Weierstraß-Darstellungen für Flächen in 4-dimensionalen Räumen

Markus Knopf

Abstract

Diese Arbeit soll eine kurze Einführung in die Darstellung von Flächen in 4-dimensionalen Räumen mithilfe der Weierstraß-Darstellungen geben. Es wird zunächst eine Untersuchung für den $\mathbb{R}^3$ vorgenommen, die sich dann ohne größere Mühen auf den $\mathbb{R}^4$ ausweiten lässt.

1 Einführung

Notation 1 *Es bezeichne durchweg*

$$f_x := \partial_x f := \frac{\partial f}{\partial x}$$

und die Ableitungen höherer Dimension seien analog definiert. Wir werden je nach Bedarf zwischen diesen Darstellungen wechseln.

Eine analytische Methode zur Untersuchung von Flächen wird durch die Weierstraß-Darstellung für *Minimalflächen* gegeben. Diese Darstellung ermöglicht es, jede erdenkliche Minimalfläche in 3-dimensionalen euklidischen Räumen mithilfe zweier holomorpher Funktionen zu konstruieren.

Eine Verallgemeinerung dieser Darstellung, um nicht notwendigerweise minimale Flächen zu konstruieren, basiert auf folgendem linearen System:

$$\begin{aligned} \psi_z &= p\varphi \quad , \\ \varphi_{\bar{z}} &= -p\psi \end{aligned} \tag{1.1}$$

wobei $\psi(z,\bar{z})$, $\varphi(z,\bar{z})$ komplexwertige Funktionen und $p(z,\bar{z})$ reellwertig ist.

Die in (1.1) auftretenden Ableitungen komplexwertiger Funktionen gehen auf eine Konstruktion von H. Poincaré (1899) zurück, der für total differenzierbare Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ (mit $D \subset \mathbb{C}$ offen) folgende Differentialoperatoren einführte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &:= \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}) \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &:= \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}) \end{aligned}$$

Für diese Differentialoperatoren wurden durch W. Wirtinger (1927) ein systematischer Kalkül - der sogenannte *Wirtingerkalkül* - entwickelt. Dass diese Operatoren sinnvoll definiert sind, kann man wie folgt verstehen:

Die oben beschriebenen $f : D \to \mathbb{C}$ können als Funktionen in (x, y) vermöge dem Isomorphismus $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ aufgefasst werden. Identifiziert man das Paar (x, y) mit $(z, \bar{z})$ - wobei $z = x+iy$ und $\bar{z} = x-iy$ - so kann man z und $\bar{z}$ auch als Funktionen in x und y schreiben $(z(x, y),\ \bar{z}(x, y))$. Mit dieser Überlegung und unter Zuhilfenahme der Kettenregel kann man wie folgt rechnen:

$$\begin{aligned} \partial_x f &= \partial_z f \partial_x z + \partial_{\bar{z}} f \partial_x \bar{z} \;=\; \partial_z f + \partial_{\bar{z}} f \\ \partial_y f &= \partial_z f \partial_y z + \partial_{\bar{z}} f \partial_y \bar{z} \;=\; i\partial_z f - i\partial_{\bar{z}} f \end{aligned}$$

Durch Zusammensetzen der beiden Ausdrücke erhält man

$$\begin{aligned} \partial_z f + \partial_z f = \partial_x f - i\partial_y f \quad &\Rightarrow \quad \partial_z f = \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f) \\ \partial_{\bar{z}} f + \partial_{\bar{z}} f = \partial_x f + i\partial_y f \quad &\Rightarrow \quad \partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f) \end{aligned}$$

Man ist daran interessiert, die Flächen im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ mithilfe der obigen Gleichungen zu parametrisieren. Hierzu sucht man nach Abb. $X^1, ..., X^3(, X^4)$, die von einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ in der komplexen Ebene zusammen in den $\mathbb{R}^3$ (bzw. $\mathbb{R}^4$) gehen (und somit $\mathbb{C} \ni z \mapsto X^j(z) \in \mathbb{R}\ \forall\ j$).

Wir wollen X^j als Stammfunktion eines Integralausdrucks erhalten und fordern zusätzlich, dass sowohl X^j als auch ∇X^j glatt sind. Dann impliziert das Schwarzsche Lemma folgende Eigenschaft:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X^j}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 X^j}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 X^j}{\partial z \partial \bar{z}} &= \frac{\partial^2 X^j}{\partial \bar{z} \partial z} \end{aligned}$$

Diese Beziehung wird auch als *Integrabilitätsbedingung* bezeichnet. Hierzu ist es zunächst hilfreich einen Ansatz zu betrachten, der (unter Zuhilfenahme des Wirtingerkalküls) zu vorgegebenen Funktionen eine Stammfunktion auf natürliche Weise bereitstellt:

$$\begin{aligned}
X^j(z) - X^j(z_0) &= \int_{z_0}^{z} X^j_x dx + X^j_y dy \\
&= \int_{z_0}^{z} \frac{1}{2}(X^j_x - iX^j_y)(dx + idy) + \frac{1}{2}(X^j_x + iX^j_y)(dx - idy) \\
&= \int_{z_0}^{z} X^j_z dz + X^j_{\bar{z}} d\bar{z} \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} X^j(z(t))dt \\
&= \int_0^1 (\frac{\partial X^j}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial X^j}{\partial y}\frac{dy}{dt})dt \\
&= X^j(z(1)) - X^j(z(0)) \\
&= X^j(z) - X^j(z_0)
\end{aligned}$$

In den letzen Zeilen haben wir ausgenutzt, dass man einen Weg von z_0 nach z durch eine stetige Abbildung beschreiben kann:

$$z(t) = (x(t), y(t))$$

mit $z(0) = z_0$, $z(1) = z$ und darüber hinaus durch die Integrabilitätsbedingung die Existenz einer Stammfunktion gesichert, so dass wir mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung noch die Wegunabhängigkeit dieses Integralausdrucks gezeigt haben. Durch geschickte Wahl von z_0 verschwindet $X^j(z_0)$ und man erhält Gleichungen wie in (2.1).

2 Immersionen von Flächen in 3-dimensionalen Räumen

Hier wollen wir nun unter Verwendung der obigen Überlegungen die aus der Differentialgeometrie bekannten Größen wie mittlere Krümmung und Konformität einer Immersion untersuchen.

Lemma 1 *Eine konforme Immersion einer Fläche in den* $\mathbb{R}^3$ *mit Koordinaten* X^1, X^2, X^3 *wird durch folgende Formeln definiert:*

$$\begin{aligned} X^2 + iX^1 &= i\int_\Gamma (\overline{\psi}^2 dz' - \overline{\varphi}^2 d\bar{z}'), \\ X^3 &= \int_\Gamma (\overline{\psi}\varphi dz' + \overline{\varphi}\psi d\bar{z}') \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei Γ *ein Weg in* $\mathbb{C}$ *ist. Die induzierte Metrik auf einer Fläche lautet*

$$ds^2 = (|\psi|^2 + |\varphi|^2)^2 dz d\bar{z}, \tag{2.2}$$

die mittlere Krümmung lautet

$$H = 2\frac{p}{|\psi|^2 + |\varphi|^2} \tag{2.3}$$

und das Willmore-Funktional lautet

$$W = 4\int p^2 dx dy \tag{2.4}$$

Beweis X^3 ist integrabel, denn es gilt unter Verwendung der Gleichungen (1.1) und der Tatsache, dass hier $\overline{p} = p$:

$$\begin{aligned} X^3_{z\bar{z}} &= (\overline{\psi}\varphi)_{\bar{z}} = \overline{\psi}_{\bar{z}}\varphi + \varphi_{\bar{z}}\overline{\psi} = \overline{(\psi_z)}\varphi - p\psi\overline{\psi} = \overline{p\varphi}\varphi - p\,|\psi|^2 = p\,|\varphi|^2 - p\,|\psi|^2 \\ X^3_{\bar{z}z} &= (\overline{\varphi}\psi)_z = \overline{\varphi}_z\psi + \psi_z\overline{\varphi} = \overline{(\varphi_{\bar{z}})}\psi + p\varphi\overline{\varphi} = p\,|\varphi|^2 - p\,|\psi|^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Somit folgt $X^3_{\bar{z}z} = X^3_{z\bar{z}}$ und damit die Integrabilität von X^3. Analog folgt die Integrabilität von $X^2 + iX^1$:

$$\begin{aligned} (X^2 + iX^1)_{z\bar{z}} &= \overline{\psi}^2_{\bar{z}} = 2\overline{\psi}\,\overline{\psi}_{\bar{z}} = 2\overline{\psi}\overline{(\psi_z)} = 2\overline{\psi}\overline{(p\varphi)} = 2p\overline{\psi}\overline{\varphi} \\ (X^2 + iX^1)_{\bar{z}z} &= -\overline{\varphi}^2_z = -2\overline{\varphi}\,\overline{\varphi}_z = -2\overline{\varphi}\overline{(\varphi_{\bar{z}})} = -2\overline{\varphi}\overline{(-p\psi)} = 2p\overline{\psi}\overline{\varphi} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Diese Immersion ist konform, denn es gilt $\langle (X^1, X^2, X^3)_z, (X^1, X^2, X^3)_z \rangle = \langle (X^1, X^2, X^3)_{\bar{z}}, (X^1, X^2, X^3)_{\bar{z}} \rangle = (X^1_z)^2 + (X^2_z)^2 + (X^3_z)^2 = 0$:

$$(X^3_z)^2 = (\overline{\psi}\varphi)^2$$

und weiter $(X^2 + iX^1)_z = \overline{\psi}^2, (X^2 + iX^1)_{\bar{z}} = -\overline{\varphi}^2$. Daraus folgt (unter Verwendung von $\overline{(X^2 + iX^1)_{\bar{z}}} = (\overline{X^2 + iX^1})_z$):

$$(\overline{X^2 + iX^1})_z \cdot (X^2 + iX^1)_z = -\varphi^2 \cdot \overline{\psi}^2 = (X^2_z)^2 + (X^1_z)^2$$

$$\Rightarrow \langle (X^1,X^2,X^3)_z,(X^1,X^2,X^3)_z\rangle = -\varphi^2\overline{\psi}^2+\varphi^2\overline{\psi}^2 = 0$$

Außerdem gilt unter Verwendung des Wirtingerkalküls:

$$\begin{aligned}
X^1_z\cdot X^1_{\bar z}+X^2_z\cdot X^2_{\bar z} &= \frac{1}{2}(X^1_x-iX^1_y)\frac{1}{2}(X^1_x+iX^1_y)+\frac{1}{2}(X^2_x-iX^2_y)\frac{1}{2}(X^2_x+iX^2_y)\\
&= \frac{1}{4}((X^1_x)^2+(X^2_x)^2+(X^1_y)^2+(X^2_y)^2)\\
&= \frac{1}{4}((X^2+iX^1)_x\cdot(X^2-iX^1)_x+(X^2+iX^1)_y\cdot(X^2-iX^1)_y)\\
&= \frac{1}{4}((X^2+iX^1)_x\cdot(\overline{X^2+iX^1})_x+i(X^2+iX^1)_x\cdot(\overline{X^2+iX^1})_y\\
&\quad -i(X^2+iX^1)_x\cdot(\overline{X^2+iX^1})_y+(X^2+iX^1)_y\cdot(\overline{X^2+iX^1})_y)\\
&= \frac{1}{4}((X^2+iX^1)_x((\overline{X^2+iX^1})_x+i(\overline{X^2+iX^1})_y)\\
&\quad +(\overline{X^2+iX^1})_y((X^2+iX^1)_y-i(X^2+iX^1)_x)\\
&= \frac{1}{4}((X^2+iX^1)_x\cdot 2\cdot(\overline{X^2+iX^1})_{\bar z}-i(\overline{X^2+iX^1})_y\cdot 2\cdot(X^2+iX^1)_{\bar z})\\
&= \frac{1}{2}(((X^2+iX^1)_z+(X^2+iX^1)_{\bar z})\overline{((X^2+iX^1)_z)}\\
&\quad +(\overline{((X^2+iX^1)_{\bar z})}-\overline{((X^2+iX^1)_z)})(X^2+iX^1)_{\bar z})\\
&= \frac{1}{2}((X^2+iX^1)_z\cdot(\overline{X^2+iX^1})_{\bar z}+(X^2+iX^1)_{\bar z}\cdot(\overline{X^2+iX^1})_z)\\
&= \frac{1}{2}(|\psi|^4+|\varphi|^4)
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
\big\langle(X^1,X^2,X^3)_z,(X^1,X^2,X^3)_{\bar z}\big\rangle &= \frac{1}{2}(|\psi|^4+|\varphi|^4)+|\psi|^2|\varphi|^2\\
&= \frac{1}{2}(|\psi|^2+|\varphi|^2)^2\\
&=: \frac{1}{2}v^2
\end{aligned}$$

mit $v^2 = (|\psi|^2 + |\varphi|^2)^2$ als konformer Faktor. Die mittlere Krümmung H lautet hier nun

$$
\begin{aligned}
H &= 2\frac{\sqrt{\langle (X^1, X^2, X^3)_{z\bar{z}}, (X^1, X^2, X^3)_{z\bar{z}} \rangle}}{v^2} \\
&= 2\frac{\sqrt{(X^1_{z\bar{z}})^2 + (X^2_{z\bar{z}})^2 + (X^3_{z\bar{z}})^2}}{v^2} \\
&= 2\frac{\sqrt{4p^2|\psi|^2|\varphi|^2 + (p|\varphi|^2 - p|\psi|^2)^2}}{v^2} \\
&= 2\frac{\sqrt{4p^2|\psi|^2|\varphi|^2 + p^2|\varphi|^4 - 2p^2|\varphi|^2|\psi|^2 + p|\psi|^4}}{v^2} \\
&= 2\frac{\sqrt{p^2(|\psi|^2 + |\varphi|^2)^2}}{v^2} \\
&= 2\frac{p}{|\psi|^2 + |\varphi|^2}
\end{aligned}
$$

wobei wir im dritten Schritt die Gleichungen (2.5) und außerdem folgende Beobachtung verwendet haben:

$$
\begin{aligned}
(X^2_{z\bar{z}})^2 + (X^1_{z\bar{z}})^2 &= (X^2 + iX^1)_{z\bar{z}} \cdot (X^2 - iX^1)_{z\bar{z}} \\
&= (X^2 + iX^1)_{z\bar{z}} \cdot \overline{((X^2 + iX^1)_{\bar{z}z})} \\
&= (X^2 + iX^1)_{z\bar{z}} \cdot \overline{((X^2 + iX^1)_{z\bar{z}})} \\
&= 2p\overline{\psi}\overline{\varphi} \cdot (\overline{2p\overline{\psi}\overline{\varphi}}) \\
&= 4p^2|\psi|^2|\varphi|^2
\end{aligned}
$$

wobei in den letzen Schritten auf (2.6) zurückgegriffen wird. Abschließend berechnet sich das Willmore-Funktional zu

$$
\begin{aligned}
W = \int H^2\sqrt{detg}dxdy &= \int 4\frac{p^2}{|\psi|^2 + |\varphi|^2} \cdot (|\psi|^2 + |\varphi|^2)dxdy \\
&= 4\int p^2 dxdy
\end{aligned}
$$

mit $g = v^2 \cdot \mathbb{I}$ induziertes Volumenelement. Dies schließt den Beweis von Lemma 1.

$\square$

Bemerkung 1 *Der Spezialfall von Flächen konstanter mittlerer Krümmung (sogenannten cmc-Flächen) lässt sich mit den obigen Gleichungen herleiten: Aus*

$$H = 0 = 2\frac{p}{|\psi|^2 + |\varphi|^2}$$

folgt $p = 0$ *und damit mit* (1.1)*:*

$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{z}} &= 0 \\ \psi_{\bar{z}} &= 0 \ , \end{aligned}$$

also sind φ *und* ψ *holomorph.*

3 Immersionen von Flächen in 4-dimensionalen Räumen

Die Ausweitung des Konstruktionsprinzips für die Parametrisierung von Flächen in $\mathbb{R}^3$ führt zur Parametrisierung von Flächen in $\mathbb{R}^4$ mit Metriken verschiedener Signatur.

Proposition 1 *Die verallgemeinerten Weierstraß-Formeln*

$$\begin{aligned} X^1 + iX^2 &= \int_\Gamma (-\varphi_1\varphi_2 dz' + \psi_1\psi_2 d\bar{z}') \ , \\ X^1 - iX^2 &= \int_\Gamma \left(\overline{\psi}_1\overline{\psi}_2 dz' - \overline{\varphi}_1\overline{\varphi}_2 d\bar{z}'\right) \ , \\ X^3 + iX^4 &= \int_\Gamma \left(\overline{\psi}_2\varphi_1 dz' + \psi_1\overline{\varphi}_2 d\bar{z}'\right) \ , \\ X^3 - iX^4 &= \int_\Gamma \left(\overline{\psi}_1\varphi_2 dz' + \psi_2\overline{\varphi}_1 d\bar{z}'\right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

wobei

$$\begin{aligned} \psi_{1z} &= p\varphi_1 \ , \qquad & \psi_{2z} &= \overline{p}\varphi_2 \ , \\ \varphi_{1\bar{z}} &= -\overline{p}\psi_1 \qquad & \varphi_{2\bar{z}} &= -p\psi_2 \ , \end{aligned} \tag{3.2}$$

ψ_α*,* φ_α $(\alpha = 1, 2)$*,* p *komplexwertige Funktionen von* z*,* $\bar{z}$ *sind und* Γ *ein Weg in* $\mathbb{C}$ *ist, definieren eine konforme Immersion einer Fläche in* $\mathbb{R}^4$*:* $X^i(z, \bar{z}) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^4$*. Die induzierte Metrik einer Fläche ist von der Form*

$$ds^2 = u_1 u_2 dz d\bar{z} \tag{3.3}$$

wobei $u_\alpha = |\psi_\alpha|^2 + |\varphi_\alpha|^2$, $\alpha = 1, 2$, *die mittlere Krümmung lautet*

$$\vec{H}^2 = \frac{4|p|^2}{u_1 u_2} \tag{3.4}$$

das Willmore-Funktional $W = \int \vec{H}^2\,[dS]$ *berechnet sich zu*

$$W = 4 \int |p|^2 dx\, dy \quad . \tag{3.5}$$

Beweisskizze Die Integrabilität der einzelnen Ausdrücke verläuft vollkommen analog zum Beweis von Lemma 1. Der Beweis der Konformität und die Gewinnung des konformen Faktors ist hier einfach ($F := (X^1, X^2, X^3, X^4)$):

$$\begin{aligned}
\langle F_z, F_{\bar z}\rangle &= \frac{1}{2}((X^1 + iX^2)_z \cdot (X^1 - iX^2)_{\bar z} + (X^1 + iX^2)_{\bar z} \cdot (X^1 - iX^2)_z) \\
&\quad + \frac{1}{2}((X^3 + iX^4)_z \cdot (X^3 - iX^4)_{\bar z} + (X^3 + iX^4)_{\bar z} \cdot (X^3 - iX^4)_z) \\
&= \frac{1}{2}((-\varphi_1\varphi_2) \cdot (-\overline{\varphi}_1\overline{\varphi}_2) + \psi_1\psi_2 \cdot \overline{\psi}_1\overline{\psi}_2) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\overline{\psi}_2\varphi_1 \cdot \psi_2\overline{\varphi}_1 + \psi_1\overline{\varphi}_2 \cdot \overline{\psi}_1\varphi_2) \\
&= \frac{1}{2}(|\psi_1|^2|\varphi_2|^2 + |\psi_1|^2|\psi_2|^2 + |\psi_2|^2|\varphi_1|^2 + |\psi_1|^2|\varphi_2|^2) \\
&= \frac{1}{2}((|\psi_1|^2 + |\varphi_1|^2) \cdot (|\psi_2|^2 + |\varphi_2|^2)) \\
&=: \frac{1}{2}v^2
\end{aligned}$$

Auch der Rest des Beweises unterscheidet sich nicht wesentlich von dem von Lemma 1, wobei zu beachten ist, dass

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= \frac{2}{u_1 u_2}\left[Re\,(p\psi_2\varphi_1 + \overline{p}\psi_1\varphi_2)\,, Im\,(p\psi_2\varphi_1 + \overline{p}\psi_1\varphi_2)\,,\right. \\
&\qquad \left. Re\left(p\varphi_1\overline{\varphi}_2 - \overline{p}\psi_1\overline{\psi}_2\right), Im\left(p\overline{\psi}_1\psi_2 - \overline{p\varphi}_1\varphi_2\right)\right]
\end{aligned}$$

mit Re, Im als Real- bzw. Imaginärteil.

□

Die Formeln und Beweise für die anderen Fälle von auftretenden Signaturen gleichen sich, weshalb hier der Vollständigkeit halber nur noch die entsprechenden Aussagen vorgestellt (jedoch nicht bewiesen) werden.

Proposition 2 *Die verallgemeinerten Weierstraß-Formeln*

$$\begin{aligned}
X^1 + iX^2 &= \int_\Gamma (\varphi_1\varphi_2 dz' + \psi_1\psi_2 d\overline{z}') \ , \\
X^1 - iX^2 &= \int_\Gamma \left(\overline{\psi}_1\overline{\psi}_2 dz' + \overline{\varphi}_1\overline{\varphi}_2 d\overline{z}'\right) \ , \\
X^3 + iX^4 &= i\int_\Gamma \left(\overline{\psi}_1\varphi_2 dz' + \psi_2\overline{\varphi}_1 d\overline{z}'\right) \ , \\
X^3 - iX^4 &= -i\int_\Gamma \left(\overline{\psi}_2\varphi_1 dz' + \psi_1\overline{\varphi}_2 d\overline{z}'\right)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

wobei

$$\begin{array}{ll}
\psi_{1z} = p\varphi_1 \ , & \psi_{2z} = \overline{p}\varphi_2 \ , \\
\varphi_{1\overline{z}} = \overline{p}\psi_1 & \varphi_{2\overline{z}} = p\psi_2 \ ,
\end{array} \tag{3.7}$$

ψ_α, φ_α, p komplexwertige Funktionen sind und Γ ein Weg in $\mathbb{C}$ ist, definieren eine konforme Immersion $\vec{X} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^{2,2}$ einer Fläche in den Raum $\mathbb{R}^{2,2}$. Die induzierte Metrik lautet

$$ds^2 = v_1 v_2 dz d\overline{z} \tag{3.8}$$

wobei $v_\alpha = |\psi_\alpha|^2 - |\varphi_\alpha|^2$, $\alpha = 1,2$, die mittlere Krümmung ist von der Form

$$\vec{H}^2 = -\frac{4|p|^2}{v_1 v_2} \tag{3.9}$$

und das Willmore-Funktional $W = \int \vec{H}^2 \, [dS]$ ist gegeben durch

$$W = -4\int |p|^2 dx dy \ . \tag{3.10}$$

Proposition 3 *Die Weierstraß-Formeln*

$$\begin{aligned}
X^1 + iX^2 &= \int_\Gamma \left(\overline{\psi}_2\varphi_1 dz' + \psi_1\overline{\varphi}_2 d\overline{z}'\right) \ , \\
X^1 - iX^2 &= \int_\Gamma \left(\overline{\psi}_1\varphi_2 dz' + \psi_2\overline{\varphi}_1 d\overline{z}'\right) \ , \\
X^3 + X^4 &= \int_\Gamma \left(\overline{\psi}_1\varphi_1 dz' + \psi_1\overline{\varphi}_1 d\overline{z}'\right) \ , \\
X^3 - X^4 &= -\int_\Gamma \left(\overline{\psi}_2\varphi_2 dz' + \psi_2\overline{\varphi}_2 d\overline{z}'\right)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

wobei

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha z} &= p\varphi_\alpha \ , \\ \varphi_{\alpha \bar{z}} &= q\psi_\alpha \end{aligned} \quad , \quad \alpha = 1,2 \tag{3.12}$$

p und q reelwertige Funktionen sind und Γ *ein Weg in* $\mathbb{C}$ *ist, definieren eine konforme Immersion einer Fläche in den sogenannten Minkowski-Raum* $\vec{X} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^{3,1}$*. Die induzierte Metrik auf einer Fläche lautet*

$$ds^2 = |\psi_1\varphi_2 - \psi_2\varphi_1|^2 dz d\bar{z} \ , \tag{3.13}$$

die mittlere Krümmmung $\vec{H}^2$ *bzw. das Willmore-Funktional lauten*

$$\vec{H}^2 = -\frac{4pq}{|\psi_1\varphi_2 - \psi_2\varphi_1|^2} \ , \ W = -4\int pq dx dy. \tag{3.14}$$

Quellen

[1] Konopelchenko, B.G., *Weierstrass representations for surfaces in 4D spaces and their integrable deformations via DS hierarchy*, Dipartimento di Fisica, Universitá di Lecce, Lecce, Italy, 2003

[2] Freitag, E.; Busam, R. *Funktionentheorie 1*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 4. Auflage, 2006