Übungsblatt 3: Lösungen

1:a) (i) $\Rightarrow$ (ii):

Sei f stetig und sei $A \subset X$ eine Teilmenge.

Behauptung: $\forall x \in \bar{A}$, $f(x) \in \overline{f(A)}$.

Beweis. Sei V eine Umgebung von $f(x)$ in Y. Dann ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x in X, weil f stetig ist. Da x ein Häufungspunkt für die Menge A ist ($x \in \bar{A}$), enthält $f^{-1}(V) \cap A$ einen Punkt $x' \in A \cap f^{-1}(V)$. Es folgt daraus:

$$f(x') \in f(A) \cap V$$

$$\Rightarrow f(x) \in \overline{f(A)} \Rightarrow f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}. \quad \square$$

(ii) $\Rightarrow$ (i):

Sei W eine abgeschlossene Menge in Y. Wir brauchen zu zeigen, dass $f^{-1}(W)$ in X abgeschlossen ist:

Sei $A = f^{-1}(W)$. Wir behaupten, dass $\bar{A} \subset A$.

Beweis.

$$f^{-1}(W) = A \Rightarrow f(A) \subset W \Rightarrow \overline{f(A)} \subset \overline{W} = W.$$

Sei $x \in \bar{A}$. Es folgt:

$$f(x) \in f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{W} = W$$

$$\Rightarrow f(x) \in W \Rightarrow x \in f^{-1}(W) = A \Rightarrow \bar{A} \subset A$$

$$\Rightarrow \bar{A} = A! \quad \square$$

1:b) Nicht unbedingt!

Gegenbeispiel:

Sei $f: X \longrightarrow Y$ eine konstante Abbildung:

$f(x) = y_0$, $\forall x \in X$. Für jede Teilmenge A von X besteht die Menge $f(A)$ nur aus einem Punkt:

$f(A) = \{y_0\}$!

2:a) (i) $\Rightarrow$ (ii):

Sei $\mathcal{U}$ eine Teilmenge von X, so dass $f(\mathcal{U})$ in Y offen ist. Da f bijektiv und stetig ist, ist das Urbild $f^{-1}(f(\mathcal{U}))$ gleich $\mathcal{U}$. $\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ ist auch offen in X.

Nun sei $\mathcal{U} \subset X$ offen. Da $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ stetig ist, ist das Urbild von $\mathcal{U}$ unter f^{-1}, d.h. $(f^{-1})^{-1}(\mathcal{U}) \subset Y$ offen in Y. Da f bijektiv ist, gilt:

$$(f^{-1})^{-1}(\mathcal{U}) = f(\mathcal{U}). \quad \square$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Ähnlich wie oben!

2:b) Offenbar ist f eine Abbildung.

Injektion: Seien $x \neq x'$ Elemente in X.

Wenn $x, x' \geq 0$, dann $f(x) = x \neq x' = f(x')$.

Wenn $x, x' < -1$, dann $f(x) = x+1 \neq x'+1 = f(x')$.

Wenn $x \geq 0$ und $x' < -1$, dann:

$$\left.\begin{array}{l} f(x') = x'+1 < 0 \\ \& \quad f(x) = x \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Surjektion: Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig.

Wenn $y \geq 0$, dann $y \in X$ und $f(y) = y$.

Wenn $y < 0$, dann $y - 1 < -1$.

$\Rightarrow \quad y-1 \in X$ & $f(y-1) = y$

Stetigkeit: Wir zeigen, dass das Urbild eines Basiselements $(a,b) \subset \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge von X bzg Teilraumtopologie auf X ist:

Wenn $a \geq 0$, dann $f^{-1}((a,b)) = (a,b)$.

Aber das Intervall (a,b) in diesem Fall ist eine offene Teilmenge von X bzg Teilraum-topologie. ✓

Wenn $a < 0$ & $b \geq 0$, dann:

$$
\begin{aligned}
f^{-1}((a,b)) &= f^{-1}((a,0) \cup [0,b)) \\
&= f^{-1}((a,0)) \cup f^{-1}([0,b)) \\
&= (a-1, -1) \cup [0,b) := A.
\end{aligned}
$$

Die Vereinigung A ist eine offene Menge in X: $\quad A = X \cap (a-1, b)$. ✓

Wenn $b < 0$, dann:

$$f^{-1}((a,b)) = (a-1, b-1).$$

Da $b-1 < -1$, ist $(a-1, b-1)$ offen in X. ✓

f ist kein Homöomorphismus: Das Bild $f([0,\infty))$ vom Intervall $[0,\infty)$, das in X offen ist, ist gleich dem Intervall selbst: $f([0,\infty)) = [0,\infty)$. Das Intervall $[0,\infty)$ ist aber keine offene Menge in $\mathbb{R}$!

3) Ja! Der Punkt 0 ist solch ein Punkt:

Sei V eine beliebige Umgebung von $f(0)=0$ in $\mathbb{R}$. Dann gibt es ein $\varepsilon>0$, so dass $0=f(0)\in(-\varepsilon,\varepsilon)\subset V$. Das Bild $f((-\varepsilon,\varepsilon))$ besteht aus allen rationalen Zahlen r mit $|r|<\varepsilon$. Also, $f((-\varepsilon,\varepsilon))\subset V$. Deswegen ist $(-\varepsilon,\varepsilon)$ die offene Menge um 0, die wir brauchen:

$$0\in(-\varepsilon,\varepsilon)\subset f^{-1}(V). \qquad \square$$