8.Übung

Kurven und Flächen
WS 2005/2006
Martin Kilian

1. Definiere $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch $x(u, v) = (u + v, u - v, uv)$. Zeige dass $\mathbf{x}$ eine Karte ist mit Bild $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = (x^2 - y^2)/4\}$

2. Sei $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ und $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$. Definiere $\mathbf{x} : D \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}).$$

Zeige dass $\mathbf{x}$ eine Karte ist mit Bild $S^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$. Finde fünf ähnliche Karten, sodass jeder Punkt in S^2 in einem Kartengebiet liegt, und schliesse dass S^2 eine Fläche ist.

3. Zeige dass jede Ebene im $\mathbb{R}^3$ eine Fläche ist.

4. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und F eine Isometrie des $\mathbb{R}^3$. Zeige dass dann $F(M)$ eine Fläche ist.

5. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ glatt, und $M = f^{-1}(c)$ eine Fläche mit $\mathrm{grad} f(p) \neq 0$ für alle $p \in M$. Definiere $N : M \to T_p\mathbb{R}^3$ durch

$$N(p) = (\mathrm{grad} f(p))_p.$$

Zeige dass N ein glattes normales Vektorfeld auf M ist.

Bitte reichen Sie Ihre Lösung am Dienstag, den 24.01.06 in der Übung ein.