Übungsblatt 10

Funktionalanalysis
WS 2005/06
Martin Schmidt

1. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und Q eine Bilineaerform auf V, d.h. Q erfüllt $Q(v+v',w) = Q(v,w) + Q(v',w)$, $Q(\lambda v, w) = \lambda Q(v,w)$ und $Q(v, w+w') = Q(v,w) + Q(v,w')$, $Q(v,\lambda w) = \lambda Q(v,w)$. Die Bilinearform Q heisst symmetrisch, wenn für alle $v,w \in V$ gilt $Q(w,v) = Q(v,w)$. Sie heisst antisymmetrisch, wenn gilt $Q(w,v) = -Q(v,w)$

   (a) Zeige, dass sich Q eindeutig zerlegen läßt in eine Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Bilinearform.

   (b) Zeige, dass die Funktion $f(v) = Q(v,v)$ nur von dem symmetrischen Teil von Q anhängt.

   (c) Zeige, dass wenn Q symmetrisch ist, dass dann Q eindeutig duch die Funktion $f(v) = Q(v,v)$ festgelegt ist.

   (d) Gebe Bedingungen an eine $\mathbb{K}$–wertige Funktion f auf V an, so dass es eine symmetrische Bilinearform Q gibt, mit $f(v) = Q(v,v)$ für alle $v \in V$

2. Sei V ein komplexer Vektorraum und Q eine nicht notwendigerweise positiv definite hermitische Form.

   (a) Zeige, dass Q eindeutig durch die Funktion $f(v) = Q(v,v)$ bestimmt ist.

   (b) Gebe Bedingungen an eine $\mathbb{K}$–wertige Funktion f auf V an, so dass es eine hermitische Form Q gibt, mit $f(v) = Q(v,v)$ für alle $v \in V$.

3. Sei $L^2([-1,1])$ der Unterraum von $L^2(\mathbb{R})$ aller Funktionen, die außerhalb von dem Intervall $[-1,1]$ verschwinden.

   (a) Zeige unter Benutzung des Satzes von Stone–Weierstraß, dass die Einschränkungen der rellen Polynome auf $[-1,1]$ dicht liegen in $L^2([-1,1])$.

   (b) Zeige, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ein eindeutiges Polynome p_n vom Grad n gibt, so dass die Einschränkung dieser Polynome $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $[-1,1]$ eine Orhtonormalbasis von $L^2([-1,1])$ bilden.

   (c) Berechne die Polynome p_0, p_1, p_2 und p_3.

   (d) * Zeige, dass die Einschränkung des Polynoms $\frac{d}{dx}\left((1-x^2)p_n'(x)\right)$ in $L^2([-1,1])$ senkrecht steht auf den Einschränkungen aller Polynomen vom Grad kleiner als n. Folgere daraus, dass $\frac{d}{dx}\left((1-x^2)p_n'(x)\right)$ proportional ist zu p_n.

   (e) * Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\frac{d}{dx}\big((1-x^2)p_n'(x)\big) + n(n+1)p_n(x) = 0.$$

Abgabe bis zum Donnerstag, den 12.1.2006 vor der Übung