Übungsblatt 5

Funktionalanalysis
WS 2005/06
Martin Schmidt

1. Sei $A \in \mathcal{L}(C_b([0,1],\mathbb{R}))$ der Operator aus Aufgabe 3c) von Übungsblatt 3, der für alle $f \in C_b([0,1],\mathbb{R})$ definiert ist durch

$$Af(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{für } x \in [0,1/2] \\ f(1) & \text{für } x \in (1/2,1]. \end{cases}$$

   Außerdem sei $B \in \mathcal{L}(C_b([0,1],\mathbb{R}))$ der Operator, der für alle $f \in C_b([0,1],\mathbb{R})$ definiert ist durch $Bf(x) = f(x/2)$.

   (a) Zeige, dass B Lipschitzstetig ist mit Lipschitzkonstante $L = 1$.

   (b) Zeige, dass B keine Isometrie ist.

   (c) Zeige, dass gilt $BA = \mathbb{1}_{C_b([0,1],\mathbb{R})}$ und $AB \neq \mathbb{1}_{C_b([0,1],\mathbb{R})}$.

   (d) Bestimme das Bild und den Kern von A und B.

2. Benutze zum Beweis der folgenden Aussagen den Satz von Hahn Banach:

   (a) Zeige, dass für jeden normierten Raum V und für alle $v \in V$ gilt:

$$\|v\| = \sup\{|A(v)| \mid A \in V' \text{ mit } \|A\| \leq 1\}.$$

   (b) Sei V ein normierter Raum und $W \subset V$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann gibt es für jedes $v \in V \setminus W$ ein $A \in V'$ mit

$$A(w) = 0 \text{ für alle } w \in W \text{ und } \quad A(v) = 1.$$

   (c) Sei V wieder ein normierter Vektorraum und W ein Unterraum. Dann definieren wir $W^\perp = \{A \in V' \mid A(w) = 0 \text{ für alle } w \in W\}$. Für jeden Unterraum $U \subset V'$ definieren wir analog $U_\perp = \{v \in V \mid A(v) = 0 \text{ für alle } A \in U\}$. Zeige, dass für jeden Unterraum $W \subset$V eines normierten Vektorraumes $(W^\perp)_\perp$ der Abschluss von W ist. Zeige, das für einen abeschlossenen Unterraum $W \subset V$ gilt

$$(V/W)' \simeq W^\perp \text{ und } \quad W' \simeq V'/W^\perp.$$

3. Seien V und W Banachräume. Zeige dass die stetigen bijektiven linearen Abbildungen von V nach W eine offene Teilmenge von $\mathcal{L}(V,W)$ bilden.

4. Zeige, dass der Quotientenraum c/c_0 isometrisch isomorph zu $\mathbb{K}$ ist.

Abgabe bis zum Donnerstag, den 24.11.2005 vor der Übung