Übungsblatt 6: Lösungen

1:a) Sei $x \in X$. Da f stetig ist, gibt es eine Umgebung $\mathcal{U}_x$ von x mit der Eigenschaft:

$$\forall y \in \mathcal{U}_x, \quad |f(y) - f(x)| < 1.$$

Die Familie $\{\mathcal{U}_x\}_{x \in X} = \mathcal{A}$ überdeckt den kompakten Raum X. Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{\mathcal{U}_{x_1}, \dots, \mathcal{U}_{x_n}\} \subset \mathcal{A}$ von X.

Setze nun K gleich $\max\{|f(x_i)| \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$.

Da jeder Punkt $y \in X$ in einem $\mathcal{U}_{x_i}$ liegt:

$$|f(y)| = |f(y) - f(x_i) + f(x_i)| \leq |f(y) - f(x_i)| + |f(x_i)| \leq 1 + K.$$

$\Rightarrow$ f ist beschränkt. $\square$

1:b) Aus Teil (a) folgt, dass f beschränkt ist.

$\Rightarrow$ [Die Teilmenge $S = \{f(x) \mid x \in X\} \subset \mathbb{R}$ ist beschränkt.] Es gibt ein Supremum für S in $\mathbb{R}$, das mit M bezeichnet wird: $M = \sup S$.

Wir behaupten, dass ein $x_0 \in X$ existiert mit $f(x_0) = M$: (Beweis durch Widerspruch)

Sei $\varepsilon > 0$. Die Menge

$$C_\varepsilon = \{x \in X \mid M - \varepsilon \leq f(x) \leq M\} = f^{-1}([M-\varepsilon, M])$$

ist abgeschlossen in X, weil f stetig ist.

Wenn $\bigcap_{\varepsilon > 0} C_\varepsilon = \emptyset$, dann gibt es eine endliche Teilfamilie $\{C_{\varepsilon_1}, \dots, C_{\varepsilon_m}\}$ von $\{C_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$

mit $C_{\varepsilon_1} \cap \ldots \cap C_{\varepsilon_m} = \emptyset$.

Setzen wir $\lambda = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\}$, folgern wir:

$$C_\lambda = \emptyset.$$

$\Rightarrow$ Es gibt kein $x \in X$ mit $M - \lambda \leq f(x) \leq M$. Dies widerspricht der Annahme, dass M das Supremum der Menge $\mathcal{S}$ ist. $\Rightarrow \bigcap_{\varepsilon > 0} C_\varepsilon \neq \emptyset$. Sei $x_0 \in \bigcap_{\varepsilon > 0} C_\varepsilon$. Dann gilt:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad M - \varepsilon \leq f(x_0) \leq M.$$

$$\Rightarrow \quad f(x_0) = M.$$

$\square$

2) Sei $f(X) \subset Y$ ausgerüstet mit der Teilraumtopologie induziert von der Topologie des Raums Y auf $f(X)$.

$\Rightarrow$ Die Abbildung $g : X \longrightarrow f(X)$ definiert durch $g(x) = f(x)$, $\forall x \in X$, ist stetig. Die Abbildung g ist ausserdem injektiv und surjektiv. Wir brauchen nur zu zeigen, dass die Umkehrabbildung $g^{-1} : f(X) \longrightarrow X$ auch stetig ist. Sei $C \subset X$ abgeschlossen in X. Da X kompakt ist, ist $f(C)$ kompakt in Y. Aber $f(X)$ ist eine kompakte Teilmenge von Y, und Y ist Hausdorffsch. $\Rightarrow$ $f(X)$ ist abgeschlossen in Y und damit auch $f(C) \subset f(X)$. Es folgt also, dass $(f^{-1})^{-1}(C)$ $(= f(C))$ ist abgeschlossen. $\Rightarrow$ f^{-1}: stetig.

$\square$

3:a) Sei $C \subset X \times Y$ abgeschlossen.

Wenn $\pi(C)$ in X nicht abgeschlossen ist, existiert ein Grenzpunkt x von $\pi(C)$ mit $x \notin \pi(C)$.

$\Rightarrow$
$$(\{x\} \times Y) \cap C = \phi .$$

Die Menge C ist abgeschlossen. $\Rightarrow$ $(X \times Y) \setminus C$ ist offen. Ausserdem $\{x\} \times Y \subset X \times Y \setminus C$.

Aus dem Tube-Lemma folgt, dass es eine Umgebung $\mathcal{U}_x$ von x gibt mit
$$\{x\} \times Y \subset \mathcal{U}_x \times Y \subset X \times Y \setminus C$$
$\Rightarrow$
$$\pi(\mathcal{U}_x \times Y) \subset \pi(X \times Y \setminus C)$$
$\Rightarrow$
$$\mathcal{U}_x \subset X \times Y \setminus C .$$

D.h. x ist kein Grenzpunkt von $\pi(C)$. Dies widerspricht der Annahme, dass x ein Grenzpkt. von $\pi(C)$ ist! $\square$

3:b)

i) Sei f stetig.

Behauptung: $X \times Y \setminus G_f$ ist offen in $X \times Y$.

Beweis. Sei $(x, y) \in X \times Y \setminus G_f$. $\Rightarrow$ $f(x) \neq y$.

Da Y Hausdorffsch ist, gibt es Umgebungen V_y von y und $V_{f(x)}$ von $f(x)$ in Y, s.d.
$$V_y \cap V_{f(x)} = \phi .$$
$\Rightarrow$
$$f^{-1}(V_y) \cap f^{-1}(V_{f(x)}) = \phi .$$

Da f stetig ist, ist die Menge $f^{-1}(V_{f(x)})$ eine Umgebung von x in X. Die Umgebung $f^{-1}(V_{f(x)}) \times V_y$ von (x,y) in $X \times Y$ liegt dann in $X \times Y \setminus G_f$:

$$(x,y) \in f^{-1}(V_{f(x)}) \times V_y \subset X \times Y \setminus G_f,$$

weil:

$$\forall (z,w) \in f^{-1}(V_{f(x)}) \times V_y, \quad z \in f^{-1}(V_{f(x)}) \ \& \ w \in V_y.$$

$\Rightarrow \quad w \neq f(z)$.

Also liegt (z,w) in $X \times Y \setminus G_f$.

$\Rightarrow \quad X \times Y \setminus G_f$ ist offen. $\Rightarrow$ G_f ist abgeschlossen.

$\square$

ii) Sei $G_f \subset X \times Y$ abgeschlossen und sei $V \subset Y$ eine Umgebung von $f(x_0)$, $x_0 \in X$.

Behauptung: $f^{-1}(V) \subset X$ ist eine Umgebung von x_0.

Beweis. Da $Y \setminus V$ eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums (hier Y) ist, ist $Y \setminus V$ kompakt.

Ausserdem gibt es zu jedem (x_0,y) in $\{x_0\} \times (Y \setminus V)$ eine Umgebung $V_{x_0,y}$ von (x_0,y) in $(X \times Y) \setminus G_f$, weil $(X \times Y) \setminus G_f$ offen ist und (x_0,y) enthält. $\Rightarrow$ Diese Umgebung hat leeren Durchschnitt mit G_f. Die Vereinigung aller solchen Umgebungen von (x_0,y) bezeichnen wir mit N.

$$\Rightarrow N \cap G_f = \emptyset .$$

Aus dem Tube-Lemma folgt, dass eine Umgebung $W_{x_0} \subset X$ von x_0 existiert mit $\{x_0\} \times Y \subset W_{x_0} \times Y \subset N$.

$$\Rightarrow \quad [W_{x_0} \times (Y \setminus V)] \cap G_f = \emptyset .$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in W_{x_0} : f(x) \in V .$$

Für jedes x_0 mit $f(x_0) \in V$ gilt deshalb:

$$x_0 \in W_{x_0} \subset f^{-1}(V) .$$

D.h., dass $f^{-1}(V)$ offen ist. Damit ist f stetig.

$\square$

4) Sei $\mathcal{U}_0 \subset X$ eine beliebige offene Teilmenge. Wir finden einen Punkt $x_0 \in \mathcal{U}_0$, der keinem $A_n, n \in \mathbb{N}$, gehört.

Die abgeschlossene Teilmenge A_1 ist eine kompakte Teilmenge mit der Eigenschaft $A_1^\circ = \emptyset$. Deswegen ist $\mathcal{U}_0$ keine Teilmenge von A_1. Es gibt also ein $y \in \mathcal{U}_0$ mit $y \notin A_1$.

Es gibt also Umgebungen $\mathcal{U}$ bzw. V von y bzw. A_1, die disjunkt sind: $\mathcal{U} \cap V = \emptyset$. Nun definieren wir:

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U} \quad (\neq \emptyset, \text{ weil } y \in \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}) .$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\mathcal{U}_1} \cap A_1 = \emptyset \text{ und } \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0 .$$

Sei $\mathcal{U}_{n-1}$ definiert. Da $\mathcal{U}_{n-1} \not\subset A_n$, gibt es ein $y' \in \mathcal{U}_{n-1}$ mit $y' \notin A_n$.

Deshalb existieren Umgebungen $\mathcal{U}'$ bzw. V' von y' bzw. A_n mit $\mathcal{U}' \cap V' = \emptyset$.

Wir definieren $\mathcal{U}_n$ durch: $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}' \cap \mathcal{U}_{n-1}\ (\neq \emptyset)$.

$\Rightarrow$

$$\overline{\mathcal{U}}_n \cap A_n = \emptyset \quad \text{und} \quad \mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{n-1}.$$

Da jeder endliche Durchschnitt der Familie $\{\overline{\mathcal{U}_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ nicht leer ist, und der Raum X kompakt ist, folgern wir aus der Alternativdefinition der Kompaktheit eines Raums, dass $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\mathcal{U}_n} \neq \emptyset$.

Es gibt deshalb ein $x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\mathcal{U}_n}$. $\Rightarrow$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ x_0 \in \overline{\mathcal{U}_n}$$

$\Rightarrow$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ x_0 \notin A_n.$$

$$\left[\Rightarrow \quad x_0 \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n. \right] \qquad \square$$