Funktionalanalysis
WS 2005/06
Martin Schmidt

Übungsblatt 9

1. Zeige in den folgenden Schritten, dass für jedes invertierbares $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ und jedes $1 \leq p < \infty$ die folgende Abbildung eine Isometrie ist:

$$\pi_p(A) : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d), \quad f \mapsto \pi_p(A)f \text{ mit } \quad (\pi_p(A)f)(x) = |\det(A)|^{-\frac{1}{p}} f(A^{-1}x).$$

   (a) Zeige, dass es ein $C > 0$ gibt, so dass für jeden Quader Q im $\mathbb{R}^d$ die Menge $A[Q]$ enthalten ist in einer endlichen Vereinigung von Quadern $Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$ mit Volumen $\mu(Q_1) + \ldots + \mu(Q_n) \leq C\mu(Q)$. Folgere, dass A Nullmengen auf Nullmengen abbildet.

   (b) Zeige, dass A jeden Quader auf eine messbare Menge abbildet.

   (c) Zeige, dass es ein $C > 0$ gibt, so dass für jeden Quader $Q \subset \mathbb{R}^d$ gilt $\int \pi_1(A)\chi_Q d\mu \leq C \int \chi_Q d\mu$. Folgere daraus $\pi_1(A) \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^d))$.

   (d) Sei $[0,1]^d$ der Einheitsquader im $\mathbb{R}^d$ und $\alpha(A) = \int \pi_1(A)\chi_{[0,1]^d} d\mu$. Benutze die Translationsinvarianz, um zu zeigen, dass für jeden Quader Q mit rationalen Kantenlängen gilt $\int (\pi_1(A)\chi_Q) d\mu = \alpha(A) \int \chi_Q d\mu$.

   (e) Zeige, dass jede charakteristische Funktion eines Quaders $Q \subset \mathbb{R}^d$ im $L^1(\mathbb{R}^d)$ Grenzwert einer Folge von charakteritischen Funktionen von Quadern mit rationalen Kantenlängen ist. Folgere daraus, dass für jede Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gilt $\int \pi_1(A) f d\mu = \alpha(A) \int f d\mu$.

   (f) Zeige, dass für zwei invertierbare Elemente A und B von $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ gilt $\pi_p(AB) = \pi_p(A)\pi_p(B)$. Folgere daraus, dass auch gilt $\alpha(AB) = \alpha(A)\alpha(B)$.

   (g) Seien $(a_1, \ldots, a_d) \in (\mathbb{R}\backslash\{0\})^d$ und $A : (x_1, \ldots, x_d) \mapsto (a_1x_1, \ldots, a_dx_d)$, also A das einer diagonalen inveretierbaren Matrix entsprechende Element in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Zeige, dass dann gilt $\alpha(A) = 1$.

   (h) Zeige, dass für jedes diagonalisierbare invertierbare Element $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ (d.h. es gibt ein invertierbares Element $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, so dass BAB^{-1} diagonal ist) gilt $\alpha(A) = 1$.

   (i) Zeige, dass die Abbildung $A \mapsto \alpha(A)$ stetig ist auf der Teilmenge aller invertierbaren Elemente von $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

   (j) Zeige, dass alle Matrizen $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, die paarweise verschiedene Nullstellen des charakteristischen Polynoms haben, dicht liegen. Folgere daraus, dass für alle invertierbaren Elemente $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ gilt $\alpha(A) = 1$.

   (k) Zeige, dass für alle $1 \leq p < \infty$ $\pi_p(A)$ messbare Funktionen auf messbare Funktionen abbildet.

   (l) Zeige, dass $\pi_p(A)$ eine Isometrie von $L^p(\mathbb{R}^d)$ auf sich selber ist.

Abgabe bis zum Mittwoch, den 21.12.2005 vor der Übung