

Übungsblatt 2

Topologie
WS 05/06
Ghazaleh Arghanoun

1. (a) Sei $\mathcal{B}_1 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ die Familie der offenen beschränkten Intervalle in \mathbb{R} . Zeige, dass \mathcal{B}_1 Basis einer Topologie auf \mathbb{R} ist. Die von \mathcal{B}_1 erzeugte Topologie T_1 heißt die **Standardtopologie** auf \mathbb{R} .
 - (b) Sei $\mathcal{B}_2 = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ die Familie der halb-offenen beschränkten Intervalle in \mathbb{R} . Zeige, dass \mathcal{B}_2 Basis einer Topologie auf \mathbb{R} ist. Die von \mathcal{B}_2 erzeugte Topologie bezeichnen wir mit T_2 .
 - (c) Welche der beiden oben genannten Topologien T_1 und T_2 ist feiner als die andere?
 - (d) Sei \mathcal{B}_3 eine Familie von Teilmengen von \mathbb{R} definiert durch $\mathcal{B}_3 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$. Zeige, dass \mathcal{B}_3 eine Basis für die Standardtopologie T_1 auf \mathbb{R} bildet.
 - (e) Zeige, dass die Familie $\mathcal{B}_4 = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ Basis einer Topologie $\mathcal{T} \neq T_2$ auf \mathbb{R} ist.
2. Sei $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Topologien auf der Menge $X \neq \emptyset$.
 - (a) Beweise, dass eine allergrößte Topologie auf X existiert, die alle T_n , $n \in \mathbb{N}$, enthält.
 - (b) Beweise, dass eine allerfeinste Topologie auf X existiert, die in allen T_n , $n \in \mathbb{N}$, enthalten ist.
 3. Sei T die Topologie der euklidischen Metrik auf \mathbb{R}^2 :

$$T = \{U \subset \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in U \exists \epsilon > 0, \text{ so dass } B(x, \epsilon) \subset U\}.$$

Seien $X = \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ und \mathcal{B} eine Familie von Teilmengen von X definiert durch:

$$\mathcal{B} = \{U \times \{c\} \mid U \in T, c \in \mathbb{R}\},$$

wobei $U \times \{c\}$ das kartesische Produkt der beiden Mengen U und $\{c\}$ darstellt.

Zeige, dass \mathcal{B} Basis einer Topologie auf \mathbb{R}^3 ist.

Abgabe am Donnerstag, den 3. November in der Übung!