Übungsblatt 5

Topologie
WS 05/06
Ghazaleh Arghanoun

1. Sei $\{(X_n, T_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie topologischer Räume und sei das Produkt $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ ausgerüstet mit der Produkttopologie T_π. Zeige, dass folgende Aussagen richtig sind:

   (a) Der Produktraum $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom erst dann, wenn X_n das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt für alle n in $\mathbb{N}$.

   (b) Der Produktraum $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom erst dann, wenn X_n das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt für alle n in $\mathbb{N}$.

2. Sei (X, T) ein topologischer Raum und sei $X \times X$ ausgerüstet mit der Produkttopologie. Die Diagonale $\Delta \subset X \times X$ sei definiert durch

   $$\Delta = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}.$$

   Zeige, dass Δ in $X \times X$ genau dann abgeschlossen ist, wenn X Hausdorff ist.

3. Sei (X, T) ein Hausdorffscher Raum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Sei A eine Teilmenge von X und sei $a \in X$ ein Grenzpunkt von A. Zeige, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ existiert, die folgende Voraussetzungen erfüllt:

   (a) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$ gilt $a_n \neq a_m$.

   (b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a.

4. Sei (X, T) ein topologischer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Zeige, dass jede Familie von offenen, paarweise disjunkten Teilmengen von X abzählbar ist.

Abgabe am Donnerstag, den 24. November in der Übung!