1.Übung

Kurven und Flächen
WS 2005/2006
Martin Kilian

1. Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $F(x, y) = (\cosh(y)\, \cos(x),\, \cosh(y)\, \sin(x),\, y)$.

(i) Beschreibe das Bild von F.
(ii) Berechne die Jacobi-Matrix von F.
(iii) Berechne $D\,F_p v$ für $p = (0, 0)^t$ und $v = (3, 2)^t$.

2. Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung und $p \in \mathbb{R}^n$. Zeige dass $D\,T_p = T$.

3. Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $v \in T_p\mathbb{R}$ (also $v \in \mathbb{R}$). Zeige das

$$F_* v_p = (F'(p)\, v)_{F(p)}\,,$$

wobei $F'(p) \in \mathbb{R}$ die übliche Ableitung von F in p bezeichne.

4. Seien $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar. Zeige dass

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*\,.$$

5. Seien $U_1, \ldots, U_n$ Basisfeld für $\mathbb{R}^n$ und $U_1', \ldots, U_m'$ Basisfeld für $\mathbb{R}^m$, und $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Zeige dass

$$F_*(U_j(p)) = \sum_{i=1}^{m} \left.\frac{\partial F^i}{\partial x_j}\right|_p U_i'(F(p)).$$

6. Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Zeige dass $T_*(v_p) = (T\,v)_{T(p)}$.

Bitte reichen Sie Ihre Lösung am Dienstag, den 25.10.05 in der Übung ein.