Übungsblatt 3

Topologie
WS 05/06
Ghazaleh Arghanoun

1. Seien X und Y zwei topologische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.
   (a) Zeige, dass folgende Aussagen equivalent sind:
      i. f ist stetig.
      ii. Für jede Teilmenge A von X gilt: $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
   (b) Sei $f : X \longrightarrow Y$ stetig. Ist $f(x)$ ein Grenzpunkt von $f(A)$, wenn $x \in X$ ein Grenzpunkt von $A \subset X$ ist?

2. (a) Seien X und Y zwei topologische Räume. Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Bijektion. Zeige, dass folgende Aussagen equivalent sind:
      i. Die Abbildungen f und f^{-1} ($f^{-1} : Y \longrightarrow X$) sind beide stetig.
      ii. Eine Teilmenge U von X ist genau dann offen in X, wenn $f(U) \subset Y$ offen in Y ist.

   Eine Bijektion $f : X \longrightarrow Y$ mit einer dieser equivalenten Eigenschaften heißt eine **Homöomorphie** (zwischen X und Y).

   (b) Sei $X = (-\infty, -1) \cup [0, \infty)$ ein Teilraum vom topologischen Raum $(\mathbb{R}, T_d)$, wobei T_d die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ ist. Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) : \begin{cases} x+1, & \text{wenn } x < -1. \\ x, & \text{wenn } x \geq 0. \end{cases}$$

   Zeige, dass F eine stetige Bijektion ist. Ist f eine Homöomorphie?

3. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) : \begin{cases} x, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}. \\ 0, & \text{wenn } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

   Gibt es einen Punkt in $\mathbb{R}$, in dem f stetig ist?

Abgabe am Donnerstag, den 10. November in der Übung!