Kapitel 3

Differentialformen

3.1 Multilineare Algebra

Definition 3.1. *Seien $V_1, \ldots, V_n$ und W Vektorräume über $\mathbb{K}$. Dann heißt eine Abbildung $A : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ n–linear wenn für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt*

$$A((x_1, \ldots, x_n)) + A((x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)) = A((x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + y_i, x_{i+1}, x_n))$$

$$A((x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)) = \lambda A((x_1, \ldots, x_n)).$$

Durch die punktweise Addition und Skalarmultiplikation wird der Raum aller n–linearen Abbildungen von $V_1 \times \ldots \times V_n$ nach W offenbar zu einem Vektorraum. Wenn $V_1, \ldots, V_n$ und W normierte Vektorräume sind, dann besitzt der Vektorraum aller n–linearen Abbildungen von $V_1 \times \ldots \times V_n$ nach W folgende Norm:

$$\| A \| = \sup\{\| A((x_1, \ldots, x_n)) \| \mid \| x_1 \| \leq 1, \ldots, \| x_n \| \leq 1\}$$

Der entsprechende normierte Vektorraum wird mit $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; W)$ bezeichnet.

Übungsaufgabe 3.2. *Seien V und W endlichdimensionale normierte Vektorräume über $\mathbb{K}$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{lll} \phi : & \mathcal{L}(V; W) \to \mathcal{L}(V, W'; \mathbb{K}), & A \mapsto \phi(A) \text{ mit} \\ \phi(A) : & V \times W' \to \mathbb{K}, & (v, B) \mapsto (B \circ A)(v) \end{array}$$

ein Isomorphismus der normierten Vektorräume $\mathcal{L}(V; W)$ und $\mathcal{L}(V, W'; \mathbb{K})$.

Definition 3.3. *Seien $V_1, \ldots, V_n$ endlichdimensionale normierte Vektorräume (oder reflexive Banachräume) über $\mathbb{K}$. Dann ist das Tensorprodukt $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ definiert als der normierte Vektorraum*

$$\mathcal{L}(V_1', \ldots, V_n'; \mathbb{K}).$$

Seien $(v_1, \ldots, v_n) \in V_1 \times \ldots \times V_n$ *entsprechende Vektoren. Dann bezeichnen wir mit* $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ *das Element von* $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ *mit*

$$v_1 \otimes \ldots \otimes v_n : \quad V_1' \times \ldots \times V_n' \to \mathbb{K} \quad (A_1, \ldots, A_n) \mapsto A_1(v_1) \cdots A_n(v_n).$$

Vektoren dieser Form werden kohärente Vektoren genannt.

Für endlichdimensionale $V_1, \ldots, V_n$ ist die Lineare Hülle der kohärenten Vektoren von $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ das ganze Tensorprodukt. Im Tensorprodukt mit einem unendlichdimensionalen Vektorraum liegt die lineare Hülle der kohärenten Vektoren nur dicht. Im Folgenden werden wir des öfteren lineare Abbildungen auf Tensorprodukten dadurch definieren, dass wir sie auf den kohärenten Vektoren festlegen. Wegen der Linearität sind diese Abbildungen dann im endlichdimensionalen Fall eindeutig bestimmt. Im unendlichdimensionalen Fall benötigen wir noch die Stetigkeit der entsprechenden linearen Abbildung. In unseren Anwendungen sind alle vorkommenden Vektorräume endlichdimensional, so dass diese Abbildungen schon durch die Linearität eindeutig bestimmt sind.

Satz 3.4. *Seien* $V_1, \ldots, V_n$ *und* W *endlichdimensionale normierte Vektorräume (oder reflexive Banachräume). Dann sind folgende normierte Vektorräume auf natürliche Weise isomorph*

(i) $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; W) \simeq \mathcal{L}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n; W)$

(ii) $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \simeq V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \simeq (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$

(iii) $\mathcal{L}(V; W) \simeq V' \otimes W$.

Beweis: Übungsaufgabe. **q.e.d.**

Auf dem n–fachen Tensoprodukt $V^{\otimes n}$ eines normierten endlichdimensionalen Vektorraumes V mit sich selber, wirkt die symmetrische Gruppe S_n aller Permutationen von n Elementen. Diese Permutationsgruppe besitzt zwei eindimensionale Darstellungen, einerseits die triviale Darstellung:

$$S_n \to \{1\}, \sigma \mapsto 1$$

und andererseits die alternierende Darstellung

$$S_n \to \{1, -1\}, \sigma \mapsto \mathrm{sgn}(\sigma),$$

wobei $\mathrm{sgn}(\sigma)$ ± 1 ist je nachdem ob sich σ schreiben lässt als das Produkt einer geraden oder ungeraden Anzahl von Transpositionen. Entsprechend enthält $V^{\otimes n}$ zwei lineare Unterräume, nämlich aller Vektoren, die sich unter der Wirkung der Permutationsgruppe S_n wie die triviale bzw. die alternierende Darstellung transformieren.

Definition 3.5. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Dann wirkt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Permutationsgruppe S_n auf $V^{\otimes n}$ durch*

$$w \mapsto \sigma.w \text{ mit } \quad \sigma.w: \quad V'^{\times n} \to \mathbb{K} \quad (A_1, \ldots, A_n) \mapsto w\left(A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(n)}\right)$$

für alle $w \in V^{\otimes n}$ und $\sigma \in S_n$. Auf den kohärenten Vektoren wirkt S_n also wie

$v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto \sigma.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)}$ *für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $\sigma \in S_n$.*

Die symmetrischen und antisymmetrischen Tensorprodukte sind definiert als folgende Unterräume von $V^{\otimes n}$

$$S^n V = \{w \in V^{\otimes n} | \sigma.w = w \text{ für alle } \sigma \in S_n\}$$

$$\bigwedge^n V = \{w \in V^{\otimes n} | \sigma.w = \operatorname{sgn}(\sigma) w \text{ für alle } \sigma \in S_n\}.$$

Mit SV und $\bigwedge V$ bezeichnen wir die direkten Summen

$$SV = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n V \quad \text{ und } \quad \bigwedge V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigwedge^n V.$$

Dabei bezeichnet $S^0 V = \mathbb{K}$ und $\bigwedge^0 V = \mathbb{K}$ im Tensorprodukt $V^{\otimes \circ} = \mathbb{K}$.

Satz 3.6. *Sei V ein n–dimensionaler $\mathbb{K}$–Vektorraum. Dann gibt es $\mathbb{K}$–lineare Abbildungen*

$$\bigwedge^p V \times \bigwedge^q V \to \bigwedge^{p+q} V, (v, w) \mapsto v \wedge w$$

so dass $\bigwedge V$ zu einer distributiven $\mathbb{K}$–Algebra wird. In dieser Algebra gilt

$$w \wedge v = (-1)^{pq} v \wedge w \text{ für alle } v \in \bigwedge^p V \text{ und } w \in \bigwedge^q V.$$

Für alle $p = 0, \ldots, n$ sind die Dimensionen von $\dim \bigwedge^p V = \binom{n}{p}$ und von $\dim \bigwedge V = 2^n$.

Beweis: Wir definieren die Abbildung

$$\bigwedge^p V \times \bigwedge^q V \to \bigwedge^{p+q} V, (v, w) \mapsto v \wedge w$$

durch

$$v \wedge w = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\sigma) \sigma.(v \otimes w) = \frac{1}{p!q!} \mathcal{A}^{p+q}(v \otimes w)$$

mit
$$\mathcal{A}^{p+q}(v\otimes w)=\sum_{\sigma\in S_{p+q}}\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma.(v\otimes w).$$
Dann gilt für alle $v\in\bigwedge^p V$ auch $\mathcal{A}^p(v)=p!v$ und $\frac{1}{p!}\mathcal{A}^p: V^{\otimes p}\to\bigwedge^p V$ mit $v\mapsto\frac{1}{p!}\mathcal{A}^p(v)$ ist eine Projektion von $V^{\otimes p}$ auf dem Unterraum $\bigwedge^p V\subset V^{\otimes p}$. Offenbar gilt für alle $v\in V^{\otimes p}, w\in V^{\otimes q}$
$$\mathcal{A}^{p+q}(\mathcal{A}^p(v)\otimes w)=p!\,\mathcal{A}^{p+q}(v\otimes w)\quad\text{bzw.}\quad\mathcal{A}^{p+q}(v\otimes\mathcal{A}^q(w))=q!\,\mathcal{A}^{p+q}(v\otimes w).$$
Daraus folgt für alle $u\in\bigwedge^p V$, $v\in\bigwedge^q V$ und $w\in\bigwedge^r V$
$$\begin{aligned}w\wedge(v\wedge u)&=\frac{1}{(p+q)!r!}\,\mathcal{A}^{p+q+r}(w\otimes\frac{1}{p!q!}\,\mathcal{A}^{p+q}(v\otimes u))\\&=\frac{1}{r!p!q!}\,\mathcal{A}^{p+q+r}(w\otimes v\otimes u)\\&=\frac{1}{(q+r)!p!}\,\mathcal{A}^{p+q+r}\left(\frac{1}{q!r!}\,\mathcal{A}^{q+r}(w\otimes v)\otimes v\right)\\&=(w\wedge v)\wedge u.\end{aligned}$$
Also ist $\wedge$ ein assoziatives Produkt. Insbesondere ist für alle $v_1,\ldots,v_n\in V$ das äußere Produkt
$$v_1\wedge\ldots\wedge v_n=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma.(v_1\otimes\ldots\otimes v_n).$$
Die Distributivität folgt aus der Bilinearität der Abbildung
$$\wedge:\bigwedge^p V\times\bigwedge^q V\to\bigwedge^{p+q} V,(v,w)\mapsto v\wedge w.$$
Für alle $p,q\in N$ hat folgende Permutation
$$(1,\ldots,p+q)\to(p+1,\ldots,p+q,1,\ldots,p)$$
die Signatur $(-1)^{pq}$ weil sie aus pq-Transpositionen zusammengesetzt werden kann. Dann folgt für alle $v\in\bigwedge^p V$ und $w\in\bigwedge^q V$
$$w\wedge v=\frac{1}{p!q!}\,\mathcal{A}(w\otimes v)=(-1)^{pq}\frac{1}{p!q!}\,\mathcal{A}(v\otimes w)=(-1)^{pq}v\wedge w.$$
Sei $e_1,\ldots,e_n$ eine Basis von V. Dann gilt offenbar
$$e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_p}=\operatorname{sgn}(\sigma)e_{i_{\sigma(1)}}\wedge\ldots\wedge e_{i_{\sigma(p)}}\text{ für alle }\sigma\in S_p.$$

Wenn zwei Indizes gleich sind, dann gibt es eine Transposition, unter der dieses äußere Produkt das Vorzeichen wechselt. Deshalb ist das Produkt $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$ nur dann ungleich Null, wenn die Indizes $i_1, \ldots, i_p$ paarweise verschieden sind. Also bilden $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$ mit $i_1 < \ldots < i_p$ eine Basis von $\bigwedge^p V$. Die Anzahl solcher äußeren Produkte ist gleich $\binom{n}{p} = dim \bigwedge^p V$. Mit $\sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n$ folgt $dim \bigwedge V = 2^n$. **q.e.d.**

Satz 3.7. *Seien V und W endlichdimensionale normierte $\mathbb{K}$–Vektorräume und $A \in \mathcal{L}(V; W)$ eine lineare Abbildung von V nach W. Dann ist*

$$A^{\otimes p}: \quad V^{\otimes p} \to W^{\otimes p}, \quad v_1 \otimes \ldots \otimes v_p \to Av_1 \otimes \ldots \otimes Av_p$$

eine lineare Abbildung von $V^{\otimes p}$ nach $W^{\otimes p}$. Diese Abbildung bildet S^pV auf S^pW ab und $\bigwedge^p V$ auf $\bigwedge^p W$. Die entsprechende Abbildung $\bigwedge A : \bigwedge V \to \bigwedge W$ ist ein Algebrahomomorphismus bezüglich des äußeren Produktes.

Beweis: Die Abbildung $A^{\otimes p}$ ist offenbar linear und es gilt für alle $v \in V^{\otimes p}$ und $w \in V^{\otimes q}$

$$A^{\otimes p+q}(v \otimes w) = A^{\otimes p}(v) \otimes A^{\otimes q}(w).$$

Außerdem ist die Abbildung $A^{\otimes p}$ verträglich mit der Wirkung der Permutationsgruppe, d.h. es gilt

$$A^{\otimes p}(\sigma.v) = \sigma.(A^{\otimes p}(v)) \text{ für alle } v \in V^{\otimes p} \text{ und } \sigma \in S_p.$$

Daraus folgt sofort, dass $A^{\otimes p}$ sowohl S^pV auf S^pW abbildet, als auch $\bigwedge^p V$ auf $\bigwedge^p W$. Zuletzt folgt auch, dass $A^{\otimes p}$ mit $\mathcal{A}^p$ vertauscht, und deshalb für alle $v \in \bigwedge^p V$ und $w \in \bigwedge^q V$ gilt:

$$A^{\otimes(p+q)}(v \wedge w) = A^{\otimes p}(v) \wedge A^{\otimes q}(w).$$

q.e.d.

Für die symmetrische Algebra $SV = \bigoplus\limits_{p=0}^{\infty} S^pV$ gilt eine analoge Aussage zu Satz 3.6 mit dem Produkt

$$v_1 \cdot \ldots \cdot v_p = \sum_{\sigma \in S_p} \sigma.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_p) \text{ für alle } v_1, \ldots, v_p \in V.$$

Ein wesentlicher Unterschied ist allerdings, dass die Dimension von S^pV gleich $\binom{n+p-1}{p}$ ist, also mit p anwächst und nicht abfällt. Deshalb ist die symmetrische Algebra SV auch unendlichdimensional und es hängt von der Norm ab, wie groß sie ist. Diese Algebra lässt sich mit einem Unterraum der Funktionen auf V' identifizieren, indem wir jedes Element von S^pV als Polynom auf V' auffassen. Im Folgenden werden wir aber nur die endlichdimensionale antisymmetrische Algebra benutzen.

3.2 Tensorfelder

Definition 3.8. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für alle $p \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \mathbb{N}_0$ sei $T^q_p X$ das Vektorraumbündel des Tensorproduktes des p–fachen Tensorproduktes des Tangentialbündels mit dem q–fachen Tensorprodukt des Kotangentialbündels. Das Kotangentialbündel $T^1_0 X$ bezeichnen wir auch einfach als $T'X$. Die Fasern von $T^q_p X$ bzw. $T'X$ über einem Punkt $x \in X$ bezeichnen wir mit $T^q_{p,x}X$ bzw. $T'_x X$.*

Schnitte der Vektorraumbündel $T^q_p X$ nennen wir Tensorfelder. Wir können die Lie-Ableitung auf solchen Tensorfeldern definieren.

Definition 3.9. *Sei $f : X \to T^q_p X$ ein differenzierbares Tensorfeld auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X und $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf X. Dann sind für kleine t $\psi_F(t,\cdot)$ und $\psi_F(-t,\cdot)$ lokal stetig differenzierbare Homöomorphismen von X. Wir definieren die Lie-Ableitung von f an der Stelle $x \in X$ als*

$$(\theta_F\, f)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (T'_x(\psi_F(t,\cdot)))^{\otimes q} \otimes \left(T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t,\cdot))\right)^{\otimes p} f(\psi_F(t,x)).$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t,\cdot)):&\quad T_{\psi_F(-t,x)}X \to T_x X\\ T'_x(\psi_F(t,\cdot)):&\quad T'_{\psi_F(t,x)}X \to T'_x X \quad \text{wegen} \quad T_x(\psi_F(t,\cdot)):\; T_x X \to T_{\psi_F(t,x)}X \end{aligned}$$

zusammen eine Abbildung

$$(T'_x(\psi_F(t,\cdot)))^{\otimes q} \otimes \left(T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t,\cdot))\right)^{\otimes p} : \quad T^q_{p,\psi_F(t,x)}X \to T^q_{p,x}X$$

induzieren. Deshalb ist die Ableitung auf der rechten Seite die Ableitung einer differenzierbaren Funktion von $t \in (-\epsilon,\epsilon)$ nach $T^q_{p,x}X$. Weil dieser Raum ein normierter Vektorraum ist, ist die entsprechende Ableitung wohl definiert.

Definition 3.10. *(Verjüngung): Sei $p,q \in \mathbb{N}$. Dann induzieren für jedes $i = 1,\ldots,p$ und jedes $j = 1,\ldots,q$ die Abbildungen*

$$T'_x X \otimes T_x X \to \mathbb{R}, \quad u \otimes v \mapsto \langle u, v\rangle$$

einen Verjüngungsmorphismus i^j_i von dem Vektorraumbündel $T^q_p X$ auf das Vektorraumbündel $T^{q-1}_{p-1}X$. Hierbei bezeichnet $\langle u,v\rangle$ die Auswertung der Elemente von $T'_x X$ auf den Elementen von $T_x X$. Wenn $f_1,\ldots,f_p$ Vektorfelder sind, und $g_1,\ldots,g_q$ Schnitte von dem Kotangentialbündel, dann wirkt i^j_i auf $g_1 \otimes \ldots \otimes g_q \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_p$ wie

$$i^j_i(g_1 \otimes \ldots \otimes g_q \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_p) = \langle f_i, g_j\rangle g_1 \otimes \ldots \hat{g}_j \ldots \otimes g_q \otimes f_1 \otimes \ldots \hat{f}_i \ldots \otimes f_p.$$

Hierbei bedeutet $\hat{\cdot}$, dass der entsprechende Faktor in dem Produkt weggelassen wird.

Satz 3.11. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

(i) *Seien $i < j$ zwei verschiedene Indizes in $\{1, \ldots, p\}$ und $k < l$ zwei verschiedene Indizes in $\{1, \ldots, q\}$. Dann vertauschen die folgenden Verjüngungsmorphismen:*

$$\begin{array}{ccc} T_p^q X & \xrightarrow{i_i^k} & T_{p-1}^{q-1} X \\ i_j^l \downarrow & & \downarrow i_{j-1}^{l-1} \\ T_{p-1}^{q-1} X & \xrightarrow{i_i^k} & T_{p-2}^{q-2} X \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{ccc} T_p^q X & \xrightarrow{i_i^l} & T_{p-1}^{q-1} X \\ i_j^k \downarrow & & \downarrow i_{j-1}^{k} \\ T_{p-1}^{q-1} X & \xrightarrow{i_i^{l-1}} & T_{p-2}^{q-2} X \end{array} .$$

(ii) *Die Lie-Ableitung θ_F vertauscht mit allen Verjüngungsmorphismen i_i^j mit $i = 1, \ldots, p$ und $j = 1, \ldots, q$. D.h. für alle differenzierbaren Schnitte f von $T_p^q X$ und alle stetig differenzierbaren Vektorfelder $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ gilt*

$$\theta_F(i_i^j(f)) = i_i^j(\theta_F(f)).$$

(iii) *Sei f ein Schnitt von $T_p^q X$ und g ein Schnitt von $T_r^s X$. Dann gilt*

$$\theta_F(f \otimes g) = \theta_F(f) \otimes g + f \otimes \theta_F(g).$$

Beweis: (i) Seien $F_1, \ldots, F_p$ Vektorfelder von X und $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ Schnitte des Kotangentialbündels $T'X$ von X. Dann gilt offenbar

$$\begin{aligned} & i_{j-1}^{l-1} \circ i_i^k(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_p) = \\ & = \langle \alpha_l, F_j \rangle \langle \alpha_k, F_i \rangle \alpha_1 \otimes \ldots \hat{\alpha}_k \ldots \hat{\alpha}_l \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \hat{F}_i \ldots \hat{F}_j \ldots \otimes F_p \\ & = i_i^k \circ i_j^l(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_p) \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet $\hat{\cdot}$, dass der entsprechende Faktor im Tensorprodukt weggelassen wird. Genauso gilt auch

$$\begin{aligned} & i_{j-1}^{k} \circ i_i^l(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_p) = \\ & = \langle \alpha_k, F_j \rangle \langle \alpha_l, F_i \rangle \alpha_1 \otimes \ldots \hat{\alpha}_k \ldots \hat{\alpha}_l \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \hat{F}_i \ldots \hat{F}_j \ldots \otimes F_p \\ & = i_i^{l-1} \circ i_j^k(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_p) \end{aligned}$$

(ii) Sei $\phi : X \to Y$ ein Diffeomorphismus zwischen den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten X und Y. Dann definieren wir die Abbildung,

$$T_p^q(\Phi) : T_p^q Y \to T_p^q X$$

die faserweise gegeben ist durch

$$(T'_x(\Phi)^{\otimes q} \otimes T_{\Phi(x)}(\Phi^{-1})^{\otimes p} : T^q_{p,\Phi(x)}Y \to T^q_{p,x}X \quad \text{für alle } x \in X.$$

Dabei ist

$$\begin{array}{rlcrl} T_{\Phi(x)}(\Phi^{-1}): & T_{\Phi(x)}Y \to T_xX & & & \\ T'_x(\Phi): & T'_{\Phi(x)}Y \to T'_xX & \text{wegen} & T_x(\Phi): & T_xX \to T_{\Phi(x)}Y \end{array}$$

Dann kommutiert offenbar folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T^q_pY & \xrightarrow{T^q_p(\Phi)} & T^q_pX \\ i^j_i \downarrow & & \downarrow i^j_i \\ T^{q-1}_{p-1}Y & \xrightarrow{T^{q-1}_{p-1}(\Phi)} & T^{q-1}_{p-1}X \end{array}$$

Also ist für jeden Schnitt f von dem Vektorraumbündel $T^q_p(Y)$ die Abbildung $T^q_p(\Phi) \circ f \circ \Phi$ ein Schnitt von dem Vektorraumbündel $T^q_p(X)$ ist und es gilt

$$T^{q-1}_{p-1}(\Phi) \circ i^j_i \circ f \circ \Phi = i^j_i \circ T^q_p(\Phi) \circ f \circ \Phi.$$

Für die lokalen stetig differenzierbaren Homöomorphismen $\psi_F(t, \cdot)$ gilt also auch

$$T^{q-1}_{p-1}(\psi_F(t, \cdot)) \circ i^j_i \circ f \circ \psi_F(t, \cdot) = i^j_i \circ T^q_p(\psi_F(t, \cdot)) \circ f \circ \psi_F(t, \cdot).$$

Indem wir die linke und die rechte Seite nach t differenzieren erhalten wir $\theta_F(i^j_i(f)) =$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T^{q-1}_{p-1}(\psi_F(t, \cdot)) \circ i^j_i \circ f \circ \psi_F(t, \cdot) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} i^j_i \circ T^q_p(\psi_F(t, \cdot)) \circ f \circ \psi_F(t, \cdot) = i^j_i(\theta_F(f)).$$

(iii) folgt aus der Leibniz-Regel. **q.e.d.**

Aus (ii) folgt für alle Vektorfelder $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ und für alle Schnitte α des Kotangentialbündels

$$\theta_F(\langle \alpha, E \rangle) = \langle \theta_F\, \alpha, E \rangle + \langle \alpha, \theta_F\, E \rangle.$$

Daraus folgt

$$\langle \theta_F\, \alpha, E \rangle = \theta_F(\langle \alpha, E \rangle) - \langle \alpha, [F, E] \rangle.$$

Mithilfe von (iii) lassen sich dann die Lie-Ableitungen von beliebigen Tensorprodukten von Vektorfeldern und Schnitten des Kotangentialbündels berechnen.

3.3 Differentialformen

Definition 3.12. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für alle $p \in \mathbb{N}$ sei dann $\bigwedge^p X$ das antisymmetrische Untervektorraumbündel von $T^p X$. Analog sei $\bigwedge X$ die direkte Summe aller Vektorraumbündel $\bigwedge^p X$. Die Schnitte von $\bigwedge^p X$ heißen p–Differentialformen oder nur Differentialformen.*

Das p–fache antisymmetrische Tensorprodukt $\bigwedge^p V'$ des Dualraumes V' eines endlichdimensionalen Vektorraumes V ist ein Unterraum des p–fachen Tensorproduktes $V'^{\otimes p}$ von V' mit sich selber. Deshalb sind die Elemente von $\bigwedge^p V'$ antisymmetrische p–lineare Abbildungen von $V^{\times p}$ nach $\mathbb{K}$. Wenn $\alpha \in \bigwedge^p V'$ ein Element dieses p–fachen antisymmetrischen Tensorproduktes ist, und $v_1, \ldots, v_p \in V$ Elemente von V sind, dann können wir α auf $(v_1, \ldots, v_p) \in V^{\times p}$ auswerten. Diese Auswertung ist antisymmetrisch in $v_1, \ldots, v_p$, Wir wollen sie folgendermaßen bezeichnen:

$$\langle \alpha, v_1 \otimes \ldots \otimes v_p \rangle.$$

Das heißt insbesondere für Elemente $A_1, \ldots, A_p \in V'$ und Elemente $v_1, \ldots, v_p \in V$:

$$\langle A_1 \wedge \ldots \wedge A_p, v_1 \otimes \ldots \otimes v_p \rangle = \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) \langle A_{\sigma(1)}, v_1 \rangle \cdots \langle A_{\sigma(p)}, v_p \rangle = \\ = \det \left(\langle A_i, v_j \rangle_{i,j \in \{1,\ldots,p\}} \right).$$

Auf Differentialformen angewendet heißt das, dass für jede r mal stetig differenzierbare p–Differentialform α und Vektorfelder $F_1, \ldots, F_p \in \mathrm{Vec}^r(X)$, die Auswertung der Differentialform α auf dem Schnitt $F_1 \otimes \ldots \otimes F_p$ des Vektorraumbündels $T^0_p X$ eine r mal stetig differenzierbare reelle Funktion in $C^r(X, \mathbb{R})$ ergibt:

$$\langle \alpha, F_1 \otimes \ldots \otimes F_p \rangle \in C^r(X, \mathbb{R}).$$

Definition 3.13. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $F \in \mathrm{Vec}(X)$ ein Vektorfeld von X. Für alle $p \in \mathbb{N}$ sei i_F der eindeutig bestimmte Morphismus $i_F : \bigwedge^p X \to \bigwedge^{p-1} X$, der auf p–Differentialformen α wirkt wie*

$$\langle i_F \circ \alpha, F_1 \otimes \ldots \otimes F_{p-1} \rangle = \langle \alpha, F \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_{p-1} \rangle$$

für alle Vektorfelder $F_1, \ldots, F_{p-1} \in \mathrm{Vec}(X)$.

Wenn X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n ist, dann ist $\bigwedge^p X$ ein Vektorraumbündel der Dimension $\binom{n}{p}$. Für $p > n$ ist also $\bigwedge^p X$ Null-dimensional und $\bigwedge X$ ist ein Vektorraumbündel der Dimension 2^n. Der Grund, dass wir gerade die antisymmetrischen Untervektorraumbündel von den Tensorprodukten des Kotangentialbündels und nicht von dem Tangentialbündel betrachten, ist dass die entsprechenden Schnitte, also die Differentialformen, das richtige Transformationsverhalten haben, um sie zu integrieren. Diese Differentialformen werden sich als sehr natürliche Objekte herausstellen. Eine schöne Eigenschaft können wir sofort ablesen: Sie lassen sich unter einer differenzierbaren Abbildung zurückziehen, während sich Vektorfelder nur unter invertierbaren differenzierbaren Abbildungen transformieren lassen.

Satz 3.14. *Seien X und Y differenzierbare Mannigfaltigkeiten und f eine stetig differenzierbare Abbildung von X nach Y. Dann gilt*

(i) *Das faserweise äußere Produkt $\wedge : \bigwedge^p X \times \bigwedge^q X \to \bigwedge^{p+q} X$ macht die Differentialformen von X zu einer assoziativen Algebra:*

$$\wedge : \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$$

für alle $p, q \in \mathbb{N}_0$ und alle p–Differentialformen α und alle q–Differentialformen β. Hierbei ist $\bigwedge^0 X$ das triviale reelle Linienbündel $\mathbb{R} \times X$ über X. Die 0–Differentialformen sind also die reelle Algebra aller reellen Funktionen auf X und die Multiplikation mit reellen Funktionen schreiben wir nur als $(f, \alpha) \to f\alpha$ für alle $f \in C(X, \mathbb{R})$ und p–Differentialformen α.

(ii) *Für alle p–Differentialformen α und q–Differentialformen β gilt*

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} \alpha \wedge \beta.$$

(iii) *Für alle $x \in X$ bilden die Abbildungen*

$$\bigwedge^p (T'_x(f)) : \qquad \bigwedge^p_{f(x)} Y \to \bigwedge^p_x X \text{ wegen } \qquad T'_x(f) : \qquad T'_{f(x)} Y \to T'_x X$$

einen Algebrahomomorphismus von der Algebra $\bigwedge_{f(x)} Y$ in die Algebra $\bigwedge_x X$. Dadurch lassen sich alle p–Differentialformen α auf Y durch f zu p–Differentialformen $f^*\alpha$ auf X zurückziehen mit

$$f^*\alpha = \bigwedge^p (T'(f)) \circ \alpha \circ f.$$

(iv) *f^* ist ein Algebrahomomorphismus von den Differentialformen auf Y auf die Differentialformen auf X, d.h. es gilt*

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$$

für alle p–Differentialformen α und q–Differentialformen β von Y.

(v) *Für jedes Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^1(x)$ wirkt die Lie-Ableitung θ_F auf den Differentialformen wie*

$$\theta_F\,\alpha = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi_F^*(t,\cdot)\alpha.$$

Diese Lie–Ableitung ist eine Derivation, d.h. es gilt

$$\theta_F(\alpha \wedge \beta) = \theta_F(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \theta_F(\beta).$$

für alle p–Differentialformen α und q–Differentialformen β.

(vi) *Für jedes Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}(X)$ auf X induziert der Morphismus $i_F : \bigwedge X \to \bigwedge X$ eine Anti–Derivation auf den Differentialformen, d.h. für alle p–Differentialformen α und alle q–Differentialformen β gilt*

$$i_F(\alpha \wedge \beta) = i_F(\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_F(\beta).$$

Außerdem gilt $\qquad i_F \circ i_F = 0.$

(vii) *Seien $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$. Dann gilt* $\qquad \theta_E \circ i_F - i_F \circ \theta_E = i_{[E,F]}.$

Beweis: (i) und (ii) folgen aus den entsprechenden Aussagen über antisymmetrische Tensorprodukte im ersten Abschnitt. (iii) und (iv) folgen aus Satz 3.7 und (v) aus Satz 3.11 (iii).

Zum Beweis von (vi) betrachten wir 1–Differentialformen $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ und Vektorfelder $F_1, \ldots, F_{p-1}$. Dann gilt $\quad \langle i_F(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p), F_1 \otimes \ldots \otimes F_{p-1}\rangle =$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma) \langle \alpha_{\sigma(1)}, F\rangle \cdot \langle \alpha_{\sigma(2)}, F_1\rangle \cdots \langle \alpha_{\sigma(p)}, F_{p-1}\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \langle \alpha_i, F\rangle \langle \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha}_i \wedge \ldots \wedge \alpha_p, F_1 \otimes \ldots \otimes F_{p-1}\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \langle \alpha_1 \wedge \ldots \wedge i_F(\alpha_i) \wedge \ldots \wedge \alpha_p, F_1 \otimes \ldots \otimes F_{p-1}\rangle.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir jede Permutation $\sigma \in S_p$ zerlegt in die Komposition $\tau \circ \sigma_i$ einer der Permutationen $\sigma_i : (1, \ldots, p) \mapsto (i, 1, \ldots, \hat{i}, \ldots, p)$ und einer Permutation $\tau \in S_{p-1}$ der Elemente $\{2, \ldots, p\}$. Die erste Permutation σ_i ist offenbar ein Produkt von $(i-1)$ Transpositionen und hat deshalb $\mathrm{sgn}(\sigma_i) = (-1)^{i-1}$. Diese Zerlegung ist offenbar eine bijektive Abbildung $S_p \simeq (S_{p-1})^p$ Daraus folgt, dass i_F eine Anti–Derivation ist. Weil die Auswertung von p–Differentialformen antisymmetrisch in den Vektorfeldern ist, folgt $i_F \circ i_F = 0$.

Zum Beweis von (vii) zeigen wir zunächst, dass $\theta_E \circ i_F - i_f \circ \theta_E$ eine Anti–Derivation ist. Sei also α eine p–Differentialform und β eine q–Differentialform. Dann gilt wegen (v) und (vi) $\qquad (\theta_E \circ i_F - i_F \circ \theta_E)(\alpha \wedge \beta) =$

$$\begin{aligned}
&= \theta_E(i_F(\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_F(\beta)) - i_F(\theta_E(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \theta_E(\beta)) \\
&= \theta_E(i_F(\alpha)) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \theta_E(i_F(\beta)) - i_F(\theta_E(\alpha)) \wedge \beta - (-1)^p \alpha \wedge i_F(\theta_E(\beta)).
\end{aligned}$$

Dann genügt es (vii) auf einer differenzierbaren 1–Differentialform α zu zeigen. Sei also $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$. Dann gilt wegen Satz 3.11

$$\theta_E(i_F(\alpha)) - i_F(\theta_E(\alpha)) = \theta_E\langle \alpha, F\rangle - \langle \theta_E\, \alpha, F\rangle = \langle \alpha, \theta_E\, F\rangle = i_{[E,F]}\alpha.$$

q.e.d.

Die Lie–Ableitung θ_F stimmt wegen Lemma 2.20 auf den 0–Differentialformen mit der vorher definierten Lie–Ableitung auf den Funktionen überein.

3.4 Die äußere Ableitung

Definition 3.15. *Für jeden Punkt $x \in X$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit und jede differenzierbare reelle Funktion f auf X definiert folgende lineare Abbildung aus Satz 1.34*

$$df(x): \quad T_xX \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto D_v(f)$$

ein Element des Kotangentialraums T'_xX über $x \in X$. Dadurch wird für jede differenzierbare Funktion f auf X der Gradient df von f zu einem globalen Schnitt von $T'X$:

$$df: \quad X \to T'X \quad \text{mit} \quad \langle df, F\rangle = \theta_F(f) \quad \text{für alle } F \in \mathrm{Vec}(X).$$

Diese Abbildung $d : f \mapsto df$ wollen wir zu einer Abbildung auf allen Differentialformen fortsetzen.

Satz 3.16. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gibt es für jedes $p \in \mathbb{N}_0$ einen eindeutigen Differentialoperator d von den differenzierbaren p–Differentialformen in die $(p+1)$–Differentialformen mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für alle differenzierbaren p–Differentialformen α und q–Differentialformen β gilt*

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta.$$

(ii) *Auf differenzierbaren Funktionen f (also $p = 0$) wirkt d wie $f \mapsto df$ (siehe oben).*

(iii) *Für jede zweimal differenzierbare Funktionen f gilt $d(df) = 0$.*

Beweis: Aufgrund der Definition des antisymmetrischen Tensorproduktes ist jede p–Differentialform eine endliche Linearkombination von p–Differentialformen der Form

$$\alpha = f dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_p.$$

Die Bedingungen (i)-(iii) erzwingen, dass auf solchen p–Differentialformen d wirkt wie

$$d\alpha = df \wedge dg_1 \wedge \ldots dg_p.$$

Damit ist gezeigt, dass die Bedingungen (i)-(iii) den Differentialoperator d eindeutig bestimmen, wenn er existiert.

Um die Existenz zu beweisen, wählen wir eine Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ von X um einen beliebigen Punkt $x \in U \subset X$. Die Komponenten $\phi_1, \ldots, \phi_n$ bilden also n glatte Funktionen auf U, so dass $d\phi_1(x), \ldots, d\phi_n(x)$ auf allen Punkten von U eine Basis des Kotangentialraums bilden. Also ist jede p–Differentialform eine endliche Linearkombination von Differentialformen der Form

$$f d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} \text{ mit } 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n.$$

Der Gradient df von f ist über $x \in U$ eine endliche Linearkombination von $d\phi_1, \ldots, d\phi_n$:

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_i}(\phi(x)) \cdot d\phi_i(x).$$

Vergleiche Satz 1.34. Dann folgt

$$d(f d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_i}(\phi(x)) d\phi_i \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}.$$

Dadurch ist d also auf allen p–Differentialformen definiert. Wir müssen noch zeigen, dass (i) und (iii) gelten. Wir zeigen zunächst (iii). Aufgrund der Konstruktion von d gilt

$$\begin{aligned} d(df) &= d \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_i} \circ \phi \cdot d\phi_i = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2(f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_j \partial \phi_i} \circ \phi \cdot d\phi_j \wedge d\phi_i \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2(f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_j \partial \phi_i} \circ \phi \cdot d\phi_i \wedge d\phi_j = 0 \end{aligned}$$

Hier haben wir das Schwarz'sche Lemma benutzt, gemäß dem die zweiten partiellen Ableitungen nicht von der Reihenfolge abhängen. Wegen der Linearität genügt es (i) für Differentialformen von der Form

$$\alpha = f d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} \quad \text{und} \quad \beta = g d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_q}$$

zu zeigen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta &= fgd\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} \wedge d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_q} \\
d(\alpha \wedge \beta) &= (fdg + gdf)d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} \wedge d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_q} \\
&= (df \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}) \wedge (gd\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_q}) \\
&+ (-1)^p (fd\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}) \wedge (dg \wedge d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_q}) \\
&= d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta.
\end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 3.17. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

(i) *Für jede zweimal differenzierbare p–Differentialform α gilt $d(d\alpha) = 0$.*

(ii) *Für jede zweimal differenzierbare Abbildung $f : X \to Y$ von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X auf die differenzierbare Mannigfaltigkeit Y und jede differenzierbare p–Differentialform α auf Y ist $f^*\alpha$ eine differenzierbare p–Differentialform auf X und es gilt*

$$d(f^*\alpha) = f^*(d\alpha).$$

(iii) *Für jedes Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ und jede zweimal differenzierbare Funktion g gilt*

$$\theta_F(dg) = d(\theta_F(g))$$

(iv) *Für jedes Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ und jede zweimal differenzierbare p–Differentialform α gilt*

$$\theta_F\, d\alpha = d(\theta_F\, \alpha)$$

(v) *Für jedes Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ und jede differenzierbare p–Differentialform α gilt*

$$\theta_F\, \alpha = i_F \circ d\alpha + d(i_F \circ \alpha).$$

(vi) *Für jede differenzierbare p–Differentialform α und stetig differenzierbare Vektorfelder $F_0, \ldots, F_p \in \mathrm{Vec}^1(X)$ gilt*

$$\begin{aligned}
\langle d\alpha, F_0 \otimes \ldots \otimes F_p \rangle &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i\, \theta_{F_i}(\langle \alpha, F_0 \otimes \ldots \hat{F}_i \ldots \otimes F_p \rangle) \\
&+ \sum_{0 \le i < j \le p} (-1)^{i+j} \langle \alpha, [F_i, F_j] \otimes F_0 \otimes \ldots \hat{F}_i \ldots \hat{F}_j \ldots \otimes F_p \rangle.
\end{aligned}$$

Beweis: (i) Sei α wieder wie im Beweis von (i) des vorangehenden Satzes $\alpha = f d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}$. Dann gilt wegen (i) und (iii) aus dem vorangehenden Satz

$$\begin{aligned} d(d\alpha) &= d(df \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}) \\ &= d(df) \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} + \sum_{j=1}^{p} (-1)^j df \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d(d\phi_{i_j}) \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} = 0. \end{aligned}$$

(ii) Wegen der Kettenregel gilt für alle differenzierbaren Funktionen g auf Y

$$d(f^*g) = d(g \circ f) = T'(f) \circ dg \circ f = f^*dg.$$

Dann folgt (ii) aus (i), der Linearität von d, der Konstruktion von d im Beweis des vorangehenden Satzes und aus Satz 3.14 (iv): Sei $\alpha = g d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_p$, dann gilt

$$\begin{aligned} d(f^*\alpha) &= d(f^*g(f^*d\phi_1) \wedge \ldots \wedge (f^*d\phi_p)) && = d((f^*g) \wedge d(f^*\phi_1) \wedge \ldots \wedge d(f^*\phi_p)) \\ &= (f^*dg) \wedge (f^*d\phi_1) \wedge \ldots \wedge (f^*d\phi_p) && = f^*d(g d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_p) = f^*(d\alpha). \end{aligned}$$

(iii) Sei $E \in \mathrm{Vec}^1(X)$. Dann folgt aus Satz 3.11 (iii) und der Definition von dg bzw. $d\,\theta_F(g)$:

$$\begin{aligned} \langle \theta_F(dg) - d(\theta_F(g)), E \rangle &= \langle \theta_F(dg), E \rangle && && - \langle d(\theta_F(g)), E \rangle \\ &= \theta_F(\langle dg, E \rangle) && - \langle dg, \theta_F\, E \rangle && - \theta_E(\theta_F(g)) \\ &= \theta_F(\theta_E(g)) && - \theta_{\theta_F\, E}(g) && - \theta_E(\theta_F(g)) \\ &= [\theta_F, \theta_E](g) && - \theta_{[F,E]}(g) && = 0. \end{aligned}$$

(iv) Wegen (ii) ist d eine Anti–Derivation. Also ist $\theta_F \circ d - d \circ \theta_F$ genauso wie im Beweis von Satz 3.14 (vii) eine Anti–Derivation. Dann genügt es zu zeigen, dass diese Anti–Derivation auf allen zweimal differenzierbaren 1–Differentialformen $\alpha = g dh$ verschwindet. Weil $\theta_F \circ d - d \circ \theta_F$ eine Anti–Derivation ist und wegen (i) gilt

$$\begin{aligned} (\theta_F \circ d - d \circ \theta_F)(g dh) &= (\theta_F(dg) - d(\theta_F(g))) \wedge dh + g(\theta_F \circ d - d \circ \theta_F)(dh) \\ &= (\theta_F(dg) - d(\theta_F(g))) \wedge dh + g d(\theta_F(dh)) \\ &= (\theta_F(dg) - d(\theta_F(g))) \wedge dh + g d(\theta_F(dh) - d(\theta_F(h))) \\ &= (\theta_F \circ d - d \circ \theta_F)(g) \wedge dh + g d \circ (\theta_F \circ d - d \circ \theta_F)(h). \end{aligned}$$

Also genügt es (iii) zu zeigen, dass diese Anti–Derivation $\theta_F \circ d - d \circ \theta_F$ auf allen zwei mal differenzierbaren Funktionen g verschwindet. Wegen Satz 3.14 (v) können (iii) und (iv) auch aus (ii) gefolgert werden.

(v) Wegen (ii) und Satz 3.14 (vi) sind sowohl d als auch i_F Anti–Derivationen. Dann ist $i_F \circ d + d \circ i_F$ eine Derivation: Für eine p–Differentialform α und eine q–Differentialform β gilt nämlich $\quad (i_F \circ d - d \circ i_F)(\alpha \wedge \beta) =$

$$\begin{aligned} &= i_F(d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta) + d(i_F(\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_F(\beta)) \\ &= i_F(d\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge i_F(d\beta) + d(i_F(\alpha)) \wedge \beta + \alpha \wedge d(i_F(\beta)). \end{aligned}$$

Also genügt es (v) für 1–Differentialformen $\alpha = gdh$ zu zeigen. Wegen der Definition von d, Satz 3.14 (vi) und (iv) gilt tatsächlich

$$\begin{aligned} i_F(d(gdh)) + d(i_F(gdh)) &= i_F(dg \wedge dh) + d(g\langle F, dh\rangle) \\ &= \langle F, dg\rangle dh - \langle F, dh\rangle dg + \langle F, dh\rangle dg + gd(\langle F, dh\rangle) \\ &= \theta_F(g)dh + gd(\theta_F(h)) = \theta_F(g)dh + g\,\theta_F(dh) = \theta_F(gdh). \end{aligned}$$

Außerdem bemerken wir, dass (v) aufgrund der Definition von dg auf 0–Differentialformen $\alpha = g$ gilt, wenn i_F auf 0–Differentialformen trivial wirkt.

(vi) Wegen (v) gilt $\quad \langle d\alpha, F_0 \otimes \ldots \otimes F_p\rangle + \langle d(i_{F_0}(\alpha)), F_1 \otimes \ldots \otimes F_d\rangle =$

$$= \langle i_{F_0}(d\alpha), F_1 \otimes \ldots \otimes F_d\rangle + \langle d(i_{F_0}(\alpha)), F_1 \otimes \ldots \otimes F_d\rangle = \langle \theta_{F_0}\,\alpha, F_1 \otimes \ldots \otimes F_d\rangle.$$

Daraus folgt induktiv

$$\begin{aligned} \langle d\alpha, F_0 \otimes \ldots \otimes F_p\rangle &= \langle \theta_{F_0}\,\alpha, F_1 \otimes \ldots \otimes F_d\rangle - \langle \theta_{F_1}\, i_{F_0}(\alpha), F_2 \otimes \ldots \otimes F_d\rangle + \ldots \\ &\ldots + (-1)^{d-1}\langle \theta_{F_{d-1}}\, i_{F_{d-2}}(\ldots(i_{F_0}\alpha)\ldots), F_d\rangle + (-1)^d\,\theta_{F_d}\, i_{F_{d-1}}(\ldots(i_{F_0}\alpha)\ldots). \end{aligned}$$

Wegen Satz 3.11 (iii) gilt $\quad \langle \theta_{F_0}\,\alpha, F_1 \otimes \ldots \otimes F_d\rangle =$

$$= \theta_{F_0}\langle \alpha, F_1 \otimes \ldots \otimes F_p\rangle + \sum_{j=1}^{p} (-1)^j \langle \alpha, [F_0, F_j] \otimes F_1 \otimes \ldots \hat{F}_j \ldots \otimes F_p\rangle.$$

bzw. $\quad -\langle \theta_{F_1}\, i_{F_0}(\alpha), F_2 \otimes \ldots \otimes F_d\rangle =$

$$= -\,\theta_{F_1}\langle \alpha, F_0 \otimes F_2 \otimes \ldots \otimes F_p\rangle + \sum_{j=2}^{p} (-1)^{j+1} \langle \alpha, [F_1, F_j] \otimes F_0 \otimes F_2 \otimes \ldots \hat{F}_j \ldots \otimes F_p\rangle.$$

Mit den analogen Formeln für alle Summanden in der vorangehenden alternierenden Summe folgt (vi). **q.e.d.**

Wegen (vi) gilt insbesondere für jede differenzierbare 1–Differentialform ω und stetig differenzierbare Vektorfelder $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$

$$\langle d\omega, E \otimes F\rangle = \theta_E\langle \omega, F\rangle - \theta_F\langle \omega, E\rangle - \langle \omega, [E, F]\rangle.$$

Die Formel (vi) erlaubt es ganz allgemein, die Auswertung der äußere Ableitung einer Differentialform durch Lie–Ableitungen von Funktionen und Vektorfeldern zu berechnen. Umgekehrt erlaubt es (v) die Auswertung der Lie–Ableitung einer Differentialform durch die äußere Ableitung zu berechnen.

3.5 Orientierungen

Für die Integration von Differentialformen müssen wir noch den Begriff der Orientierung einführen. Weil die Übergangsfunktionen zwischen zwei verträglichen Karten einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit Diffeomorphismen zwischen offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ sind, sind ihre Ableitungen invertierbare lineare Abbildungen in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Solche lineare Abbildungen werden durch reelle $n \times n$ Matrizen beschrieben, deren reelle Determinante ungleich Null ist.

Definition 3.18. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann heißt ein Atlas von X orientiert, wenn die Ableitungen der Übergangsfunktionen, zwischen zwei Karten mit nicht schnittfremdem Definitionsbereich jeweils positive Determinante haben. Wenn X einen solchen orientierten Atlas besitzt, dann heißt X orientierbar. Andernfalls heißt X nicht orientierbar. Eine Orientierung von X ist eine Äquivalenzklasse von orientierten Atlanten, wobei zwei orientierte Atlanten äquivalent sind, wenn die Vereinigung der beiden orientierten Atlanten wieder ein orientierter Atlas ist.*

Die invertierbare lineare Abbildung

$$I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto I(x) \text{ mit } I(x) = (-x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

hat offenbar Determinante -1 und ist eine Involution, d.h. ihr Quadrat ist $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$. Für jede Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ ist die Komposition $I \circ \phi$ mit I auch eine Karte von X. Wenn also von zwei Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ die Ableitung der Übergangsfunktionen $(\psi \circ \phi^{-1})'$ auf einer Zusammenhangskomponente von $\phi[U \cap V]$ negative Determinante hat, dann hat die Ableitung der Übergangsfunktion $((I \circ \psi) \circ \phi^{-1})'$ bzw. $(\psi \circ (I \circ \phi)^{-1})'$ positive Determinante auf der entsprechenden Zusammenhangskomponente von $\phi[U \cap V]$ bzw. $I \circ \phi[U \cap V]$. Also können wir versuchen einen Atlas von X dadurch zu einem orientierten Atlas zu machen, dass wir einige Karten des Atlases durch die Komposition mit I ersetzen. Wenn X orientierbar ist, dann ist dieses tatsächlich immer möglich.

Satz 3.19. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, dann ist folgendes äquivalent*

(i) *X ist orientierbar.*

(ii) *Jede zusammenhängende Komponente von X ist orientierbar.*

(iii) *Auf jeder zusammenhängenden Komponente Y von X ist das reelle Linienbündel $\bigwedge^{\dim(Y)} Y$ trivial.*

(iv) *Auf jeder zusammenhängenden Komponente Y von X gibt es eine stetige* $\dim(Y)$*–Differentialform, die keine Nullstellen auf Y hat.*

Beweis: Offenbar folgt (ii) aus (i).

(ii)$\Rightarrow$(iii): Sei Y eine orientierbare zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit. Auf dem Definitionsbereich U einer Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ ist $d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$ eine $\dim(Y)$- Differentialform, die offenbar keine Nullstellen hat, weil $d\phi_1, \ldots, d\phi_n$ alle linear unabhängig sind. Sei $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eine zweite Karte des orientierten Atlases von Y, dann ist $d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n = \det(\psi \circ \phi^{-1})' d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$, weil für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt

$$d\psi_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i \circ \phi^{-1}}{\partial \phi_j} \cdot d\phi_j$$

Also sind auf $U \cap V$ die bei den $\dim(Y)$–Differentialformen $d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$ und $d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n$ durch eine positive glatte Funktion proportional zueinander. Die Überdeckung durch die Definitionsbereiche der Karten des orientierten Atlases von Y besitzt eine entsprechende Zerlegung der Eins. Indem wir alle entsprechenden $\dim(Y)$–Differentialformen mit dieser Zerlegung der Eins aufsummieren, erhalten wir eine globale glatte $\dim(Y)$–Differentialform auf Y, die keine Nullstellen hat. Weil $\bigwedge^{\dim(Y)} Y$ ein reelles Linienbündel ist, folgt aus Lemma 1.48, dass $\bigwedge^{\dim(Y)} Y$ trivial ist, also als Vektorraumbündel isomorph zu $\mathbb{R} \times Y$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Weil $\bigwedge^{\dim(Y)} Y$ ein reelles Linienbündel ist, folgt aus Lemma 1.48, dass $\bigwedge^{\dim(Y)} Y$ genau dann trivial ist, wenn es einen globalen glatten Schnitt ohne Nullstellen besitzt. Also folgt (iv) aus (iii).

(iv)$\Rightarrow$(i): Sei ω eine stetige $\dim(Y)$–Differentialform auf der zusammenhängenden differenzierbaren Mannigfaltigkeit Y ohne Nullstellen. Offenbar besitzt Y dann einen Atlas von Karten, deren Definitionsbereiche zusammenhängend sind. Auf einem solchen Definitionsbereich U einer Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ ist dann $\omega = f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$ mit einer stetigen Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, die keine Nullstellen hat. Die Urbilder von $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ unter f sind dann auch die Urbilder von $(-\infty, 0]$ bzw. $[0, \infty)$ und damit sowohl offen als auch abgeschlossen. Weil der Definitionsbereich der Karte zusammenhängend ist, ist f entweder positiv oder negativ. Offenbar dreht sich durch die Transformation I auch das Vorzeichen der $\dim(Y)$–Differentialform $d\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$ um. Indem wir alle die Karten des Atlases von Y mit I verknüpfen, für die das entsprechende f negativ (bzw. positiv) ist, erhalten wir einen Atlas von Y, so dass für alle Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, die entsprechenden Funktionen f mit $\omega = f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$ positiv (bzw. negativ) sind. Dadurch wird dieser Atlas zu einem orientierten Atlas von X, weil für zwei Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ dieses Atlases mit den entsprechenden Funktionen f und g gilt

$$f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n = g d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n$$

mit positiven Funktionen $f > 0$ und $g > 0$ auf U bzw. V. Also folgt, dass für alle $x \in U \cap V$ gilt $\det(\psi \circ \phi^{-1})'(\phi(x)) = g(x) f^{-1}(x) > 0.$ **q.e.d.**

An diesem Beweis erkennen wir auch, dass jede orientierbare zusammenhängende Mannigfaltigkeit X genau zwei Orientierungen besitzt. Die zweite erhalten wir aus der ersten, indem wir alle Karten mit I verknüpfen. Allgemein besitzt jede orientierbare Mannigfaltigkeit mit N zusammenhängenden Komponenten genau 2^N Orientierungen.

Übungsaufgabe 3.20. (i) *Beweise, dass jede eindimensionale zusammenhängende Mannigfaltigkeit X entweder diffeomorph ist zu $\mathbb{R}$ oder zu S^1.*

(ii) *Folgere aus (i), dass jede eindimensionale Mannigfaltigkeit orientierbar ist.*

(iii) *Folgere aus (i), dass für jede eindimensionale Mannigfaltigkeit alle differenzierbaren Strukturen zueinander diffeomorph sind.*

In der Dimension $n = 2$ gibt es sehr viele verschiedene nicht orientierbare Mannigfaltigkeiten. So ist z.B. der zweidimensionale reelle projektive Raum nicht orientierbar, aber kompakt. Offenbar sind alle euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Im übernächsten Abschnitt werden wir auch sehen, dass alle Untermannigfaltigkeiten der Kodimension 1 von orientierbaren Mannigfaltigkeiten wieder orientierbar sind. Deshalb sind für alle $n \in \mathbb{N}$ die kompakten Mannigfaltigkeiten S^n orientierbar. Insbesondere ist es nicht möglich den zweidimensionalen projektiven reellen Raum in $\mathbb{R}^3$ einzubetten. Es ist aber durchaus möglich nicht orientierbare Flächen in $\mathbb{R}^3$ zu immersieren, wie z.B. die Kleinsche Flasche.

3.6 Integration von Differentialformen

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass auf einer orientierbaren n–dimensionalen Mannigfaltigkeit X jede stetige n–Differentialform ω über alle kompakten Teilmengen A von X integriert werden kann. Dafür geben wir an, wie wir dieses Integral lokal in einer Karte berechnen. Wir zeigen dann, dass dieses Integral nicht von der Wahl der Karte abhängt. Mit Hilfe einer geeigneten Zerlegung der Eins können wir zuletzt das Integral von ω über eine beliebige kompakte Teilmenge $A \subset X$ definieren.

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Wir stellen uns vor, dass A der Abschluss einer relativ kompakten offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Jede stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ ist dann beschränkt. Indem wir f außerhalb von A gleich Null setzen, erhalten wir eine Lebesque–integrable Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Wenn der Rand ∂A von A, also die Schnittmenge von A mit dem Abschluss des Komplements von A, eine Nullmenge ist, dann ist nach dem Lebesgue–Kriterium die Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}^n$ sogar Riemann–integrabel. Wenn wir uns im folgenden also auf solche kompakte Teilmengen A von X beschränkten, deren Ränder ∂A in allen Karten Nullmengen sind, dann können wir auch das Riemannintegral statt dem Lebesgueintegral benutzen. Im folgenden Satz rufen wir in Erinnerung, wie sich das Integral unter Koordinatentransformationen verhält.

Satz 3.21. *(Jacobis Transformationsformel) Sei* $\Phi : U \to V$ *ein stetig differenzierbarer Homöomorphismus von einer offenen Teilmenge* $U \subset \mathbb{R}^n$ *auf eine offene Teilmenge* $V \subset \mathbb{R}^n$*. Sei* A *eine kompakte Teilmenge von* U *(deren Rand eine Nullmenge ist) und* $f : \Phi[A] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Weil* $\Phi[A]$ *kompakt ist, ist* f *beschränkt. Dann gilt*

$$\int\limits_A f(\Phi(x))|\det(\Phi'(x))|dx_1 \dots dx_n = \int\limits_{\Phi[A]} f(y)dy_1 \dots dy_n.$$

Korollar 3.22. *Sei* X *eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension* n *und* ω *eine* n*–Differentialform auf* X*. Sei* A *eine kompakte Teilmenge, die in den Definitionsbereichen* U *und* V *zweier Karten* $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ *und* $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ *eines orientierten Atlases von* X *enthalten ist. Dann gibt es zwei stetige Funktionen* $f : U \to \mathbb{R}$ *und* $g : V \to \mathbb{R}$ *mit* $\omega|_U = f d\phi_1 \wedge \dots \wedge d\phi_n$ *und* $\omega|_V = g d\psi_1 \wedge \dots \wedge d\psi_n$*. Und es gilt*

$$\int\limits_{\phi[A]} f(\phi^{-1}(x))dx_1 \cdots dx_n = \int\limits_{\psi[A]} g(\psi^{-1}(x))dx_1 \cdots dx_n.$$

Beweis: Offenbar ist $\phi \circ \psi^{-1}|_{\psi[U\cap V]}$ ein Diffeomorphismus von $\psi[U \cap V]$ auf $\phi[U \cap V]$, und es gilt $\det((\phi \circ \psi^{-1})')(\psi(x)) > 0$ für alle $x \in U \cap V$. Außerdem gilt für $x \in U \cap V$

$$\begin{aligned} d\phi_1(x) \wedge \dots \wedge d\phi_n(x) &= \det((\phi \circ \psi^{-1})')\psi(x) d\psi_1(x) \wedge \dots \wedge d\psi_n(x). \\ g(x) &= f(x)\det((\phi \circ \psi^{-1})')\psi(x). \end{aligned}$$

Seien jetzt $\tilde{f} = f \circ \phi^{-1} : \phi[U] \to \mathbb{R}$ und $\tilde{g} = g \circ \psi^{-1} : \psi[V] \to \mathbb{R}$. Dann gilt auf $\psi[U\cap V] : \tilde{f}\circ(\phi\circ\psi^{-1})\cdot\det((\phi\circ\psi^{-1})') = \tilde{g}$. Also folgt aus Jacobis Transformationsformel

$$\begin{aligned} \int\limits_{\phi[A]} f(\phi^{-1}(x))dx_1 \cdots dx_n &= \int\limits_{\phi[A]} \tilde{f}(x)dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int\limits_{\psi[A]} \tilde{f}(\phi \circ \psi^{-1}(x)) \det((\phi \circ \psi^{-1})')(x)dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int\limits_{\psi[A]} \tilde{g}(x)dx_1 \cdots dx_n = \int\limits_{\psi[A]} g(\psi^{-1}(x))dx_1 \cdots dx_n. \end{aligned}$$

q.e.d.

Mit diesem Korollar können wir das Integral einer n–Differentialform auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit definieren.

Definition 3.23. *Sei* X *eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension* n *und* ω *eine* n*–Differentialform auf* X*. Sei* A *eine kompakte Teilmenge. Um das*

Integral $\int_A \omega$ zu definieren wählen wir eine orientierten Atlas von X, der die Orientierung von X repräsentiert. Weil A kompakt ist besitzt die entsprechende Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung und eine entsprechende Zerlegung der Eins $(f_m)_m$. Für jedes m verschwindet f_m außerhalb einer abgeschlossenen Menge A_m des Definitionsbereiches U_m einer Karte $\phi_m : U_m \to \mathbb{R}^n$. Auf den Definitionsbereichen $(U_m)_m$ dieser Karten sei ω gleich $\omega = g_m d\phi_{m,1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{m,n}$ mit stetigen Funktionen $g_m : U_m \to \mathbb{R}$. Dann definieren wir das Integral $\int_A \omega$ als

$$\int_A \omega = \sum_m \int_{\phi[A \cap A_m]} f_m(\phi^{-1}(x)) g_m(\phi^{-1}(x)) dx_1 \cdots dx_n.$$

Weil eine endliche Teilüberdeckung die Menge A überdeckt, ist diese Summe immer endlich und das Integral wohldefiniert. Wegen dem vorangehenden Korollar hängt das Integral $\int_A \omega$ weder von der Wahl des orientierten Atlases noch von der Wahl der Zerlegung der Eins ab. Dieses Integral kann auch in Analogie zum uneigentlichen Riemannintegral auf nicht kompakte Teilmengen A von X ausgedehnt werden, wenn die entsprechenden Summen konvergieren.

Wenn wir die Orientierung von X umdrehen, dann ändert sich in allen Karten das Vorzeichen der entsprechenden Funktion f mit

$$\omega|_U = f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n.$$

Also ändert das Integral $\int_A \omega$ das Vorzeichen.

Zum Abschluss können wir Jacobis Transformationsformel noch mal umformulieren:

Korollar 3.24. *Sei $f : X \to Y$ eine orientierungserhaltender stetig differenzierbarer Homöomorphismus zwischen den orientierten Mannigfaltigkeiten X und Y der Dimension n. Sei $A \subset X$ eine kompakte Teilmenge von X und ω eine stetige $n-$Differentialform auf Y. Dann gilt*

$$\int_{f[A]} \omega = \int_A f^* \omega.$$

q.e.d.

Beachte allerdings, dass dies im Allgemeinen nicht gilt, wenn f nur eine Immersion zwischen zwei gleichdimensionalen Mannigfaltigkeiten und damit nicht notwendigerweise injektiv ist.

Beispiel 3.25. *Betrachte z.B. die Abbildung $f : S^1 \to S^1$, die von der Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n$ induziert wird mit $n \in \mathbb{N}$. Diese Abbildung f ist zwar eine Immersion, und damit auch lokal ein Diffeomorphismus. Allerdings ist sie für $n > 1$ nicht* *injektiv. Es ist eine sogenannte Überlagerungsabbildung, d.h. die Urbilder von einzelnen Punkten bestehen jeweils aus n Punkten. Wir parametrisieren S^1 durch $\phi \mapsto e^{\imath\phi}$. Dann ist $\omega = d\phi$ eine nichtverschwindende 1–Differentialform auf S^1 und induziert wegen Satz 3.19 auf S^1 eine Orientierung. Wegen $(e^{\imath\phi})^n = e^{n\imath\phi}$ entspricht die Abbildung f in dieser Parametrisierung der Abbildung $\phi \mapsto n\phi$. Also gilt $f^*d\phi = nd\phi$. Damit ist sie insbesondere orientierungserhaltend. Dann gilt aber*

$$\int\limits_{S^1} f^*\omega = \int\limits_{S^1} nd\phi = n\int\limits_{S^1} d\phi = n \int\limits_{f[S^1]} \omega.$$

Also gilt das vorangehende Korollar nicht für alle orientierungserhaltenden Immersionen zwischen Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension. Die Erklärung ist, dass das Bild der Abbildung f die Sphäre S^1 n–mal umrundet, während das Urbild sie nur einmal umrundet.

3.7 Mannigfaltigkeiten mit Rand

Definition 3.26. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei*

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}.$$

Eine Funktion von f von $\mathbb{H}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ heißt in einem Randpunkt $x \in \partial\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{H}^n \mid x_n = 0\}$ (stetig) differenzierbar, wenn f eine (stetig) differenzierbare Fortsetzung auf eine Umgebung U von x als Element von $\mathbb{R}^n$ besitzt.

Durch diese Definition überträgt sich auch die Definition von glatten Funktionen und Diffeomorphismen auf offene Teilmengen von $\mathbb{H}^n$.

Definition 3.27. *Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit X mit Rand ist ein separabler metrisierbarer topologischer Raum zusammen mit einem Atlas. Die Karten einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X mit Rand sind dabei Homöomorphismen $\phi : U \to \mathbb{H}^n$ von offenen Teilmengen $U \subset X$ auf offene Teilmengen von $\mathbb{H}^n$. Die Karten heißen wieder verträglich wenn die Übergangsfunktionen Diffeomorphismen sind. Ein Atlas einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X mit Rand ist eine Familie von verträglichen Karten, deren Definitionsbereiche X überdecken. Der Rand ∂X ist die Menge aller Punkte, die durch die Karten auf den Rand von $\mathbb{H}^n$ abgebildet werden.*

Beispiel 3.28. **(i)** *Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{H}^n$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand.*

(ii) *Jedes abgeschlossene endliche Intervall ist eine eindimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand. Allgemein gilt, dass alle Intervalle differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand sind. Der Rand von offenen Intervallen ist leer.*

(iii) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist der abgeschlossene Einheitsball um die Null eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand.*

(vi) *Offenbar sind für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Räume $\mathbb{H}^{m+n}$ und $\mathbb{R}^m \times \mathbb{H}^n$ bzw. $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}^m$ diffeomorph. Wenn also X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand ist und Y eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand), dann sind $X \times Y$ und $Y \times X$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand. Der Rand besteht jeweils aus $\partial(X \times Y) = \partial X \times Y$ bzw. $\partial(Y \times X) = Y \times \partial X$.*

Satz 3.29. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann gilt:*

(i) *Der Rand ∂X von X ist eine Untermannigfaltigkeit ohne Rand von X.*

(ii) *Eine offene Umgebung U von ∂X in X ist diffeomorph zu der differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit Rand*
$$U \simeq [0,1) \times \partial X.$$
Eine solche Umgebung des Randes heißt Kragen.

(iii) *Wenn X orientierbar ist, dann ist auch ∂X orientierbar, und jede Orientierung von X induziert zusammen mit einem stetigen Vektorfeld N, dessen Einschränkung auf ∂X nach Innen (bzw. Außen) zeigt, eine Orientierung von ∂X.*

(iv) *Wenn X kompakt ist, dann ist auch ∂X kompakt.*

Beweis: (i) Die inneren Punkte von $\mathbb{H}^n$, also die Menge $\{x \in \mathbb{H}^n | x_n > 0\}$, lassen sich eindeutig dadurch charakterisieren, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass die Kugel $B(x, \epsilon)$ in $\mathbb{H}^n$ homöomorph ist zu der entsprechenden Kugel in $\mathbb{R}^n$. Deshalb bildet jeder Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{H}^n$ die inneren Punkte auf innere Punkte ab. Also bildet jeder solche Diffeomorphismus auch Randpunkte von $\mathbb{H}^n$ auf Randpunkte ab. Deshalb hängen die Randpunkte ∂X nicht davon ab, welche Karte wir benutzen um sie zu identifizieren. Daraus folgt, dass der Rand das Komplement der offenen Menge aller inneren Punkte und damit ein abgeschlossener topologischer Unterraum und eine Untermannigfaltigkeit von X ist. Insbesondere können wir Satz 2.22 darauf anwenden.

(ii) Auf jeder Karte $\phi : U \to \mathbb{H}^n$ von X induziert wegen Satz 2.2 die Derivation $\frac{\partial}{\partial \phi_n}$ ein glattes Vektorfeld. Diese Vektorfelder können wir mit Hilfe einer Zerlegung der Eins zu einem globalen glatten Vektorfeld N aufsummieren. Wir zeigen jetzt, dass die Einschränkung dieses Vektorfelds N auf den Rand ∂X offenbar überall nach Innen zeigt und keine Nullstellen auf ∂X hat. Sei $x \in U$ und $\psi : V \to \mathbb{H}^n$ eine zweite Karte von X um $x \in V$. Dann ist die Funktion $\psi \circ \phi^{-1}$ eine glatte Funktion auf $\phi[U \cap V]$, die die Hyperebene $\partial\mathbb{H}^n$ auf sich selber abbildet, und das Innere von $\mathbb{H}^n$ auch auf sich selber abbildet. Also gilt bei dem Randpunkt $x \in V \cap U$:

$$\frac{\partial(\psi_n \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(x) \begin{cases} = 0 & \text{für } i \neq n \\ > 0 & \text{für } i = n. \end{cases}$$

Daraus folgt, dass der Tangentialvektor $\frac{\partial}{\partial \psi_n}(x) \in T_x X$ durch eine positive Konstante proportional ist zu $\frac{\partial}{\partial \phi_n}(x) \in T_x X$. Daraus folgt, dass auch $N(x) \in T_x X$ durch eine positive Konstante proportional ist zu den beiden Vektoren $\frac{\partial}{\partial \phi_n}(x)$ und $\frac{\partial}{\partial \psi_n}(x)$ in $T_x X$.

Wegen Satz 2.10 hat dann die glatte Abbildung

$$W_N \cap (\mathbb{R} \times \partial X) \to X, \quad (t, x) \mapsto \psi_N(t, x)$$

in allen Punkten $(0, x) \in W \cap (\mathbb{R} \times \partial X)$ eine invertierbare Ableitung. Also gibt es wegen dem Satz 1.31 für jedes $x \in \partial X$ eine Umgebung U von x in ∂X und ein $\epsilon > 0$, so dass der entsprechende Fluss ψ_N auf $[0, \epsilon) \times U$ definiert ist, und diese Menge diffeomorph auf eine offenen Menge von X abbildet. Mit einer entsprechenden glatten Zerlegung der Eins, können wir die konstanten Funktionen ϵ auf den Umgebungen U zu einer glatten positiven Funktion ϵ auf ∂X aufsummieren. Dann ist die Abbildung

$$[0, 1) \times \partial X \to \{(t, x) \in W_N \cap (\mathbb{R} \times \partial X) \mid 0 \leq t < \epsilon(x)\}, \quad (t, x) \mapsto (\epsilon(x)t, x)$$

ein Diffeomorphismus zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit Rand. Wegen Satz 2.10 ist dann die Verknüpfung

$$\Phi : [0, 1) \times \partial X \to X, \quad (t, x) \mapsto (\epsilon(x)t, x) \mapsto \psi_N(\epsilon(x)t, x)$$

eine injektive glatte Immersion von $[0, 1) \times \partial X$ auf eine Umgebung U von ∂X in X, und damit auch ein Diffeomorphismus.

(iii) Wegen (ii) gibt es auf X ein glattes Vektorfeld N, das überall auf ∂X nach Innen zeigt und keine Nullstellen auf ∂X hat. Wir können annehmen, dass X zusammenhängend und n–dimensional ist. Wegen Satz 3.19 sind die Orientierungen von X bestimmt durch nicht verschwindende stetige n–Differentialformen ω. In (ii) haben wir gesehen, dass auf dem Rand die Verjüngung von N mit den 1–Differentialformen $d\phi_i$ nur für $j = n$ nicht verschwindet, und für $j = n$ positiv ist. Also ist $i_N\omega$ auf dem Rand positiv proportional zu

$$i_N(\omega) = i_N(f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n) = (-1)^n \langle N, d\phi_n \rangle f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_{n-1}$$

mit einer positiven Funktion f auf U. Also induziert jede Orientierung von X durch N auf ∂X genau eine Orientierung.

(iv) ∂X ist wegen (i) ein abgeschlossener topologischer Unterraum von X und deshalb kompakt, wenn X kompakt ist. **q.e.d.**

Lemma 3.30. *Sei Y eine $(n+1)$–dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und X eine n–dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit ohne Rand von Y. Dann gibt es eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand Z und eine glatte Immersion $f : Z \to Y$, deren Einschränkung auf $Z \setminus \partial Z$ ein Diffeomorphismus auf $Y \setminus X$ ist und auf jeden Punkt von X jeweils zwei Punkte von ∂Z abbildet.*

Beweis: Wir überdecken X durch Definitionsbereiche von Karten von einem Atlas von Y, die die Bedingung aus dem Lemma 1.38 erfüllen. Wegen Lemma 1.24 können wir dann X auch durch Definitionsbereiche von Karten überdecken, die

(i) die Bedingungen aus dem Lemma 1.38 erfüllen,

(ii) diese Definitionsbereiche auf offene Kugeln im $\mathbb{R}^{n+1}$ abbilden,

(iii) und stetige Fortsetzungen auf den Abschluss der Definitionsbereiche besitzen.

Weil X kompakt ist, sind die Schnittmengen von X mit abgeschlossenen Mengen kompakt und werden durch stetige Abbildungen auf kompakte Mengen abgebildet. Wegen (i)-(iii) bilden die Karten die Schnittmengen von X mit den Definitionsbereichen auf offene und abgeschlossene Teilmengen von den Schnitten von offenen Kugeln im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit linearen Unterräumen ab. Weil die Schnittmenge einer beliebigen offenen Kugel von $\mathbb{R}^{n+1}$ mit einem Unterraum von $\mathbb{R}^{n+1}$ wieder eine offene Kugel ist, ist diese Schnittmenge auch zusammenhängend. Also bilden die Karten die Schnittmengen der Definitionsbereiche mit X auf die Schnittmengen der Bilder der Definitionsbereiche mit linearen Unterräumen des $\mathbb{R}^{n+1}$ ab.

Die Vereinigung der Definitionsbereiche aller dieser Karten ist eine offene Umgebung U von X in Y. Dann überdecken wir $Y \setminus U$ durch Karten mit relativkompakten Definitionsbereichen, deren Abschlüsse alle in $Y \setminus X$ lieben. Die Karten, die Punkte von Y enthalten, können wir durch orthogonale Transformation in $O(n)$ so transformieren, dass jeweils der Abschluss einer zusammenhängenden Komponente von dem Schnitt von $Y \setminus X$ mit dem Definitionsbereich der Karte auf $\mathbb{H}^n$ abgebildet wird. Die Karten, deren Definitionsbereiche kompakte Abschlüsse in $Y \setminus X$ haben, können wir durch Translationen des $\mathbb{R}^n$ zu Karten in $\mathbb{H}^n$ transformieren. Dadurch erhalten wir auf $Y \setminus X$ einen Atlas, der sich zu einem Atlas einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit Z mit Rand fortsetzt. Weil wir die Mannigfaltigkeit Z lokal als Untermannigfaltigkeit von Y konstruiert haben, besitzt Z eine natürliche Immersion nach Y, deren Einschränkung auf $Z \setminus \partial Z$ ein Diffeomorphismus auf $Y \setminus X$ ist. Auf jeden Punkt von X bildet f zwei Punkte von ∂Z ab, die jeweils Randpunkte von den zwei Seiten von X sind. **q.e.d.**

Offenbar bildet f jeweils zwei Punkte von Z auf einen Punkt von X ab. Zusammenhängende Komponenten von X, die diffeomorph sind zu zwei zusammenhängenden Komponenten von ∂Z nennen wir zweiseitige Untermannigfaltigkeiten. Zusammenhängende Komponenten von X, auf die f eine zusammenhängende Komponente von ∂Z zweifach abbildet, nennen wir einseitige Untermannigfaltigkeiten. Wenn Y eine $n+1$–dimensionale orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, dann sind alle zweiseitigen kompakten n–dimensionalen Untermannigfaltigkeiten orientierbar. Im $\mathbb{R}^{n+1}$ sind alle n–dimensionalen kompakten Untermannigfaltigkeiten zweiseitig. Insbesondere sind alle kompakten n–dimensionalen Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^{n+1}$ orientierbar. Also können nicht orientierbare kompakte zweidimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten (wie z.B. $\mathbb{R}P^2$) nicht in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden.

3.8 Der Satz von Stokes

Heute beweisen wir zum Abschluss folgende Formel:

Satz 3.31. *Sei X eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension $n+1$. Sei ω eine stetige differenzierbare n–Differentialform auf X. Dann gilt*

$$\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega.$$

Hierbei hat ∂X die durch die Orientierung von X und ein nach **Außen** *zeigendes Vektorfeld N (vergleiche Satz 3.29 (iii)) induzierte Orientierung.*

Beweis: Wir überdecken X durch Karten $\phi : U \to \mathbb{H}^{n+1}$. Weil X kompakt ist besitzt jeder orientierte Atlas von X einen endlichen Teilatlas. Mit Hilfe einer entsprechenden Zerlegung der Eins können wir jede stetig differenzierbare n–Differentialform ω zerlegen in eine endliche Summe von stetig differenzierbaren n–Differentialformen, die jeweils außerhalb einer abgeschlossenen und damit kompakten Teilmenge A eines Definitionsbereiches U einer Karte $\phi : U \to \mathbb{H}^{n+1}$ des orientierten Atlases verschwinden. Dann genügt es die Aussage für solche stetig differenzierbaren n–Differentialformen ω zu zeigen. Wir unterscheiden zwei Fälle:
(A) Der Definitionsbereich U der Karte enthält keine Randpunkte. Dann bildet $\phi : U \to \mathbb{H}^{n+1}$ den Definitionsbereich auf eine offene Menge im Inneren von $\mathbb{H}^{n+1}$ ab. Wir müssen jetzt zeigen, dass dann gilt

$$\int_A d\omega = 0.$$

Hierbei ist $A \subset U$ die kompakte Teilmenge vom Inneren von U, außerhalb dessen ω verschwindet. Die n–Differentialform lässt sich auf U schreiben als

$$\omega = \sum_{i=0}^{n} f_i d\phi_0 \wedge \ldots \hat{d\phi_i} \ldots \wedge d\phi_n$$

Hierbei bedeutet $\hat{}$ wieder, dass der entsprechende Faktor weggelassen wird. Dann gilt

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial \phi_i} d\phi_i \wedge d\phi_0 \wedge \ldots \hat{d\phi_i} \ldots \wedge d\phi_n \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\partial f_i}{\partial \phi_i} d\phi_0 \wedge \ldots \wedge d\phi_n. \end{aligned}$$

Aufgrund der Definition des Integrals gilt dann

$$\begin{aligned} \int\limits_A d\omega &= \int\limits_{\phi[A]} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\partial f_i}{\partial \phi_i} (\phi^{-1}(x)) dx_0 \ldots dx_n \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \int\limits_{\phi[A]} \frac{\partial (f_i \circ \phi^{-1})}{\partial x_i} (x) dx_0 \ldots dx_n. \end{aligned}$$

Weil die Funktionen $f_0, \ldots, f_n$ stetig differenzierbar sind und außerhalb der kompakten Menge A verschwinden, können wir die Funktionen $f_i \circ \phi^{-1}$ stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{H}^{n+1}$ fortsetzen, indem wir sie außerhalb von $\phi[A]$ gleich Null setzen. Dann ist das Integral gleich dem Integral über einen Quader $Q = [a_0, b_0] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, der $\phi[A]$ enthält:

$$\int\limits_A d\omega = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \int\limits_Q \frac{\partial (f_i \circ \phi^{-1})}{\partial x_i} (x) dx_0 \ldots dx_n.$$

Dann ist das Integral ein mehrfaches eindimensionales Integral über die Intervalle $[a_0, b_0], \ldots, [a_n, b_n]$. Wegen dem Satz von Fubini können wir die Reihenfolge der Integrale vertauschen. Wenn wir im i–ten Summanden

$$(-1)^i \int\limits_Q \frac{\partial (f_i \circ \phi^{-1})}{\partial x_i} (x) dx_0 \ldots dx_n$$

die Integration über die Variable dx_i zuerst anführen, erhalten wir nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Differenz von $f_i \circ \phi^{-1}$ an den entsprechenden Intervallgrenzen. Weil f_i außerhalb von A verschwindet, sind diese Werte gleich Null. Also folgt

$$\int\limits_A d\omega = 0.$$

Jetzt betrachten wir den Fall

(B) Der Definitionsbereich U der Karte enthält Randpunkte. In diesem Fall verfahren wir genauso wie in Fall (A), nur dass wir eine Randseite des Quaders Q auf den Rand von $\mathbb{H}^{n+1}$ legen müssen. Also ist das entsprechende Intervall in der n–ten Koordinate von der Form $[0, b_n]$. Weil die Normale N nach Außen zeigt, gilt auf dem Rand:

$$\langle d\phi_n, N\rangle < 0 \quad \text{und} \quad \langle \phi_i, N\rangle = 0 \quad \text{für} \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Wegen Satz 3.14 (vi) gilt dann auf dem Rand

$$i_N(d\phi_0 \wedge \ldots \wedge d\phi_n) = (-1)^n \langle N, d\phi_n\rangle d\phi_0 \wedge \ldots \wedge d\phi_{n-1}.$$

Also entspricht die auf dem Rand induzierte Orientierung der n–Differentialform

$$-(-1)^n d\phi_0 \wedge \ldots \wedge d\phi_{n-1}.$$

Für alle $i = 0, \ldots, n-1$ verschwinden die Funktionen $f_i \circ \phi^{-1}$ wieder an den Rändern des Intervalles $[a_i, b_i]$. Also gilt wie im Fall (A)

$$(-1)^i \int\limits_Q \frac{\partial(f_i \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(x) dx_0 \ldots dx_n = 0.$$

Für $i = n$ verschwindet $f_n \circ \phi^{-1}$ nur an der Grenze b_n. Dann gilt

$$(-1)^n \int\limits_Q \frac{\partial(f_n \circ \phi^{-1})}{\partial x_n} dx_0 \ldots dx_n = -(-1)^n \int\limits_{Q \cap \partial\mathbb{H}^{n+1}} f_n \circ \phi^{-1} dx_0 \ldots dx_{n-1}.$$

Weil auf $U \cap \partial X$ die 1–Form $d\phi_n$ verschwindet gilt dort $\omega|_{U\cap\partial X} = f_n d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_{n-1}$. Weil das Vorzeichen $-(-1)^n$ mit dem Vorzeichen der Orientierung übereinstimmt, gilt

$$\int\limits_A d\omega = \int\limits_{\partial X \cap A} \omega.$$ **q.e.d.**

Dieser Satz gilt genauso für stetig differenzierbare n–Differentialformen ω mit kompaktem Träger auf nicht kompakten $n+1$–dimensionalen Mannigfaltigkeiten X mit Rand. Allgemein kann man ihn auch auf nicht kompakte Mannigfaltigkeiten mit Rand verallgemeinern, wenn man sicherstellt, dass die entsprechenden Integrale konvergieren.