Übungsblatt 3

Funktionalanalysis
WS 2005/06
Martin Schmidt

1. Ein linearer Operator $A : V \to W$ von einem Banachraum V in einben Banachraum W heisst kompakt, wenn das Bild jeder beschränkten Teilmengen von V unter A relativkompakt ist.

   (a) Zeige, dass ein linearer Operator $A : V \to W$ genau dann kompakt ist, wenn das Bild der Einheitskugel von V unter A relativkompakt ist.

   (b) Zeige mit dem Satz von Arcela Ascoli, dass folgender Integrationsoperator kompakt ist:

$$A : C_b([0,1],\mathbb{R}) \to C_b([0,1],\mathbb{R}), \quad f \mapsto Af, \text{ mit } Af(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

2. Eine Abbildung $f : X \to Y$ von einem metrischen Raum X in einen metrischen Raum Y heisst Isometrie, wenn für alle $x, y \in X$ gilt $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

   (a) Zeige, dass jede Isometrie injektiv ist.

   (b) Zeige, dass jede lineare Isometrie von einem endlichdimensionalen Banachraum in sich selber auch bijektiv ist.

   (c) Zeige, dass die folgende Abbildung eine lineare Isometrie ist, die nicht surjektiv ist.

$$A : C_b([0,1],\mathbb{R}) \to C_b([0,1],\mathbb{R}) \quad f \mapsto Af \text{ mit}$$

$$Af(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{für } x \in [0,1/2] \\ f(1) & \text{für } x \in (1/2,1]. \end{cases}$$

Abgabe bis zum Donnerstag, den 10.11.2005 vor der Übung