6.Übung

Kurven und Flächen
WS 2005/2006
Martin Kilian

Ein Spezialfall eines Satzes aus der Vorlesung ist der folgende

Satz: Sei $A : I \to M_{n\times n}$ glatt und $X_0 \in \mathbb{R}^n$, und $t_0 \in I$. Dann gibt es eine eindeutige glatte Lösung $X : I \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt} X = A\,X, \quad X(t_0) = X_0. \tag{1}$$

Wir wollen die Eindeutigkeitsaussage dieses Satzes beweisen.

1. Sei $X \in \mathbb{R}^n$ und $|X| = \sqrt{X_1^2 + \ldots + X_n^2}$ die Euklidische Norm.
Für $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}$ betrachte die Matrixnorm

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

Zeige dass

$$|A\,X| \leq \|A\|\,|X|.$$

2. Zeige: Ist $X : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1), dann gilt für $t \geq t_0$:

$$|X(t)|^2 \leq |X_0|^2 + 2\int_{t_0}^{t} \|A(s)\|\,|X(s)|\,ds.$$

3. Seien u, $v : I \to \mathbb{R}$ nicht-negative stetige Funktionen und $\epsilon > 0$. Nimm an dass

$$u(t) \leq \epsilon + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\,ds.$$

Zeige: Für $t \geq t_0$ gilt

$$u(t) \leq \epsilon\,\exp\Big(\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds\Big). \tag{2}$$

[Dies ist *Gronwall's Ungleichung*.] Hinweis: Finde eine Stammfunktion von $uv/(\epsilon + \int^t uv)$.

4. Schliesse dass wenn $X_0 = 0$, dass dann $X(t)$ für $t \geq t_0$ verschwindet. Folgere hieraus dass dann aber $X(t)$ auf ganz I verschwindet.

5. Folgere nun schliesslich dass das Anfangswertproblem (1) eine eindeutige Lösung besitzt.

Bitte reichen Sie Ihre Lösung am Dienstag, den 13.12.05 in der Übung ein.