei $\psi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ definiert durch $\psi(t, (x, y)) = (x + t, y)$. Zeige, dass ψ ein globaler Fluss auf M ist. (Ein lokaler Fluss $\psi : W \longrightarrow M$ heißt global, wenn $W = \mathbb{R} \times M$.)

   (b) Sei $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Finde eine offene Teilmenge $W \subset \mathbb{R} \times M$, so dass die Einschränkung der Abbildung ψ aus Teil (a) auf W, $\psi|_W$, einen lokalen Fluss auf M definiert.

4. Sei $F \in Vec^\infty(\mathbb{R}^3)$ gegeben durch $F(x, y, z) = (y, -x, 1)$. Bestimme den Fluss von F.

Abgabe am Mittwoch, den 28. Juni in der Übung!