Übungsblatt 4

Topologie
WS 05/06
Ghazaleh Arghanoun

1. Sei $\{(X_\alpha, T_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen und sei $A_\alpha \subset X_\alpha$ für alle $\alpha \in I$. Sei $\prod_{\alpha\in\ I} X_\alpha$ ausgerüstet mit der Produkttopologie T_π.

   (a) Für alle $\alpha \in I$ sei A_α in X_α abgeschlossen. Zeige, dass $\prod_{\alpha\in\ I} A_\alpha$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\prod_{\alpha\in\ I} X_\alpha$ ist.

   (b) Für alle $\alpha \in I$ sei A_α ein Teilraum von X_α. Zeige, dass $\prod_{\alpha\in\ I} A_\alpha$ ein Teilraum von $\prod_{\alpha\in\ I} X_\alpha$ ist.

2. Sei $\{(X_\alpha, T_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen und sei $\mathcal{B}$ eine Menge definiert durch:

   $\mathcal{B} = \{\prod_{\alpha\in I} U_\alpha \mid U_\alpha \in T_\alpha\}$.

   (a) Zeige, dass $\mathcal{B}$ Basis einer Topologie T auf der Menge $\prod_{\alpha\in\ I} X_\alpha$ ist.

   (b) Ist T mit der Produkttopologie T_π auf der Menge $\prod_{\alpha\in\ I} X_\alpha$ vergleichbar?

3. (a) Seien X, Y zwei topologische Räume und sei $q : X \longrightarrow Y$ eine Quotientenabbildung. Ist die Abbildung $q' = q\mid_A: A \longrightarrow q(A)$ definiert auf dem Teilraum $A \subset X$ auch eine Quotientenabbildung?

   (b) Seien $\sim, \sim'$ zwei Äquivalenzrelationen auf den topologischen Räumen (X, T) bzw. (X', T') mit den entsprechenden Quotientenabbildungen $q : (X, T) \longrightarrow (X/\sim, T_\sim)$ und $q' : (X', T') \longrightarrow (X'/\sim', T_{\sim'})$. Sei $F : X \longrightarrow X'$ eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft:

   $x_1 \sim x_2 \Longrightarrow F(x_1) \sim' F(x_2)$.

   Zeige, dass eine stetige Abbildung $f : (X/\sim, T_\sim) \longrightarrow (X'/\sim', T_{\sim'})$ existiert, so dass $f \circ q = q' \circ F$.

Abgabe am Donnerstag, den 17. November in der Übung!