Funktionalanalysis
WS 2005/06
Martin Schmidt

Übungsblatt 1

Sei V ein normierter Vektorraum. Zeige in den folgenden Schritten, dass die Vervollständigung des metrischen Raumes V mit der von der Norm induzierten Metrik d ein Banachraum ist, der bis auf Isomorphie von Banachräumen eindeutig ist.

(i) Zeige, dass für beliebige metrische Räume X und Y die Vervollständigung des kartesischen Produktes $X \times Y$ der metrischen Räume X und Y das kartesische Pordukt der Vervollständigungen von X und Y ist. Die Metrik des kartesischen Produktes $X \times Y$ ist dabei definiert als $d((x,y),(x',y')) = d(x,x') + d(y,y')$.

(ii) Zeige dass die Abbildung $+ : V \times V \to V, \quad (v,w) \mapsto v + w$ und für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ die Abbildung $V \to V, \quad v \mapsto \lambda v$ Lipschitz–stetig sind. Folgere daraus, dass V ein Vektorraum ist.

(iii) Zeige, das die Vervollständigung von dem normierten Vektorraum V eine Norm besitzt, die die Metrik der Vervollständigung des metrischen Raumes V induziert. Dann ist diese Vervollständigung ein Banachraum.

(iv) Zeige, dass jede lineare stetige Abbildung $A : V \to W$ von dem normierten Vektorraum V in einen Banachraum W eine eindeutige Fortsetzung auf die Vervollständigung besitz, d.h. dass es eine stetige lineare Abbildung von der Vervollständigung von V (als normieter Vektorraum) nach W gibt, die auf V mit A übereinstimmt. Folgere daraus, dass die Vervollständigung von V als Banachraum bis auf Isomorphie von Banachräumen eindeutig ist.

Abgabe bis zum Mittwoch, den 26.10.2005 vor der Übung