Übungsblatt 5

Analysis III/SS 2006
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

1. Zeige, dass das kartesische Produkt von zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M der Dimension m und N der Dimension n wieder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. (Hinweis: Wenn ϕ bzw. ψ Karten von M bzw. N mit Definitionsbereichen U bzw. V sind, dann ist $\phi \times \psi : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ definiert durch $(\phi \times \psi)(x, y) = (\phi(x), \psi(y))$ eine Karte von $M \times N$.)

2. Beweise die Teile **(i)-(iv)** vom **Satz 1.30** des Vorlesungstexts ausführlich.

3. Sei $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$, und sei $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^5$ definiert durch
$$f(x, y, z) = (xy, xz, yz, \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2), \tfrac{1}{2\sqrt{3}}(x^2 + y^2 - 2z^2)).$$
   (a) Ist das Bild $f[S]$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit?
   (b) Ist die Abbildung $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^5$ ein Diffeomorphismus?

4. Seien X, Y zwei zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension, und $f : X \longrightarrow Y$ ein eigentlicher lokaler Diffeomorphismus von X auf Y. Zeige, dass zu jedem $y \in Y$ die Faser $f^{-1}[\{y\}]$ eine endliche Menge ist, und die Anzahl der Elemente von $f^{-1}[\{y\}]$ nicht von y abhängt.

Abgabe am Mittwoch, den 31. Mai in der Übung!