Übungsblatt 8

Funktionalanalysis
WS 2005/06
Martin Schmidt

1. Entscheide, ob folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgues–integrabel sind:

   (a) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} |x|^{-1/2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$.

   (c) $f(x) = \begin{cases} |x|^{-1/2} \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$.

   (d) $f(x) = \begin{cases} |x|^{-1/2} \sin(x) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$.

2. Entscheide, ob folgende Folgen von Lebesgues–integrablen Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^1(\mathbb{R})$ konvergieren, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert und den Grenzwert der entsprechenden Folge von Intgeralen:

   (a) $f_n(x) = e^{-x^2} \sin(x/n)$.

   (b) $f_n(x) = nx^2 e^{-nx^2}$.

   (c) $f_n(x) = \sqrt{n} e^{-nx^2}$.

   (d) $f_n(x) = \frac{n}{1+(nx)^2}$.

3. Zeige in den folgenden Schritten, dass das Lebesguesmaß translationsinvariant ist.

   (a) Zeige, dass für jedes $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und alle $y \in \mathbb{R}^d$ die Abbildung $T_y : L^1(\mathbb{R}^d) \to L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $(T_y f)(x) = f(x-y)$ wohldefiniert ist und eine bijektive Isometrie ist.

   (b) Zeige dass für jede messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ die Menge $y + A = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x - y \in A\}$ eine messbare Mnege ist.

   (c) Zeige, dass für jede messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^d$, das Lebesguesmaß von $y + A$ gleich dem Lebesguesmaß von A ist.

Abgabe bis zum Donnerstag, den 14.12.2005 vor der Übung