Übungsblatt 7

Topologie
WS 05/06
Ghazaleh Arghanoun

1. Sei X ein lokal kompakter Hausdorffscher Raum.

   (a) Zeige, dass jede offene Teilmenge von X ausgerüstet mit der Teilraumtopologie ein lokal kompakter Hausdorffscher Raum ist.

   (b) Erfüllt der Raum X ausserdem das zweite Abzählbarkeitsaxiom, dann existiert eine Folge $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von kompakten Teilmengen von X, so dass

      i. $K_1 \subset K_2^\circ \subset K_2 \subset K_3^\circ \subset K_3 \subset \cdots$;

      ii. $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

2. Ein topologischer Raum (X, T) heißt separabel, wenn es eine abzählbare Teilmenge von X gibt, die in X dicht ist.

   (a) Zeige, dass jeder kompakte metrische Raum (bzgl. der durch die Metrik induzierten Topologie auf X) separabel ist.

   (b) Zeige, dass ein metrischer Raum genau dann separabel ist, wenn er das zweite abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

3. Ein topologischer Raum (X, T) heißt abzählbar kompakt, wenn jede abzählbare Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung hat.

   (a) Zeige, dass jeder abzählbar kompakte Raum (X, T) die Bolzano-Weierstrass-Eigenschaft besitzt.

   (b) Sei (X, T) ein Hausdorffscher Raum, der die Bolzano-Weierstrass-Eigenschaft besitzt. Zeige, dass (X, T) abzählbar kompakt ist.