Übungsblatt 4

Funktionalanalysis
WS 2005/06
Martin Schmidt

1. (a) Gib ein Beispiel von zwei 2×2–Matrizen an, so dass $\exp(A)\exp(B)$ nicht gleich $\exp(A+B)$ ist.

   (b) Berechne die folgenden 2×2–Matrizen:

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \quad \exp\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right), \quad \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\right).$$

2. (a) Zeige, dass für jedes $A \in \mathcal{L}(V)$, die Abbildung

$$D_A : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V), B \mapsto AB - BA$$

   eine Derivation ist.

   (b) Sei V ein Banachraum und D eine Derivation von $\mathcal{L}(V)$. Zeige dass $\exp(D)$ ein Algebraisomorphismus ist, d.h. ein invertierbares Element von

$$\{C \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(V)) \mid C(AB) = C(A)C(B) \text{ für alle } A, B \in \mathcal{L}(V)\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{L}(V)).$$

   (c) Sei V ein Banachraum. Zeige, dass für alle $B \in \mathcal{L}(V)$ gilt

$$\exp(D_A)B = \exp(A) \cdot B \cdot \exp(-A).$$

3. (a) Zeige, dass die Abbildung $\sum : \ell^1 \to \mathbb{K}, a \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine stetige lineare Abbildung definiert.

   (b) Zeige, dass für alle $1 \le p, q \le \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ das Produkt von Folgen zusammen mit der Abbildung $\sum$ eine bilineare Abbildung $\ell^p \times \ell^q \to \mathbb{K}$ definiert.

   (c) Zeige, dass für alle $1 < p < \infty$ der Dualraum von ℓ^p als Banchraum isomorph ist zu ℓ^q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Abgabe bis zum Donnerstag, den 17.11.2005 vor der Übung