Kapitel 2

Vektorfelder

2.1 Vektorfelder und Integralkurven

Definition 2.1. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann heißt eine Abbildung $F : X \to TX$ mit $\pi \circ F = \mathbb{1}_X$ Vektorfeld von X. Den Raum aller Vektorfelder auf X bezeichnen wir mit* $\mathrm{Vec}(X)$. *Für $r \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet* $\mathrm{Vec}^r(X)$ *den Raum aller r mal stetig differenzierbaren Vektorfelder und* $\mathrm{Vec}^\infty(X)$ *den Raum aller glatten Vektorfelder.*

Satz 2.2. *Sei $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann definiert jedes Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ für alle $p = 0, \ldots, r$ eine lineare Derivation*

$$\theta_F : \quad C^{p+1}(X, \mathbb{R}) \to C^p(X, \mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad \theta_F(f \cdot g) = f \cdot \theta_F(g) + \theta_F(f) \cdot g.$$

Umgekehrt gibt es für jede lineare Derivation

$$\theta : C^\infty(X, \mathbb{R}) \to C^r(X, \mathbb{R}) \text{ mit } \theta(fg) = f\,\theta(g) + \theta(f)g \text{ ein } F \in \mathrm{Vec}^r(X) \text{ mit } \theta = \theta_F\,.$$

Beweis: Wegen Satz 1.34 definiert jedes Vektorfeld eine Abbildung von $C^\infty(X, \mathbb{R})$ in die reellen Funktionen auf X, die linear ist und eine Derivation ist. Wir zeigen jetzt, dass für jedes Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ die Derivation θ_F sogar $C^{r+1}(X, \mathbb{R})$ nach $C^r(X, \mathbb{R})$ abbildet. Wenn wir mit einer Karte ϕ dem Vektorfeld F eine r mal stetig differenzierbare Abbildung von dem Definitionsbereich $U \subset X$ der Karte nach $\mathbb{R}^n$ zuordnen, dann gilt

$$\theta_F(f)(x) = T_x(\phi)(F(x)) \cdot \nabla(f \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \quad \text{für alle } x \in U.$$

Hierbei ist $T(\phi) \circ F|_U$ die Abbildung $U \xrightarrow{F|_U} TU \xrightarrow{T(\phi)} T\phi[U] \simeq \mathbb{R}^n \times U$. Dann bildet $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ offenbar $C^{r+1}(X, \mathbb{R})$ nach $C^r(X, \mathbb{R})$ ab. Aus $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ folgt für alle $p = 0, \ldots, r$ auch $F \in \mathrm{Vec}^p(X)$, so dass θ_F auch $C^{p+1}(X, \mathbb{R})$ nach $C^p(X, \mathbb{R})$ abbildet.

Umgekehrt ist F genau dann r mal stetig differenzierbar, wenn θ_F $C^\infty(X, \mathbb{R})$ nach $C^r(X, \mathbb{R})$ abbildet. **q.e.d.**

Korollar 2.3. *Seien $F \in \mathrm{Vec}^p(X)$ und $G \in \mathrm{Vec}^q(X)$ zwei Vektorfelder auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X. Dann gibt es genau ein Vektorfeld $[F, G] \in \mathrm{Vec}^r(X)$ mit*

$$r = \min\{p-1, q-1\} \quad \text{und} \quad \theta_{[F,G]} = \theta_F \circ \theta_G - \theta_G \circ \theta_F\,.$$

Beweis: Offenbar ist $\theta_F \circ \theta_G - \theta_G \circ \theta_F$ eine lineare Abbildung von $C^\infty(X, \mathbb{R})$ nach $C^r(X, \mathbb{R})$. Für alle $f, g \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned}
(\theta_F \circ \theta_G - \theta_G \circ \theta_F)(f \cdot g) &= \theta_F(\theta_G(f \cdot g)) - \theta_G(\theta_F(f \cdot g)) \\
&= \theta_F(f\,\theta_G(g) + \theta_G(f)g) \qquad -\theta_G(f\,\theta_F(g) + \theta_F(f)g) \\
&= f\,\theta_F(\theta_G(g)) + \theta_F(f)\,\theta_G(g) \qquad +\theta_G(f)\,\theta_F(g) + \theta_F(\theta_G(f))g \\
&\quad - f\,\theta_G(\theta_F(g)) - \theta_G(f)\,\theta_F(g) \qquad -\theta_F(f)\,\theta_G(g) - \theta_G(\theta_F(f))g \\
&= f\,\theta_F(\theta_G(g)) + \theta_F(\theta_G(f))g \qquad -f\,\theta_G(\theta_F(g)) - \theta_G(\theta_F(f))g \\
&= f \cdot (\theta_F \circ \theta_G - \theta_G \circ \theta_F)(g) \qquad +(\theta_F \circ \theta_G - \theta_G \circ \theta_F)(f) \cdot g.
\end{aligned}$$

Also ist $\theta_F \circ \theta_G - \theta_G \circ \theta_F$ eine Derivation. Damit folgt die Behauptung aus dem vorangehenden Satz. **q.e.d.**

Das Tangentialbündel eines endlichdimensionalen normierten Vektorraumes V ist auf natürliche Weise isomorph zu $TV \simeq V \times V$ insbesondere ist das Tangentialbündel eines offenen Intervalls I auf natürliche Weise isomorph zu $\mathbb{R} \times I$. Deshalb enthält der Tangentialraum $T_x I$ für alle $x \in I$ außer der Null noch ein ausgezeichnetes Element, das $(1, x) \in \mathbb{R} \times I \simeq TI$ entspricht.

Definition 2.4. *Eine Integralkurve x eines Vektorfeldes $F \in \mathrm{Vec}(X)$, ist eine differenzierbare Abbildung $x : I \to X, t \mapsto x(t)$ von einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ nach X, so dass für alle $t \in I$ das Element $(1, t) \in \mathbb{R} \times I \simeq TI$ durch $T_t(x)$ auf $F(x(t)) \in T_{x(t)}X$ abgebildet wird. Wenn $t_0 \in I$ und $x(t_0) = x_0 \in X$ gilt, dann heißt x Integralkurve von F mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$.*

Wir werden jetzt zeigen, dass jedes Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ für jedes $x_0 \in X$ genau eine Integralkurve mit Anfangswert x_0 besitzt. Diese Aussage ist eine Umformulierung der Existenz und Eindeutigkeit von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Satz 2.5. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$. Dann gilt:*

(i) *(Existenz von Integralkurven) Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in X$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung*

$$x : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to X, \quad t \mapsto x(t) \ \text{mit} \quad x(t_0) = x_0,$$

die eine Integralkurve von F mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$ ist.

(ii) *(Eindeutigkeit von Integralkurven) Seien x und y zwei Integralkurven von F auf offenen Intervallen I bzw. J. Wenn $t_0 \in I \cap J$ und $x(t_0) = y(t_0)$ gilt, dann stimmen $x(t)$ und $y(t)$ für alle $t \in I \cap J$ überein.*

Wir werden diese Existenz und Eindeutigkeit mit Hilfe von Karten von X um dem Punkt x_0 bzw. $x(t_0)$ aus der Existenz und Eindeutigkeit von gewöhnlichen Differentialgleichungen folgern.

Satz 2.6. *(Picard–Lindelöf) Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Abbildung von einer offenen Umgebung U von $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ im $\mathbb{R}^{n+1}$ nach $\mathbb{R}^n$. Dann gilt*

(i) *(Lokale Existenz) Es gibt ein $\epsilon > 0$ und eine differenzierbare Abbildung x von $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ nach $\mathbb{R}^n$, die das folgende Anfangswertproblem löst:*

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)) \text{ für alle } t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \text{ und } \quad x(t_0) = x_0.$$

(ii) *(Eindeutigkeit) Seien x und y zwei differenzierbare Abbildungen von den offenen Intervallen I bzw. J nach $\mathbb{R}^n$, die beide t_0 enthalten. Wenn x und y beide dieses Anfangswertproblem lösen, dann gilt $x(t) = y(t)$ für alle $t \in I \cap J$.*

Beweis: Wegen der Lipschitzstetigkeit gibt es ein $L > 0$, so dass für alle $(t, y), (t, z) \in U$ auch $\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq L\|y - z\|$ gilt. Sei $\delta > 0$ so gewählt, dass U das kartesische Produkt $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(x_0, \delta)}$ der beiden abgeschlossenen δ–Kugeln um t_0 und x_0 enthält. Dann gilt für alle $(s, y) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(x_0, \delta)}$ auch $\|f(s, y)\| \leq \|f(t_0, x_0)\| + 2L\delta$. Wegen der Stetigkeit von f ist die Abbildung

$$F : x \mapsto F(x) \text{ mit } F(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

eine stetige Abbildung von $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(x_0, \delta)})$ nach $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$. Wenn $\epsilon \leq \delta$ und $\epsilon\,(\|f(t_0, x_0)\| + 2L\delta) \leq \delta$, dann bildet sie wegen dem Schrankensatz $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(x_0, \delta)})$ auf sich selber ab. Für $x, y \in C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(x_0, \delta)})$ gilt dann

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq \epsilon L\|x - y\|_\infty.$$

Sei also ϵ kleiner als

$$\epsilon \leq \min\left\{\delta, \frac{\delta}{\|f(t_0, x_0)\| + 2L\delta}\right\} \leq \frac{1}{2L}.$$

Dann definiert die Abbildung F eine Lipschitzstetige Abbildung mit Lipschitzkonstante $\epsilon \cdot L \leq 1/2$ von dem vollständigen metrischen Raum $C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], \overline{B(x_0,\delta)})$ auf sich selber. Jeder Fixpunkt ist wegen dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung stetig differenzierbar und es gilt $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ für alle $t \in (t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$ mit $x(t_0) = x_0$. Also löst x dieses Anfangswertproblem auf $(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$.

Wenn umgekehrt x auf einer Umgebung von t_0 dieses Anfangswertproblem löst, dann ist x stetig differenzierbar. Deshalb ist die Ableitung von $F(x)-x$ gleich Null, und beide Funktionen $F(x)$ und x sind bei $t = t_0$ gleich x_0. Also stimmen beide Funktionen überein und jede Lösung des obigen Anfangswertproblems ist ein Fixpunkt von F. Also folgt die Existenz und Eindeutigkeit dieses Anfangswertproblems auf einer Umgebung von t_0 aus dem Banachschen Fixpunktsatz. Dann ist die Menge aller Punkte, an denen zwei Lösungen x und y dieses Anfangswertproblems übereinstimmen offen, und wegen der Stetigkeit von solchen Lösungen auch abgeschlossen. Weil die Schnittmenge von zwei Intervallen wieder ein Intervall und damit zusammenhängend ist, stimmen zwei solche Lösungen x und y dann auf der Schnittmenge $I \cap J$ überein. **q.e.d.**

Beweis der Existenz und Eindeutigkeit von Integralkurven:

(i) Sei $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte um $x_0 \in X$. Dann definiert

$$f = p_1 \circ T(\phi) \circ F|_U \circ \phi^{-1} : \quad \phi[U] \xrightarrow{\phi^{-1}} U \xrightarrow{F|_U} TU \xrightarrow{T(\phi)} T\phi[U] \simeq \mathbb{R}^n \times \phi[U] \xrightarrow{p_1} \mathbb{R}^n$$

eine einmal stetige differenzierbare Abbildung. Wegen dem Schrankensatz gibt es ein $r > 0$, so dass die Einschränkung auf $\overline{B(\phi(x_0), r)} \subset \phi[U]$ Lipschitz–stetig ist mit Lipschitzkonstante $L > 0$. Dann folgt aus dem Satz von Picard–Lindelöf, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt und eine eindeutige Lösung

$$\tilde{x} : (t_0-\epsilon, t_0+\epsilon) \to \phi[U], \tilde{x} \mapsto \tilde{x}(t)$$

des Anfangswertproblems

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(t) = f(\tilde{x}(t)) \text{ für alle } t \in (t_0-\epsilon, t_0+\epsilon) \text{ mit } \tilde{x}(t_0) = \phi(x_0).$$

Die Abbildung $x = \phi^{-1} \circ \tilde{x}$ ist dann eine Integralkurve von F.

(ii) Sei $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ wieder eine Karte in $x_0 = x(t_0) = y(t_0)$. Dann definieren $\tilde{x} = \phi \circ x$ und $\tilde{y} = \phi \circ y$ zwei Lösungen des Anfangswertproblems

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(t) = f(\tilde{x}(t)) \text{ für alle } t \text{ in einer Umgebung von } t_0 \text{ mit } \quad \tilde{x}(t_0) = \phi(x_0).$$

Also gilt $\tilde{x} = \tilde{y}$ auf einer Umgebung von t_0. Weil ϕ injektiv ist folgt $x(t) = y(t)$ auf einer Umgebung von t_0. Daraus folgt, dass die Menge aller $\{t \in I \cap J | x(t) = y(t)\}$

offen ist und abgeschlossen wegen der Stetigkeit von x und y. Weil I und J Intervalle sind und $t_0 \in I \cap J$ ist $I \cap J$ ein nicht leeres Intervall und damit zusammenhängend. Also gilt $x(t) = y(t)$ für alle $t \in I \cap J$. **q.e.d.**

Satz 2.7. *Sei $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ und $x_0 \in X$. Dann gibt es eine eindeutige Integralkurve $x : I \to X$ von F mit $x(0) = x_0$, so dass jede Integralkurve $y : J \to X$ von F mit $y(0) = x_0$ eine Einschränkung von x auf ein Teilintervall J von I ist, das* 0 *enthält. Allgemeiner ist jede Integralkurve $y : J \to X$ von F mit $y(t_0) = x_0$ von der Form:*

$$y(t - t_0) = x(t) \text{ für alle } t - t_0 \in J, \text{ wobei } \{t \in \mathbb{R} | t - t_0 \in J\} \subset I.$$

Beweis: Sei I die Vereinigung der Definitionsbereiche aller Integralkurven x von F mit $x(0) = x_0$. Wegen der Existenz und Eindeutigkeit der Integralkurven gibt es dann eine eindeutige Integralkurve x auf I mit $x(0) = x_0$, so dass jede Integralkurve von F mit $y(0) = x_0$ durch Einschränken der Integralkurve x auf ein Teilintervall von I entsteht. Offenbar ist für jede Integralkurve y von F mit $y(t_0) = x_0$ die Abbildung

$$\{t \in \mathbb{R} \mid t - t_0 \in J\} \to X, \quad t \mapsto z(t) = y(t - t_0)$$

eine Integralkurve von F mit $z(0) = x_0$. Daraus folgt die Behauptung. **q.e.d.**

2.2 Flüsse und Vektorfelder

Wir wollen jetzt alle maximalen Integralkurven aus dem vorangehenden Satz zu Abbildungen von offenen Teilmengen von $\mathbb{R} \times X$ nach X zusammensetzen.

Definition 2.8. *Sei X ein topologischer Raum, $W \subset \mathbb{R} \times X$ eine offene Teilmenge und $\psi : W \to X$ eine Abbildung, die folgende Bedingungen erfüllen:*

(i) *Für alle $x \in X$ ist $\{t \in \mathbb{R} \mid (t, x) \in W\}$ ein offenes Intervall, das die Null enthält.*

(ii) *Sei $(s, x) \in W$ und $(t, \psi(s, x)) \in W$, dann ist auch $(t + s, x) \in W$ und es gilt*

$$\psi(t, \psi(s, x)) = \psi(t + s, x).$$

(iii) *Für alle $x \in X$ gilt $\psi(0, x) = x$.*

Dann heißt ψ ein lokaler Fluss auf X.

Lemma 2.9. *Sei $\psi : W \to X$ ein stetiger lokaler Fluss auf dem topologischen Raum X. Dann gilt:*

(i) *Für alle $t \in \mathbb{R}$ sei $V_t = \{x \in X \mid (t,x) \in W\}$. Dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge V_t offen. Für alle $x \in V_t$ ist auch $\psi(t,x) \in V_{-t}$ und die Abbildung*

$$\psi(t,\cdot): \quad V_t \to V_{-t}, \quad x \mapsto \psi(t,x)$$

ein Homöomorphismus mit der inversen Abbildung $\psi(-t,\cdot)$.

(ii) *Für jedes $x \in X$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U \subset X$ von x, so dass W die Menge $(-\epsilon,\epsilon) \times U$ enthält. Für alle $t \in (-\epsilon,\epsilon)$ sind insbesondere V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x und $\psi(t,\cdot)$ ein Homöomorphismus von der offenen Umgebung V_t von x auf die offene Umgebung V_{-t} von x.*

Beweis: Für alle $(t_0,x_0) \in W$ ist W eine offene Umgebung von $(t_0,x_0) \in \mathbb{R} \times X$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U \subset X$ von x_0, so dass $(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon) \times U$ in W enthalten ist. Also sind für alle $t \in \mathbb{R}$ die Mengen V_t offen.

Sei $t \in \mathbb{R}$ und $x \in V_t$. Wir führen den Beweis für $t > 0$. Für $t < 0$ geht er analog. Wegen der Bedingung (i) liegt dann (s,x) in W für alle $s \in [0,t]$. Also gibt es wegen der Bedingung (ii) für alle $s \in [-t,0]$ ein $\epsilon_s > 0$ mit

$$(r,\psi(t+s,x)) \in W \quad \text{und } \psi(r,\psi(t+s,x)) = \psi(t+s+r,x) \quad \text{für alle } r \in (-\epsilon_s,\epsilon_s).$$

Wegen der Bedingung (ii) folgt aus $(s,\psi(t,x)) \in W$ und $(r,\psi(t+s,x)) \in W$ auch $(s+r,\psi(t,x)) \in W$ und $\psi(s+r,\psi(t,x)) = \psi(t+s+r,x)$. Die offene Überdeckung $\{(-\epsilon_0,\epsilon_0\} \cup \{(s-\epsilon_s,s) \mid s \in [-t,0)\}$ von $[-t,0]$ hat eine endliche Teilüberdeckung. Für alle $s \in [-t,0]$ folgt dann induktiv $(s,\psi(t,x)) \in W$ und $\psi(s,\psi(t,x)) = \psi(t+s,x)$. Also liegt $\psi(t,x)$ in V_{-t} und $\psi(-t,\cdot)$ ist die Umkehrabbildung von $\psi(t,\cdot)$. Weil ψ stetig ist, sind dann $\psi(t,\cdot)$ und $\psi(-t,\cdot)$ Homöomorphismen.

Jetzt folgt (ii) aus dem Beweis von (i). **q.e.d.**

Satz 2.10. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann definiert für jedes Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ mit $r \in \mathbb{N}$ die Vereinigung aller maximalen Integralkurven aus dem Satz 2.5 einen r mal stetig differenzierbaren Fluss ψ_F auf X. Die partielle Ableitung von ψ_F nach t ist sogar auch r mal stetig differenzierbar.*

Umgekehrt gibt es für jeden r mal stetig differenzierbaren Fluss ψ auf X, dessen partielle Ableitung nach t auch r mal stetig differenzierbar ist, ein Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ mit $\psi = \psi_F$.

Wir beweisen diesen Satz wieder mit Hilfe eines Satzes über Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Satz 2.11. *Sei $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und U eine offene Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sei $f: U \to \mathbb{R}^n$ eine r mal stetig differenzierbare Abbildung mit $r \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine* *offene Umgebung W von x_0 in U, ein $\epsilon > 0$ und eine r mal stetig differenzierbare Funktion $g : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times W \to \mathbb{R}^n$, so dass für alle $y \in W$ die Funktion*

$$x : \quad (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto g(t, y)$$

die eindeutige Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) \text{ für alle } t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \text{ mit } \quad x(t_0) = y.$$

Die partielle Ableitung von g nach t ist sogar auch r mal stetig differenzierbar.

Beweis: Wir benutzen den Satz der impliziten Funktion. Weil U eine offene Umgebung von (t_0, x_0) ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass U den abgeschlossenen Ball $\overline{B(x_0, \delta)}$ enthält. Wegen Heine–Borel ist $\overline{B(x_0, \delta)}$ kompakt. Weil f stetig differenzierbar ist, gibt es dann eine obere Schranke $L > 0$ an die Ableitungen von f auf $\overline{B(x_0, \delta)}$. Wegen dem Schrankensatz ist dann f Lipschitz–stetig auf $\overline{B(x_0, \delta)}$ mit Lipschitzkonstante $L > 0$. Sei also $0 < \epsilon < \frac{\delta}{2\|f(x_0)\| + 2L\delta}$ analog gewählt wie in dem Beweis des Satzes von Picard–Lindelöf. Sei I das abgeschlossene Intervall $I = [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ und V die offene Umgebung $V = B(x_0, \delta/2)$ von $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Für alle $y \in V$ definiert

$$F_y : C(I, \overline{B(x_0, \delta)}) \to C(I, \overline{B(x_0, \delta)}), \ x \mapsto F_y(x) \text{ mit } \ F_y(x)(t) = y + \int_{t_0}^{t} f(x(s))ds$$

wieder eine stetige Lipschitzstetige Abbildung von dem vollständigen metrischen Raum $C(I, \overline{B(x_0, \delta)})$ auf sich selber mit Lipschitzkonstante $\epsilon L < 1/2$. Wegen der Ungleichung $\delta/2 + \epsilon(\|f(x_0)\| + 2L\delta) < \delta/2 + \delta/2 = \delta$ liegen die Bilder aller Abbildungen $(F_y)_{y \in V}$ sogar in der offenen Teilmenge $C(I, B(x_0, \delta))$ des Banachraumes $C(I, \mathbb{R}^n)$ mit der Supremumsnorm $\| \cdot \|_\infty$. Deshalb liegen die entsprechenden Fixpunkte in dieser offenen Teilmenge. Für alle $y \in V$ ist die Ableitung der Abbildung $x \mapsto F_y(x)$, als Abbildung der offenen Teilmenge $C(I, B(x_0, \delta))$ von $C(I, \mathbb{R}^n)$ auf sich selber gegeben durch

$$\begin{aligned} F'_y(x) : \qquad & C(I, \mathbb{R}^n) \to C(I, \mathbb{R}^n), \qquad z \mapsto F'_y(x)(z) \\ \text{mit} \qquad & F'_y(x)(z)(t) = \int_{t_0}^{t} f'(x(s))(z(s))ds. \end{aligned}$$

Weil die Ableitungen $f'(s, x(s))$ beschränkt sind durch L, ist die Ableitung $F'_y(x)$ beschränkt durch $L\epsilon < 1/2$. Deshalb konvergiert für alle $y \in V$ und alle $x \in C(I, B(x_0, \delta))$ die Neumannsche Reihe

$$\left(\mathbb{1}_{C(I, \mathbb{R}^n)} - F'_y(x)\right)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(F'_y(x)\right)^l$$

in $\mathcal{L}(C(I,\mathbb{R}^n))$ gegen den inversen Operator von $\mathbb{1}_{C(I,\mathbb{R}^n)} - F'_y(x)$. Offenbar ist für alle y und $z \in V$ die punktweise Differenz der entsprechenden Abbildungen eine konstante Abbildung in $C(I,\mathbb{R}^n)$:

$$F_y(x) - F_z(x) = y - z.$$

Deshalb ist für jedes $x \in C(I, B(x_0,\delta))$ die Abbildung $y \mapsto F_y(x)$ eine glatte Abbildung von V nach $C(I,\mathbb{R}^n)$. Also ist die Abbildung

$$G : V \times C(I, B(x_0,\delta)) \to C(I,\mathbb{R}^n), \quad (y,x) \mapsto \left(\mathbb{1}_{C(I,B(x_0,\delta))} - F_y\right)(x) = x - F_y(x)$$

eine stetig differenzierbare Abbildung und besitzt auf dem gesamten Definitionsbereich eine invertierbare partielle Ableitung nach $x \in C(I, B(x_0,\delta))$. Das Urbild der $0 \in C(I,\mathbb{R}^n)$ besteht genau aus den Fixpunkten der Abbildungen F_y. Dann folgt aus dem Satz der impliziten Funktion, dass es eine stetig differenzierbare Abbildung g von einer Umgebung W von $x_0 \in V$ auf die entsprechenden Fixpunkte der Abbildungen F_y gibt. Diese Abbildung ist außerdem genauso oft stetig differenzierbar, wie G. An den expliziten Formeln für die ersten partiellen Ableitungen von F_y erkennt man, dass die partiellen Ableitungen von G bis zur selben Ordnung stetig sind, bis zu der auch die partiellen Ableitungen von f stetig sind. Also ist G genauso oft wie f stetig differenzierbar. Für alle $y \in W$ ist dann $g(y)$ die eindeutig Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)) \text{ für alle } t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \text{ mit } \quad x(t_0) = y.$$

Alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung r von der Abbildung

$$(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times W \to \mathbb{R}, \quad (y,t) \mapsto g(y)(t)$$

sind stetig. Deshalb ist diese Abbildung auch r mal stetig differenzierbar. Weil sie eine Lösung des obigen Anfangswertproblems ist, ist die partielle Ableitung nach t sogar auch r mal stetig differenzierbar. **q.e.d.**

Beweis von Satz 2.10: Sei $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ ein r mal stetig differenzierbares Vektorfeld. Sei W_F die Vereinigung in $\mathbb{R}\times X$ aller kartesischen Produkte der Definitionsbereiche der eindeutigen maximalen Integralkurven aus Satz 2.7 mit Anfangswert $x(0) = x \in X$ mit den Mengen $\{x\}$. Sei $\psi_F : W_F \to X$ für jedes $x \in X$ definiert durch die entsprechende Integralkurve. Wenn $(s,x) \in W_F$ und $(t, \psi_F(s,x)) \in W_F$ liegt, dann stimmen die beiden Integralkurven mit Anfangswert $x(0) = x$ und $x(s) = \psi_F(s,x)$ wegen der Eindeutigkeit von Integralkurven auf der Schnittmenge der Definitionsbereich überein. Also bilden sie zusammen eine Integralkurve auf einem Intervall das sowohl 0, als auch s und $t+s$ enthält, und $x(0) = x$, $x(s) = \psi_F(s,x)$ und $x(t+s) = \psi_F(t, \psi_F(s,x))$ erfüllt. Also folgt

$$(t+s, x) \in W_F \text{ und } \psi_F(t+s, x) = \psi_F(t, \psi_F(s,x)).$$

Weil im Beweis der Existenz des Anfangswertproblems im Satz von Picard–Lindelöf das Intervall, auf dem die die Lösung definiert ist, nur von δ, L und $\|f(x_0)\|$ abhängt, enthält W_F für alle $x \in X$ eine offene Umgebung von $(0, x) \in \mathbb{R} \times X$. Dann enthält W_F für alle $(s, x) \in W_F$ mit einer offenen Umgebung um $(0, \psi_F(s, x))$ auch eine offene Umgebung von (s, x). Also ist W_F offen.

Wir zeigen jetzt, dass ψ_F r mal stetig differenzierbar ist. Sei $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von X auf einer Umgebung von $x \in X$ und $V = (\mathbb{R} \times U) \cap \psi_F^{-1}[U]$. Dann parametrisiert

$$\phi \circ \psi_F|_V \circ (\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \times \phi^{-1}) : \quad (\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \times \phi)\,[V] \to \phi[U], \quad (t, y) \to (\phi \circ \psi_F)(t, \phi^{-1}(y))$$

für alle $y \in \phi[U]$ die Lösungen des Anfangswertproblems

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) \text{ mit } \quad x(0) = y$$

mit der Funktion

$$f : \phi[U] \to \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto f(y) = T_{\phi^{-1}(y)}(\phi)(F(\phi(y))).$$

Diese Abbildung $\phi \circ \psi_F|_V \circ (\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \times \phi^{-1})$ ist wegen dem vorangehenden Satz r mal stetig differenzierbar, und die partielle Ableitung nach t ist sogar auch r mal stetig differenzierbar. Dann ist ψ_F auch r mal stetig differenzierbar, und die partielle Ableitung von ψ_F nach t ist sogar auch r mal stetig differenzierbar. Also ist ψ_F ein Fluss mit den gewünschten Eigenschaften.

Sei jetzt $\psi : W \to X$ ein r mal stetig differenzierbarer Fluss auf X, dessen partielle Ableitung nach t auch r mal stetig differenzierbar ist. Wegen der Bedingung (ii) gilt für alle $(t, x) \in W$ und $(s, \psi(t, x)) \in W$ und jede Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ von X um $\psi(t, x)$ und $\psi(t + s, x)$

$$\frac{\partial\phi(\psi(t + s, x))}{\partial t} = \frac{\partial\phi(\psi(t + s, x))}{\partial s} = \frac{\partial\phi(\psi(s, \psi(t, x)))}{\partial s}.$$

Mit $s = 0$ folgt, dass die partielle Ableitung $\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t}$ an der Stelle (t, x) gleich der partiellen Ableitung von $\frac{\partial\psi(s,\psi(t,x))}{\partial s}$ an der Stelle $(0, \psi(t, x))$ ist. Sei also $F \in \mathrm{Vec}(X)$ das Vektorfeld von X, das jedem $x \in X$ das Element in T_xX zuordnet, auf das die Abbildung

$$T_{(0,x)}(\psi) : T_{(0,x)}W \to T_xX$$

das Element $(1, 0) \in \mathbb{R} \times T_xX \simeq T_{(0,x)}W$ abbildet. Weil die partielle Ableitung von ψ nach t r mal stetig differenzierbar ist, ist F r mal stetig differenzierbar. Dann ist für jedes $x \in X$, die Abbildung $t \mapsto \psi(t, x)$ eine Integralkurve des Vektorfeldes F. Aus der Eindeutigkeit von Integralkurven folgt, dass ψ eine Einschränkung von ψ_F auf eine offene Teilmenge des entsprechenden Definitionsbereiches W_F ist. **q.e.d.**

Aus Lemma 2.9 und Satz 2.10 folgt

Korollar 2.12. *Sei $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ ein Vektorfeld auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X mit $r \in \mathbb{N}$. Dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge $V_t = \{x \in X | (t,x) \in W_F\}$ eine offene Teilmenge von X und die Abbildung $x \mapsto \psi_F(t,x)$ ist ein r mal stetig differenzierbarer Homöomorphismus von V_t nach V_{-t} mit Umkehrabbildung $x \mapsto \psi_F(-t,x)$. Außerdem gibt es für alle $x \in X$ ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ die Mengen V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x sind.* **q.e.d.**

Definition 2.13. **(i)** *Ein lokaler Fluss $\psi : W \to X$ auf einem topologischen Raum X heißt globaler Fluss, wenn $W = \mathbb{R} \times X$ ist.*

(ii) *Ein Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X heißt vollständig, wenn der entsprechende Fluss ψ_F ein globaler Fluss ist.*

Satz 2.14. **(i)** *Auf einem kompakten topologischen Raum X sind alle lokalen Flüsse auch globale Flüsse.*

(ii) *Alle Vektorfelder $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ auf einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit X sind vollständig.*

Beweis: (i) Wegen Lemma 2.9 gibt es für jedes $x \in X$ ein $\epsilon_x > 0$ und eine offene Umgebung U_x von $x \in X$, so dass der Definitionsbereich W die Menge $(-\epsilon_x, \epsilon_x) \times U$ enthält. Die Überdeckung $(U_x)_{x \in X}$ von X, hat eine endliche Teilüberdeckung. Das Minimum der entsprechenden ϵ_x nennen wir wieder $\epsilon > 0$. Dann folgt aus der Bedingung (i) des Flusses, dass für jedes $(t,x) \in W$ die Menge W auch die Menge $\{(t+s,x) \in \mathbb{R} \times X | s \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ enthält. Weil W die Menge $\{(0,x) | x \in X\}$ enthält, folgt induktiv für alle $l \in \mathbb{N}$, dass W auch die Menge

$$(-(l+1)\epsilon, (l+1)\epsilon) \times X = \{(t+s,x) \in \mathbb{R} \times X \mid (t,x) \in (-l\epsilon, l\epsilon) \times X, s \in (-\epsilon, \epsilon)\}$$

enthält. Also ist W gleich $\mathbb{R} \times X$.

(ii) folgt aus (i) und Satz 2.10 **q.e.d.**

Wir haben in dem Beweis nur benutzt, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass der Definitionsbereich W des Flusses ψ von F die Menge $(-\epsilon, \epsilon) \times X$ enthält, bzw. die Integralkurven von F mit allen Anfangswerten $x(0) \in X$ auf $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert sind.

Korollar 2.15. **(i)** *Ein lokaler Fluss auf einem topologischen Raum ist genau dann ein globaler Fluss, wenn W eine Menge $(-\epsilon, \epsilon) \times X$ enthält mit $\epsilon > 0$.*

(ii) *Ein Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist genau dann vollständig, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in X$ die Integralkurven von F mit Anfangswert $x(0) = x$ auf $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert sind.* **q.e.d.**

Korollar 2.16. **(i)** *Ein globaler stetiger Fluss auf dem topologischen Raum X definiert durch*

$$\psi(\cdot,\cdot): \quad \mathbb{R} \to C(X,X), \quad t \mapsto \psi(t,\cdot)$$

einen Homomorphismus von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der Homöomorphismen von X.

Umgekehrt definieren alle Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der Homöomorphismen von X, die als Abbildungen von $\mathbb{R} \times X$ nach X stetig sind, einen globalen stetigen Fluss.

(ii) *Sei $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ ein vollständiges Vektorfeld auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Dann definiert der entsprechende Fluss $\psi_F : \mathbb{R} \times X \to X$ einen Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der r mal stetig differenzierbaren Homöomorphismen von X.*

Umgekehrt definieren alle Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der r mal stetig differenzierbaren Homöomorphismen von X, die als Abbildung ψ von $\mathbb{R} \times X$ r mal stetig differenzierbar sind mit r mal stetig differenzierbarer partieller Ableitung nach $t \in \mathbb{R}$, ein vollständiges Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ mit $\psi = \psi_F$. **q.e.d.**

Beweis: (i) Offenbar ist $W = \mathbb{R} \times X$ dazu äquivalent, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $V_t = X$. Die Bedingung (ii) besagt genau, dass $t \mapsto \psi(t,\cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Also folgt die Aussage aus dem Lemma 2.9.

(ii) folgt aus (i) und und Satz 2.10. **q.e.d.**

2.3 Die Lie–Ableitung

Definition 2.17. *Sei $\Phi : X \to Y$ ein Diffeomorphismus der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten X und Y und $F \in \mathrm{Vec}^r(Y)$ ein Vektorfeld auf Y. Dann definiert*

$$T(\Phi^{-1}) \circ F \circ \Phi : X \to TX$$

ein r mal stetig differenzierbares Vektorfeld von X. Dasselbe gilt auch, wenn Φ ein Homöomorphismus ist, so dass Φ und Φ^{-1} $(r+1)$ mal stetig differenzierbar sind.

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass alle Vektorfelder $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ lokale Homöomorphismen von V_t nach V_{-t} definieren. Wegen Korollar 2.12 gibt es für jedes $x \in X$ ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ die Mengen V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x sind. Dann ist für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ die Abbildung $\psi_F(t,\cdot) : x \mapsto \psi_F(t,x)$ ein stetig differenzierbarer Homöomorphismus von einer offenen Umgebung von x auf eine offene Umgebung von x.

Definition 2.18. *Seien $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ zwei Vektorfelder auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X. Sei ψ_F der entsprechende Fluss des Vektorfeldes F. Wir definieren die Lie–Ableitung des Vektorfeldes E nach dem Vektorfeld F an der Stelle x:*

$$(\theta_F\, E)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t,\cdot)) \circ E(\psi_F(t,x))$$

Dabei ist zu beachten, dass für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ der Tangentialvektor $E(\psi_F(t,x))$ in $T_{\psi_F(t,x)}X$ liegt und

$T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t,\cdot))$ den Raum $T_{\psi_F(t,x)}X$ nach $T_{\psi_F(-t,\psi_F(t,x))}X = T_xX$ abbildet.

Deshalb liegen die Werte von $T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t,\cdot)) \circ E(\psi_F(t,x))$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ in dem topologischen Vektorraum T_xX, so dass die Ableitung wohldefiniert ist, und ein Element von T_xX ist. Dadurch wird $\theta_F\, E$ zu einem stetigen Vektorfeld auf X.

Satz 2.19. *Seien $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ stetig differenzierbare Vektorfelder auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X. Dann gilt*

$$\theta_F\, E = [F, E].$$

Beweis: Im Beweis von Satz1.34 haben wir gesehen, dass jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ eine Derivation θ_F von $C^2(X,\mathbb{R})$ nach $C^1(X,\mathbb{R})$ definiert. Diese Derivation ist in jeder Karte gegeben durch die Richtungsableitungen längs des Vektorfeldes. Deshalb genügt es zu zeigen, dass die Ableitung nach t der Familie von Derivationen von den Vektorfeldern $T(\psi(-t,\cdot)) \circ E \circ \psi(t,\cdot)$ an der Stellte $t = 0$ gleich der Derivation des Vektorfeldes $[F, E]$ ist. Sei $\Phi : X \to Y$ ein Homöomorphismus. Dann sind

$$\Phi^* : \quad C(Y,\mathbb{R}) \to C(X,\mathbb{R}), \quad f \mapsto g = f \circ \Phi$$

und

$$\left(\Phi^{-1}\right)^* : \quad C(X,\mathbb{R}) \to C(Y,\mathbb{R}), \quad g \mapsto f = g \circ \Phi^{-1}$$

Algebrahomomorphismen, die voneinander die Umkehrabbildungen sind. Offenbar gilt für alle $E \in \mathrm{Vec}^1(Y)$

$$\theta_{T(\Phi^{-1})\circ E\circ\Phi} \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \theta_E \quad \Longleftrightarrow \quad \theta_{T(\Phi^{-1})\circ E\circ\Phi} = \Phi^* \circ \theta_E \circ \left(\Phi^{-1}\right)^*.$$

Daraus folgt

$$\theta_{\theta_F\, E} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \psi^*(t,\cdot) \circ \theta_E \circ \psi^*(-t,\cdot).$$

Lemma 2.20. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ ein r mal stetig differenzierbares Vektorfeld auf X und $\psi_F : W_F \to X$ der entsprechende Fluss. Dann ist für jede r mal stetig differenzierbare Funktion $f \in C^r(X, \mathbb{R})$ die Funktion $f \circ \psi_F$ eine r stetig differenzierbare Funktion auf W_F. Die Ableitung von $\psi_F^*(t, \cdot)(f) = f \circ \psi_F(t, \cdot)$ nach t bei $t = 0$ definiert eine r mal stetig differenzierbare Funktion*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \psi_F^*(t, \cdot)(f) : \quad X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\partial f \circ \psi_F}{\partial t}(0, x),$$

die Lie–Ableitung von f nach dem Vektorfeld F genannt wird. Es gilt

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \psi_F^*(t, \cdot)(f)(x) = \frac{\partial f \circ \psi_F}{\partial t}(0, x) = \theta_F(f)(x) \text{ für alle } f \in C^1(X, \mathbb{R}) \text{ und } x \in X.$$

Beweis: Weil der Fluss $\psi_F : W_F \to X$ dadurch definiert ist, dass die Tangentialabbildung $T_{0,x}(\psi)$ das Element $(1, 0) \in \mathbb{R} \times T_x X \simeq T_{(0,x)} W_F$ für alle $x \in X$ auf $F(x) \in T_x X$ abbildet, ist wegen der Kettenregel $\frac{\partial}{\partial t}(f \circ \psi_F)(0, x)$ gleich der Richtungsableitung von f an der Stelle $x \in X$ in Richtung $F(x)$, und wegen Satz 1.34 gleich $\theta_F(f)(x)$. **q.e.d.**

Fortsetzung des Beweises vom Satz 2.19: Wegen dem Lemma gilt dann

$$\begin{aligned}
\theta_{\theta_F E}(f) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \theta_E(f \circ \psi_F(-t, \cdot)) \circ \psi_F(t, \cdot) = \\
&= \theta_E\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f \circ \psi_F(-t, \cdot)\right) \circ \psi_F(0, \cdot) + \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \theta_E(f \circ \psi_F(0, \cdot)) \circ \psi_F(t, \cdot) \\
&= \theta_E \circ \theta_{-F}(f) + \theta_F \circ \theta_E(f) = [\theta_F, \theta_E](f) = \theta_{[F,E]}(f).
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\quad \theta_{\theta_F E} = \theta_{[F,E]} \quad$ und damit auch $\quad \theta_F E = [F, E]$. **q.e.d.**

Korollar 2.21. *Für zwei Vektorfelder $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist folgendes äquivalent:*

(i) *Die Vektorfelder E und F kommutieren, d.h. $[E, F] = 0 = [\theta_E, \theta_F]$.*

(ii) *Für alle $x \in X$ und $s, t \in \mathbb{R}$ mit $(t, x) \in W_E, (s, x) \in W_F, (t, \psi_F(s, x)) \in W_E$ und $(s, \psi_E(t, x)) \in W_F$ gilt* $\quad \psi_E(t, \psi_F(s, x)) = \psi_F(s, \psi_E(t, x))$.

(iii) $\theta_F E = 0$

(iv) $\theta_E F = 0$

(v) *Für alle $(t, x) \in W_F$ gilt $E(x) = T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t, \cdot))E(\psi_F(t, x))$*

(vi) *Für alle $(t, x) \in W_E$ gilt $F(x) = T_{\psi_E(t,x)}(\psi_E(-t, \cdot))F(\psi_E(t, x))$*

Beweis: Wegen der Bedingung (ii) an den lokalen Fluss ψ_F folgt aus (iii)

$$\frac{d}{dt}T(\psi_F(-t,\cdot))\circ E\circ\psi_F(t,\cdot)=\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}T(\psi_F(-(t+s),\cdot))\circ E\circ\psi_F(t+s,\cdot)=$$
$$=T(\psi_F(-t,\cdot))\circ\left(\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}T(\psi_F(-s,\cdot))\circ E\circ\psi_F(s,\cdot)\right)\circ\psi_F(t,\cdot)=0.$$

Also ist (iii) zu (v) äquivalent und analogerweise (iv) zu (vi). Wenn folgendes

$$E=T(\psi_F(-t,\cdot))\circ E\circ\psi_F(t,\cdot)\text{ bzw.}\qquad F=T(\psi_E(-t,\cdot))\circ F\circ\psi_E(t,\cdot)$$

gilt, dann sind auch die entsprechenden lokalen Flüsse gleich. Also gilt lokal

$$\psi_E(s,\cdot)=\psi_F(-t,\cdot)\circ\psi_E(s,\cdot)\circ\psi_F(t,\cdot)\qquad\psi_F(s,\cdot)=\psi_E(-t,\cdot)\circ\psi_F(s,\cdot)\circ\psi_E(t,\cdot)$$

Diese beiden Gleichungen sind offenbar beide äquivalent dazu, dass $\psi_E(s,\cdot)$ und $\psi_F(t,\cdot)$ lokal kommutieren, und damit auch zu (ii).

Wegen Satz 2.19 sind sowohl (iii) als auch (iv) äquivalent zu (i). Also sind sowohl (iii) und (v) als auch (iv) und (vi) äquivalent zu (i) und (ii). **q.e.d.**

Dieses Korollar besagt, dass die lokalen Homöomorphismen von zwei Vektorfeldern $E,F\in\mathrm{Vec}^1(X)$ genau dann miteinander kommutieren, wenn auch θ_E und θ_F miteinander kommutieren. Wenn die Vektorfelder vollständig sind, definieren sie zusammen eine zweidimensionale abelsche Untergruppe der Homöomorphismengruppe, bzw. der Diffeomorphismengruppe, wenn E und F glatt sind. Die Lie-Ableitung werden wir später auch auf Differentialformen definieren. Lemma 2.20 bedeutet dann, dass sie auf Funktionen mit der Richtungsableitung θ übereinstimmt.

2.4 Vektorfelder auf Untermannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt betrachten wir differenzierbare Untermannigfaltigkeiten X von einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit Y.

Satz 2.22. *Sei X eine Untermannigfaltigkeit der differenzierbaren Mannigfaltigkeit Y. Dann gilt folgendes:*

(i) *Die Einschränkung $TY|_X$ des Tangentialbündels von Y auf die Untermannigfaltigkeit X ist ein Vektorraumbündel über X.*

(ii) *Das Tangentialbündel TX von X ist ein Unterverktorraumbündel von der Einschränkung $TY|_X$. D.h. TX ist eine Untermannigfaltigkeit von $TY|_X$ und die Urbilder der Einschränkung von $\pi: TY|_X\to X$ auf $TX\subset TY|_X$ von allen Punkten $y\in X$ sind Untervektorräume der entsprechenden Fasern von TY.*

(iii) *Jeder r-mal (stetig) differenzierbare Schnitt von $TY|_X$ auf einer offenen Menge U von X ist die Einschränkung eines r-mal (stetig) differenzierbaren Schnittes von TY auf einer offenen Menge V von Y auf die Schnittmenge $U = V \cap X$. Dasselbe gilt für globale Schnitte, d.h. für $U = X$ kann V als Y gewählt werden.*

(iv) *Seien E und F stetig differenzierbare Vektorfelder von Y auf einer offenen Umgebung von X, deren Einschränkungen auf X in $TX \subset TY|_X$ liegt. Dann ist die Einschränkung von $[E, F]$ auf X gleich dem Kommutator $[E|_X, F|_X]$ der Einschränkungen von E und F auf X als Vektorfelder von X.*

(v) *Die Einschränkung eines Vektorfeldes $F \in \mathrm{Vec}^1(Y)$ auf X liegt genau dann in $TX \subset TY|_X$, wenn der entsprechende Fluss ψ_F die Untermannigfaltigkeit $(\mathbb{R} \times X) \cap W_F$ von W_F nach X abbildet, wenn also die lokalen Homöomorphismen $\psi_F(t, \cdot)$ die Untermannigfaltigkeit X invariant lassen.*

Beweis: (i) Sei $f : X \hookrightarrow Y$ die Einbettung der Untermannigfaltigkeit X in Y. Dann ist die Einschränkung $TY|_X$ des Tangentialbündels von Y auf die Untermannigfaltigkeit X offenbar das inverse Bild von TY unter f, also ein Vektorraumbündel auf X.

(ii) Offenbar ist für jeden Untervektorraum $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$ das Tangentialbündel $T\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraumbündel von $T\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Dann folgt aus Lemma 1.38, dass TX ein Untervektorraumbündel von $TY|_X$ ist.

(iii) Wir wählen eine offene Überdeckung von der Untermannigfaltigkeit $X \subset Y$ die aus Definitionsbereichen von verträglichen Karten von Y besteht, wie sie im Lemma 1.38 beschrieben sind. Weil sich jede r-mal (stetig) differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge U eines Unterraumes $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$ offenbar zu einer solchen r-mal (stetig) differenzierbaren Funktion auf das Urbild V der orthogonalen Projektion von $\mathbb{R}^m$ auf $\mathbb{R}^n$ von U fortsetzen lässt, indem wir diese orthogonale Projektion mit der Funktion verknüpfen, folgt die Aussage für alle offenen Mengen U, die in einer offenen Menge der Überdeckung von X enthalten sind. Mit Hilfe einer entsprechenden Zerlegung der Eins folgt die Aussage für beliebige U. Wenn wir die offene Überdeckung von $X \subset Y$ zu einer offenen Überdeckung von Y ergänzen, wobei wir nur solche offenen Mengen hinzufügen, die mit einer Umgebung von $X \subset Y$ schnittfremd sind, dann folgt mit der entsprechenden Zerlegung der Eins die Aussage für globale Vektorfelder $TY|_X$.

(v) Wegen dem Satz von Picard–Lindelöf ist jede Lösung eines Anfangswertproblems

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) \text{ mit } x(0) = y$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$, deren Einschränkung $f|_{U \cap \mathbb{R}^m}$ auf die Schnittmenge $U \cap \mathbb{R}^n$ von U mit einem Unterraum $\mathbb{R}^n$ von $\mathbb{R}^m$ eine Abbildung mit Werten in diesem Unterraum $\mathbb{R}^n$ ist, auch eine Abbildung mit Werten in diesem

Unterraum $\mathbb{R}^n$, wenn $y \in \mathbb{R}^n$ in diesem Unterraum liegt. Aus Lemma 1.38 folgt, dass die Flüsse von Vektorfeldern von Y, deren Einschränkungen auf X in $TX \subset TY|_X$ liegen, die Untermannigfaltigkeit invariant lassen.

Wenn sie umgekehrt die Untermannigfaltigkeit X invariant lassen, dann definieren sie einen lokalen Fluss auf X und wegen Satz 2.10 ein Vektorfeld auf X. Dieses Vektorfeld muss wegen der im Beweis von Satz 2.10 benutzten Formel für das Vektorfeld als partielle Ableitung des Flusses, mit der Einschränkung des entsprechenden Vektorfeldes von Y auf die Untermannigfaltigkeit X übereinstimmen.

(iv) folgt aus (v) und Satz 2.19. **q.e.d.**

Umgekehrt stellt sich die Frage, wann ein Untervektorraumbündel (E, Y, π) von dem Tangentialbündel (TY, Y, π), das Tangentialbündel einer Untermannigfaltigkeit ist. Eine Antwort von Frobenius lautet genau dann, wenn alle Kommutatoren von Schnitten von dem Untervektorraumbündel von TY, wieder Schnitte von dem Untervektorraumbündel sind. Wegen (iv) aus dem vorangehenden Satz ist dies eine notwendige Bedingung. Das sie auch hinreichend ist wollen wir hier nicht beweisen.

2.5 Zusammenfassung

Wir haben jetzt drei äquivalente Beschreibungen von Vektorfeldern kennengelernt:

Schnitte des Tangentialbündels: Nach unser Definition sind Vektorfelder Schnitte des Tangentialbündels.

Derivationen: Wegen Satz 2.2 gibt es eine Eins–zu–Eins Beziehung zwischen Vektorfeldern und Derivationen von der Algebra der differenzierbaren Funktionen. Dadurch bilden die Vektorfelder eine Lie–Algebra.

Lokale Flüsse: Wegen Satz 2.10 gibt es eine Eins–zu–Eins Beziehung zwischen Vektorfeldern und lokalen Flüssen auf der Mannigfaltigkeit. Dadurch bilden die Vektorfelder so etwas wie die Lie–Algebra der lokalen Diffeomorphismengrupppe.

Die lokalen Flüsse, die von Vektorfeldern erzeugt werden, sind eindimensionale Untergruppen der lokalen Diffeomorphismen. Durch diese lokalen Diffeomorphismen können wir alle möglichen geometrischen Objekte auf der Mannigfaltigkeit transformieren. Die entsprechenden Ableitungen werden dann Lie–Ableitung genannt. Lemma 2.20 beschreibt dann die Lie–Ableitung von Funktionen, und Satz 2.19 die Lie–Ableitung von Vektorfeldern. Im nächsten Kapitel werden wir auch die Lie–Ableitung von anderen Tensorfeldern kennenlernen.