Übungsblatt 13

Topologie
WS 05/06
Ghazaleh Arghanoun

1. Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ heißt sternenkonvex, wenn es ein a_0 in A gibt, so dass für jedes $a \in A$ die Strecke $(1-t)a_0 + ta$ mit $t \in [0,1]$ in A liegt.
   (a) Finde eine sternenkonvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, die nicht konvex ist.
   (b) Zeige, dass jede sternenkonvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ einfachzusammenhängend ist.
   (c) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ sternenkonvex. Zeige, dass je zwei Wege in A mit denselben Anfangs- und Endpunkten weghomotop sind.

2. Seien x_0, x_1 Punkte eines wegzusammenhängenden Raums X. Beweise, dass $\pi_1(X, x_0)$ genau dann eine Abelsche Gruppe bildet, wenn zu je zwei Wegen α und β von x_0 nach x_1 gilt: $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$.

3. Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subset X$. Sei $r : X \longrightarrow A$ ein Retrakt und sei $a_0 \in A$. Zeige, dass die Abbildung

   $$r_* : \pi_1(X, a_0) \longrightarrow \pi_1(A, a_0)$$

   surjektiv ist.

4. Seien X und Y topologische Räume und sei $p : Y \longrightarrow X$ eine Überlagerungsabbildung.
   (a) Zeige, dass p eine offene Abbildung ist.
   (b) Sei X zusammenhängend und sei x_0 ein Punkt in X, so dass $p^{-1}(\{x_0\})$ genau k Elemente hat. Zeige, dass zu jedem $x \in X$ das Urbild $p^{-1}(\{x\})$ genau k Elemente hat.
   (c) Sei X zusammenhängend und lokal zusammenhängend und sei $C \subset Y$ eine Zusammenhangskomponente von Y. Zeige, dass $p|_C : C \longrightarrow X$ auch eine Überlagerungsabbildung ist.