7.Übung

Kurven und Flächen
WS 2005/2006
Martin Kilian

1. Wir werden die Integralformel, die im Beweis der Isoperimetrischen Ungleichung benutzt wurde, ohne Rekurs auf die Green'sche Formel beweisen.

(i) Sei $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $x(a) = -R$ und $x(b) = R > 0$. Zeige dass

$$\int_a^b x' \sqrt{R^2 - x^2}\, dt = \frac{\pi R^2}{2}.$$

(ii) Allgemeiner, sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine Kurve mit Koordinaten $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ und $x(a) < x(b)$, und nehme an, dass $x'(t) \neq 0$ für alle $t \in (a, b)$. Zeige dass der (signierte) Flächeninhalt des Flächenstücks zwischen dem Bild von α und der x-Achse gegeben ist durch

$$\int_a^b x' y\, dt.$$

(iii) Endlich, sei nun $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene, poitiv orientierte Kurve mit Periode T. Schreibe wieder $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, und nimm an dass $x(t)$ nur endlich viele Kritische Punkte in $[0, T]$ hat. Zeige dass der Flächeninhalt des von α berandeten Flächenstücks gegeben ist durch

$$A = -\int_0^T x' y\, dt = \int_0^T y' x\, dt = \tfrac{1}{2} \int_0^T y' x - x' y\, dt. \tag{1}$$

Man kann sogar zeigen, dass es für *jede* einfach geschlossene Kurve Koordinaten gibt für die x' nur endlich oft in $[0, T]$ verschwindet. Dies also, zusammen mit Obigem, beweist die Formel (1) für den Flächeninhalt ohne Benutzung der Green'schen Formel.

2. Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre konvexe, positiv orientierte Kurve. Zeige dass die signierte Krümmung von α nicht-negativ ist.

3. Zeige dass $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$ mit $a, b > 0$ eine positiv orientierte konvexe Kurve ist. Berechne die Krümmung von α, und zeige dass im Fall $a \neq b$ die Kurve α genau vier Scheitelpunkte besitzt.

Bitte reichen Sie Ihre Lösung am Dienstag, den 20.12.05 in der Übung ein.