Analysis III

SS 2006

Martin U. Schmidt

Inhaltsverzeichnis

1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten **5**
- 1.1 Zusammenhängende Komponenten . . . 5
- 1.2 Karten und Atlanten . . . 8
- 1.3 Differenzierbare Abbildungen . . . 14
- 1.4 Zerlegung der Eins . . . 15
- 1.5 Tangentialraum . . . 20
- 1.6 Untermannigfaltigkeiten . . . 26
- 1.7 Tangentialbündel . . . 30
- 1.8 Operationen auf Vektorraumbündeln . . . 38

2 Vektorfelder **43**
- 2.1 Vektorfelder und Integralkurven . . . 43
- 2.2 Flüsse und Vektorfelder . . . 47
- 2.3 Die Lie–Ableitung . . . 53
- 2.4 Vektorfelder auf Untermannigfaltigkeiten . . . 56
- 2.5 Zusammenfassung . . . 58

3 Differentialformen **59**
- 3.1 Multilineare Algebra . . . 59
- 3.2 Tensorfelder . . . 64
- 3.3 Differentialformen . . . 67
- 3.4 Die äußere Ableitung . . . 70
- 3.5 Orientierungen . . . 75
- 3.6 Integration von Differentialformen . . . 77
- 3.7 Mannigfaltigkeiten mit Rand . . . 80
- 3.8 Der Satz von Stokes . . . 84

Kapitel 1

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff der Mannigfaltigkeit ein. Dieser Begriff erlaubt es die Differential– und Integralrechnung auf viele Fragestellungen anzuwenden. Er beschreibt geometrische Gebilde, die lokal wie offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ aussehen, aber global auf sehr vielfältige Weise verklebt sein können. Entsprechend werden wir einerseits die lokale Differential– und Integrationsrechnung anwenden und weiterentwickeln und andererseits auf neue globale Fragestellungen stoßen.

1.1 Zusammenhängende Komponenten

Definition 1.1. *Ein metrischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn die einzigen Teilmengen von X, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind, die leere Menge und der ganze Raum X sind. Er heißt lokal zusammenhängend, wenn für jedes $x \in X$ jede Umgebung von x eine zusammenhängende Umgebung von x enthält.*

Satz 1.2. *Eine Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein (beschränktes oder unbeschränktes) Intervall ist. Insbesondere ist also $\mathbb{R}$ sowohl zusammenhängend als auch lokal zusammenhängend.*

Beweis: Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine zusammenhängende Teilmenge. Dann enthält A mit je zwei Punkten $a < b \in \mathbb{R}$ auch das Intervall $[a, b]$. Wenn nämlich $a < b$ zwei Elemente sind und $x \notin A$, dann sind die Teilmengen

$$(-\infty, x) \cap A = (-\infty, x] \cap A \text{ und } (x, \infty) \cap A = [x, \infty) \cap A$$

jeweils offen und abgeschlossen. Also ist dann A nicht zusammenhängend.

Sei umgekehrt $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $I = A \cup B$ eine disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen A und B von I. Sei $a \in A$ und $b \in B$ mit $a < b$. Dann ist $[a,b]$ in I enthalten. Sei c das Supremum von $A \cap [a,b]$. Weil A abgeschlossen ist, folgt $c \in A$. Weil A offen ist, folgt aus $c \in A$ und $c \neq b$, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt in $(c-\epsilon, c+\epsilon) \subset A$. Also ist das Supremum von $A \cap [a,b] > c$ Widerspruch. Also ist jedes Intervall zusammenhängend. **q.e.d.**

Satz 1.3. **(i)** *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ ein zusammenhängender Unterraum. Dann ist jede Menge B mit $A \subset B \subset \bar{A}$ zusammenhängend.*

(ii) *Eine beliebige Vereinigung von zusammenhängenden Teilmengen von X, deren Schnitt nicht leer ist, ist zusammenhängend.*

(iii) *Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von zusammenhängenden Teilmengen von X, so dass*

$$A_{n+1} \cap A_n \neq \emptyset \qquad \textit{gilt für alle } n \in \mathbb{N},$$

dann ist $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ zusammenhängend.

(iv) *Das Bild eines zusammenhängenden Raumes unter einer stetigen Abbildung ist zusammenhängend.*

(v) *Das kartesische Produkt zweier (topologischer) metrischer Räume ist genau dann (lokal) zusammenhängend, wenn beide (lokal) zusammenhängend sind.*

Beweis:

(i) Wenn B eine Vereinigung von zwei offenen disjunkten Teilmengen C und D ist, dann ist auch A eine disjunkte Vereinigung von $(A \cap C) \cup (A \cap D)$. Wenn C und D offen in B sind, dann sind auch $(A \cap C)$ und $(A \cap D)$ offen in A. Weil A dicht in B liegt, sind $(A \cap C)$ bzw. $(A \cap D)$ genau dann leer, wenn C bzw. D leer ist. Also ist A nicht zusammenhängend, wenn B nicht zusammenhängend ist. Daraus folgt (i).

(ii) Sei $x \in X$ im Schnitt einer Familie von zusammenhängenden Teilmengen und $A \cup B$ eine disjunkte Vereinigung der Vereinigung der Familie durch offene und abgeschlossene Mengen. Dann können wir $x \in A$ annehmen. Dann gibt es mindestens eine zusammenhängende Teilmenge C der Familie, so dass $B \cap C$ nicht leer ist. Dann ist auch $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$ eine disjunkte Vereinigung durch offene und abgeschlossene Mengen. $C \cap A$ enthält x und $C \cap B$ ist nicht leer. Das steht im Widerspruch dazu, dass C zusammenhängend ist. Daraus folgt (ii).

(iii) Induktiv folgt aus (ii), dass $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ zusammenhängend ist. Daraus folgt (iii).

(iv) Das Urbild einer offenen und abgeschlossenen Menge ist wieder offen und abgeschlossen. Daraus folgt, dass das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung zusammenhängend ist.

(v) Weil die Projektionen $p_1 : X \times Y \to X$ und $p_2 : X \times Y \to Y$ stetig und surjektiv sind, sind wegen (iv) auch X und Y zusammenhängend, wenn $X \times Y$ zusammenhängend sind. Für alle $(x, y) \in X \times Y$ bilden die Bilder der Umgebungen von (x, y) unter p_1 bzw. p_2 die Umgebung von x bzw. y. Deshalb sind X und Y auch lokal zusammenhängend, wenn $X \times Y$ lokal zusammenhängend ist. Wenn umgekehrt X und Y (lokal) zusammenhängend, dann sind für alle

$$(x, y) \in X \times Y \text{ auch } X \times \{y\} \text{ und } \{x\} \times Y$$

(lokal) zusammenhängend. Wegen (ii) ist dann

$$X \times \{y\} \cup \{x\} \times Y$$

zusammenhängend und enthält alle Punkte (z, y) mit $z \in X$. Wegen (ii) ist dann auch

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} (X \times \{y\} \cup \{x\} \times Y)$$

zusammenhängend. Genauso folgt für lokal zusammenhängende X und Y, dass jede Umgebung von $(x, y) \in X \times Y$ das kartesische Produkt von zusammenhängenden Umgebungen von x und y enthält und damit auch eine zusammenhängende Umgebung enthält. **q.e.d.**

Korollar 1.4. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}^n$ zusammenhängend.* **q.e.d.**

Definition 1.5. *Sei X ein metrischer Raum und $x \in X$. Dann ist wegen (ii) die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von X, die x enthalten, zusammenhängend. Diese Menge heißt zusammenhängende Komponente von x in X. Wegen (i) sind die zusammenhängenden Komponenten von X abgeschlossen. Offenbar sind zwei zusammenhängende Komponenten von X jeweils entweder gleich oder disjunkt. Deshalb ist jeder metrische Raum X eine disjunkte Vereinigung seiner zusammenhängenden Komponenten.*

Satz 1.6. *Ein metrischer Raum (X, d) ist genau dann lokal zusammenhängend, wenn die zusammenhängenden Komponenten von offenen Teilmengen wieder offen sind.*

Beweis: Sei (X, d) ein metrischer Raum, dessen zusammenhängende Komponenten von allen offenen Mengen offen sind. Dann enthält jede Umgebung von $x \in X$ eine offene zusammenhängende Komponente von x. Also ist (X, d) lokal zusammenhängend.

Sei jetzt (X, d) lokal zusammenhängend. Dann ist für jedes $x \in X$ die zusammenhängende Komponente von x in X eine Umgebung von x und damit offen. Also sind alle zusammenhängenden Komponenten in X offene, abgeschlossene und zusammenhängende Mengen. **q.e.d.**

Korollar 1.7. *Ein topologischer Raum heißt separabel, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Jeder separable lokal zusammenhängende metrische Raum X ist eine höchstens abzählbare disjunkte Vereinigung von zusammenhängenden offenen und abgeschlossenen Teilräumen.*

Beweis: Alle zusammenhängenden Komponenten eines lokal zusammenhängenden metrischen Raumes X sind offen und abgeschlossen. Deshalb enthält jede Komponente mindestens ein Element einer dichten Teilmenge. Also ist die Anzahl der zusammenhängenden Komponenten eines separablen lokal zusammenhängenden metrischen Raumes X höchstens abzählbar. **q.e.d.**

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $r > 0$ ist die Abbildung

$$B(0, r) \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \frac{x}{r - \|x\|}$$

eine stetige Abbildung von $B(0, r)$ nach $\mathbb{R}^n$. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\mathbb{R}^n \to B(0, r), \quad y \mapsto \frac{ry}{1 + \|y\|}$$

und damit auch stetig. Also sind $B(0, r)$ und $\mathbb{R}^n$ homöomorph (d.h. durch eine bijektive stetige Abbildung und stetige Umkehrabbildung verbunden). Deshalb ist im $\mathbb{R}^n$ jede offene Kugel zusammenhängend. Daraus wird folgen, dass alle differenzierbaren Mannigfaltigkeiten separable, lokal zusammenhängende und metrisierbare Räume sind, und deshalb höchstens abzählbare disjunkte Vereinigungen von offenen und abgeschlossenen zusammenhängenden Komponenten sind.

1.2 Karten und Atlanten

Ein topologischer Raum X ist eine Menge X zusammen mit einer Topologie auf X, d.h. einer Teilmenge τ der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ aller Teilmengen von X, deren Elemente wir offene Mengen von X nennen. Diese Teilmenge $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ erfüllt dabei 2 Bedingungen:

(i) Die Schnittmenge von endlich vielen offenen Mengen ist offen.

(ii) Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.

Zusätzlich wird noch gefordert, dass sowohl die leere Menge als auch X offen sind. Die Topologie, die aus allen Teilmengen von X besteht, heißt diskrete Topologie. Für jeden metrischen Raum (X, d) ist eine Teilmenge $O \subset X$ genau dann offen, wenn sie eine Vereinigung von offenen Kugeln ist. Eine Abbildung $f : X \to Y$ von einem topologischen Raum X in einen topologischen Raum Y heißt stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist.

Übungsaufgabe 1.8. *Zeige, dass für metrische Räume diese Definition von Stetigkeit mit der $\epsilon - \delta$–Definition übereinstimmt.*

Definition 1.9. *(Karte) Sei X ein topologischer Raum, dann heißt ein Homöomorphismus ϕ (also eine bijektive stetige Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig ist) von einer offenen Teilmenge U von X auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ Karte. U heißt der Definitionsbereich und n die Dimension der Karte.*

Es gilt, dass ein Homöomorphismus von einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ auf eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ nur existiert, wenn $n = m$ ist. Deshalb stimmen die Dimensionen zweier Karten, deren Definitionsbereiche nicht schnittfremd sind, überein. Das werden wir aber nicht zeigen und auch nicht benutzen. Zwei Karten ϕ_1 und ϕ_2 mit dem gleichen Definitionsbereich U werden verträglich genannt, wenn die Übergangsfunktionen $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ und $\phi_1 \circ \phi_2^{-1} = (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})^{-1}$ unendlich oft differenzierbare Abbildungen sind. Weil die zweite Abbildung die Umkehrabbildung der ersten ist, folgt dann, dass die Ableitungen dieser Abbildungen an jeder Stelle von $\phi_1[U]$ bzw. $\phi_2[U]$ bijektive lineare Abbildungen sind von $\mathbb{R}^{n_1}$ auf $\mathbb{R}^{n_2}$. Also stimmen die Dimensionen von zwei verträglichen Karten mit gleichem Definitionsbereich überein.

Zwei Karten ϕ_1 und ϕ_2 mit verschiedenen Definitionsbereichen U_1 bzw. U_2 heißen verträglich, wenn die beiden Einschränkungen von ϕ_1 und ϕ_2 auf $U_1 \cap U_2$, die offenbar zwei Karten mit gleichem Definitionsbereich sind, miteinander verträglich sind.

Definition 1.10. *(Atlas) Eine Familie von paarweise verträglichen Karten, deren Definitionsbereiche den topologischen Raum X überdecken, heißt Atlas.*

Zwei Atlanten heißen miteinander verträglich, wenn die Vereinigung der Karten beider Atlanten wieder ein Atlas ist, also alle Karten zusammen paarweise miteinander verträglich sind. Weil eine Abbildung genau dann differenzierbar ist, wenn sie in allen Punkten differenzierbar ist, genügt es die Differenzierbarkeit auf einer offenen Überdeckung nachzuprüfen. Deshalb ist die Verträglichkeit von Atlanten eine Äquivalenzrelation. Ein gesättigter Atlas ist ein maximaler Atlas, der also alle mit diesem Atlas verträglichen Atlanten und damit auch alle mit ihm verträglichen Karten enthält. Jede Äquivalenzklasse von verträglichen Atlanten enthält offenbar genau einen gesättigten Atlas und jeder gesättigte Atlas definiert genau eine Äquivalenzklasse von verträglichen Atlanten, nämlich alle Atlanten, die in dem gesättigten Atlas enthalten sind.

Definition 1.11. *(Mannigfaltigkeit) Ein metrisierbarer separabler topologischer Raum X (d.h. ein topologischer Raum, dessen offene Mengen mit den offenen Mengen einer Metrik auf X übereinstimmen) zusamen mit einem (gesättigten) Atlas heißt differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

Nicht jeder metrische Raum besitzt einen Atlas. Offenbar besitzt jeder Punkt einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, (oder eines topologischen Raumes mit einem Atlas) eine Umgebung, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. So ist z.B. die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

keine Mannigfaltigkeit, weil der Punkt $(0, 0)$ keine Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Das sieht man daran, dass alle ϵ–Kugeln um $(0, 0)$ ohne den Punkt $(0, 0)$ 4 zusammenhängende Komponenten besitzen, also vier offene und abgeschlossene zusammenhängende Teilmengen. Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $\epsilon > 0$ hat aber $B(x, \epsilon) \setminus \{x\}$ genau eine zusammenhängende Komponente, wenn $n > 1$ ist und zwei, wenn $n = 1$. Wie wir gesehen haben, stimmen die Dimensionen von zwei verträglichen Karten, deren Definitionsbereiche beide einen Punkt $x \in X$ enthalten überein. Die Dimension einer differenzierbare Mannigfaltigkeit X ist die Funktion, die jedem Punkt $x \in X$ die Dimension einer Karte aus dem Atlas zuordnet, deren Definitionsbereich x enthält. Offenbar besitzt jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung, auf der die Dimension der Mannigfaltigkeit konstant ist. Deshalb sind die Teilmengen von X, auf denen die Dimension gleich einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist, offen. Wenn $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine in X konvergente Folge ist, dann stimmen die Dimensionen von X an den Punkten $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ für große m mit der Dimension von X am Grenzwert von $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ überein. Deshalb sind die Teilmengen von X, auf denen die Dimension gleich einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist, auch abgeschlossen, und deshalb Vereinigungen von zusammenhängenden Komponenten von X. Insbesondere hat eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit nur eine Dimension. Eine nicht zusammenhängende differenzierbare Mannigafltigkeit kann mehrere Dimensionen haben.

Beispiel 1.12. (i) *Jeder abzählbare diskrete Raum ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension* 0*. Umgekehrt ist jede differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension* 0 *ein abzählbarer diskreter Raum.*

(ii) *Jeder endlichdimensionale Vektorraum besitzt einen gesättigten Atlas von differenzierbaren Karten. Damit wird jeder endlichdimensionale Vektorraum zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit von der gleichen Dimension wie der Vektorraum. Als Topologie benutzen wir dabei die Topologie einer der äquivalenten Normen des Vektorraumes.*

(iii) *Sei $\mathbb{R}^{n+1}$ der $(n+1)$–dimensionale Euklidische Raum mit dem Euklidischen Skalarprodukt und der entsprechenden Norm. Seien $e_0, \ldots, e_n$ die natürliche Basis von $\mathbb{R}^{n+1}$. Unter der n–dimensionalen Sphäre verstehen wir die Teilmenge*

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

Im folgenden werden wir sehen, dass S^n auf natürliche Weise eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Dann definieren wir die sogenannte stereographische Projektion:

$$S^n \setminus \{e_0\} \to \mathbb{R}^n$$

Zunächst identifizieren wir den $\mathbb{R}^n$ mit der Teilmenge

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, e_0\rangle = 0\} = \{0e_0 + x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}.$$

Dann bildet die stereographische Projektion jeden Punkt von $S^n \setminus \{e_0\}$ (ohne den Nordpol) auf den Schnittpunkt der Geraden durch den Nordpol und den Punkt von $S^n \setminus \{e_0\}$ mit der Ebene $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ab. Sei $x \in S^n \setminus \{e_0\}$. Dann besteht die Gerade durch den Nordpol und der Punkt x aus den Punkten $\{e_0 + t(x - e_0) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Der Schnittpunkt mit der Hyperebene

$$\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, e_0\rangle = 0\}$$

entspricht dem Punkt $y = e_0 + t(x - e_0)$ mit $\langle y, e_0\rangle = 0$:

$$\langle e_0 + t(x - e_0), e_0\rangle = 1 - t + t\langle x, e_0\rangle = 0 >$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{1}{1 - \langle x, e_0\rangle} \text{ und } y = e_0 + \frac{x - e_0}{1 - \langle x, e_0\rangle}.$$

Die Länge des Bildvektors ist dann gegeben durch

$$\|y\| = \left\| e_0 + \frac{(x - e_0)}{1 - \langle x, e_0\rangle} \right\| = \left\| \frac{x - e_0\langle x.e_0\rangle}{1 - \langle x, e_0\rangle} \right\| = \sqrt{\frac{\langle x - \langle x, e_0\rangle e_0, x - \langle x, e_0\rangle e_0\rangle}{(1 - \langle x, e_0\rangle)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - 2\langle x, e_0\rangle^2 + \langle x, e_0\rangle^2}{1 - \langle x, e_0\rangle}} = \sqrt{\frac{1 + \langle x, e_0\rangle}{1 - \langle x, e_0\rangle}}.$$

Also ist $\langle x, e_0 \rangle$ *gegeben durch*

$$\langle x, e_0 \rangle = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}$$

und x *ist gegeben durch*

$$x = \langle x, e_0 \rangle e_0 + (1 - \langle x, e_0 \rangle) y \quad = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} e_0 + \frac{2y}{\|y\|^2 + 1} \quad = \frac{(\|y\|^2 - 1) e_0 + 2y}{\|y\|^2 + 1},$$

wobei wir $\mathbb{R}^n$ *als Teilmenge von* $\mathbb{R}^{n+1}$ *auffassen. Also ist die stereographische Projektion ein Homöomorphismus von* $S^n \setminus \{e_0\}$ *nach* $\mathbb{R}^n$. *Wenn wir* S^n *an der Hyperebene* $\mathbb{R}^n$ *spiegeln und dann die stereographische Projektion benutzen, erhalten wir einen Homöomorphismus* $S^n \setminus \{-e_0\}$ *nach* $\mathbb{R}^n$

$$x \to y = -e_0 + \frac{x + e_0}{1 + \langle x, e_0 \rangle}$$

mit der Umkehrabbildung

$$x = \frac{\frac{1}{\|y\|^2} - 1}{\frac{1}{\|y\|^2} + 1} e_0 + \frac{2 \frac{1}{\|y\|}}{\frac{1}{\|y\|^2} + 1} \frac{y}{\|y\|} = \frac{(1 - \|y\|^2) e_0 + 2y}{1 + \|y\|^2}$$

Auf $S^n \setminus \{e_0, -e_0\}$ *werden beide Karten durch die Abbildung*

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, y \to \frac{y}{\|y\|^2}$$

in einander überführt. Weil diese Abbildung sogar analytisch ist, wird dadurch S^n *zu einer differenzierbaren (bzw. analytischen) Mannigfaltigkeit.*

(iv) *Sei* $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *eine glatte Funktion, deren Gradient* ∇f *keine gemeinsamen Nullstellen mit* f *hat. Dann gibt es aufgrund der Voraussetzung an* f *für jedes Element* $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ *der Nullstellenmenge ein* $i \in \{0, \ldots, n\}$, *so dass* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \neq 0$. *Wegen dem Satz der impliziten Funktion gibt es dann eine genauso oft wie* f *stetig differenzierbare Funktion* g *von der Schnittmenge von* $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_i = 0\}$ *mit einer Umgebung von* x *nach* $\mathbb{R}$, *so dass die Schnittmenge der Nullstellenmenge von* f *mit der Umgebung von* x *gleich dem Graphen von* g *auf der Umgebung von* x *ist, also gleich der Menge* $z(y) = y + g(y) e_i$ *wobei* y *die Schnittmenge von* $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_i = 0\}$ *mit der Umgebung von* x *durchläuft. Die natürliche Projektion von der Umgebung von* x *auf diese Schnittmenge, die jedem* z *das* y *mit den gleichen Koordinaten, bis auf die* i*–te Koordinate, zuordnet (also* $y = z - \langle z, e_i \rangle e_i$*)*

ist offenbar glatt und die Umkehrabbildung von der Abbildung $y \mapsto y + g(y)e_i$*. Deshalb ist die Schnittmenge der Nullstellenmenge von* f *mit der Umgebung von* x *diffeomorph zu einer offenen Teilmenge von* $\mathbb{R}^n$*. Offenbar ist die Nullstellenmenge als Teilmenge des* $\mathbb{R}^{n+1}$ *ein metrischer Raum. Also ist die Nullstellenmenge eine* n*–dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

Mit der Funktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \|x\|^2 - 1$ *erhalten wir wieder dass die* n*–dimensionale Sphäre eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.*

Bemerkung 1.13. *Anstatt von den Übergangsfunktionen zu fordern, dass sie unendlich oft differenzierbar sind, kann man auch* r*mal–stetig differenzierbar, oder analytisch oder (für komplexe Mannigfaltigkeiten, bei denen wir* $\mathbb{R}^n$ *durch* $\mathbb{C}^n$ *ersetzen) holomorphe Übergangsfunktionen fordern. Dann entstehen* C^r *bzw. analytische, bzw. komplexe Mannigfaltigkeiten. Wenn wir nur stetige Übergangsfunktionen fordern, sprechen wir von topologischen Mannigfaltigkeiten. Ein gesättigter Atlas (bzw. eine Äquivalenzklasse von verträglichen Atlanten) wird auch differenzierbare Struktur genannt. Es gibt im Allgemeinen viele verschiedene Äquivalenzklassen von Atlanten. Aber die meisten dieser differenzierbaren Strukturen werden durch Homöomorphismen von* X *auf sich selber aufeinander abgebildet.*

Übungsaufgabe 1.14. *Gebe einen Homöomorphismus von* $\mathbb{R}$ *nach* $\mathbb{R}$ *an, der die natürliche differenzierbare Struktur auf eine nicht verträgliche differenzierbare Struktur abbildet.*

Definition 1.15. *Zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten* X *und* Y *heißen diffeomorph, wenn es einen Homöomorphismus* $\Phi : X \to Y$ *gibt, der alle Karten des gesättigten Atlas von* Y *auf Karten des gesättigten Atlas von* X *abbildet.*

Die meisten nicht miteinander verträglichen differenzierbaren Strukturen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit sind also diffeomorph. Diese Relation auf dem Raum aller differenzierbaren Strukturen ist offenbar eine weitere Äquivalenzrelation, neben der Verträglichkeit von Atlanten. Für eine gegebene differenzierbare Mannigfaltigkeit stellt sich dann die Frage, wieviel verschiedene nicht zueinander diffeomorphe differenzierbare Strukturen sie besitzt. Für den Fall von eindimensionalen Mannigfaltigkeiten lässt sich leicht zeigen, dass alle verschiedenen differenzierbaren Strukturen zueinander diffeomorph sind. Allgemein gilt, dass auf niedrigdimensionalen Mannigfaltigkeiten alle differenzierbaren Strukturen diffeomorph sind. Wenn die Dimension größer als vier ist, kann es verschiedene differenzierbare Strukturen geben. Im besonders schweren Fall der Dimension vier (z.B. $\mathbb{R}^4$) wurde durch eine von der Physik inspirierte Theorie von Donaldson in den achtziger Jahren gezeigt, dass es auch unendlich viele verschiedene nicht zueinander diffeomorphe differenzierbare Strukturen geben kann.

1.3 Differenzierbare Abbildungen

Definition 1.16. *Seien X und Y zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Dann heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ p mal stetig differenzierbar (bzw. glatt), wenn für alle Karten ϕ und ψ von den gesättigten Atlanten von X bzw. Y mit Definitionsbereichen U bzw. V, so dass $f[U]$ in V liegt die Abbildung*

$$\psi \circ f|_U \circ \phi^{-1} : \phi[U] \to \psi[V], u \mapsto \psi(f(\phi^{-1}(u)))$$

p mal stetig differenzierbar bzw. glatt ist.

Weil alle Karten der gesättigten Atlanten von X und Y miteinander verträglich sind, reicht es die Differenzierbarkeit auf allen Karten von verträglichen Atlanten von X und Y nachzuprüfen. Eventuell muss man noch zu Einschränkungen von Karten auf Schnittmengen übergehen, um die Bedingung $f[U] \subset V$ zu erfüllen.

Damit können wir die Differentialrechnung von dem $\mathbb{R}^n$ auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten übertragen. Wir benutzen dabei immer lokal Karten und erhalten so Abbildungen von offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ auf offene Teilmengen des $\mathbb{R}^m$. Im Folgenden werden wir noch viele weitere Strukturen der Differentialrechnung auf dem $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ weiterentwickeln und mit Hilfe der Karten auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten übertragen. Wichtig dabei ist, dass die entsprechenden Aussagen so formuliert werden, dass sie nicht von der Wahl der Karte aus dem gesättigten Atlas abhängen.

Beispiel 1.17. *Im Folgenden werden wir $\mathbb{R}$ oder auch jeden endlichdimensionalen Vektorraum mit der differenzierbaren Struktur aus dem Beispiel (ii) ausstatten und als differenzierbare Mannigfaltigkeit ansehen. Also sind alle p mal stetig differenzierbaren Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ wohldefiniert. Wir wollen diesen Raum $C^p(X, \mathbb{R})$ nennen. Weil die p mal differenzierbare Funktion von einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ eine Algebra bilden, ist auch $C^p(X, \mathbb{R})$ bzw. $C^\infty(X, \mathbb{R})$ eine Algebra.*

Übungsaufgabe 1.18. *Zeige, dass zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten X und Y genau dann diffeomorph sind, wenn es eine glatte Abbildung $f : X \to Y$ gibt, die bijektiv ist, und deren Umkehrabbildung auch glatt ist.*

Beispiel 1.19. **(i)** *Sei $\mathbb{R}^n$ der Euklidische n–dimensionale Raum mit dem Euklidischen Skalarprodukt. Dann ist die Abbildung*

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{2x}{1 - \|x\|^2}$$

ein Diffeomorphismus von $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$. Sei nämlich $y = \frac{2x}{1-\|x\|^2}$. Dann gilt für $\|x\| < 1$ auch $\|x\|^2 > 0$. Also folgt $\|y\| = \frac{2\|x\|}{1-\|x\|^2}$ oder auch $\|y\|\|y\|^2 +$

$2\|x\| - \|y\| = 0$. *Also gilt*

$$\|x\| = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\|y\|^2}}{2\|y\|} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \|y\|^2}}{\|y\|}.$$

Wegen $0 \leq \|x\| < 1$ *folgt*

$$\|x\| = \frac{\sqrt{1 + \|y\|^2} - 1}{\|y\|}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} x = \frac{y(1 - \|x\|^2)}{2} &= \frac{y}{2} \frac{\|y\|^2 - 1 + 2\sqrt{1 + \|y\|^2} - 1 - \|y\|^2}{\|y\|^2} \\ &= y \frac{\sqrt{1 + \|y\|^2} - 1}{(\sqrt{1 + \|y\|^2} + 1)(\sqrt{1 + \|y\|^2} - 1)} = \frac{y}{\sqrt{1 + \|y\|^2} + 1} \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist für alle $y \in \mathbb{R}^n$ *wohldefiniert und das Bild liegt in* $B(0,1)$. *Die Abbildungen* f *und ihre Umkehrabbildung sind sogar analytische Abbildungen, also auch Diffeomorphismen von* $B(0,1)$ *auf* $\mathbb{R}^n$ *bzw.* $\mathbb{R}^n$ *nach* $B(0,1)$.

(ii) *Die Abbildung* $g : x \to \frac{x}{\|x\|^2}$ *ist offenbar eine Involution:*

$$\frac{\frac{x}{\|x\|^2}}{\|\frac{x}{\|x\|^2}\|^2} = \frac{x\|x\|^4}{\|x\|^2\|x\|^2} = x.$$

g *ist also ein analytischer Diffeomorphismus von* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *nach* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. *Sie bildet das Äußere* $\{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| > 1\}$ *der Einheitskugel auf* $B(0,1) \setminus \{0\}$ *ab. Zusammen mit der Abbildung* f *aus (i) ergibt sie einen analytischen Diffeomorphismus des Äußeren der Einheitskugel nach* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1.4 Zerlegung der Eins

In diesem Abschnitt führen wir eine sogenannte Zerlegung der Eins ein. Das ist eine abzählbare Familie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von nicht negativen glatten Funktionen mit Werten in dem Intervall $[0,1]$, deren Summe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = 1$ gleich Eins ist. Diese Summe soll dabei immer lokal endlich sein, d.h. für jedes x einer gegebenen Mannigfaltigkeit, soll es eine Umgebung geben, auf der nur endlich viele der Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht verschwinden. Dadurch ist die Summe immer eine endliche Summe und deshalb auch ohne den Begriff des Grenzwertes wohldefiniert. Mithilfe einer solchen Zerlegung der Eins wollen wir die Funktionen bzw. Vektorfelder bzw. Differentialformen (diese werden später eingeführt) in Summen von Funktionen bzw. Vektorfeldern bzw. Differentialformen zerlegen, die nur innerhalb einer kleinen offenen Menge nicht verschwinden. Also sollen die einzelnen Funktionen der Zerlegung der Eins nur innerhalb von (kleinen) offenen Mengen nicht verschwinden.

Definition 1.20. *Eine Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von reellen* $[0,1]$*-wertigen Funktionen auf einem topologischen Raum* X *heißt Zerlegung der Eins, wenn sie folgende beiden Bedingungen erfüllt:*

(i) Lokale Endlichkeit *Für jedes* $x \in X$ *gibt es eine offene Umgebung* U*, auf der alle bis auf endlich viele Funktionen der Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *verschwinden.*

(ii) *Für alle* $x \in X$ *gilt* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 1$*. Wegen (i) ist diese Summe immer endlich.*

In diesem Abschnitt beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 1.21. *(Existenz einer glatten Zerlegung der Eins) Sei* X *eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und* $\mathcal{U}$ *eine offene Überdeckung von* X*. Dann gibt es eine glatte Zerlegung der Eins* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *auf* X*, so dass alle Funktionen* f_n *außerhalb einer abgeschlossenen Menge in den offenen Menge* $U_n \in \mathcal{U}$ *verschwinden.*

Wenn zu einer offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ eine solche Zerlegung der Eins $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, dann gibt es offenbar eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Mengen in $\mathcal{U}$, so dass jedes f_n außerhalb von U_n verschwindet. Wegen der Bedingung (ii) muss dann die Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare offene Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$ sein. Insbesondere muss also jede offene Überdeckung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit eine abzählbare Teilüberdeckung besitzen. Um das einzusehen betrachten wir zunächst eine allgemeinere Klasse von topologischen Räumen.

Definition 1.22. *Ein topologischer Raum heißt lokal kompakt, wenn jeder Punkt eine relativ kompakte Umgebung besitzt. Dabei heißt eine Menge relativkompakt, wenn ihr Abschluss kompakt ist.*

Wegen Heine-Borel sind alle endlichdimensionalen euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ lokal kompakt. Deshalb ist auch jede differenzierbare Mannigfaltigkeit lokal kompakt. Also sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten auch lokal kompakte metrisierbare Räume.

Satz 1.23. *Für einen lokalkompakten metrischen Raum* X *ist folgendes äquivalent:*

(i) *Es gibt eine wachsende Folge* $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *offener relativ kompakter Teilmengen von* X*, so dass für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\bar{O}_n \subset O_{n+1}$ *und* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n = X$*.*

(ii) *X ist eine abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen.*

(iii) *X ist separabel.*

Beweis: Die abzählbare Vereinigung $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \bar{O}_n$ der kompakten Mengen $(\bar{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (i) überdeckt X, deshalb folgt (ii) aus (i).

Jeder kompakte metrische Raum besitzt für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Überdeckung von Kugeln mit Radius $1/n$. Die Menge aller Zentren dieser abzählbaren Menge von Kugeln, liegt offenbar dicht in dem metrischen Raum. Deshalb ist jeder kompakte metrische Raum separabel. Die abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen, die jeweils in den Mitgliedern einer abzählbaren Überdeckung von X dicht liegen, liegt dicht in ganz X. Deshalb ist eine abzählbare Vereinigung von separablen Räumen separabel und (iii) folgt aus (i).

Sei X jetzt separabel. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, die in X dicht liegt. Weil X lokalkompakt ist, besitzt jedes $x \in X$ eine relativ-kompakte offene Umgebung W_x. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $B(x, \frac{1}{N}) \subset W_x$. Weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X dicht liegt, gibt es ein $M \in \mathbb{N}$ mit $x_M \in B(x, \frac{1}{2N})$. Wegen der Dreiecksungleichung liegt dann $B(x_M, \frac{1}{2N})$ in W_x und enthält x. Weil W_x relativ-kompakt ist, ist auch $B(x_M, \frac{1}{2N})$ relativ-kompakt. Also gibt es eine abzählbare Familie $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen relativ-kompakten Teilmengen von X, so dass jede offene Menge eine Vereinigung von Mengen aus der Familie $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.(Eine solche Familie wird Basis der Topologie genannt).

Weil X lokalkompakt ist, gibt es für jedes $x \in X$ ein $r(x) > 0$, so dass $B(x, 2r(x))$ relativkompakt ist. Dann besitzt für jede kompakte Teilmenge $A \subset X$ die offene Überdeckung $A \subset \bigcup\limits_{X\in A} B(x, r(x))$ eine endliche Teilüberdeckung. Die entsprechende endliche Vereinigung $B(x_1, 2r(x_1)) \cup \ldots \cup B(x_N, 2r(x_N))$ ist dann relativkompakt und enthält alle Kugeln $B(x, r)$ mit $x \in A$ und $r \leq \min\{r(x_1), \ldots, r(x_N)\}$. Also gibt es für jede kompakte Teilmenge A von X ein $r > 0$, so dass $\bigcup\limits_{x\in A} B(x, r)$ relativ kompakt ist.

Jetzt definieren wir induktiv eine Folge $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Teilmengen von X, die die Bedingung (i) erfüllt. O_1 sei gleich V_1 und für jedes $n > 1$ sei $O_{n+1} = V_{n+1} \cup \bigcup\limits_{x\in\bar{O}_n} B(x, r)$, wobei r so gewählt ist, dass $\bigcup\limits_{x\in\bar{O}_n} B(x, r)$ relativkompakt ist. Weil $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n = X$ gilt auch $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n = X$ und nach Konstruktion sind alle $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relativkompakt. Also folgt (i) aus (iii). **q.e.d.**

Lemma 1.24. *Zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X gibt es eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Karten mit Definitionsbereichen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass*

(i) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist ϕ_n ein Diffeomorphismus von U_n auf eine Kugel $B(0, r_n) \subset \mathbb{R}^m$ mit Radius $r_n > 0$.*

(ii) $(\phi_n^{-1}[B(0,\frac{r_n}{2})])_{n\in\mathbb{N}}$ *ist eine offene Überdeckung von* X.

(iii) *Für jedes* $n\in\mathbb{N}$ *ist* U_n *in einer offenen Menge von* $\mathcal{U}$ *enthalten.*

(iv) *Für jedes* $n\in\mathbb{N}$ *sind alle Elemente von* $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *bis auf endlich viele schnittfremd mit* U_n.

Beweis: Für jeden Punkt $x\in X$ der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X gibt es offenbar eine Karte ϕ_x, deren Definitionsbereich x enthält und ein Mitglied der offenen Überdeckung, das auch x enthält. Indem wir die Karten $(\phi_x)_{x\in X}$ auf kleine offene Teilmengen einschränken, erhalten wir Karten $(\phi_x)_{x\in X}$, die sowohl (i) als auch (iii) erfüllen. Also gibt es für jede Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine Überdeckung $(U_x)_{x\in X}$ von X und Karten $(\phi_x)_{x\in X}$, die (i) und (iii) erfüllen.

Jede differenzierbare Mannigfaltigkeit ist ein separabler metrisierbarer Raum. Deshalb gibt es eine Folge $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Mengen, die (i) aus dem vorangehenden Satz erfüllt. Wir definieren jetzt eine Folge von Überdeckungen $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten $X_n=O_{n+1}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ indem wir die Mitglieder von $\mathcal{U}$ mit der Menge $O_{n+1}\setminus\bar{O}_{n-2}$ schneiden und zu diesen Mengen noch O_{n-1} hinzufügen. Hierbei setzen wir $O_0=O_{-1}=\emptyset$. Also besitzen für alle $n\in\mathbb{N}$ die kompakten Teilmengen $\bar{O}_n\setminus O_{n-1}\subset X_n$ von X_n Überdeckungen durch die Urbilder der offenen Bälle mit den halben Radien von den Karten. Diese Karten erfüllen dann bezüglich der Überdeckungen $\mathcal{U}_n$ die Bedingungen (i) und (iii). In $X_1=O_2$ besitzt dann $\bar{O}_1$ eine endliche Teilüberdeckung durch Urbilder solcher offenen Bälle mit den halben Radien von den entsprechenden Karten. In $X_2=O_3$ besitzt dann $\bar{O}_2\setminus O_1$ eine endliche Teilüberdeckung durch Urbilder solcher offenen Bälle mit den halben Radien der entsprechenden Karten. Und für alle $n>2$ ist $\bar{O}_n\setminus O_{n-1}$ eine kompakte Teilmenge von X_n und besitzt eine solche endliche Teilüberdeckung durch Urbilder von offenen Bällen mit den halben Radien der entsprechenden Karten. Alle diese abzählbar vielen endlichen Teilüberdeckungen zusammen erfüllen offenbar (i)-(iii). Aufgrund der Konstruktion sind die Definitionsbereiche der Karten der Teilüberdeckungen von $\bar{O}_n\setminus O_{n-1}$ und $\bar{O}_m\setminus O_{m-1}$ schnittfremd, wenn $|n-m|>1$. Deshalb erfüllen alle diese Karten zusammen auch die Bedingung (iv). **q.e.d.**

Beweis der Existenz der Zerlegung der Eins: Seien $a<b$ zwei reelle Zahlen. Dann ist die reelle Funktion $f_{a,b}:\quad\mathbb{R}\to[0,1],\quad x\mapsto f_{a,b}(x)$ mit

$$f_{a,b}(x)=\begin{cases}1 & \text{für } x\le a\\ \exp(\frac{1}{x-b}\exp(\frac{1}{a-x})) & \text{für } a<x<b\\ 0 & \text{für } b\le x\end{cases}$$

eine glatte Funktion. Für alle $r>0$ ist dann die Funktion $g_r(x)=f_{r/2,2r/3}(\|x\|)$ eine glatte Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$, die außerhalb von $B(0,2r/3)$ verschwindet und auf

$B(0, r/2)$ gleich 1 ist. Sei für alle $n \in \mathbb{N}$ $\phi_n : U_n \to B(0, r_n)$ die Folge von Karten, die (i) aus dem vorangehenden Lemma erfüllt. Dann setzen wir die Funktion $h_n = g_{r_n} \circ \phi_n$ zu einer glatten Funktion auf X fort, indem wir sie außerhalb des Definitionsbereichs U_n der Karte ϕ_n gleich Null setzen. Dann sind für alle $n \in \mathbb{N}$ die beiden Funktionen h_n und $1 - h_n$ eine Zerlegung der Eins auf X. Jetzt können wir eine Zerlegung der Eins $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den gewünschten Eigenschaften definieren:

$$f_n = h_n \prod_{l=1}^{n-1} (1 - h_l) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann folgt induktiv für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$f_1 + \ldots + f_n + \prod_{l=1}^{n} (1 - h_l) = 1.$$

Wegen der Bedingung (iv) sind auf einer Umgebung von jedem Punkt $x \in X$ nur endlich viele Funktionen h_n ungleich Null. Deshalb erfüllt diese Folge die Bedingung der lokalen Endlichkeit. Umgekehrt ist wegen (ii) in der Umgebung jedes Punktes mindestens eine Funktion $(1 - h_n)$ gleich Null. Deshalb ist die Summe $\sum f_n$ aller f_n überall gleich Eins. Wegen der Bedingung (iii) verschwindet jedes Element der Zerlegung der Eins außerhalb einer offenen Menge von $\mathcal{U}$. **q.e.d.**

Zum Abschluss können wir noch alle Elemente einer solchen Zerlegung der Eins, die außerhalb derselben offenen Menge in $\mathcal{U}$ verschwinden, zu einer Funktion aufsummieren. Das ist wegen der lokalen Endlichkeit offenbar möglich. Dadurch können wir erreichen, dass die abzählbare Familie der Funktionen der Zerlegung der Eins durch eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$ durchnummeriert wird.

Korollar 1.25. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge und g eine Abbildung von A nach $\mathbb{R}$. Gibt es für jedes $x \in A$ eine Umgebung V_x von x in X und eine glatte Funktion f_x auf V_x, die auf $V_x \cap A$ mit g übereinstimmt, dann gibt es für jede offene Menge U, die A enthält eine glatte Funktion f auf X, die auf A mit g übereinstimmt, und außerhalb von U verschwindet.*

Beweis: Wir schränken für alle $x \in A$ die Menge V_x und die Funktion f_x auf $V_x \cap U$ ein. Für alle $x \in X \setminus A$ sei V_x eine offene Umgebung von x in $X \setminus A$ und $f_x = 0$ auf dieser Menge. Die offene Überdeckung $(V_x)_{x\in X}$ von X besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Zerlegung der Eins $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Funktion $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} h_n f_n$ leistet das Gewünschte. **q.e.d.**

Der Kürze halber wollen wir Funktionen g, die die Bedingungen des Korollars erfüllen unendlich oft differenzierbar nennen. Analog werden r mal stetig differenzierbare Funktionen auf abgeschlossenen Teilmengen von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten definiert.

1.5 Tangentialraum

In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff der Tangentialvektoren auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. In jedem Punkt des $\mathbb{R}^n$ können wir den Raum aller infinitesimalen Richtungen von differenzierbaren Funktionen von reellen Intervallen in den $\mathbb{R}^n$ mit dem $\mathbb{R}^n$ identifizieren. Durch die Karten des Atlases können wir das auch für differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Um diese Tangentialvektoren, die die infinitesimalen Richtungen auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit beschreiben, aber so einzuführen, dass ihre Definition nicht von der Wahl der Karte abhängen, definieren wir zunächst eine Äquivalenzrelation auf dem Raum der Abbildungen zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.

Definition 1.26. *Es seien X und Y zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $x \in X$ ein Punkt. Außerdem seien f_1 und f_2 zwei auf einer offenen Umgebung von x definierte stetig differenzierbare Abbildungen nach Y. Wir sagen, dass sich die beiden Abbildungen f_1 und f_2 in dem Punkt x berühren, wenn $f_1(x) = f_2(x) = y$ und bezüglich einer Karte ϕ von X im Punkt x und einer Karte ψ von Y im Punkt y die Ableitung von $\psi \circ f_1 \circ \phi^{-1}$ und $\psi \circ f_2 \circ \phi^{-1}$ im Punkt $\phi(x)$ als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$ übereinstimmen.*

Wegen der Kettenregel ist diese Aussage unabhängig von den Karten ϕ und ψ von X bzw. Y in den Punkten x bzw. y. Aus der Definition folgt auch sofort, dass diese Relation eine Äquivalenzration zwischen solchen Abbildungen ist.

Definition 1.27. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $x \in X$. Dann heißt der Raum aller Äquivalenzklassen von sich im Punkt 0 berührenden Abbildungen von $(-\epsilon, \epsilon)$ nach X, die 0 auf x abbilden, Tangentialraum von X im Punkt x und wird mit T_xX bezeichnet. Die Äquivalenzklassen werden Tangentialvektoren im Punkt x genannt.*

Für alle $w, v \in \mathbb{R}^m$ ist die Abbildung $t \mapsto w + vt$ unendlich oft differenzierbar und hat an der Stelle Null die Ableitung $t \mapsto tv$. Außerdem gibt es für jede einmal stetig differenzierbare Abbildung von $(-\epsilon, \epsilon)$ nach $\mathbb{R}^m$, die im Punkt 0 auf w abgebildet wird, genau ein $v \in \mathbb{R}^m$, so dass die Abbildung die dem (w, v) entsprechende obige Abbildung im Punkt 0 berührt. Dadurch können wir den Tangentialraum von $\mathbb{R}^m$ im Punkt $w \in \mathbb{R}^m$ mit dem Vektorraum $\mathbb{R}^m$ identifizieren. Jede differenzierbare Abbildung $f : W \to \mathbb{R}^n$ von einer offenen Teilmenge W des $\mathbb{R}^m$ in den $\mathbb{R}^n$ bildet die infinitesimalen Richtungen von $\mathbb{R}^m$ im Punkt $w \in W$ durch die Ableitung $f'(w)$ auf die infinitesimalen Richtungen von $\mathbb{R}^n$ im Punkt $f(w)$ ab. Dadurch induziert f die Abbildung

$$f'(w) : \quad T_x\mathbb{R}^m \to T_{f(w)}\mathbb{R}^n.$$

Weil die Ableitung eine lineare Abbildung ist, ist diese Abbildung also eine lineare Abbildung von dem Vektorraum $\mathbb{R}^m$ in den Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Diese Struktur wollen wir jetzt auf differenzierbare Abbildungen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten übertragen.

Beispiel 1.28. *Wir hatten schon gesehen, dass sich für alle $x \in \mathbb{R}^m$ der Tangentialraum $T_x\mathbb{R}^m$ auf natürliche Weise mit $\mathbb{R}^m$ identifizieren lässt. Wenn allgemeiner V ein endlichdimensionaler normierter Vektorraum ist, dann ist für alle $w, v \in V$ die Abbildung $t \mapsto w + tv$ unendlich oft differenzierbar, und die Ableitung ist gegeben durch $t \mapsto tv$. Jede differenzierbare Abbildung $(-\epsilon, \epsilon) \to V, t \mapsto v(t)$, die 0 auf w abbildet, berührt offenbar genau die den Vektoren w und $v = \frac{dv(t)}{dt}|_{t=0}$ entsprechende obige Abbildung. Dadurch wird der Tangentialraum T_wV auf natürliche Weise mit V identifiziert.*

Definition 1.29. *Sei $f : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X auf die differenzierbare Mannigfaltigkeit Y. Dann bildet die Verknüpfung mit f jede differenzierbare Abbildung von $(-\epsilon, \epsilon)$ nach X auf eine differenzierbare Abbildung von $(-\epsilon, \epsilon)$ nach Y ab. Dabei werden sich in $0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ berührende Abbildungen auf sich in $0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ berührende Abbildungen abgebildet. Deshalb induziert die Abbildung f eine Abbildung vom Tangentialraum T_xX von X an der Stelle $x \in X$ in den Tangentialraum $T_{f(x)}Y$ von Y an der Stelle $y = f(x) \in Y$. Diese Abbildung wird mit $T_x(f)$ bezeichnet. Die Vereinigung aller dieser Abbildungen wird mit $T(f)$ bezeichnet:*

$$T(f) : TX = \bigcup_{x \in X} T_xX \to TY = \bigcup_{y \in Y} T_yY.$$

Satz 1.30. **(i)** *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $x \in X$. Dann induziert jede Karte ϕ um $x \in X$ eine bijektive Abbildung $T_x(\phi)$ von T_xX auf den Vektorraum $T_{\phi(x)}\mathbb{R}^m$. Dieser Isomorphismus induziert auf T_xX eine Vektorraumstruktur über $\mathbb{R}$, die nicht von der Karte ϕ abhängt.*

(ii) *Sei $f : X \to Y$ eine im Punkt $x \in X$ differenzierbare Abbildung von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X auf die differenzierbare Mannigfaltigkeit Y. Dann ist für alle $x \in X$ die folgende Abbildung linear:*

$$T_x(f) : \quad T_xX \to T_{f(x)}Y.$$

(iii) *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ (stetig) differenzierbare Abbildungen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Dann ist $g \circ f$ (stetig) differenzierbar und es gilt für alle $x \in X$*

$$T_x(g \circ f) = T_{f(x)}(g) \circ T_x(f).$$

(iv) *Eine differenzierbare Abbildung $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist genau dann lokal konstant, wenn $T_x(f) = 0$ für alle $x \in X$.*

(v) *Zwei differenzierbare Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten berühren sich genau dann, im Punkt $x \in X$, wenn gilt $f(x) = g(x)$ und $T_x(f) = T_x(g)$.*

Beweis: Weil die Ableitung einer differenzierbaren Abbildung von einer offenen Menge des $\mathbb{R}^m$ in eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung ist, folgt

(i) daraus, dass jede Karte ein Diffeomorphismus ist.

(ii) aus der Definition und der Kettenregel.

(iii) folgt aus der Kettenregel für stetig differenzierbare Abbildungen zwischen offenen Mengen von endlichdimensionalen euklidischen Räumen.

(iv) folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

(v) folgt daraus, dass wir im $\mathbb{R}^n$ die Tangentialvektoren mit den Elementen des $\mathbb{R}^n$ identifizieren können, der Definition von sich berührenden Abbildungen und (ii). Denn durch diese Identifikation wird für differenzierbare Abbildungen f von einer offenen Menge des $\mathbb{R}^m$ in eine offenen Menge des $\mathbb{R}^m$ die Tangentialabbildung $T_x(f)$ mit der Ableitung von f im Punkt x identifiziert. Insbesondere wird durch jede Karte um einen Punkt $x \in X$ der Tangentialraum T_xX von X im Punkt x mit dem entsprechenden Vektorraum $\mathbb{R}^n$ identifiziert. **q.e.d.**

Wir können jetzt den Satz der inversen Funktion umformulieren.

Satz 1.31. *Sei $f : X \to Y$ eine r mal ($r \geq 1$ oder gleich undendlich) stetig differenzierbare Abbildung von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X auf die differenzierbare Mannigfaltigkeit Y. Wenn $T_x(f)$ im Punkt $x \in X$ invertierbar ist, dann gibt es offene Umgebungen $U \ni x$ und $V \ni f(x)$, so dass die Einschränkung von f auf U ein Homöomorphismus ist von U auf V. Außerdem ist die Umkehrabbildung dieser Einschränkung r mal stetig (unendlich oft) differenzierbar.* **q.e.d.**

Definition 1.32. *Der Rang einer differenzierbaren Abbildung $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten an der Stelle $x \in X$ ist der Rang der linearen Abbildung $T_x(f)$ von T_xX nach $T_{f(x)}Y$.*

Die Abbildung f heißt Immersion, wenn für alle $x \in X$ gilt Rang $T_x(f) = \dim T_xX$. Die Abbildung f heißt Submersion, wenn für alle $x \in X$ gilt Rang $T_x(f) = \dim T_{f(x)}Y$.

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass für eine lineare Abbildung $A : V \to W$ zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen folgendes gilt:

$$\mathrm{Rang}(A) = \dim V \Leftrightarrow A \text{ ist injektiv }.$$

$$\mathrm{Rang}(A) = \dim W \Leftrightarrow A \text{ ist surjektiv }.$$

Deshalb sind die Immersionen also die Abbildungen, deren Ableitungen $T_x(f)$ für alle $x \in X$ injektiv sind, und die Submersionen die Abbildungen, deren Ableitungen $T_x(f)$ für alle $x \in X$ surjektiv sind. Insbesondere sind alle Diffeomorphismen sowohl Immersionen als auch Submersionen. Aber nicht alle glatten Abbildungen f, die sowohl Immersionen als auch Submersionen sind, sind auch Diffeomorphismen.

Beispiel 1.33. *Sei*

$$f : \mathbb{R} \to S^1, x \mapsto (\cos(x), \sin(x)).$$

Dann ist f offenbar unendlich oft differenzierbar. Für $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ ist $f(x) \neq (1, 0)$. Die Komposition von f mit der stereographischen Projektion ist also gleich

$$x \mapsto y \text{ mit } y = \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)}.$$

Die Ableitung dieser Abbildung ist

$$y' = \frac{\cos(x)(1 - \cos(x)) - \sin^2(x)}{(1 - \cos(x))^2} = \frac{\cos(x) - \cos^2(x) - \sin^2(x)}{(1 - \cos(x))^2} = \frac{\cos(x) - 1}{(1 - \cos(x))^2} =$$
$$= \frac{1}{1 - \cos(x)}.$$

Also ist diese Abbildung für $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ sowohl eine Immersion als auch eine Submersion. Für $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ gilt $f(x) \neq (-1, x)$. Dann ist die Komposition von f mit der gespiegelten stereographischen Projektion gleich

$$x \mapsto y \text{ mit } y = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}.$$

Für die Ableitung gilt

$$y' = \frac{\cos(x)(1 + \cos(x)) + \sin^2(x)}{(1 + \cos(x))^2} = \frac{\cos(x) + 1}{(1 + \cos(x))^2} = \frac{1}{1 + \cos(x)}$$

Also ist f eine Immersion und eine Submersion, aber kein Diffeomorphismus, weil f nicht injektiv ist. f ist zwar lokal ein Diffeomorphismus, aber nicht global.

Wegen dem Satz der inversen Funktion können wir für jede Immersion $f : X \to Y$ und jedes $x \in X$ Umgebungen U von x und V von $f(x)$ finden, so dass V diffeomorph ist zu dem kartesischen Produkt von U mit einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit $n = \dim T_{f(x)}Y - \dim T_xX$. Dadurch wird f mit einer Einbettung von U nach V identifiziert. Lokal ist also jede Immersion injektiv, aber nicht global.

Analog können wir auch wegen dem Satz der impliziten Funktion für jede Submersion $f : X \to Y$ und jedes $x \in X$ Umgebungen U von x und V von $f(x)$ finden, so dass U diffeomorph ist zu dem kartesischen Produkt von V mit einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit $n = \dim T_xX - \dim T_{f(x)}Y$. Dadurch wird f mit der natürlichen Projektion von U nach V identifiziert. Lokal ist also jede Submersion surjektiv, aber nicht global.

Wir nennen die Abbildungen, die glatt sind und sowohl Immersionen als auch Submersionen sind, lokale Diffeomorphismen. Dann sind offenbar alle bijektiven lokalen Diffeomorphismen auch globale Diffeomorphismen. Insbesondere sind verträgliche Karten Diffeomorphismen von offenen Teilmengen der Mannigfaltigkeit auf offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

Wir können jetzt einige Begriffe der Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten übertragen. So heißt ein Punkt $x \in X$ einer differenzierbaren (reellen) Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ kritischer Punkt, wenn $T_x(f) = 0$ gilt. Allgemeiner nennen wir einen Punkt $x \in X$ einer differenzierbaren Abbildung $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten kritischen Punkt, wenn $T_x(f) = 0$. Lokale Extremwerte von reellen Funktionen sind entweder lokale Minima oder lokale Maxima. Alle lokalen Extremwerte von differenzierbaren reellen Funktionen sind auch kritische Punkte.

Wir führen jetzt eine zweite Charakterisierung der Elemente des Tangentialraumes ein. Für eine differenzierbare Abbildung $(-\epsilon, \epsilon) \to X, t \mapsto x(t)$ in die differenzierbare Mannigfaltigkeit X, die 0 auf den Punkt $x \in X$ abbildet definiert die Komposition mit jeder glatten reellen Funktion $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ eine differenzierbare reelle Funktion auf $(-\epsilon, \epsilon)$. Offenbar hängt die Ableitung von dieser Komposition an der Stelle $t = 0$ nur von der Äquivalenzklasse der Abbildung $t \mapsto x(t)$ bezüglich der Äquivalenzrelation des sich im Punkt x Berührens und der Funktion f ab. Dadurch definiert jedes $v \in T_xX$ eine Abbildung

$$D_v : \quad C^\infty(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \left. \frac{df(x(t))}{dt} \right|_{t=0}.$$

Sie ist linear über $\mathbb{R}$ und erfüllt die Leibnizregel, d.h. es gilt für alle $f, g \in C^\infty(X, \mathbb{R})$

$$D_v(f \circ g) = f(x) \cdot D_v(g) + D_v(f)g(x).$$

Satz 1.34. *Sei $D : C^\infty(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, f \mapsto D(f)$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung die für alle $f, g \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ die Relation $D(fg) = f(x)D(g) + D(f)g(x)$ erfüllt mit $x \in X$, dann gibt es genau ein $v \in T_xX$ mit $D = D_v$.*

Beweis: Wegen der Leibnizregel definiert jedes $v \in T_x X$ eine solche Derivation D_v. Sei jetzt umgekehrt D eine beliebige Derivation, die obige Eigenschaften hat. Weil $D(1f) = D(f)$ folgt, $D(1) = 0$. Deshalb stimmen für alle $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ die Werte $D(f)$ mit $D(f - f(x)1)$ überein. Die Funktion $f - f(x)1$ ist offenbar eine glatte Funktion in $C^\infty(X, \mathbb{R})$, die bei x verschwindet. Umgekehrt ist $D(fg) = 0$, wenn $f(x) = 0 = g(x)$. Also verschwindet D auf allen Produkten von glatten Funktionen, die bei x verschwinden. Sei $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte, die x auf $0 \in \mathbb{R}^n$ abbildet. Dann sind $\phi_1. \dots, \phi_n$ glatte Funktionen von einer Umgebung von x nach $\mathbb{R}$, die $\phi_1(x) = 0, \dots, \phi_n(x) = 0$ erfüllen. Durch eine geeignete Zerlegung der Eins können wir diese Funktionen zu glatten Funktionen auf ganz X fortsetzen, ohne dass sie ihre Werte auf einer Umgebung von x verändern. Wir nennen diese Fortsetzungen weiterhin $\phi_1, \dots, \phi_n$. Für ein geeignetes $\epsilon > 0$ definiert

$$(-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n, t \to (tD(\phi_1), \dots, tD(\phi_n))$$

eine Abbildung in den Wertebereich der Karte ϕ. Dann ist die Komposition dieser Abbildung mit ϕ^{-1} eine glatte Abbildung $(-\epsilon, \epsilon) \to X, t \mapsto x(t)$ mit $x(0) = x$. Die entsprechende Äquivalenzklasse wollen wir $v \in T_x X$ nennen. Wir zeigen jetzt , dass für alle $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ gilt $D(f) = D_v(f)$.

Sei also $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ und $g = f|_U \circ \phi^{-1}$ die entsprechende Funktion auf dem Wertebereich der Karte ϕ. Dann ist g eine glatte Funktion auf einer offenen Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine Kugel $B(0, r)$, die im Wertebereich der Karte ϕ enthalten ist. Die Funktion $h = g_r \circ \phi$ aus dem letzten Abschnitt lässt sich zu einer glatten Funktion auf X fortsetzen, die außerhalb des Definitionsbereichs der Karte ϕ verschwindet, und in einer Umgebung von x gleich Eins ist. Dann bilden die Funktionen $(1 - h)^2$ und $1 - (1 - h)^2 = h(2 - h)$ eine Zerlegung der Eins. Für jedes $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ ist $f(1 - h)^2 = f(1 - h) \cdot (1 - h)$ das Produkt zweier Funktionen, die bei x verschwinden. Deshalb gilt $D(f(1 - h)^2) = 0$, und damit auch $D(f) = D(fh(2 - h))$. Also stimmt D auf allen solchen Funktionen überein, die auf einer beliebig kleinen Umgebung von x übereinstimmen (man spricht dann auch von dem Funktionskeim in x). Insbesondere hängt $D(f)$ nur von g ab. Für alle y in einer kleinen Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$g(y) - g(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g(ty)dt = \int_0^1 y \cdot \nabla g(ty)dt = y \cdot \int_0^1 \nabla g(ty)dt.$$

Deshalb ist die Funktion $g - g(0)$ eine Summe von Produkten der Komponenten des Koordinatenvektors y mit glatten Funktionen, die bei $y = 0$ mit den entsprechenden partiellen Ableitungen von g an der Stelle 0 übereinstimmen. Dann ist aber $f - f(x)$ eine Summe von Produkten von den Komponenten der Karte ϕ mit glatten Funktionen. Wegen der Derivationseigenschaft ist dann D eindeutig durch die Werte auf den Funktionen $\phi_1, \dots, \phi_n$ festgelegt und stimmt deshalb mit D_v überein. **q.e.d.**

Zum Abschluss wollen wir die Definition des Tangentialraumes nochmal zusammenfassen. Für jeden Vektorraum V ist der Tangentialraum an jedem Punkt $v \in V$ auf natürliche Weise isomorph zu dem Vektorraum V. Insbesondere ist der Tangentialraum von jedem reellen Intervall in jedem Punkt des Intervalls isomorph zu $\mathbb{R}$. Weil differenzierbare Abbildungen sich hochheben lassen zu Abbildungen zwischen den Tangentialräumen, konnten wir den Tangentialraum dadurch unabhängig von den Karten einführen, indem wir die Tangentialvektoren als die Bilder von Tangentialvektoren von offenen Intervallen $(-\epsilon, \epsilon)$ unter differenzierbaren Abbildungen von den offenen Intervallen in die differenzierbare Mannigfaltigkeit definiert haben. Jeder solche Tangentialvektor definiert durch die Richtungsableitung eine Derivation auf den glatten Funktionen. Umgekehrt ist jede Derivation auf den glatten Funktionen von dieser Form, so dass wir die Derivationen mit den Tangentialvektoren identifizieren können.

1.6 Produkte von Mannigfaltigkeiten und Untermannigfaltigkeiten

Nachdem wir die Objekte und die Abbildungen von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten eingeführt haben, werden wir jetzt zwei Möglichkeiten kennenlernen, wie wir aus differenzierbaren Mannigfaltigkeiten neue differenzierbare Mannigfaltigkeiten bilden können; nämlich einerseits das kartesische Produkt von zwei Mannigfaltigkeiten, und andererseits Untermannigfaltigkeiten von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Das kartesische Produkt erhält man ohne weitere Schwierigkeiten, indem wir erst die topologischen Räume, dann die Karten und schließlich die Atlanten des kartesischen Produktes aus den entsprechenden topologischen Räumen, Karten und Atlanten der beiden differenzierbaren Mannigfaltigkeiten bilden. Dagegen ist die Einführung von Untermannigfaltigkeiten relativ kompliziert. Natürlich ist jede offene Teilmenge einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit wieder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Aber Untermannigfaltigkeiten von niederer Dimension sind nicht so einfach zu beschreiben. Hier benutzen wir den Satz der inversen Funktion.

Das kartesische Produkt von zwei separablen metrisierbaren Räumen X und Y ist wieder separabler metrisierbarer Raum $X \times Y$. Wenn ϕ und ψ Karten sind von X bzw. Y mit Definitionsbereichen U und V, dann ist

$$\phi \times \psi : U \times V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, (x, y) \to (\phi(x), \psi(y))$$

eine Karte von $X \times Y$. Wenn diese Karten Atlanten von X bzw. Y durchlaufen, erhalten wir einen Atlas von $X \times Y$.

Definition 1.35. *Das kartesische Produkt von zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten X und Y ist auf natürliche Weise wieder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit*

$X \times Y$, so dass die beiden natürlichen Projektionen

$$p_1 : X \times Y \to X, (x, y) \mapsto x \quad p_2 : X \times Y \to Y, (x, y) \mapsto y$$

glatte Abbildungen sind.

Diese beiden Projektionen sind dann offenbar beide surjektive Submersionen. Umgekehrt ist für jedes $y \in Y$ die Abbildung $X \to X \times Y, \quad x \mapsto (x, y)$ eine injektive Immersion. Analog ist für jedes $x \in X$ die Abbildung $Y \to X \times Y, \quad y \mapsto (x, y)$ eine injektive Immersion. Durch diese beiden Abbildungen können wir sowohl X als auch Y als abgeschlossenen topologischen Unterraum von $X \times Y$ auffassen. Wir wollen jetzt X bzw. Y als differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $X \times Y$ auffassen.

Definition 1.36. *Seien X und Y differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Y$ eine Immersion. Ist f auch ein Homöomorphismus auf $f[X]$ als topologischen (metrischen) Unterraum von Y, dann heißt f eine Einbettung und $f[X]$ Untermannigfaltigkeit von Y.*

Wenn $f : X \to Y$ eine injektive Immersion ist, reicht es nicht noch zusätzlich zu fordern, dass das Bild $f[X]$ abgeschlossen ist in Y, damit f eine Einbettung ist.

Beispiel 1.37. *Sei*

$$f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}^2, t \to \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \frac{t(t^2 - 1)}{t^2 + 1} \right)$$

Dann ist f offenbar eine injektive Immersion und das Bild ist sogar abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$. Aber wegen $\lim\limits_{t \to 1} f(t) = f(-1)$ ist f kein Homöomorphismus auf das Bild als topologischen Unterraum von $\mathbb{R}^2$.

Wir möchten jetzt solche topologischen Unterräume X einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit Y charakterisieren, die differenzierbare Untermannigfaltigkeiten sind.

Lemma 1.38. *Sei $X \subset Y$ ein topologischer Unterraum einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit Y. Dann besitzt X genau dann die Struktur einer differenzierbaren Untermannigfaltigkeit von Y, wenn es für jedes $x \in X$ eine Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Umgebung von x in Y gibt, die x auf $0 \in \mathbb{R}^n$ abbildet, und die Einschränkung $\phi|_{U \cap X}$ von ϕ auf die offene Umgebung $U \cap X$ von x in X ein Homöomorphismus ist auf die Schnittmenge von dem Bild $\phi[U]$ von ϕ mit einem linearen Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Hierbei ist n die Dimension der Karte.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die angegebene Bedingung hinreichend dafür ist, dass X eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit ist. Die Einschränkung einer solchen Karte ϕ um $x \in X$ auf $U \cap X$ ist offenbar eine Karte von X um den Punkt x, weil die Schnittmenge einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit einem Unterraum von $\mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge des linearen Unterraumes ist. Zwei solche Karten, deren Definitionsbereiche beide den Punkt x enthalten, bilden beide eine offene Umgebung von x in X jeweils auf eine offene Teilmenge eines linearen Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ab. Die entsprechenden Übergangsfunktionen sind dann Homöomorphismen von einer offenen Teilmenge des einen Unterraumes auf eine offene Teilmenge des anderen Unterraumes. Weil die Karten von Y miteinander verträglich sind, sind dann auch diese Karten von X miteinander verträglich. Hier benutzen wir, dass jede differenzierbare Abbildung auch partiell differenzierbar ist. Deshalb ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und die Inklusion $X \hookrightarrow Y$ ist eine glatte Abbildung, deren Rang für alle $x \in X$ mit der Dimension von T_xX übereinstimmt. Also ist X eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit.

Wenn umgekehrt $f : Z \to Y$ eine Immersion und ein Homöomorphismus auf einem topologischen Unterraum $X = f[Z] \subset Y$ ist, dann gibt es für jede Karte ϕ von Y um x, die x auf Null abbildet, einen Unterraum $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$, so dass die Komposition der Einschränkung von $\phi \circ f$ auf eine offene Umgebung von $z = f^{-1}(x)$ zusammen mit der orthogonalen Projektion p_1 von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ im Punkt $z = f^{-1}(x)$ eine invertierbare Ableitung besitzt. Wegen Satz 1.31 (Satz der inversen Funktion) ist die Einschränkung von der Komposition $p_1 \circ \phi \circ f$ auf eine offene Umgebung von $z = f^{-1}(x)$ eine Karte von Z um $z \in Z$, die mit dem Atlas von Z verträglich ist.

Um den Beweis abzuschließen, müssen wir noch die Karte ϕ in einer offenen Umgebung von $x \in X$ so abändern, das sie die Bedingung im Lemma erfüllt. Sei jetzt $\mathbb{R}^{n-m}$ ein zweiter Unterraum von $\mathbb{R}^n$, so dass $\mathbb{R}^n$ als topologischer Vektorraum isomorph ist zu $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ mit den beiden Projektionen $p_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $p_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$. Wir definieren jetzt eine Abbildung ψ von einer offenen Umgebung der $0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-m}$ in eine offene Umgebung der $0 \in \mathbb{R}^n$, indem wir die Summe bilden von den Abbildungen:

$$\begin{aligned} \phi \circ f \circ (p_1 \circ \phi \circ f)^{-1} : &\qquad \text{von einer offenen Umgebung der } 0 \in \mathbb{R}^m \text{ nach } \mathbb{R}^n \\ i_2 : &\qquad \mathbb{R}^{n-m} \hookrightarrow \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Der erste Summand ist eine glatte Abbildung von einer offenen Umgebung der $0 \in \mathbb{R}^m$ auf das Bild einer offenen Umgebung von $x \in X$ unter der Karte ϕ. Weil f eine Immersion ist und aufgrund der Wahl des Unterraumes $\mathbb{R}^m$ ist die Verknüpfung der Ableitung dieser Abbildung an der Stelle $0 \in \mathbb{R}^m$ mit p_1 invertierbar. Offenbar ist die Verknüpfung $p_2 \circ i_2$ des zweiten Summanden I_2 mit p_2 die identische Abbildung von $\mathbb{R}^{n-m}$. Die Ableitung $\psi'(0)$ von ψ an der Stelle $0 \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ ist eine lineare Abbildung in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}, \mathbb{R}^n)$. Indem wir $\psi'(0)$ mit dem natürlichen Isomorphismus $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ verknüpfen, können wir $\psi'(0)$ als eine lineare Abbildung in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \times$

$\mathbb{R}^{n-m}, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m})$ auffassen. Dieser Raum ist als topologischer Vektorraum isomorph zu dem kartesischen Produkt $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}) \simeq$

$$\simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{n-m}) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-m}, \mathbb{R}^m) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-m}, \mathbb{R}^{n-m}).$$

Weil der zweite Summand i_2 von ψ in den zweiten Unterraum $\mathbb{R}^{n-m}$ abbildet, verschwindet die Komponente von $\psi'(0)$ in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-m}, \mathbb{R}^m)$. Dann ist $\psi'(0)$ offenbar genau dann invertierbar, wenn die beiden diagonalen Komponenten in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ und $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-m}, \mathbb{R}^{n-m})$ invertierbar sind. Die erste Komponente ist die Verknüpfung der Ableitung des ersten Summanden von ψ an der Stelle $0 \in \mathbb{R}^m$ mit p_1 und damit invertierbar. Die zweite Komponente ist die Ableitung von $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^{n-m}}$ und damit selber gleich $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^{n-m}}$. Also ist $\psi'(0)$ invertierbar. Wegen dem Satz der inversen Funktion ist die Einschränkung von ψ auf eine offene Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die entsprechende Einschränkung von $\psi^{-1} \circ \phi$ eine Karte mit den gewünschten Eigenschaften aus dem Lemma, weil eine offene Umgebung von $x \in X$ homöomorph auf eine offene Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ eingebettet wird. Weil ψ ein lokaler Diffeomorphismus ist, ist die Karte $\psi^{-1} \circ \phi$ mit der Karte ϕ verträglich. Damit haben wir gezeigt, dass es für jede Untermannigfaltigkeit X von Y einen Atlas gibt, der die Bedingungen des Lemmas erfüllt. **q.e.d.**

Zum Abschluss wollen wir noch den Satz der impliziten Funktion umformulieren.

Satz 1.39. *Sei $f : X \to Y$ eine glatte Submersion zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Dann ist für jedes $y \in f[X]$ das Urbild $f^{-1}[\{y\}]$ eine Untermannigfaltigkeit von X. Diese Untermannigfaltigkeit hat für alle $x \in f^{-1}[\{y\}]$ die Dimension*

$$\dim T_x X - \dim T_{f(x)} Y.$$

Beweis: Sei $y \in Y$ und $x \in f^{-1}[\{y\}]$. Außerdem seien ϕ eine Karte von X auf einer Umgebung von x und ψ eine Karte von Y auf einer Umgebung von $f(x)$. Dann erfüllt die Einschränkung der Abbildung $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ auf eine geeignete offene Umgebung von $\phi(x)$ die Voraussetzungen des Satzes der impliziten Funktion. Deshalb besitzt eine kleine offene Umgebung von $\phi(x)$ eine Karte, die die Schnittmenge des Urbildes $(\psi \circ f \circ \phi^{-1})^{-1}[\{\psi(f(x)\}]$ von $\psi(f(x))$ unter der Abbildung $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ mit der offene Umgebung von $\phi(x)$ auf einen Unterraum der Dimension $\dim T_x Y - \dim T_{f(x)} Y$ abbildet. Die Komposition von ϕ mit dieser Karte ergibt eine Karte, die die Voraussetzungen im Lemma 1.38 im Punkt $x \in X$ erfüllt. Also ist das Urbild $f^{-1}[\{y\}]$ für alle $y \in f[X]$ eine Untermannigfaltigkeit von X. Die Dimensionsformel folgt auch aus dem Satz der impliziten Funktion. **q.e.d.**

Korollar 1.40. *Seien X, Y und Z differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Z$ und $g : Y \to Z$ zwei glatte Abbildungen, von denen mindestens eine eine Submersion* *ist. Dann ist das Faserprodukt*

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$$

eine Untermannigfaltigkeiten von $X \times Y$ der Dimension

$$\dim T_{(x,y)} X \times_Z Y = \dim T_x X + \dim T_y Y - \dim T_{f(x)} Z = \dim T_x X + \dim T_y Y - \dim T_{g(y)} Z.$$

Beweis: Seien $(x, y) \in X \times_Z Y$ und $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von Z auf einer offenen Umgebung U von $z = f(x) = g(y)$. Dann ist die Abbildung

$$\phi \circ f \circ p_1 - \phi \circ g \circ p_2 : f^{-1}[U] \times g^{-1}[U] \to \mathbb{R}^n, (u, v) \mapsto \phi(f(u)) - \phi(g(v))$$

eine Submersion, weil entweder $\phi \circ f$ oder $\phi \circ g$ eine Submersion ist. Das Urbild der $0 \in \mathbb{R}^n$ dieser Abbildung ist wegen Satz 1.39 eine Untermannigfaltigkeit von $f^{-1}[U] \times g^{-1}[U]$. Weil ϕ injektiv ist, ist $\phi(f(u)) = \phi(g(v))$ äquivalent zu $f(u) = g(v)$. Also ist diese Untermannigfaltigkeit gleich $f^{-1}[U] \times_U g^{-1}[U]$. Damit sind auf diesem Teilraum $f^{-1}[U] \times_U g^{-1}[U] \subset f^{-1}[U] \times g^{-1}[U] \subset X \times Y$ die Bedingungen im Lemma 1.38 erfüllt. Weil dies für alle $(x, y) \in X \times_Z Y$ gilt, sind diese Bedingungen auf ganz $X \times_Z Y$ erfüllt. Daraus folgt die Behauptung. **q.e.d.**

Beispiel 1.41. (i) *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann ist die Diagonale von $X \times X$ das Faserprodukt $X \times_X X$ bezüglich zwei Kopien der Abbildungen $\mathbb{1}_X : X \to X$. Diese Abbildungen sind Diffeomorphismen, so dass die Diagonale $X \times_X X$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von X ist. Die Abbildung $X \to X \times X, x \mapsto (x, x)$ ist offenbar einen Diffeomorphismus von X auf $X \times_X X$.*

(ii) *Seien X und Y zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung. Dann ist der Graph von f das Faserprodukt $X \times_Y Y$ der beiden Abbildungen $f : X \to Y$ und $\mathbb{1}_Y : Y \to Y$. Weil die zweite ein Diffeomorphismus ist, ist $X \times_Y Y$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $X \times Y$. Die Abbildung $\mathbb{1}_X \times f$ induziert offenbar einen Diffeomorphismus von $X \times_X X$ auf $X \times_Y Y$.*

1.7 Tangentialbündel

Ziel dieses Abschnittes ist es, die Vereinigung aller Tangentialräume $TX = \bigcup_{x \in X} T_x X$ wieder zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit der Vektorraumstruktur zu machen. Dazu führen wir zunächst den Begriff des Faserbündels ein.

Definition 1.42. *Ein differenzierbares Faserbündel ist ein Tripel (X, B, π), wobei X und B differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind und π eine surjektive glatte Abbildung von X nach B ist, die die folgende Bedingung (der sogenannten lokalen Trivialität) erfüllt.*

Lokale Trivialität: *Zu jedem $b \in B$ gibt es eine offene Umgebung U von b in B und eine differenzierbare Mannigfaltigkeit F mit einem Diffeomorphismus $\phi : F \times U \to \pi^{-1}[U]$, so dass die Abbildung $\pi \circ \phi$ mit der natürlichen Projektion $p_2 : F \times U \to U$ übereinstimmt.*

Weil die natürliche Projektion p_2 von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit $F \times U$ nach U immer eine Submersion ist, ist dann auch π eine Submersion. Man nennt X den Faserraum, B seine Basis und π die Projektion des Faserbündels. Wegen der lokalen Trivialität sind alle Urbilder $\pi^{-1}[\{b\}]$ für alle b in einer Umgebung eines $b_0 \in B$ zueinander diffeomorph. Diese Urbilder werden Fasern genannt. Sind alle Fasern zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit F diffeomorph, so wird das Faserbündel auch Faserraum vom Fasertyp F genannt. Aus der lokalen Trivialität folgt, dass die Menge aller $b \in B$ mit Fasern $\pi^{-1}[\{b\}]$, die zu einer Faser $\pi^{-1}[\{b_0\}]$ diffeomorph sind, offen sind. Aus der lokalen Trivialität folgt auch, dass sie auch den Grenzwert von konvergenten Folgen in ihnen enthalten. Deshalb sind diese Mengen sowohl offen als auch abgeschlossen. Also sind die Einschränkungen eines Faserbündels auf das entsprechende Faserbündel $(\pi^{-1}[C], C, \pi|_{\pi^{-1}[C]})$ über einer zusammenhängenden Komponente C von B Faserbündel von einem bestimmten Fasertyp.

Definition 1.43. *Sei $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder komplexen Zahlen. Ein $\mathbb{K}$–Vektorraumbündel ist ein Faserbündel (E, B, π), so dass jede Faser $\pi^{-1}[\{b\}]$ ein $\mathbb{K}$–Vektorraum ist, und die lokale Trivialisierungen ϕ für jedes $b \in B$ Vektorraumisomorphismen von $\{b\} \times F$ nach $\pi^{-1}[\{b\}]$ sind.*

Beispiel 1.44. *Sei V ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum und X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Schließlich sei π die natürliche Projektion von $V \times X$ auf X. Dann ist $(V \times X, X, \pi)$ ein Vektorraumbündel über X. Dieses Vektorraumbündel wird trivial genannt.*

Die lokale Trivialität besagt genau, dass jedes Vektorraumbündel lokal ein triviales Vektorraumbündel ist. Deshalb können wir jedes Vektorraumbündel aus solchen trivialen Vektorraumbündeln zusammenkleben.

Beispiel 1.45. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und F ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum. Sei $\mathcal{L}(F)$ der normierte Vektorraum aller stetigen linearen Abbildungen von F nach F. Er enthält als offene Teilmenge die Gruppe $GL(F)$ aller stetigen und stetig invertierbaren linearen Abbildungen von F nach F. Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Dann wollen wir alle trivialen Vektorraumbündel $(F \times U)_{U \in \mathcal{U}}$ zu einem Vektorraumbündel über X verkleben. Für alle nicht schnittfremden Paare $(U, V) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ sei dazu $\phi_{V,U}$ eine glatte Funktion von $U \cap V$ nach $GL(F)$. Dann definiert $\phi_{U,V}$ folgende glatte Abbildung*

$$F \times (U \cap V) \to F \times (U \cap V), (f, x) \mapsto (\phi_{V,U}(x)f, x).$$

Weil $\phi_{V,U}(x)$ für jedes $x \in U \cap V$ invertierbar ist, ist die Umkehrabbildung gegeben durch

$$F \times (U \cap V) \to F \times (U \cap V), (f, x) \mapsto (\phi^{-1}_{V,U}(x)f, x).$$

Also sind diese Abbildungen Diffeomorphismen. Weil $\phi_{V,U}(x)$ und $\phi^{-1}_{V,U}(x)$ für alle $x \in U \cap V$ linear sind, sind diese Diffeomorphismen sogar Isomorphismen von Vektorraumbündeln. Wir wollen diese Isomorphismen der Vektorraumbündel dazu benutzen, um alle die trivialen Vektorraumbündel $(F \times U)_{U \in \mathcal{U}}$ zu einem Vektorraumbündel über X zu verkleben. Dafür muss gewährleistet sein, dass wir für alle $(U, V, W) \in \mathcal{U}^3$ die drei trivialen Vektorraumbündel $F \times U, F \times V$ und $F \times W$ auf $U \cap V \cap W$ eindeutig miteinander identifizieren können. Deshalb fordern wir:

Kozykelbedingung: *Für alle nicht schnittfremden Tripel $(U, V, W) \in \mathcal{U}^3$ für alle $x \in U \cap V \cap W$ gilt*

$$\phi_{W,V}(x)\phi_{V,U}(x) = \phi_{W,U}(x).$$

Wenn wir $U = V = W$ setzen erhalten wir

$$\phi_{U,U}(x) = \mathbb{1}_F \text{ für alle } x \in U.$$

Wenn wir $U = W$ setzen erhalten wir

$$\phi_{U,V}(x)\phi_{V,U}(x) = \mathbb{1}_F \text{ für alle } x \in U \cap V.$$

$$\Leftrightarrow \phi_{U,V}(x) = \phi^{-1}_{V,U}(x) \text{ für alle } x \in U \cap V.$$

Auf dem Raum $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} (F \times U)$ führen wir folgende Relation ein:

$$(e, x) \in F \times U \sim (f, y) \in F \times V \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = x \text{ und } \phi_{V,U}(x)e = f.$$

Wir zeigen jetzt, dass wegen der Kozykelbedingung diese Relation eine Äquivalenzrelation ist. Wegen $\phi_{U,U}(x) = \mathbb{1}_U$ ist die Relation reflexiv. Wegen $\phi_{U,V}(x) = \phi^{-1}_{V,U}(x)$ ist $\phi_{V,U}(x)e = f$ äquivalent zu $\phi_{U,V}(x)f = e$. Deshalb ist die Relation $\sim$ symmetrisch. Weil für alle $x \in U \cap V \cap W$ gilt $\phi_{W,U}(x) = \phi_{W,V}(x)\phi_{V,U}(x)$, folgt aus $(e, x) \in F \times U \sim (f, y) \in F \times V$ und $(f, y) \in F \times v \sim (g, z) \in F \times W$ auch $z = y = x \in U \cap V \cap W$ und $\phi_{W,U}(x)e = \phi_{W,V}(x)\phi_{V,U}(x)e = \phi_{W,V}(x)f = g$. Also ist die Relation $\sim$ auch transitiv.

Sei E die Menge aller Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation. Wir versehen jetzt E mit einer Metrik. Wegen Lemma 1.24 besitzt jede offene Überdeckung von X

eine abzählbare Verfeinerung $\mathcal{U}$ *(d.h. eine offene Überdeckung deren offene Mengen jeweils in einer der offenen Mengen der ursprünglichen Überdeckung enthalten sind), von denen jeweils nur endlich viele offene Mengen in* $\mathcal{U}$ *mit einer offenen Menge* $U \in \mathcal{U}$ *nicht schnittfremd sind. Deshalb können wir annehmen, dass* $\mathcal{U}$ *eine solche Überdeckung ist. Wir wählen eine Metrik auf* X*, die die Topologie von* X *induziert. Dann sind für alle* $U \in \mathcal{U}$ *die kartesischen Produkte* $F \times U$ *metrische Räume. Für alle* $U \in \mathcal{U}$ *sei*

$$d_U : \bigcup_{U\in\mathcal{U}} F \times U \times \bigcup_{U\in\mathcal{U}} F \times U \to \mathbb{R}, \quad (u,v) \mapsto d_U(u,v) = \begin{cases} \frac{d(u,v)}{1+d(u,v)} & \textit{falls } u,v \in F \times U \\ 1 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\bigcup\limits_{U\in\mathcal{U}} F \times U$ *mit* $d = \inf\limits_{U\in\mathcal{U}} d_U$ *ein separabler metrischer Raum. Wegen der Eigenschaft von* $\mathcal{U}$*, sind von den Abbildungen* $(d_U)_{U\in\mathcal{U}}$ *auf allen Äquivalenzklassen jeweils nur endlich viele ungleich Eins. Deshalb definiert auf der Menge* E *der Äquivalenzklassen das Infimum der Abstände zwischen den Elementen der Äquivalenzklassen eine Metrik. Die Projektionen* $p_2 : F \times U \to U$ *der trivialen Vektorraumbündel* $F \times U$ *induzieren eine Abbildung* $\pi : E \to X$*. Alle Fasern* $(\pi^{-1}[\{x\}])_{x\in X}$ *dieser Abbildung sind offenbar homöomorph zu* F*. Weil für alle* $x \in U \cap V$ *die Werte* $\phi_{V,U}(x)$ *der Übergangsfunktionen lineare Abbildungen sind, sind diese Fasern sogar als topologische Vektorräume isomorph zu* F*. Der separable metrische Raum* E *besitzt außerdem eine eindeutige differenzierbare Struktur, so dass für alle* $U \in \mathcal{U}$*, die natürliche Abbildung* $F \times U \to \pi^{-1}[U]$ *ein Diffeomorphismus ist. Damit ist* (E, X, π) *ein Vektorraumbündel.*

Satz 1.46. (i) *Sei* X *eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann ist* $TX = \bigcup\limits_{x\in X} T_xX$ *ein reelles Vektorraumbündel über* X*. Es heißt Tangentialbündel von* X*.*

(ii) *Sei* $f : X \to Y$ *eine* r *mal (stetig) differenzierbare Abbildung von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit* X *auf die differenzierbare Mannigfaltigkeit* Y*. Dann definiert* $T(f) : TX \to TY$ *eine* $(r-1)$ *mal (stetig) differenzierbare Abbildung von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit* TX *auf die differenzierbare Mannigfaltigkeit* TY*, so dass das folgende Diagramm kommutiert.*

$$\begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{T(f)} & TY \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

(iii) *Seien* X*,* Y *und* Z *differenzierbare Mannigfaltigkeiten und* $f : X \to Y$ *und* $g : Y \to Z$ *differenzierbare Abbildungen. Dann gilt* $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$*.*

(iv) *Die Tangentiale Abbildung* $T(\mathbb{1}_X)$ *der identischen Abbildung* $\mathbb{1}_X$ *von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit* X *ist die identische Abbildung von* TX*.*

Beweis: Auf allen zusammenhängenden Komponenten sind die Dimensionen der Tangentialräume gleich einer natürlichen Zahl. Wegen Korollar 1.7 ist jede differenzierbare Mannigfaltigkeit eine höchstens abzählbare Vereinigung von offenen zusammenhängenden Komponenten. Deshalb können wir uns im Folgenden auf zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeiten X der Dimension n beschränken.

Die Tangentialräume vom $\mathbb{R}^n$ lassen sich zum trivialen Vektorraumbündel zusammensetzen:

$$T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \text{ mit } \pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (v, w) \mapsto w.$$

Dies folgt aus der Identifikation des Tangentialraumes $T_w\mathbb{R}^n$ von $\mathbb{R}^n$ im Punkt $w \in \mathbb{R}$ mit dem Raum aller infinitesimalen Richtungen $v \in \mathbb{R}^n$, die wir schon zur Einführung der Vektorraumstruktur auf T_xX benutzt haben. Sei jetzt $(\phi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ ein Atlas von X mit den Definitionsbereichen $(U \in \mathcal{U})$. Alle diese Karten $(\phi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ induzieren bijektive Abbildungen

$$T(\phi_U) : TU \to T\phi_U[U] \subset T\mathbb{R}^n,$$

die faserweise, also für alle $x \in U$ Vektorraumisomorphismen

$$T_x(\phi_U) : T_xU \to T_{\phi_U(x)}\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$$

induzieren. Indem wir die Tangentialbündel von $\phi_U[U]$ mit dem trivialen Bündel

$$T\phi_U[U] = \mathbb{R}^n \times \phi_U[U] \subset T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

identifizieren, und dann die Kartenwechsel

$$\phi_V\phi_U^{-1} : \phi_U[U \cap V] \to \phi_V[U \cap V]$$

benutzen, können wir alle diese trivialen Vektorraumbündel zu einem Vektorraumbündel über X verkleben. Die entsprechenden Abbildungen

$$U \cap V \to GL(\mathbb{R}^n)$$

sind dann also gegeben durch die Ableitungen der Übergangsfunktionen

$$(\phi_V \circ \phi_U^{-1})' \circ \phi_U : U \cap V \to GL(\mathbb{R}^n).$$

Wenn die Definitionsbereiche U und V der beiden Karten ϕ_U und ϕ_V nicht schnittfremd sind, müssen die Dimensionen der Karten übereinstimmen, so dass $(\phi_V \circ \phi_U^{-1})'$ tatsächlich Werte in $GL(\mathbb{R}^n)$ annimmt. Für $U, V, W \in \mathcal{U}$ gilt

$$(\phi_W \circ \phi_U^{-1})(y) = (\phi_W \circ \phi_V^{-1}) \circ (\phi_V \circ \phi_U^{-1})(y) \text{ für alle } y \in \phi_U[U \cap V \cap W].$$

Daraus folgt mit der Kettenregel

$$(\phi_W \circ \phi_U^{-1})'(\phi_U(x)) = (\phi_W \circ \phi_V^{-1})'(\phi_V(x)) \cdot (\phi_V \circ \phi_U^{-1})'(\phi_U(x)) \text{ für alle } x \in U \cap V \cap W.$$

Also ist die Kozykelbedingung erfüllt und alle trivialen Vektorraumbündel $(\mathbb{R}^n \times U)_{U \in \mathcal{U}}$ können durch diese Kozykel zu einem Vektorraumbündel über X verklebt werden.

Für jede Karte

$$\phi_U : U \to \phi_U[U] \subset \mathbb{R}^n$$

erhalten wir bijektive Abbildungen

$$(\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} \times \phi_U^{-1}) \circ T(\phi_U) : TU \to T\phi_U[U] \simeq \mathbb{R}^n \times \phi_U[U] \to \mathbb{R}^n \times U.$$

Dadurch erhalten wir eine bijektive Abbildung von TX in das durch die Kozykel definierte Vektorraumbündel über X. Diese Abbildungen sind nämlich gerade so definiert, dass sie mit den Äquivalenzrelation, aus deren Äquivalenzklassen das verklebte Vektorraumbündel besteht, verträglich ist: Auf $T(U \cap V)$ gilt nämlich

$$((\phi_V \circ \phi_U^{-1})' \circ \phi_U \times \mathbb{1}_{U \cap V}) \circ (\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} \times \phi_U^{-1}) \circ T(\phi_U) = (\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} \times \phi_V^{-1}) \circ T(\phi_V)$$

weil für alle $x \in U \cap V$ gilt

$$T_{\phi_U(x)}(\phi_V \circ \phi_U^{-1}) \circ T_x(\phi_U) = T_x(\phi_V)$$

und $T_{\phi_U(x)}(\phi_V \circ \phi_U^{-1})$ durch die Identifikation von

$$T_{\phi_U(x)}\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \text{ und } T_{\phi_V(x)}\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$$

mit der Abbildung $(\phi_V \circ \phi_U^{-1})'(\phi_U(x)) \in GL(\mathbb{R}^n)$ identifiziert wird. Damit ist (i) gezeigt.

Aufgrund der Konstruktion des Tangentialbündels in (i) genügt es (ii) in einer Karte nachzuprüfen. Sei also ϕ eine Karte von X um $x \in X$ und ψ eine Karte von Y in $f(x)$. Dann ist die Tangentialabbildung $T_x(f)$ als Abbildung von

$$T_{\phi(x)}\mathbb{R}^n \text{ nach } T_{\psi(f(x))}\mathbb{R}^n \quad \text{gegeben durch} \quad (\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(x)).$$

Hierbei ist n die Dimension von ϕ und m die Dimension von ψ. Weil also $T(f)$ durch die Ableitung von f bestimmt ist, ist $T(f)$ einmal weniger als f differenzierbar.

(iii) folgt aus Satz 1.30 (iii).

(iv) folgt daraus, dass die Ableitung der identischen Abbildung $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$ des $\mathbb{R}^n$ (oder eines beliebigen normierten Vektorraumes) an jeder Stelle gleich der identischen Abbildung des $\mathbb{R}^n$ (des normierten Vektorraumes) ist. **q.e.d.**

Definition 1.47. *Sei (X, B, π) ein differenzierbares Faserbündel über der differenzierbaren Mannigfaltigkeit B. Sei $U \subset B$ eine offene Teilmenge von B. Dann heißt eine p mal (stetig) differenzierbare Abbildung $f : U \to X$, so dass die Komposition von f mit π gleich der identischen Abbildung von U ist, ein p mal (stetig) differenzierbarer Schnitt von dem Faserbündel (X, B, π) (oder auch nur X) über U. Wenn $U = B$ wird f auch globaler Schnitt genannt.*

Nicht jedes Faserbündel besitzt auch globale Schnitte, aber wegen der lokalen Trivialität besitzt jedes Faserbündel lokale Schnitte. Jedes Vektorraumbündel (E, B, π) besitzt immer den globalen Nullschnitt, der jedem $b \in B$ die eindeutige Null aus der Faser $\pi^{-1}[\{b\}]$ zuordnet. Die Menge aller dieser Nullen bildet wegen der lokalen Trivialität eine Untermannigfaltigkeit von E, die offenbar diffeomorph ist zu B.

Lemma 1.48. *Sei F ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum der Dimension n und (E, B, π) ein Vektorraumbündel vom Fasertyp F. Dann ist E genau dann als Vektorraumbündel isomorph zu dem trivialen Bündel $(F \times B, B, \pi)$, wenn E n globale glatte Schnitte $f_1, \ldots, f_n$ besitzt, deren Werte in allen Fasern $(\pi^{-1}[\{b\}])_{b \in B}$ linear unabhängig sind.*

Beweis: Wenn $\phi : F \times B \to E$ ein Diffeomorphismus ist, so dass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} F \times B & \xrightarrow{\phi} & E \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{\mathbf{1}_B} & B \end{array}$$

und ϕ faserweise ein Vektorraumisomorphismus ist, dann wird jedes Element $e \in F$ durch die Abbildung

$$f : B \to \{e\} \times B \xrightarrow{\phi} E$$

zu einem globalen Schnitt von E. Insbesondere induziert jede Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ von F durch ϕ globale glatte holomorphe Schnitte $f_1, \ldots, f_n$, die faserweise alle linear unabhängig sind.

Jede Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ von F induziert einen Isomorphismus von den topologischen Vektorräumen F und $\mathbb{K}^n$. Deshalb genügt es umgekehrt zu zeigen, dass glatte Schnitte $f_1, \ldots, f_n$ von E, die faserweise linear unabhängig sind, einen Isomorphismus des Vektorraumbündels E mit dem trivialen Vektorraumbündel $\mathbb{K}^n \times B \simeq F \times B$ induzieren. Weil die Werte von den Schnitten $f_1, \ldots, f_n$ in allen Fasern $\pi^{-1}[\{b\}]$ mit $b \in B$ eine Basis der Faser bilden, induzieren sie eine bijektive, faserweise lineare Abbildung f von E nach $\mathbb{K}^n \times B$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & \mathbb{K}^n \times B \\ \pi \downarrow & & p_2 \downarrow \\ B & \xrightarrow{\mathbf{1}_B} & B \end{array}$$

Weil die Schnitte alle glatt sind, ist diese Abbildung f sogar ein Diffeomorphismus und damit auch ein Isomorphismus zwischen dem Vektorraumbündel E und dem trivialen Vektorraumbündel $\mathbb{K}^n \times B$. **q.e.d.**

Satz 1.49. (i) *Sei B eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann sind alle Fasern $(\pi^{-1}[\{b\}])$ eines Vektorraumbündels (E, B, π) über B als topologische Vektorräume isomorph, d.h. (E, B, π) ist von einem bestimmten Fasertyp.*

(ii) *Sei F ein topologischer Vektorraum und (E, B, π) ein Vektorraumbündel vom Fasertyp F. Dann gibt es eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von B und Kozykel ϕ, d.h. für alle $(U, V) \in \mathcal{U}^2$ glatte Abbildungen $\phi_{V.U} : U \cap V \to GL(F)$, die die Kozykelbedingung erfüllen, so dass das entsprechende Vektorraumbündel isomorph ist zu (E, B, π).*

Beweis: (i) Wegen der lokalen Trivialität gibt es für jedes $b \in B$ eine offene Umgebung U von b, auf der alle Fasern $(\pi^{-1}[\{b'\}])_{b' \in U}$ als topologische Vektorräume isomorph sind zu $\pi^{-1}[\{b\}]$. Also sind die Teilmengen von B, auf denen die Fasern als topologische Vektorräume isomorph sind, offen. Wenn $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in einer solchen Teilmenge ist, dann gibt es eine Umgebung von dem Grenzwert, auf der die Fasern als topologische Vektorräume isomorph sind. Deshalb sind diese Teilmengen auch abgeschlossen. Wenn B zusammenhängend ist, dann ist für alle $b \in B$ die Teilmenge, auf denen alle Fasern als topologische Vektorräume isomorph zu $\pi^{-1}[\{b\}]$ sind, gleich B.
(ii) Wegen der lokalen Trivialität gibt es für jedes Vektorraumbündel vom Fasertyp F eine Überdeckung $\mathcal{U}$, und für alle $U \in \mathcal{U}$ Diffeomorphismen $\phi_U : F \times U \to \pi^{-1}[U]$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F \times U & \xrightarrow{\phi_U} & \pi^{-1}[U] \\ p_2 \downarrow & & \pi \downarrow \\ U & \xrightarrow{\mathbb{1}_U} & U \end{array}$$

und ϕ_U faserweise Isomorphismen der topologischen Vektorräume F und $\pi^{-1}[\{b\}]$ sind für alle $b \in U$. Für alle $(U, V) \in \mathcal{U}^2$ definieren die Einschränkungen der Diffeomorphismen ϕ_U und ϕ_V auf $F \times (U \cap V)$ folgenden Diffeomorphismus

$$\phi_V^{-1}\big|_{\pi^{-1}[U \cap V]} \circ \phi_U\big|_{F \times (U \cap V)} : \quad F \times (U \cap V) \to F \times (U \cap V).$$

Weil dieser Diffeomorphismus faserweise ein Element von $GL(F)$ definiert, ist er beschrieben durch eine glatte Abbildung

$$\phi_{V,U} : U \cap V \to GL(V).$$

Weil für alle $U, V, W \in \mathcal{U}$ gilt $\quad \phi_W^{-1}|_{\pi^{-1}[U \cap V \cap W]} \circ \phi_U|_{F \times (U \cap V \cap W)} =$

$$= \phi_W^{-1}|_{\pi^{-1}[U \cap V \cap W]} \circ \phi_V|_{F \times (U \cap V \cap W)} \circ \phi_V^{-1}|_{\pi^{-1}[U \cap V \cap W]} \circ \phi_U|_{F \times (U \cap V \cap W)}$$

erfüllen diese Abbildungen alle zusammen die Kozykelbedingung. Wir haben diese Kozykel $(\phi_{V,U})_{(U.V)\in\mathcal{U}^2}$ gerade so definiert, dass alle Trivialisierungen $(\phi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ zusammen einen Diffeomorphismus induzieren, von dem Vektorraumbündel (E, B, π) auf das durch den Kozykel definierte Vektorraumbündel über B: Es gilt nämlich für alle $(U, V) \in \mathcal{U}^2$ und alle $x \in U \cap V$

$$\phi_V^{-1}|_{\pi^{-1}[\{x\}]} = (\phi_{V,U}(x) \times \mathbb{1}_{\{x\}}) \circ \phi_U^{-1}|_{\pi^{-1}[\{x\}]}$$

Dieser Diffeomorphismus bildet die Fasern $\pi^{-1}[\{b\}]$ von E auf die entsprechende Faser des induzierten Vektorraumbündel über dem gleichen Punkt $b \in U \cap V$ ab und ist faserweise ein Isomorphismus von topologischen Vektorräumen. Deshalb definiert er einen Isomorphismus des Vektorraumbündels (E, B, π) mit dem durch die Kozykel $(\phi_{V,U})_{(V,U)\in\mathcal{U}^2}$ induzierten Vektorraumbündel. **q.e.d.**

1.8 Operationen auf Vektorraumbündeln

Definition 1.50. *Seien (E, B, π) und (E', B', π') zwei Vektorraumbündel über $\mathbb{K}$. Dann ist ein Morphismus zwischen diesen beiden Vektorraumbündeln definiert als zwei glatte Abbildungen $f : B \to B'$ und $g : E \to E'$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

und die Abbildung g faserweise eine lineare Abbildung von $\pi^{-1}[\{b\}]$ nach $\pi'^{-1}[\{f(b)\}]$ ist, d.h. die Einschränkungen von g auf alle Fasern $\pi^{-1}[\{b\}]$ mit $b \in B$ sind lineare Abbildungen in die Fasern $\pi'^{-1}[\{f(b)\}]$. Sind f und g Diffeomorphismen, so heißt der Morphismus auch Isomorphismus der Vektorraumbündel (E, B, π) und (E', B', π'). Dann bilden die Umkehrabbildungen auch einen Morphismus, weil die Umkehrabbildung jeder bijektiven linearen Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen wieder linear ist.

Beispiel 1.51. (i) *Wir hatten schon gesehen, dass jede Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X einen Isomorphismus $T(\phi) : TU \to T\phi[U]$ der entsprechenden Tangentialbündel induziert.*

(ii) *Jede glatte Abbildung $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten induziert zusammen mit $T(f) : TX \to TY$ einen Morphismus der entsprechenden Tangentialbündel.*

(iii) *Sei F ein n–dimensionaler normierter Vektorraum und (E, B, π) ein Vektorraumbündel vom Fasertyp F. Dann ist (E, B, π) genau dann isomorph zu dem trivialen Vektorraumbündel $(F \times B, B, \pi)$, wenn das Vektorraumbündel (E, B, π) n glatte Schnitte $f_1, \ldots, f_n$ besitzt, die über jeder Faser linear unabhängig sind. Weil nämlich für jeden Diffeomorphismus $f : B \to B$ die Abbildung*

$$\mathbb{1}_F \times f : F \times B \to F \times B$$

offenbar ein Isomorphismus des trivialen Vektorraumbündels $(F \times B, B, \pi)$ mit sich selber ist, besitzt jedes Vektorraumbündel genau dann einen Isomorphismus der Form (g, f) auf das triviale Bündel $(F \times B, B, p_2)$, wenn es einen Isomorphismus der Form $(g, \mathbb{1}_B)$ besitzt. Also folgt die Aussage aus Lemma 1.48.

Mithilfe der linearen Algebra und der Analysis können wir aus zwei (endlichdimensionalen) normierten Vektorräumen V und W die normierten Vektorräume des kartesischen Produktes $V \times W$ und der linearen stetigen Abbildungen von V nach $W : \mathcal{L}(V, W)$ bilden. Wir werden jetzt diese Operationen auf alle Fasern $\pi^{-1}[\{b\}]$ und $\pi'^{-1}[\{b\}]$ zweier Vektorraumbündel (E, B, π) und (E', B, π') über der gleichen Basis B anwenden und dadurch zwei neue Vektorraumbündel

$$(E \oplus E', B, \pi \oplus \pi') \text{ bzw.} \qquad (\mathrm{Hom}(E, E'), B, \pi'')$$

einführen. Wir errinnern daran, dass die direkte Summe $\oplus$ von Vektorräumen mit dem kartesischen Produkt übereinstimmt.

Satz 1.52. *Seien (E, B, π) und $(E', B; \pi')$ zwei Vektorraumbündel über der differenzierbaren Mannigfaltigkeit B. Dann gibt es zwei Vektorraumbündel*

$$(E \oplus E', B, \pi \oplus \pi') \textit{ und } (\mathrm{Hom}(E, E'), B, \pi''),$$

deren Fasern

$$(\pi \oplus \pi')^{-1}[\{x\}] \textit{ und } \pi''^{-1}[\{x\}]$$

für alle $x \in B$ als topologische Vektorräume isomorph sind zu

$$E_x \times E'_x \textit{ bzw.} \qquad \mathcal{L}(E_x, E'_x) \textit{ mit} \qquad E_x = \pi^{-1}[\{x\}] \textit{ und} \qquad E'_x = \pi'^{-1}[\{x\}].$$

Beweis: Es genügt die Aussage auf jeder zusammenhängenden Komponente von B zu zeigen. Wegen Satz 1.49 genügt es dann die Aussage für Vektorraumbündel zu zeigen, die durch eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von B und für alle $U, V \in \mathcal{U}$ Kozykel

$\phi_{V,U} : U \cap V \to GL(F)$ induziert werden. Seien F und F' zwei normierte Vektorräume. Dann sind die beiden folgenden Abbildungen analytische Gruppenhomomorphismen:

$$\begin{array}{rcr} \times : & GL(F) \times GL(F') \to GL(F \times F'), & (A,B) \mapsto A \times B \text{ mit} \\ A \times B : & F \times F' \to F \times F', & A \times B)(f \times f') = Af \times Bf'. \\ \Pi : & GL(F) \times GL(F') \to GL(\mathcal{L}(F,F')), & (A,B) \mapsto \Pi(A,B) \text{ mit} \\ \Pi(A,B) : & \mathcal{L}(F,F') \to \mathcal{L}(F,F'), & C \mapsto B \circ C \circ A^{-1} \end{array}$$

Seien jetzt (E, B, π) und (E', B, π) zwei Vektorraumbündel vom Fasertyp F bzw. F' mit topologischen Vektorräumen F und F'. Dann gibt es sicherlich eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von B, so dass für alle $U \in \mathcal{U}$ die Vektorraumbündel $\pi^{-1}[U]$ und $\pi'^{-1}[U]$ über U isomorph sind zu $F \times U$ bzw. $F' \times U$. Wegen Satz 1.49 werden dann die beiden Vektorraumbündel (E, B, π) und (E', B, π) induziert durch Kozykel

$$\begin{array}{ll} \phi_{V,U} : U \cap V \to GL(F) & \text{für alle } (U,V) \in \mathcal{U}^2 \\ \psi_{V,U} : U \cap V \to GL(F') & \text{für alle } (U,V) \in \mathcal{U}^2. \end{array}$$

Weil diese beiden Kozykel die Kozykelbedingung erfüllen, erfüllen auch die Kozykel

$$\begin{array}{rl} \phi_{V,U} \times \psi_{V,U} : U \cap V \to GL(F \times F') & \text{für alle } (U,V) \in \mathcal{U}^2 \\ \Pi(\phi_{V,U}, \psi_{V,U}) : U \cap V \to GL(\mathcal{L}(F,F')) & \text{für alle } (U,V) \in \mathcal{U}^2 \end{array}$$

die Kozykelbedingung und induzieren zwei Vektorraumbündel $E \oplus E'$ bzw. $\mathrm{Hom}(E, E')$ vom Fasertyp $F \times F'$ bzw. $\mathcal{L}(F, F')$ auf B. Wir zeigen jetzt, dass die Fasern dieser Vektorraumbündel $E \oplus E'$ bzw. $\mathrm{Hom}(E, E')$ über allen Punkten $x \in B$ isomorph sind zu $E_x \times E'_x$ bzw. $\mathcal{L}(E_x, E'_x)$. Seien also für alle $U \in \mathcal{U}$ die lokalen Trivialisierungen von E und E' gegeben durch Isomorphismen von Vektorraumbündeln

$$\phi_U : F \times U \to \pi^{-1}[U] \text{ und } \psi_U : F' \times U \to \pi'^{-1}[U]$$

so dass folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} F \times U & \xrightarrow{\phi_U} & \pi^{-1}[U] \\ p_2 \downarrow & & \pi \downarrow \\ U & \xrightarrow{\mathbf{1}_U} & U \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} F' \times U & \xrightarrow{\psi_U} & \pi'^{-1}[U] \\ p_2 \downarrow & & \pi \downarrow \\ U & \xrightarrow{\mathbf{1}_U} & U \end{array}$$

Für alle $U \in \mathcal{U}$ ist die Abbildung

$$F \times F' \times U \to \bigcup_{x \in U} E_x \times E'_x, \quad (f, f', x) \mapsto (\phi_U(f, x), \psi_U(f', x))$$

eine bijektive Abbildung von dem trivialen Vektorraumbündel $F \times F' \times U$ über U mit Faser $F \times F'$ auf die disjunkte Vereinigung $\bigcup_{x \in U} E_x \times E'_x$ der kartesischen Produkte der Fasern von E und E' über $x \in U$. Für alle $x \in U \cap V$ mit $U, V \in \mathcal{U}$ gilt

$$\phi_V^{-1}\big|_{E_x} = (\phi_{V,U}(x) \times \mathbb{1}_{\{x\}}) \circ \phi_U^{-1}\big|_{E_x} \qquad \psi_V^{-1}\big|_{E'_x} = (\psi_{V,U}(x) \times \mathbb{1}_{\{x\}}) \circ \psi_U^{-1}\big|_{E'_x}.$$

Also sind diese Abbildungen verträglich mit der Äquivalenzrelation des von den Kozykeln $(\phi_{V,U} \times \psi_{V.U})_{(U,V) \in \mathcal{U}}$ definierten Vektorraumbündels $E \oplus E'$. Dann sind die Fasern des Vektorraumbündels $\mathrm{Hom}(E, E')$ isomorph zu $E_x \times E'_x$.

Analog ist für alle $U \in \mathcal{U}$ die Abbildung

$$\mathcal{L}(F, F') \times U \to \bigcup_{x \in U} \mathcal{L}(E_x, E'_x),\ (C, x) \mapsto \psi_U|_{F' \times \{x\}} \circ (C \times \mathbb{1}_{\{x\}}) \circ \phi_U^{-1}\big|_{E_x}$$

eine bijektive Abbildung von dem trivialen Vektorraumbündel $\mathcal{L}(F \times F') \times U$ über U mit Faser $\mathcal{L}(F, F')$ in die disjunkte Vereinigung $\bigcup_{x \in U} \mathcal{L}(E_x, E'_x)$ aller linearen Abbildungen von der Faser E_x von E in die Faser E'_x von E' über $x \in U$. Für alle $x \in U \cap V$ mit $U, V \in \mathcal{U}$ gilt

$$\phi_V^{-1}\big|_{E_x} = (\phi_{V,U}(x) \times \mathbb{1}_{\{x\}}) \circ \phi_U^{-1}\big|_{E_x} \qquad \psi_V^{-1}\big|_{E'_x} = (\psi_{V,U}(x) \times \mathbb{1}_{\{x\}}) \circ \psi_U^{-1}\big|_{E'_x}.$$

Deshalb sind diese Abbildungen verträglich mit der Äquivalenzrelation des von dem Kozykel $(\Pi(\phi_{V,U}, \psi_{V,U}))_{(U,V) \in \mathcal{U}^2}$ induzierten Vektorraumbündels $\mathrm{Hom}(E, E')$. Also bestehen die Fasern von $\mathrm{Hom}(E, E')$ für alle $x \in B$ aus $\mathcal{L}(E_x, E'_x)$. **q.e.d.**

Das Vektorraumbündel $E \oplus E'$ wird Withney Summe der beiden Vektorraumbündel (E, B, π) und (E', B, π') genannt. Diese Whitney Summe können wir auch definieren durch das Faserprodukt $E \times_B E'$ als die Einschränkung des Vektorraumbündels $(E \times E', B \times B, \pi \times \pi')$ auf die Diagonale von $B \times B$. Wegen der lokalen Trivialität ist die Projektion jedes Faserbündels eine Submersion. Also ist wegen Korollar 1.40 das Faserprodukt $E \times_B E'$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $E \times E'$.

Beispiel 1.53. (i) *Das duale Bündel E' eines $\mathbb{K}$–Vektorraumbündels (E, B, π) ist definiert als das Bündel aller Homomorphismen von dem Bündel E in das triviale $\mathbb{K}$–Linearbündel über B. So ist z.B. für jede differenzierbare Mannigfaltigkeit X das Kotangentialbündel das duale Bündel $T'X$ des Tangentialbündel (TX, X, π).*

(ii) *Seien V und W zwei endlichdimensionale normierte Vektorräume über $\mathbb{K}$. Weil alle endlichdimensionalen Vektorräume auf natürliche Weise isomorph sind zu ihren Bidualräumen, können wir das Tensorprodukt $V \otimes W$ identifizieren mit $\mathcal{L}(V', W)$. Deshalb definieren wir das Tensorprodukt zweier Vektorraumbündel (E, B, π) und (F, B, π) vom Fasertyp V bzw. W als das Vektorraumbündel $E \otimes$*

$F = \mathrm{Hom}(E', F)$, der Homomorphismen von dem dualen Bündel E' von E in das Vektorraumündel F. Hierbei ist das duale Bündel E' definiert als das Bündel aller Homomorphismen von E in das triviale Bündel $(\mathbb{K} \times B, B, p_2)$ über B.

Definition 1.54. *Seien X und B differenzierbare Mannigfaltigkeiten und (E, B, π) ein Vektorraumbündel über B. Wegen der lokalen Trivialität ist die Projektion jedes Faserbündels eine surjektive Submersion. Wegen Korollar 1.40 ist das Faserprodukt $E \times_B X$ der beiden Abbildungen $\pi : E \to B$ und $f : X \to B$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $E \times X$ und das Faserprodukt $B \times_B X$ der beiden Abbildungen $\mathbb{1}_B : B \to B$ und $f : X \to B$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $B \times X$. Die Einschränkung des Vektorraumbündels $(E \times X, B \times X, \pi \times \mathbb{1}_X)$ auf die Untermannigfaltigkeit $B \times_B X$ definiert dann das Vektorraumbündel $f^*(E) = (E \times_B X, B \times_B X, \pi')$. Es wird inverses Bild des Vektorraumbündels (E, B, π) unter der Abbildung f genannt.*

Satz 1.55. *Seien (E, B, π) und (E', B', π') zwei Vektorraumbündel. Dann induziert jeder glatte Morphismus (g, f) von dem Vektorraumbündel (E', B', π') auf das Vektorraumbündel (E, B, π) einen Morphismus $(h, \mathbb{1}_{B'})$ von (E', B', π') auf das inverse Bild $f^*(E)$ des Vektorraumbündels (E, B, π) unter der Abbildung f.*

Beweis: Offenbar ist $(g \times \mathbb{1}_{B'}, f \times \mathbb{1}_{B'})$ ein Morphismus des Vektorraumbündels $(E' \times B', B' \times B', \pi' \times \mathbb{1}_{B'})$ auf das Vektorraumbündel $(E \times B', B \times B', \pi \times \mathbb{1}_{B'})$. Das Faserprodukt $E' \times_{B'} B'$ bezüglich der glatten Abbildungen $\pi' : E' \to B'$ und $\mathbb{1}_{B'} : B' \to B'$ ist die Einschränkung des Vektorraumbündels $(E' \times B', B' \times B', \pi' \times \mathbb{1}_{B'})$ auf das Faserprodukt $B' \times_{B'} B'$ bezüglich zwei glatten Abbildungen $\mathbb{1}_{B'} : B' \to B'$ als Untermannigfaltigkeit von $B' \times B'$. Die zweite Untermannigfaltigkeit ist die Diagonale von $B' \times B'$, und die erste Untermannigfaltigkeit ist das inverse Bild $\mathbb{1}^*_{B'}(E')$ des Vektorraumbündels (E', B', π') unter der Abbildung $\mathbb{1}_{B'} : B' \to B'$. Seien $p_{E'} : E' \times B' \to E'$ und $p_{B'} : B' \times B' \to B'$ die beiden Projektionen auf den ersten Faktor der kartesischen Produkte. Dann ist $(p_{E'}, p_{B'})$ ein Morphismus des Vektorraumbündels $(E' \times B', B' \times B', \pi' \times \mathbb{1}_{B'})$ auf das Vektorraumbündel (E', B', π'). Er induziert einen Isomorphismus des inversen Bildes $\mathbb{1}^*_{B'}(E')$ des Vektorraumbündels (E', B', π') mit dem Vektorraumbündel (E', B', π').

Das Faserprodukt $E \times_B B'$ bezüglich der glatten Abbildungen $\pi : E \to B$ und $f : B' \to B$ ist die Einschränkung des Vektorraumbündels $(E \times B', B \times B', \pi \times \mathbb{1}_{B'})$ auf das Faserprodukt $B \times_B B'$ bezüglich der glatten Abbildungen $\mathbb{1}_B : B \to B$ und $f : B' \to B$ als Untermannigfaltigkeit von $B \times B'$. Es ist das inverse Bild $f^*(E)$ des Vektorraumbündels (E, B, π) bezüglich der glatten Abbildung f. Weil die Abbildung $f \times \mathbb{1}_{B'}$ offenbar die Diagonale $B' \times_{B'} B'$ von $B' \times B'$ auf die Untermannigfaltigkeit $B \times_B B'$ abbildet, wird durch den Morphismus $(g \times \mathbb{1}_{B'}, f \times \mathbb{1}_{B'})$ das Vektorraumbündel $\mathbb{1}^*_{B'}(E')$ auf das Vektorraumbündel $f^*(E)$ abgebildet. Weil $\mathbb{1}^*_{B'}(E')$ als Vektorraumbündel isomorph ist zu (E', B', π') erhalten wir einen Morphismus von (E', B', π') auf des inverse Bild $f^*(E)$ des Vektorraumbündels (E, B, π) unter der Abbildung f. **q.e.d.**