Übungsblatt 11

Funktionalanalysis
WS 2005/06
Martin Schmidt

1. Sei H ein Hilbertraum und U und V zwei abgeschlossene Unterräume. Dann gilt $H = U \oplus U^\perp = V \oplus V^\perp$. Seien P_U und P_V die beiden entsprechenden orthogonalen Projektoren

$$P_U : H \simeq U \oplus U^\perp \to U \hookrightarrow H \qquad P_V : H \simeq V \oplus V^\perp \to V \hookrightarrow H.$$

   (a) Wenn P_U und P_V kommutieten, dann sind auch $P_U P_V = P_V P_U$ und $(\mathbb{1}_H - P_U)P_V = P_V(\mathbb{1}_H - P_U)$ und $P_U(\mathbb{1}_H - P_V) = (\mathbb{1}_H - P_V)P_U)$ orthogonale Projektoren. Bestimme die entsprechenden Unterräume von H.

   (b) Zeige, dass die Bedingung $U \subset V$ äquivalent ist zu $P_U = P_V P_U = P_U P_V$.

2. Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise orthogonaler Elemente eines Hilbertraumes H. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

   (a) $\sum_{n=1}^\infty v_n$ ist konvergent.

   (b) $\sum_{n=1}^\infty \|v_n\|^2$ ist konvergent.

   (c) Für alle $v \in H$ ist die Reihe $(\sum \langle v_n, v\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

3. Sei H ein Hilbertraum.

   (a) Zeige, dass für jeden selbstadjungierten Opertaor $A \in \mathcal{L}(H)$ die Abbildung $\langle v, w\rangle_A = \langle Av, w\rangle$ eine hermitische Form definiert.

   (b) Zeige, für jede stetige hermitische Form, die punktweise (also für alle $v, w \in H$) durch ein Vielfaches von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ beschränkt ist, ein selbstadjungierter Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ existiert, mit $\langle v, w\rangle_A = \langle Av, w\rangle$.

4. Sei H ein Hilbertraum und $U \in \mathcal{L}(H)$ ein unitärer Operator.

   (a) Zeige, dass $\|U\| = 1$ und $\|U^{-1}\| = 1$ gilt.

   (b) Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ ein invertierbarer Operator. Zeige, dass das Spektrum von A^{-1} gegeben ist durch die inversen Elemente des Spektrums von A. Folgere daraus, dass das Spektrum von A enthalten ist in der Menge $\{\xi \in \mathbb{K} \mid |\xi| \geq \|A^{-1}\|^{-1}\}$.

   (c) Zeige, dass das Spektrum von U enthalten ist in der Menge $\{\xi \in \mathbb{K} \mid |\xi| = 1\}$.

Abgabe bis zum Donnerstag, den 19.1.2006 vor der Übung