9.Übung

Kurven und Flächen
WS 2005/2006
Martin Kilian

1. Für $f,\, g : M \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_pM$, zeige:

(i) $\nabla_{\mathbf{u}}(\lambda f + g) = \lambda \nabla_{\mathbf{u}} f + \nabla_{\mathbf{u}} g$;
(ii) $\nabla_{\mathbf{u}}(fg) = f(p)\, \nabla_{\mathbf{u}} g + g(p) \nabla_{\mathbf{u}} f$;
(iii) $\nabla_{\lambda \mathbf{u}+\mathbf{v}} f = \lambda \nabla_{\mathbf{u}} f + \nabla_{\mathbf{u}} f$.

2. Sei $f : M \to \mathbb{R}$ glatt und $\mathbf{x} : D \to \mathbb{R}^3$ eine Karte. Zeige dass

$$\nabla_{\mathbf{x}_u} \nabla_{\mathbf{x}_v} f = \nabla_{\mathbf{x}_v} \nabla_{\mathbf{x}_u} f.$$

3. Zeige dass für eine 2×2 Matrix S das charakteristische Polynom von der Form ist

$$\lambda^2 - (\mathrm{tr} S)\, \lambda + \det S.$$

Benutze dies um zu zeigen dass die Hauptkrümmungen gegeben sind durch

$$H \pm \sqrt{H^2 - K}\,.$$

4. Sei $M = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$. Finde ein normales Vektorfeld sowie zwei linear unabhängige tangentiale Vektorfelder an M.

5. Fixiere $\lambda_1,\, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und betrachte $M = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : 2z = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2\}$. Sei $p = (0,\, 0,\, 0) \in M$ und $e_1 = (1, 0, 0)_p$ und $e_2 = (0, 1, 0)_p$.

Zeige: Die Hauptkrümmungen von M in p sind bis auf Vorzeichen λ_1 und λ_2 mit entsprechenden Hauptkrümmungsrichtungen e_1, e_2.

Bitte reichen Sie Ihre Lösung am Dienstag, den 31.01.06 in der Übung ein.