Übungsblatt 7

Funktionalanalysis
WS 2005/06
Martin Schmidt

1. In dieser Aufgabe werden wir Nullmengen konstruieren, die nicht abzählbar sind. Diese Konstruktion geht auf Cantor zurück. Diese Mengen heissen deshalb auch Cantormengen. Sei $p > 1$ eine natürliche Zahl und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$$A_0 = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} (pm{+}1, pm{+}2) \quad \text{und} \qquad A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid p^n x \in A_0\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Zeige, dass für alle $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ das relative Komplement $C_p = [0,1] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap [0,1])$ der Menge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap [0,1])$ in $[0,1]$ eine abgeschlossene Nullmenge ist.

   (b) Jede Zahl $x \in [0,1)$ läßt sich eindeutig schreiben als eine Reihe

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z_n}{p^n} \text{ mit } z_n \in \{0,\ldots,p-1\} \text{ und } \lim_{n\to\infty} z_n \neq p-1.$$

   Bestimme alle die Ziffernfolgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{0,\ldots,p-1\}$, die Zahlen in C_p entsprechen. Folgere, dass für $p > 2$ die Menge C_p gleichmächtig zum relativen Komplement einer abzählbaren Teilmenge von $[0,1]$ in $[0,1]$ ist.

2. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung aller rationalen Zahlen in $[0,1]$ und für jedes $\epsilon > 0$ A_ϵ folgende Teilmenge von $[0,1]$:

$$A_\epsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left((x_n - 2^{-n-1}\epsilon, x_n + 2^{-n-1}\epsilon) \cap [0,1]\right).$$

   (a) Zeige, dass für alle $0 < \epsilon$ die Menge A_ϵ in $[0,1]$ offen ist.

   (b) Zeige, dass für alle $\epsilon > 0$ der Rand von der Menge A_ϵ gleich dem relativen Komplement von A_ϵ in $[0,1]$ ist. Hierbei ist der Rand ∂A_ϵ von A_ϵ definiert als die Schnittmenge vom Abschluss von A_ϵ mit dem Abschluss des relativen Komplementes von A_ϵ in $[0,1]$.

   (c) Zeige, dass für jedes $0 < \epsilon$ die Unstetigkeitsstellen der charkteristischen Funktion von A_ϵ genau aus allen Elementen des relativen Komplements von A_ϵ in $[0,1]$ bestehen.

   (d) Zeige, dass für alle $\epsilon > 0$ die charakteristische Funktion von A_ϵ eine Lebesgue–integrable Funktion ist.

   (e) Zeige, dass für $0 < \epsilon < 1$ das Integral über die charakteristische Funktion von A_ϵ zwischen Null und Eins liegt. Folgere daraus, dass weder A_ϵ noch das relative Komplement von A_ϵ in $[0,1]$ eine Nullmenge ist.

Abgabe bis zum Donnerstag, den 8.12.2005 vor der Übung