Übungsblatt 14

Funktionalanalysis
WS 2005/06
Martin Schmidt

1. Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ ein normaler Operator auf einem komplexen Hilbertraum H.
   (a) Zeige, dass für alle $f \in C(\mathrm{Spec}(A), \mathbb{C})$ das Spektrum von $f(A)$ gleich dem Bild der Abbildung f ist.
   (b) Zeige, dass für alle injektiven $f \in C(\mathrm{Spec}(A), \mathbb{C})$ auch $B^*(f(A)) = B^*(A)$ gilt.
   (c) Zeige, dass für alle $f \in C(\mathrm{Spec}(A), \mathbb{C})$ die kommutative B^*–Algebra $B^*(f(A))$ in $B^*(A)$ enthalten ist. Gebe die entsprechende Unteralgebra von $C(\mathrm{Spec}(A), \mathbb{C})$ an.

2. Sei $H = L^2(\mathbb{R})$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ sei $U(x)$ die Abbildung

$$U(x) : H \to H, \quad f \mapsto U(x)f \text{ mit } (U(x)f)(x') = f(x' - x).$$

   Wir setzen voraus, dass der Operator

$$\mathcal{F} : H \to H, \quad f \mapsto \mathcal{F}(f) \text{ mit } \mathcal{F}(f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-2\pi\imath tx) dt$$

   ein unitärer Operator ist mit

$$\mathcal{F}^{-1} : H \to H, \quad f \mapsto \mathcal{F}^{-1}(f) \text{ mit } \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) \exp(2\pi\imath tx) dt.$$

   (a) Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abbildung $U(x)$ ein unitärer Operator in $\mathcal{L}(H)$ ist.
   (b) Zeige, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $U(x + y) = U(x)U(y)$.
   (c) Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ der Operator $\mathcal{F}^{-1}U(x)\mathcal{F}$ der Operator der Multiplikation mit der Funktion $t \mapsto \exp(2\pi\imath tx)$ ist.
   (d) Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ das Sepktrum von $U(x)$ aus $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ besteht.
   (e) Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ der Operator $U(x)$ keinen Eigenwert hat.
   (f) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeige, dass für alle Elemente $A \in B^*(U(x))$, der Operator $\mathcal{F}^{-1}A\mathcal{F}$ ein Multiplikationsoperator mit einer beschränkten Funktion auf $\mathbb{R}$ ist. Zeige, dass sich dadurch $B^*(U(x))$ mit einer Uneralgebra von $C_b(\mathbb{R})$ identifizieren läßt. Bestimme diese Unteralgebra.
   (g) Bestimme die Menge aller Paare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, so dass $B^*(U(x)) \subset B^*(U(y))$ gilt.

Abgabe bis zum Donnerstag, den 9.2.2006 vor der Übung