Übungsblatt 2

Funktionalanalysis
WS 2005/06
Martin Schmidt

1. Entscheide, welche der folgenden Abbildungen, stetig sind, welche gleichmäßig stetig sind, und welche Lipschitz–stetig sind.

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$.

   (b) $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   (c) $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   (d) $F : C_b([0, 1]) \to C_b([0, 1]), f \mapsto f^2$.

2. Zeige, dass eine differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Ableitung für alle $x \in \mathbb{R}$ auch $|f'(x)| \geq 2$ erfüllt, genau einen Fixpunkt hat.
(Hinweis: Wenn f bijektiv ist, dann stimmen die Fixpunkte von f mit den Fixpunkten von der Umkehrabbildung von f überein).

3. Untersuche, ob die punktweisen Grenzwerte aller Folgen in $B([0, 1], \mathbb{R})$ auch in $B([0, 1], \mathbb{R})$ liegen. Zeige also entweder, dass jeder punktweise Grenzwert beschränkt ist, oder gib ein Gegenbeispiel einer punktweise konvergenten Folge an, deren Grenzwert nicht beschränkt ist.
(Hinweis: Untersuche zunächst, ob Folgen in $B([0, 1], \mathbb{R})$, die punktweise konvergieren, als Folgen in $B([0, 1], \mathbb{R})$ beschränkt sind.

4. Sei (Y, d) ein metrischer Raum und $\tilde{d}$ folgende Abbildung:

$$\tilde{d} : Y \times Y \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 1 - \frac{1}{1 + d(x, y)}.$$

   (a) Zeige dass auch $\tilde{d}$ eine Metrik auf Y ist.

   (b) Zeige, dass bezüglich $\tilde{d}$ alle Teilmengen von Y beschränkt sind. Insbesondere sind bezüglich dieser Metrik alle Abbildungen von X nach Y beschränkt.

   (c) Zeige zuletzt, dass die offenen Mengen von (Y, d) mit den offenen Mengen von $(Y, \tilde{d})$ überseinstimmen.

   (d) Gib ein Beispiel eines metrischen Raumes an, der beschränkt und vollständig, aber nicht kompakt ist.

Abgabe bis zum Donnerstag, den 3.11.2005 vor der Übung