Übungsblatt 11

Topologie
WS 05/06
Ghazaleh Arghanoun

1. Sei X ein topologischer Raum.
   (a) Sei $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von zusammenhängenden Teilmengen von X, so dass $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ zusammenhängend ist.
   (b) Sei I eine Indexmenge und sei $\{A_i\}_{i\in I}$ eine Familie von zusammenhängenden Teilmengen von X. Sei $A \subset X$ eine zusammenhängende Teilmenge, so dass $A \cap A_i \neq \emptyset$ für jedes $i \in I$. Zeige, dass $A \cup \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$ zusammenhängend ist.

2. Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subset X$. Die Menge ∂A sei definiert durch $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$.
   (a) Sei A zusammenhängend. Sind A° und ∂A zusammenhängend?
   (b) Sei $C \subset X$ eine zusammenhängende Teilmenge, so dass $C \cap A \neq \emptyset$ und $C \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Zeige, dass $C \cap \partial A \neq \emptyset$.
   (c) Seien A und X beide zusammenhängend. Zeige, dass für jede Zerlegung (U, V) von $X \setminus A$ die Mengen $A \cup U$ und $A \cup V$ zusammenhängend sind.

3. (a) Sei X ein zusammenhängender topologischer Raum und sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Seien $a, b \in X$ und sei $r \in \mathbb{R}$ eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Beweise, dass es einen Punkt $c \in X$ gibt mit $f(c) = r$.
   (b) Sei $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ eine stetige Funktion. Zeige, dass es ein $x \in [0,1]$ gibt mit $f(x) = x$.

4. Sei X ein topologischer Raum. Definiere eine Relation $\sim$ auf X durch:

   $x \sim y$ genau dann, wenn es keine offene Zerlegung (A, B) von X gibt, so dass $x \in A$ und $y \in B$.

   (a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X ist. Die Äquivalenzklassen heißen die Quasikomponenten von X.
   (b) Zeige, dass jede Zusammenhangskomponente von X Teilmenge einer Quasikomponente von X ist.
   (c) Sei X lokal zusammenhängend. Zeige, dass jede Quasikomponente von X eine Zusammenhangskomponente von X ist.