Übungsblatt 4

Analysis III/SS 2006
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

1. Sei $F : N \longrightarrow M$ eine injektive Immersion von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit N der Dimension n in die differenzierbare Mannigfaltigkeit M der Dimension m (mit $n \leq m$).
   (a) Sei N kompakt. Zeige, dass $F[N]$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von M ist.
   (b) Sei F eine eigentliche Abbildung, d.h. das Urbild jeder kompakten Teilmenge in M eine kompakte Teilmenge in N ist. Zeige, dass F eine Einbettung ist.
2. Sei A eine Teilmenge einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M mit der Inklusionsabbildung $i : A \longrightarrow M$, und sei T eine Topologie auf A. Zeige, dass es höchstens eine differenzierbare Struktur $\mathcal{F}$ auf (A, T) gibt, so dass $i : (A, T) \longrightarrow M$ eine Einbettung ist.
3. (a) Sei $a > 0$, und sei $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch
   $$F(x_1, x_2, x_3) = (a - ((x_1)^2 + (x_2)^2)^{\frac{1}{2}})^2 + (x^3)^2.$$
   Zeige, dass das Urbild $F^{-1}(b^2)$ für jedes b mit $a > b > 0$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.
   (b) Für welches $t \in \mathbb{R}$ ist der Unterraum
   $$A = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \ x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = t\}$$
   eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$?

Abgabe am Mittwoch, den 24. Mai in der Übung!