Übungsblatt 6

Funktionalanalysis
WS 2005/06
Martin Schmidt

1. Sei V ein Banachraum und W ein normierter Vektorraum. Sein $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}(V,W)$, die punktweise gegen eine Abbildung $A : V \to W$ konvergiert.

   (a) Zeige, dass A in $\mathcal{L}(V,W)$ liegt.

   (b) Zeige, dass gilt
   $$\|A\| \leq \sup_{N\in\mathbb{N}} \inf\{\|A_n\| \mid n \geq N\}.$$

   (c) Gib ein Beispiel an, in dem A_n nicht bezüglich der Norm von $\mathcal{L}(V,W)$ gegen A konvergiert.

2. Seien V und W Banachräume und $A : V \to W$ und $B : W' \to V'$ lineare Abbildungen, für die gilt $C(A(v)) = (B(C))(v)$ für alle $v \in V$ und alle $C \in W'$.

   (a) Zeige, dass die Komposition $i \circ A$ von A mit der kanonischen Isometrie $i : W \to W''$ beschränkt ist.

   (b) Zeige, dass A und B stetig sind.

3. Sei V ein normierter Vektorraum und X und Y zwei konvexe abgeschlossene Teilmengen, so dass $0 < \inf\{\|x-y\| \mid x \in X, y \in Y\}$.

   (a) Zeige, dass mit einem geeignetem $\epsilon > 0$ die beiden Mengen $\bigcup_{x\in X} B(x,\epsilon)$ und $\bigcup_{y\in Y} B(y,\epsilon)$ disjunkte offene konvexe Mengen sind.

   (b) Zeige, dass es für jedes $A \in V' \setminus \{0\}$ und jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $A\left[\bigcup_{x\in X} B(x,\epsilon)\right] = \bigcup_{x\in X} B(A(x),\delta)$.

   (c) Zeige, dass es eine stetige lineare Abbildung $A \in V'$ gibt, so dass gilt $\inf\{|A(x) - A(y)| \mid x \in X, y \in Y\} = 1$.

4. Sei V ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ eine zweite Norm auf V, mit $\|v\|_2 \leq C\|v\|_1$ für alle $v \in V$ mit einem $C > 0$.

   (a) Zeige, dass V zusammen mit der Norm $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2$ vollständig ist.

   (b) Zeige, dass die identische Abbildung von V aufgefaßt als Abbildung von dem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|_0)$ in die normierten Vektorräumen $(V, \|\cdot\|_1)$ bzw. $(V, \|\cdot\|_2)$ stetig ist.

   (c) Zeige, dass $(V, \|\cdot\|_2)$ genau dann ein Banachraum ist, wenn die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent sind.

Abgabe bis zum Donnerstag, den 1.12.2005 vor der Übung