# Lösungen 7

Funktionalanalysis
WS 2005/06
Martin Schmidt

1. In dieser Aufgabe werden wir Nullmengen konstruieren, die nicht abzählbar sind. Diese Konstruktion geht auf Cantor zurück. Diese Mengen heissen deshalb auch Cantormengen. Sei $p > 1$ eine natürliche Zahl und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$$A_0 = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} (pm{+}1, pm{+}2) \text{ und } \quad A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid p^n x \in A_0\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Zeige, dass für alle $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ das relative Komplement $C_p = [0,1] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap [0,1])$ der Menge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap [0,1])$ in $[0,1]$ eine abgeschlossene Nullmenge ist.

   Für jedes $n \in \mathbb{N}$ enthält die Menge $A_n$ genau $p^{n-1}$ Intervalle in $[0,1]$, die alle die Länge $p^{-n}$ haben. Davon sind aber nur die folgenden

$$\left(\frac{1 + \sum_{l=1}^{n-1} z_l p^{n-l}}{p^n}, \frac{2 + \sum_{l=1}^{n-1} z_l p^{n-l}}{p^n}\right) \text{ mit } (z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \{0, 2, \ldots, p{-}1\}^{n-1}$$

   nicht schon in einer der Mengen $A_1, \ldots, A_{n-1}$ enthalten. Deshalb sind nur $(p-1)^{n-1}$ nicht schon in einer der Mengen $A_1, \ldots, A_{n-1}$ enthalten. Deshalb ist die Menge $(A_1 \cap [0,1]) \cup \ldots \cup (A_n \cap [0,1])$ eine disjunkte Vereinigung von $1 + (p-1) + \ldots + (p-1)^{n-1}$ Quadern, deren Gesamtvolumen gleich

$$\frac{1}{p}\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)^0 + \ldots \left(\frac{p-1}{p}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{p}\frac{1-\left(\frac{p-1}{p}\right)^n}{1-\frac{p-1}{p}} = 1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^n$$

   ist. Offenbar ist die Folge dieser Gesamtvolumina eine monoton wachsende Folge, die gegen

$$\lim_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^n = 1$$

   konvergiert. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es also ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ die Vereinigung der disjunkten offenen Quader $(A_1 \cap [0,1]) \cup \ldots \cup (A_n \cap [0,1])$ Gesamtvolumen $\geq 1 - \epsilon$ hat. Dann ist das relative Komplement in $[0,1]$ der Vereinigung aller dieser Mengen enthalten in der Schnittmenge der relativen Komplemente aller dieser Mengen, und deshalb eine Nullmenge.

(b) Jede Zahl $x \in [0,1)$ läßt sich eindeutig schreiben als eine Reihe

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z_n}{p^n} \text{ mit } z_n \in \{0,\ldots,p-1\} \text{ und } \lim_{n\to\infty} z_n \neq p-1.$$

Bestimme alle die Ziffernfolgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{0,\ldots,p-1\}$, die Zahlen in $C_p$ entsprechen. Folgere, dass für $p > 2$ die Menge $C_p$ gleichmächtig zum relativen Komplement einer abzählbaren Teilmenge von $[0,1]$ in $[0,1]$ ist.

Wenn eine Ziffer $z_N$ einer Ziffernfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gleich Eins ist, dann liegt die entsprechende Zahl in einem Intervall

$$\left[\sum_{l=1}^{N-1} z_l p^{-l} + p^{-N}, \sum_{l=1}^{N-1} z_l p^{-l} + 2p^{-N}\right).$$

Wenn dann nicht alle folgenden Ziffern gleich Null sind, dann gehört sie nicht zu $C_p$. Wenn alle Ziffern ungleich Eins sind, dann gehört die entsprechende Zahl immer zu $C_p$. Also gehört die der Ziffernfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entsprechende Zahl genau dann zu $C_p$, wenn entweder alle Ziffern ungleich Eins sind, oder eine Ziffer gleich Eins ist und alle folgenden Ziffern gleich Null sind. Die Menge aller Ziffernfolgen, deren Ziffern Werte in $\{0,2,\ldots,p-1\}$ annehmen, und die nicht gegen $p-1$ konvergieren, ist offenbar gleichmächtig zu der Menge aller Ziffernfolgen, die die Werte $\{0,\ldots,p-2\}$ annehmen und nicht gegen $p-2$ konvergieren. Wenn $p > 2$, dann entspricht die zweite Menge genau allen Zahlen in $[0,1)$ dargestellt durch Ziffernfolgen in $\{0,\ldots,p-2\}$. Die Menge aller Ziffernfolgen, von denen nur eine Ziffer gleich Eins ist, und alle folgenden gleich Null, ist abzählbar. Deshalb ist die Menge $C_p$ gleichmächtig zu der Vereinigung von $[0,1]$ mit einer abzählbaren Menge. Jede abzählbare Teilmenge von $[0,1]$ enthält aber eine abzählbare Teilmenge, deren relatives Komplement in sich selber abzählbar ist, und die gleichmächtig ist zu der Vereinigung von der ursprünglichen abzählbaren Teilmenge von $[0,1]$ mit einer abzählbaren Menge. Also ist die Menge $C_p$ gleichmächtig zu dem relativen Komplement einer abzählbaren Teilmenge von $[0,1]$.

2. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung aller rationalen Zahlen in $[0,1]$ und für jedes $\epsilon > 0$ $A_\epsilon$ folgende Teilmenge von $[0,1]$:

$$A_\epsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left((x_n - 2^{-n-1}\epsilon, x_n + 2^{-n-1}\epsilon) \cap [0,1]\right).$$

(a) Zeige, dass für alle $0 < \epsilon$ die Menge $A_\epsilon$ in $[0,1]$ offen ist.

Die Menge $A_\epsilon$ ist eine Vereinigung von offenen Teilmengen von $[0,1]$ und deshalb eine offene Teilmenge von $[0,1]$.

(b) Zeige, dass für alle $\epsilon > 0$ der Rand von der Menge $A_\epsilon$ gleich dem relativen Komplement von $A_\epsilon$ in $[0,1]$ ist. Hierbei ist der Rand $\partial A_\epsilon$ von $A_\epsilon$ definiert als die Schnittmenge vom Abschluss von $A_\epsilon$ mit dem Abschluss des relativen Komplementes von $A_\epsilon$ in $[0,1]$.

Weil in jedem offenen Intervall eine rationale Zahl enthalten ist, ist der Abschluss der Menge $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset [0,1]$ gleich $[0,1]$. Dann ist aber auch der Abschluss von $A_\epsilon$ gleich $[0,1]$. Wegen Teil (a) ist das relative Komplement von $A_\epsilon$ in $[0,1]$ abgeschlossen. Deshalb ist der Rand von $A_\epsilon$ gleich dem relativen Komeplement von $A_\epsilon$ in $[0,1]$.

(c) Zeige, dass für jedes $0 < \epsilon$ die Unstetigkeitsstellen der charkteristischen Funktion von $A_\epsilon$ genau aus allen Elementen des relativen Komplements von $A_\epsilon$ in $[0,1]$ bestehen.

Wegen Teil (a) ist die charakteristische Funktion von $A_\epsilon$ auf der Menge $A_\epsilon \setminus \{0,1\}$ stetig, weil jeder Punkt von $A_\epsilon \setminus \{0,1\}$ eine Umgebung in $A_\epsilon$ enthält, auf der dann die charakteristische Funktion konstant ist. Wegen Teil (b) enthält aber jede Umgebung eines Punktes im relativen Komplement von $A_\epsilon$ in $[0,1]$ auch Punkte von $A_\epsilon$. Deshalb ist die charkteristische Funktion von $A_\epsilon$ auf dem relativen Komplement von $A_\epsilon$ in $[0,1]$ nicht stetig. Also bestehen die Unstetigkeitsstellen von dieser charkateristischen Funktion genau aus den Elementen des relativen Komplements von $A_\epsilon$ in $[0,1]$ und den beiden Zahlen Null und Eins.

(d) Zeige, dass für alle $\epsilon > 0$ die charakteristische Funktion von $A_\epsilon$ eine Lebesgue–integrable Funktion ist.

Die charakteristische Funktion von $A_\epsilon$ ist der Grenzwert der Folge der charkteristischen Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von

$$\bigcup_{l=1}^{n} \left((x_n - 2^{-n-1}\epsilon, x_n + 2^{-n-1}\epsilon) \cap [0,1]\right).$$

Diese Folge von Funktionen ist eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen, deren Integrale beschränkt sind durch $\sum_{l=1}^{n} \epsilon 2^{-l} \leq \epsilon$. Also konvergiert diese Folge gegen eine Element aus $L^1(\mathbb{R})$, das außerhalb von $[0,1]$ verschwindet.

(e) Zeige, dass für $0 < \epsilon < 1$ das Integral über die charakteristische Funktion von $A_\epsilon$ zwischen Null und Eins liegt. Folgere daraus, dass weder $A_\epsilon$ noch das relative Komplement von $A_\epsilon$ in $[0,1]$ eine Nullmenge ist.

Das Integral über die charkteristische Funktion ist wegen Teil (d) beschränkt durch $\epsilon < 1$. Andereseits enthält aber $A_\epsilon$ ein offenes Intervall um jedes $x_n$. Deshalb ist das Integral über die charakteristische Funktion größer als Null. Die charkteritische Funktion vom relativen Komplement von $A_\epsilon$ in $[0,1]$ ist gleich der charakteritischen Funktion von $[0,1]$ minus der chrakteritischen Funktion von

$A_\epsilon$. Also liegt auch diese Funktion in $L^1(\mathbb{R})$, und iht integral liegt auch zwischen Null und Eins. Weil das Integral über die charakteritische Funktion einer Nullmenge äquivalent ist zu $0 \in L^1(\mathbb{R})$, folgt für $0 < \epsilon < 1$, dass weder $A_\epsilon$ noch deren relatives Komplement in $[0, 1]$ eine Nullmenge ist.