Lösungen 6

Funktionalanalysis
WS 2005/06
Martin Schmidt

1. Sei V ein Banachraum und W ein normierter Vektorraum. Sein $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}(V,W)$, die punktweise gegen eine Abbildung $A : V \to W$ konvergiert.

   (a) Zeige, dass A in $\mathcal{L}(V,W)$ liegt.

   Weil jede konvergente Folge in einem normierten Vektorraum beschränkt ist, sind für die Menge $\mathcal{A} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{L}(V,W)$ die Vorrausetzungen des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit erfüllt. Also ist die Menge beschränkt. Weil die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert, gilt für alle $v \in V$ auch $\|A(v)\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n(v)\|$. Deshalb ist jede obere Schranke an $\{\|A_n\| \mid n \in \mathbb{N}\}$ auch eine obere Schranke an $\|A\|$. Deshalb ist A beschränkt und damit auch stetig.

   (b) Zeige, dass gilt

   $$\|A\| \leq \sup_{N\in\mathbb{N}} \inf\{\|A_n\| \mid n \geq N\}.$$

   Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ und $\|A(v)\| \geq \|A\| - \epsilon)$. Weil $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konevrgiert, folgt dass $\lim_{n\to\infty} A_n(v) = A(v)$. Dann gilt aber auch

   $$\lim_{N\to\infty} \inf\{\|A_n\| \mid n \geq N\} \geq \lim_{n\to\infty} \|A_n(v)\| = \|A(v)\| \geq \|A\| - \epsilon.$$

   Weil das für alle $\epsilon > 0$ gilt folgt die Behauptung.

   (c) Gib ein Beispiel an, in dem A_n nicht bezüglich der Norm von $\mathcal{L}(V,W)$ gegen A konvergiert.

   Sei $(\sum_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge von Abbildungen

   $$\sum_n : \ell^1 \to \mathbb{K}, (a_m)_{m\in\mathbb{N}} \to \sum_{m=1}^{n} a_m.$$

   Weil für jedes $(a_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, die entsprechende Reihe $(\sum a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert, konvergiert diese Folge punktweise gegen

   $$\sum : \ell^1 \to \mathbb{K}, (a_m)_{m\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} a_m.$$

   Das Element von ℓ^1, dass nur für $m = n+1$ nicht verschwindet und dort eins ist, wird durch die Differenz $\sum - \sum_n$ auf Eins abgebildet. Deshalb gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ in $\mathcal{L}(\ell^1, \mathbb{K})$ $\|\sum_n - \sum\| \geq 1$. Also konvergiert die Folge nicht bezüglich der Norm.

2. Seien V und W Banachräume und $A : V \to W$ und $B : W' \to V'$ lineare Abbildungen, für die gilt $C(A(v)) = (B(C))(v)$ für alle $v \in V$ und alle $C \in W'$.

   (a) Zeige, dass die Komposition $i \circ A$ von A mit der kanonischen Isometrie $i : W \to W''$ beschränkt ist.
   Wir betrachten die Menge
   $$\mathcal{A} = \{i \circ A(v) \in \mathcal{L}(W', \mathbb{K}) \mid v \in V \text{ mit } \|v\| \le 1\}.$$
   Auf allen $C \in W'$ nehmen die Elemente von $\mathcal{A}$ die Werte $C(A(v)) = B(C)(v)$ an mit $\|v\| \le 1$. Für jedes $C \in W'$ liegt $B(C)$ in V'. Deshalb sind diese Werte für jedes $C \in W'$ beschränkt. Also sind für diese Menge die Vorraussetzungen des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit erfüllt. Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit fogt dann, dass die Menge $\{\|i \circ A(v)\| \mid v \in V \text{ mit } \|v\| \le 1\}$ beschränkt ist.

   (b) Zeige, dass A und B stetig sind.
   Weil $i : W \to W''$ eine Isometrie ist, folgt aus dem ersten Teil, dass auch die Abbildung $A : V \to W$ beschränkt ist. Dann folgt auch, dass sie stetig ist. Aufgrund der Gleichung $C(A(v)) = B(C)(v)$ für alle $C \in W'$ ist dann die Abbildung $B = A'$ auch stetig.

3. Sei V ein normierter Vektorraum und X und Y zwei konvexe abgeschlossene Teilmengen, so dass $0 < \inf\{\|x - y\| \mid x \in X, y \in Y\}$.

   (a) Zeige, dass mit einem geeignetem $\epsilon > 0$ die beiden Mengen $\bigcup_{x \in X} B(x, \epsilon)$ und $\bigcup_{y \in Y} B(y, \epsilon)$ disjunkte offene konvexe Mengen sind.
   Sei $x \in X$ und $y \in X$, und $u \in B(x, \epsilon)$ und $v \in B(y, \epsilon)$. Weil X konvex ist, gilt für alle $\lambda, \mu \ge 0$ mit $\lambda + \mu = 1$ auch $\lambda x + \mu y \in X$. Dann folgt
   $$\|\lambda u + \mu v - (\lambda x + \mu y)\| \le \|\lambda(u - x)\| + \|\mu(v - y)\| \le |\lambda|\|u - x\| + |\mu|\|v - y\| < \epsilon.$$
   Also sind für alle $\epsilon > 0$ die Mengen $\bigcup_{x \in X} B(x, \epsilon)$ und $\bigcup_{y \in Y} B(y, \epsilon)$ konvexe Mengen. Weil diese Mengen Vereinigungen von offenen Mengen sind, sind sie auch offen. Wenn $2\epsilon < \inf\{\|x - y\| \mid x \in X, y \in Y\}$, dann sind sie auch disjunkt, weil aus $u \in B(x, \epsilon)$ und $v \in B(y, \epsilon)$ folgt
   $$\|u - v\| \ge \|x - y\| - \|u - x\| - \|v - y\| > \|x - y\| - 2\epsilon.$$

   (b) Zeige, dass es für jedes $A \in V' \setminus \{0\}$ und jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $A\left[\bigcup_{x \in X} B(x, \epsilon)\right] = \bigcup_{x \in X} B(A(x), \delta)$.
   Aufgrund der Definition der Norm von $A \in V'$ gilt für alle $A \in V' \setminus \{0\}$ auch $\|A\| = \sup\{|A(v)| \mid \|v\| \le 1\}$. Aus der Linearität folgt dann für alle $x \in X$ auch $\{A(x') \mid x' \in B(x, \epsilon)\} = B(A(x), \|A\|\epsilon)$. Dann folgt die Behauptung mit $\delta = \|A\|\epsilon$.

(c) Zeige, dass es eine stetige lineare Abbildung $A \in V'$ gibt, so dass gilt $\inf\{|A(x) - A(y)| \mid x \in X, y \in Y\} = 1$.

Wegen Teil (a) und dem letzten Satz im Skript aus dem Abschnitt über Hahn–Banach, gibt es mit dem entsprechenden $2\epsilon < \inf\{\|x - y\| \mid x \in X, y \in Y\}$ ein $B \in V'$, dass die beiden Mengen $\bigcup_{x \in X} B(x, \epsilon)$ und $\bigcup_{y \in Y} B(y, \epsilon)$ auf disjunkt Mengen abbildet. Dieses B kann nicht Null sein. Wegen Teil (b) gilt dann

$$\lambda = \inf\{|B(x) - B(y)| \mid x \in X, y \in Y\} =$$
$$\inf\left\{|B(x') - B(y')| \mid x' \in \bigcup_{x \in X} B(x, \epsilon), y' \in \bigcup_{y \in Y} B(y, \epsilon)\right\} + 2\epsilon\|B\| > 0.$$

Wegen der Linearität hat dann $A = B/\lambda$ die gewünschten Eigenschaften.

4. Sei V ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ eine zweite Norm auf V, mit $\|v\|_2 \leq C\|v\|_1$ für alle $v \in V$ mit einem $C > 0$.

Die Übungsaufgabe war ürsprїglich ohne den letzten Satz übernommen aus der Ausgabe von Hans Wilhlem Alt: "Lineare Funktionalanalysis" von 1985 und ist falsch. In neueren Ausgaben ist der Fehler behoben. Mithilfe einer Basis eines unendlichdimensionalen Banachraumes $(V, \|\cdot\|_1)$ läßt sich nämlich immer eine unbeschränkte bijektive lineare Abbildung $T : V \to V$ konstruieren. Dann ist offenbar auch $\|v\|_2 = \|Tv\|_1$ eine Norm auf V. Dann ist für jede Cauchyfolge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(V, \|\cdot\|_2)$ die Folge $(T^{-1}v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(V, \|\cdot\|_1)$ mit Gernzwert v. Offenbar ist dann Tv der Grenzwert der ersten Folge. Also ist auch $(V, \|\cdot\|_2)$ ein Banachraum. Aber weil T nicht beschränkt ist, sind beide Normen nicht äquivalent.

(a) Zeige, dass V zusammen mit der Norm $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2$ vollständig ist.

Jede Cauchyfolge in $(V\|\cdot\|_0)$ ist wegen $\|v\|_1 \leq \|v\|_0$ auch eine Cauchyfolge in $(V, \|\cdot\|_1)$ und konvergiert dort. Aus der Bedingung $\|v\|_2 \leq C\|v\|_1$ für alle $v \in V$ folgt $\|v\|_0 \leq (1+C)\|v\|_1$ für alle $v \in V$. Deshalb ist jede konvergente Folge in $(V, \|\cdot\|_1)$ auch konvergent in $(V, \|\cdot\|_0)$ mit dem gleichen Grenzwert.

(b) Zeige, dass die identische Abbildung von V aufgefaßt als Abbildung von dem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|_0)$ in die normierten Vektorräumen $(V, \|\cdot\|_1)$ bzw. $(V, \|\cdot\|_2)$ stetig ist.

Für alle $v \in V$ gilt $\|v\|_1 \leq \|v\|_0$ und $\|v\|_2 \leq \|v\|_0$. Daraus folgt die Behauptung.

(c) Zeige, dass $(V, \|\cdot\|_2)$ genau dann ein Banachraum ist, wenn die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent sind.

Die identische Abbildung von V aufgefasst als Abbildung von $(V, \|\cdot\|_0)$ nach $(V, \|\cdot\|_1)$ bzw. nach $(V, \|\cdot\|_2)$ sind beide setige bijektice Abbildungen. Wegen dem Satz des inversen Operators haben dann, wenn $(V, \|\cdot\|_2)$ ein Banachraum ist, beide Abbildungen stetige und dmait auch beschränkte Umkehrabbildungen. Deshalb gibt es Konstanten $C_1 > 0$ und $C_2 > 0$ mit $\|v\|_0 \leq C_1\|v\|_1$ und $\|v\|_0 \leq C_2\|v\|_2$ für alle $v \in V$. Daraus folgt, dass beide Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent sind zu $\|\cdot\|_0$. Wenn umgekehrt $\|\cdot\|_2$ äquivalent zu $\|\cdot\|_1$ ist, dann ist $(V, \|\cdot\|_2)$ natürlich auch ein Banachraum.

Die Vorraussetzung $\|v\|_2 \leq \|v\|_1$ für alle $v \in V$ mit $C > 0$ is äquivalent dazu, dass die identische Abbildung von V aufgefasst Als Abbildung von $(V, \|\cdot\|_1)$ nach $(V, \|\cdot\|_2)$ stetig ist. Deshalb folgt mit dem Satz des inversen Operators aus der Annahme, dass $(V, \|\cdot\|_2)$ ein Banachraum ist, dass die identische Abbildung von V aufgefasst als Abbildung von $(V, \|\cdot\|_2)$ nach $(V, \|\cdot\|_1)$ stetig und damit beschränkt ist. Deshalb ist diese Bedingung äquivalent dazu, dass die beiden Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent sind.