Übungsblatt 5

Analysis III
SS 06

Aufgabe 1.

Seien $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ Atlanten der Mannigfaltigkeiten M bzw. N. Definiere:

$$\mathcal{C} := \{\phi \times \psi \mid \phi \in \mathcal{A} \text{ und } \psi \in \mathcal{B}\}.$$

Wir zeigen, dass $\mathcal{C}$ ein Atlas auf $M \times N$ definiert:

Zu jedem $(x,y) \in M \times N$ existieren ein $\phi \in \mathcal{A}$ mit $\phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ und $x \in \mathcal{U}$, und ein $\psi \in \mathcal{B}$ mit $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ und $y \in V$, wobei U bzw. V offene Teilmengen von M bzw. N sind.

Dann hat $\phi \times \psi : \mathcal{U} \times V \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ definiert durch $(\phi \times \psi)(x,y) = (\phi(x), \psi(y))$ folgende Eigenschaften:

1) $\phi \times \psi$: bijektiv. (trivial!)

2) $\phi \times \psi$: stetig.

Für jedes Basiselement $U_1 \times V_1 \subset \phi[\mathcal{U}] \times \psi[V]$ ist das Urbild $(\phi \times \psi)^{-1}[U_1 \times V_1]$ in $M \times N$ offen: $(\phi \times \psi)^{-1}[U_1 \times V_1] = \phi^{-1}[U_1] \times \psi^{-1}[V_1]$.

3) $\phi \times \psi$: offen.

Sei $A \times B \subset U \times V$ offen in $M \times N$. Dann gilt:

$$(\phi \times \psi)[A \times B] = \phi[A] \times \psi[B] \text{ : offen in } \mathbb{R}^{m+n}.$$

4) Seien $\phi_1 \times \psi_1$ und $\phi_2 \times \psi_2$ zwei Elemente in $\mathcal{C}$:

$\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1,2$; Wobei U_i in M offen ist.

$\psi_j : V_j \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1,2$; Wobei V_j in N offen ist.

Dann sind $\phi_1 \times \psi_1$ und $\phi_2 \times \psi_2$ verträglich:

Sei Φ definiert durch

$$\Phi := (\phi_2 \times \psi_2) \circ (\phi_1 \times \psi_1)^{-1} : (\phi_1 \times \psi_1)[U] \longrightarrow (\phi_2 \times \psi_2)[U]$$

, wobei $U = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$.

Dann zu jedem $(x,y) \in (\phi_1 \times \psi_1)[U]$:

$$\Phi(x,y) = (\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(x), \psi_2 \circ \psi_1^{-1}(y)).$$

Da Φ eine Abbildung von einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^{m+n}$ in $\mathbb{R}^{m+n}$ ist, genügt zu zeigen, dass die Koordinaten von Φ glatte Abbildungen (Funktionen) sind, was der Fall ist, da ϕ_1 und ϕ_2 bzw. ψ_1 und ψ_2 verträglich sind.

Aufgabe 2.

Satz 1.30: $(m = \dim X)$

i) Sei $x \in X$, und sei $\phi : U_x \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Karte um $x \in X$, indem U_x eine offene Umgebung von x in X ist. Sei ferner f eine stetig diff.bare Abbildung von $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ in X mit $f(0) = x$. Die zugehörige Äquivalenzklasse von f in $T_x X$ zeigen wir mit $[f]_x$.

Definiere $T_x(\phi) : T_x X \longrightarrow T_{\phi(x)} \mathbb{R}^m$ durch:

$$T_x(\phi)([f]_x) = [\phi \circ f]_{\mathbb{R}^m} .$$

Dann gilt:

a) $T_x(\phi)$ ist wohldefiniert (ist eine Abbildung):

Seien $[f]_x$ und $[g]_x$ in $T_x X$ mit $[f]_x = [g]_x$.

Dann gibt es eine Karte ψ um x mit

$$(\psi \circ f)'(0) = (\psi \circ g)'(0)$$

$\Rightarrow$

$$(\psi \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ f)'(0) = (\psi \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ g)'(0)$$

$\Rightarrow$

$$(\psi \circ \phi^{-1})'(x) \cdot (\phi \circ f)'(0) = (\psi \circ \phi^{-1})'(x) \cdot (\phi \circ g)'(0) .$$

Da $\psi \circ \phi^{-1}$ ein Diffeomorphismus ist (die Umgebungen nötigenfalls einschränken!), folgt:

$$(\phi\circ f)'(0) = (\phi\circ g)'(0) \Longrightarrow [\phi\circ f]_{\mathbb{R}^m} = [\phi\circ g]_{\mathbb{R}^m}$$

$$\Longrightarrow T_x(\phi)([f]_X) = T_x(\phi)([g]_X). \qquad \square$$

b) $T_x(\phi)$ ist injektiv:

Seien $[f]_X$ und $[g]_X$ in T_xX mit

$T_x(\phi)([f]_X) = T_x(\phi)([g]_X)$. Dann gilt:

$$[\phi\circ f]_{\mathbb{R}^m} = [\phi\circ g]_{\mathbb{R}^m} \Longleftrightarrow (\phi\circ f)'(0) = (\phi\circ g)'(0).$$

(Die letzte Aussage rechts gilt, weil es eine Karte von $\mathbb{R}^m$ gibt wie η mit $(\eta\circ\phi\circ f)'(0) = (\eta\circ\phi\circ g)'(0)$. Deshalb gilt die letzte Gleichung für jede Karte im natürlichen Atlas von $\mathbb{R}^m \Rightarrow$ Die gilt auch für die Identitätskarte!)

Da ϕ eine Karte um x ist, folgt: $[f]_X = [g]_X$.

c) $T_x(\phi)$ ist surjektiv:

Sei $[h]_{\mathbb{R}^m} \in T_{\phi(x)}\mathbb{R}^m$. Da ϕ ein Diffeomorphismus ist, ist $f = \phi^{-1}\circ h$ eine stetig diff.bare Abbildung von $(-\varepsilon,\varepsilon)$ nach X mit $f(0)=x$. Es gilt also: $T_x(\phi)([f]_X) = [h]_{\mathbb{R}^m}$.

Nun zeigen wir, dass $T_x(\phi)$ auf T_xX eine Vektorraumstruktur induziert:

Da $T_{\phi(x)}\mathbb{R}^m$ zu $\mathbb{R}^m$ isomorph ist, sieht die Abbildung $T_x(\phi)$ nach der Verkettung mit diesem Isomorphismus so aus: (wir zeigen die neue Abbildung auch mit $T_x(\phi)$)

$$\begin{cases} T_x(\phi) : T_x(X) \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ T_x(\phi)([f]_x) = (\phi \circ f)'(0) \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert (schon gezeigt: (a))

Die Umkehrabbildung $(T_x(\phi))^{-1} : \mathbb{R}^m \longrightarrow T_x(X)$ wird dann folgende Form haben:

$\forall v \in \mathbb{R}^m$: $(T_x(\phi))^{-1}(v) = [\phi^{-1} \circ h]_x$, wobei

$h : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow X$ wird durch $h(t) = \phi(x) + tv$ definiert.

Wenn $\phi' : \mathcal{U}'_x \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine andere Karte um x ist, definiert die Abbildung

$$T_x(\phi') \circ (T_x(\phi))^{-1} : v \longmapsto D(\phi' \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \cdot v$$

eine lineare bijektive Abbildung (einen Isomorphismus) auf $\mathbb{R}^m$.

Deshalb kann man die Vektorraumstruktur von $\mathbb{R}^m$ auf $T_x X$ folgenderweise übertragen:

$\forall r \in \mathbb{R}, \forall v, v' \in \mathbb{R}^m$: $\quad (T_x(\phi))^{-1}(v + v') = (T_x(\phi))^{-1}(v) + (T_x(\phi))^{-1}(v')$,

und $\quad r \cdot (T_x(\phi))^{-1}(v) = (T_x(\phi))^{-1}(r \cdot v)$.

Wie oben erklärt, ist diese Struktur dann unabhängig von der Karte ϕ.

ii) Sei $f: X \longrightarrow Y$ differenzierbar, und sei $x \in X$. Seien ferner $(\varphi, \mathcal{U}_x)$ bzw. $(\psi, V_{f(x)})$ Karten um x bzw. $f(x)$ mit $f[\mathcal{U}_x] \subset V_{f(x)}$, und $[h]_X \in T_x X$.
Es gilt:

$$T_x(f)([h]_X) = [f \circ h]_Y = T_x(\psi^{-1} \circ \hat{f} \circ \varphi)([h]_X),$$

wobei $\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. (Nötigenfalls durchs Einschränken der Definitionsbereiche!)

Aber dann gilt:

$$T_x(\psi^{-1} \circ \hat{f} \circ \varphi)([h]_X) = [\psi^{-1} \circ \hat{f} \circ \varphi \circ h]_Y$$

$$= T_{\psi(f(x))}(\psi^{-1})([\hat{f} \circ \varphi \circ h]_{\mathbb{R}^n}) = T_{\psi(f(x))}(\psi^{-1})(T_{\varphi(x)}(\hat{f})[\varphi \circ h]_{\mathbb{R}^m})$$

$$= T_{\psi(f(x))}(\psi^{-1})\left(T_{\varphi(x)}(\hat{f})\left(T_x(\varphi)([h]_X)\right)\right).$$

Die Abbildungen $T_x(\varphi)$ und $T_{\psi(f(x))}(\psi^{-1})$ sind linear aus dem Teil (i). Die Abbildung $T_{\varphi(x)}(\hat{f})$ ist dieselbe wie $(\hat{f})'(\varphi(x))$, die auch linear ist.
$\Rightarrow T_x(f)$ ist linear.

(iii) und (iv) folgen aus $T_x(f) = T_{\psi(f(x))}(\psi^{-1}) \cdot (\hat{f})'(\varphi(x)) \cdot T_x(\varphi)$, mit denselben Notationen des Teils (ii).

Aufgabe 3.

a) Die Jacobi-Matrix von φ ist:

$$A = \varphi'(x,y,z) = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \\ x & -y & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}z \end{pmatrix}.$$

Da nicht alle drei x, y und z gleichzeitig verschwinden (weil $x^2+y^2+z^2=3$), könnte zu jedem (x,y,z) aus S eine 3×3 Untermatrix von A gefunden werden, die nicht singulär ist (ihre Determinante nicht verschwindet). Daher ist der Rang von A für alle (x,y,z) in S gleich 3. φ ist deshalb eine Immersion und das Bild $\varphi[S]$ ist eine Mannigfaltigkeit.

b) Da $\varphi(0,0,\sqrt{3}) = \varphi(0,0,-\sqrt{3}) = (0,0,0,0,-\sqrt{3})$, ist φ keine Injektion auf S und damit kein Diffeomorphismus.

Aufgabe 4.

Erinnerung. 1) Eine Teilmenge A eines topologischen Raums X heißt diskret, wenn jedes $a \in A$ eine offene Umgebung $\mathcal{U}_a \subseteq X$ hat, so dass $\mathcal{U}_a \cap A = \{a\}$.

2) Eine Abbildung $p: X \longrightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y heißt diskret, wenn zu jedem $y \in Y$ die Faser $p^{-1}[\{y\}]$ eine diskrete Teilmenge von X ist.

In unserem Fall ist $f: X \longrightarrow Y$ ein lokaler Diffeomorphismus. Deshalb gibt es zu jedem $y \in Y$ bzw. jedem $x \in f^{-1}[\{y\}]$ Umgebungen $\mathcal{U}_y$ bzw. $\mathcal{U}_x$, so dass $f|_{\mathcal{U}_x}: \mathcal{U}_x \longrightarrow \mathcal{U}_y$ ein Diffeomorphismus ist. Daher gibt es in $\mathcal{U}_x$ keine Elemente der Teilmenge $f^{-1}[\{y\}]$ ausser x, und $f^{-1}[\{y\}]$ ist damit eine diskrete Teilmenge von X. Da f eigentlich ist, ist die Faser $f^{-1}[\{y\}]$ eine kompakte Teilmenge von X $\Rightarrow$ $f^{-1}[\{y\}]$ ist eine endliche Teilmenge von X: $f^{-1}[\{y\}] = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Da f lokaler Diffeomorphismus ist, ist die Menge Y_n aller $y \in Y$, deren Faser $f^{-1}[\{y\}]$ n Elemente haben,

offen und abgeschlossen in Y. Die Abbildung f ist surjektiv, d.h. es gibt mindestens ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $Y_{n_0} \neq \emptyset$. Da Y zusammenhängend ist, gilt $Y_{n_0} = Y$.
D.h. zu jedem $y \in Y$ besitzt die Faser $f^{-1}[\{y\}]$ genau n_0 Elemente.