Übungsblatt 12

Funktionalanalysis
WS 2005/06
Martin Schmidt

1. Operatoren auf endlichdimensionalen Hilberträumen H mit Dimension ≥ 2.

   (a) Zeige, dass das Spektrum eines Operators in $\mathcal{L}(H)$ eines endlichdimensionalen Hilbertraum H genau dann gleich der Menge $\{0\}$ ist, wenn er nilpotent ist, d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass gilt die n–te Potenz von dem Operrator verschwindet.

   (b) Zeige, dass ein normaler Operator eines endlichdimensionalen Hilbertraumes diagonalisierbar ist.

   (c) Zeige, dass für jeden Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ eines endlichdimensionalen Hilbertraumes die Menge aller Operatoren von $\mathcal{L}(H)$, die das gleiche Spektrum wie A haben, abgeschlossen aber nicht beschränkt ist.

   (d) Zeige, dass für einen selbstadjungierten Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ zwei Eigenvektoren mit verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind.

   (e) Zeige dass für jeden selbstadjungierten Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ die Menge aller selbstadjungierten Operatoren in $\mathcal{L}(H)$, die das gleiche Spektrum wie A haben, kompakt ist.

   (f) Zeige, dass auf einem endlichdimensionalen Hilbertraum die Menge aller diagonalisierbaren Operatoren dicht in $\mathcal{L}(H)$ liegt.

2. Sei $X \subset \mathbb{C}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Sei $B = C(X, \mathbb{C})$ die kommutative Banach–Algebra der stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{C}$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$.

   (a) Zeige, dass für jede Teilmenge $A \subset X$ die Menge

   $$I_A = \{f \in C(X, \mathbb{C}) \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in A\}$$

   ein Ideal ist.

   (b) Zeige, dass für Teilmengen $A, A' \subset X$ die Ideale I_A und $I_{A'}$ genau dann übereinstimmen, wenn die Abschlüsse von A und A' übereinstimmen.

   (c) Zeige, dass für alle Teilmengen $A \subset X$ die Ideale I_A abgeschlossen sind.

   (d) Zeige, dass für alle abgschlossenen Teilmengen $A \subset X$ die Quotientenalgebren B/I_A isomorph sind zu den Algebren $C(A, \mathbb{C})$ aller stetigen Funktionen von A nach $\mathbb{C}$.

   (e) Zeige, dass für alle $x \in X$ die Ideale der Form $I_{\{x\}}$ maximal sind.

   (f) Zeige, dass für alle $f \in C(X, \mathbb{C})$ das Spektrum von f aus der Bildmenge $f[X]$ von f besteht.

   (g) Gebe für alle kompakten Teilmengen $A \subset \mathbb{C}$ einen Hilbertraum H und einen Operator in $\mathcal{L}(H)$ an, dessen Spektrum aus A besteht.

Abgabe bis zum Donnerstag, den 26.1.2006 vor der Übung