Übungsblatt 13

Funktionalanalysis
WS 2005/06
Martin Schmidt

1. Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $C(X,\mathbb{C})$ die Banachalgebra aller stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{C}$ mit der Supremumsnorm.

   (a) Zeige, dass für alle $x \in X$ die Banachalgebra $C(X,\mathbb{C})/I_x$ isomorph zu $\mathbb{C}$ ist.

   (b) Zeige, dass für alle $x \in X$ die Menge
   $$I_x = \{f \in C(X,\mathbb{C} \mid f(x) = 0\}$$
   ein maximales Ideal ist.

   (c) Sei $x \in X$. Zeige, dass ein Ideal I genau dann nicht in I_x enthalten ist, wenn I ein Element g_x enthält, das $g(x) \neq 0$ erfüllt.

   (d) Zeige, dass jedes Ideal von $C(X,\mathbb{C})$ in einem der Ideale $(I_x)_{x\in X}$ enthalten ist.

   (e) Zeige, dass alle maximalen Ideale von $C(X,\mathbb{C})$ von der Form I_x mit $x \in X$ sind.

   (f) Zeige, dass die Abbildung $X \to Spec(C(X,\mathbb{C}))$ mit $x \mapsto \chi_x$ mit $\chi_x(f) = f(x)$ eine bijektive Abbildung ist (Hinweis: benutze, dass es wegen Urysohn's Lemma zu je zwei verschiedenen Punkten $x \neq y \in X$ eine Funktion $f \in C(X,\mathbb{R})$ gibt, mit $f(x) \neq f(y)$.)

2. (a) Zeige mit dem Satz von Stone–Weierstrass, dass alle komplexen Polynome in z und z^{-1} aufgefasst als komplexe Funktionen auf
   $$U(1,\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$
   dicht liegen in der kommutativen Banachalgebra $C(U(1,\mathbb{C}),\mathbb{C})$.

   (b) Zeige, dass die Abbildung $\mathbb{R} \to U(1,\mathbb{C}),\ x \mapsto \exp(2\pi\imath x)$ einen Isomorphismus der kommutativen Banachalgebren
   $$\{f \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{C}) \mid f(x+n) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{Z}\}$$
   und $C(U(1,\mathbb{C}),\mathbb{C})$ induziert.

   (c) Zeige, dass die Funktionen $\psi_n(x) = \exp(2\pi n\imath x)$ Eigenfunctionen sind von dem Operator $\frac{d^2}{dx^2}$ auf den glatten Funktionen in
   $$\{f \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{C} \mid f(x+n) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{Z}\}$$
   und berechne die Eigenwerte.

Abgabe bis zum Donnerstag, den 2.2.2006 vor der Übung