Übungsblatt 8

Analysis III
SS 06

Aufgabe 2.

Für die Integralkurve $\gamma : (a,b) \longrightarrow M$ gilt $\gamma'(t_0) = 0$, für ein $t_0 \in (a,b)$. Sei $\gamma(t_0) = m \in M$. Dann

$$F(m) = F(\gamma(t_0)) = \gamma'(t_0) = 0.$$

Sei nun $\alpha : (a,b) \longrightarrow M$ eine Kurve definiert durch $\alpha(t) = m$, $\forall t \in (a,b)$. Dann gilt $\alpha(t_0) = m$, und $\alpha'(t_0) = 0 = F(m) = F(\alpha(t))$, $\forall t \in (a,b)$.

Da $\alpha(t_0) = \gamma(t_0) = m$, liefert uns die Eindeutigkeit der Integralkurve mit bestimmtem Anfangswert:

$$\gamma \equiv \alpha \quad \text{auf } (a,b).$$

$\Longrightarrow$ γ ist eine konstante Abb.

Aufgabe 3.

a) i) $\{t \in \mathbb{R} \mid (t,x) \in W = \mathbb{R} \times M\} = \mathbb{R}$: offen.

ii) Sei $(s,(x,y)) \in \mathbb{R} \times M$. Dann:

$$(t, \varphi(s,(x,y))) = (t, (x+s, y)) \in \mathbb{R} \times M.$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi(t, \varphi(s,(x,y))) = \varphi(t,(s+x,y)) = (t+s+x, y)$$
$$= \varphi(t+s,(x,y)).$$

iii) $\forall (x,y) \in M = \mathbb{R}^2 : \quad \varphi(0,(x,y)) = (0+x,y) = (x,y)$

$\Rightarrow \varphi$ ist ein (globaler) Fluss auf M.

b) Da das Element $(0,0) \in \mathbb{R}^2 (=M)$ aus dem Wertebereich ausgelassen wurde, nehmen wir die abgeschlossene Menge
$$K = \varphi^{-1}[\{(0,0)\}] = \{(t,(x,0)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mid t+x=0\}$$ aus dem $\mathbb{R} \times M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ raus. Die übriggebliebene (offene) Menge
$W = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) \setminus K$ sieht so aus:
$$W = \left[\bigcup_{y \neq 0} (\mathbb{R} \times \{(x,y)\}) \right] \cup \left[\bigcup_{x \neq 0} \left(\{t \in \mathbb{R} \mid x(x+t) > 0\} \times \{(x,0)\} \right) \right].$$
Dass $\varphi|_W : W \longrightarrow M (= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ ein lokaler Fluss ist, ist dann offenbar.

Aufgabe 3.

Eine typische Integralkurve für F ist eine Lösung des Systems:
$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \\ z'(t) = 1 \end{cases}$$

Die ersten beiden Gleichungen sind unabhängig von der dritten. Die Lösung für die ersten beiden ist: $\quad (x(t), y(t)) = (x_0 + iy_0)\, e^{-it} \in \mathbb{C}, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$

Die Lösung der dritten Gleichung ist $z(t) = z_0 + t$, $z_0 \in \mathbb{R}$. Daher wird der Fluss von F gegeben durch

$$\begin{cases} X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \; (= \mathbb{C} \times \mathbb{R}), \\ X(t, (x,y,z)) = ((x+iy)e^{-it}, z+t) \end{cases}.$$

(Der Fluss ist ein globaler Fluss!)