Übungsblatt 6

Topologie
WS 05/06
Ghazaleh Arghanoun

1. Sei X ein kompakter topologischer Raum und sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Zeige:

   (a) Die Abbildung f ist beschränkt. (Die Abbildung $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn es ein $K > 0$ gibt, so dass
   $$|f(x)| < K, \, \forall x \in X,$$
   wobei $|f(x)|$ den Betrag von $f(x) \in \mathbb{R}$ darstellt.)

   (b) Es gibt x_1, $x_2 \in X$, so dass
   $$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \, \forall x \in X.$$

2. Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige, injektive Abbildung von einem kompakten topologischen Raum X in einen Hausdorffschen Raum Y. Zeige, dass f ein Homöomorphismus zwischen X und $f(X)$ ist.

3. Seien X, Y topologische Räume, so dass Y kompakt ist.

   (a) Zeige, dass die Projektionsabbildung $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$ definiert durch $\pi_1(x, y) = x$ eine abgeschlossene Abbildung ist.

   (b) Ausserdem sei Y ein Hausdorffscher Raum. Zeige, dass die Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ genau dann stetig ist, wenn der Graph G_f von f definiert durch $G_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times Y$ bzgl. der Produkttopologie ist.

4. Sei X ein kompakter Hausdorffscher Raum und sei $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von abgeschlossenen Teilmengen von X, so dass $A_n^\circ = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass ein Punkt $x \in X$ existiert, der in keinem A_n liegt.