10.Übung

Kurven und Flächen
WS 2005/2006
Martin Kilian

1. Seien $v,\, w \in T_pM$ linear unabhängig. Zeige dass

$$Sv \times Sw = K(p) v \times w, \qquad Sv \times w + v \times Sw = 2H(p) v \times w.$$

2. Sei $\mathbf{x}(u,\, v) = (u,\, v,\, f(u,\, v))$ eine Monge-Karte. Finde E, F, G, l, m und n und somit eine Formel für K und H. Schliesse dass das Bild von $\mathbf{x}$ flach ist genau dann wenn

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\right)^2 = 0,$$

und minimal genau dann wenn

$$\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 2\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}.$$

Schliesse hieraus dass für $f(u,\, v) = \log\cos v - \log\cos u$ das Bild von $\mathbf{x}$ minimal ist.

3. Sei $\alpha = (g,\, h) : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $h > 0$, d.h $\alpha(I)$ liegt oberhalb der x-Achse. Rotiert man $\alpha(I)$ um die x-Achse ergibt eine Rotationsfläche

$$\mathbf{x}(u,\, v) = (g(u),\, h(u)\cos v,\, h(u)\sin v).$$

(i) Zeige dass $\mathbf{x}$ regulär ist, und eingeschränkt auf hinreichend kleine Teilintervalle von $I \times \mathbb{R}$ injektiv ist. Folgere dass das Bild von $\mathbf{x}$ eine Fläche ist.

(ii) Zeige dass die Gauss'sche Krümmung gegeben ist durch

$$K(\mathbf{x}(u,\, v)) = -\frac{h''(u)}{h(u)}.$$

Bitte reichen Sie Ihre Lösung am Dienstag, den 07.02.06 in der Übung ein.