Übungsblatt 10

Topologie
WS 05/06
Ghazaleh Arghanoun

1. Sei (X, T) ein metrisierbarer Raum. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) X ist beschränkt bezüglich jeder Metrik auf X, die die Topologie T induziert.

   (b) Jede stetige Abbildung $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt.

   (c) X ist kompakt.

2. Der topologische Raum Y hat die **universelle Fortsetzungseigenschaft**, wenn es zu jedem normalen Raum X, jeder abgeschlossenen Teilmenge A von X und jeder stetigen Abbildung $f : A \longrightarrow Y$ eine stetige Fortsetzung $\bar{f} : X \longrightarrow Y$ von f gibt. Setze $J = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$.

   (a) Zeige, dass für jedes $j \in J$ der Raum $\mathbb{R}^j$ die universelle Fortsetzungseigenschaft hat.

   (b) Sei $j \in J$ und sei Z ein **Retrakt** von $\mathbb{R}^j$, d.h. es gibt eine stetige Abbildung $r : \mathbb{R}^j \longrightarrow Z$ mit der Eigenschaft $r(z) = z$ für alle $z \in Z$ (die Abbildung r heißt eine **Retraktion** von $\mathbb{R}^j$ in $Z \subset \mathbb{R}^j$). Zeige, dass Z die universelle Fortsetzungseigenschaft hat.

3. Ein normaler Raum X heißt ein absoluter Retrakt, wenn für jede Einbettung h von X in einen normalen Raum Z, die X auf eine abgeschlossene Teilmenge $h(X)$ von Z abbildet, $h(X)$ mit einem Retrakt von Z homöomorph ist.

   Sei Y ein kompakter Raum und sei $J = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) Es gibt ein $j \in J$, so dass Y mit einem Retrakt von $[0, 1]^j$ homöomorph ist.

   (b) Es gibt ein $j \in J$, so dass Y mit einem Retrakt von $\mathbb{R}^j$ homöomorph ist.

   (c) Y hat die universelle Fortsetzungseigenschaft.

   (d) Y ist ein absoluter Retrakt.