Übungsblatt 12

Analysis III/SS 2006
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

1. Eine Differentialform ω auf eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M heißt abgeschlossen, wenn $d\omega = 0$, und exakt, wenn $\omega = d\theta$ für eine Differentialform θ auf M.

   Sei $M = \mathbb{R}^3$, und seien $x, y, z : M \longrightarrow \mathbb{R}$ die üblichen Koordinatenprojektionen auf jeweils x-, y- bzw. z-Koordinate. Welche der folgenden Differentilaformen sind exakt? Welche sind abgeschlossen?

   (a) $\phi = yzdx + xzdy + xydz$.

   (b) $\phi = xdx + x^2y^2dy + yzdz$.

   (c) $\phi = 2xy^2dx \wedge dy + zdy \wedge dz$.

2. Sei α eine exakte 1-Differentialform auf $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Zeige, dass für jede glatte Abbildung $f : [0, 1] \longrightarrow S^1$ mit der Eigenschaft $f(0) = f(1)$,

   $$\int_{[0,1]} f^*\alpha = 0.$$

3. Seien M, N orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Zeige, dass $M \times N$ orientierbar ist.

4. (a) Zeige, dass jede 1-dimensionale zusammenhängende Mannigfaltigkeit entweder diffeomorph ist zu $\mathbb{R}$ oder zum Einheitskreis S^1.

   (b) Folgere aus (a), dass jede 1-dimensionale Mannigfaltigkeit orientierbar ist.

   (c) Folgere aus (a), dass für jede 1-dimensionale Mannigfaltigkeit alle differenzierbaren Strukturen zueinander diffeomorph sind.

Abgabe am Mittwoch, den 19. Juli in der Übung!