4.Übung

Kurven und Flächen
WS 2005/2006
Martin Kilian

1. Sei $C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit Matrix $\mathcal{C}$ bezüglich der Standardbasis. Dann sind die folgenden Aussagen equivalent:

(i) $\mathcal{C}$ ist eine orthogonale Matrix.
(ii) Die Spalten von $\mathcal{C}$ sind orthogonale Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$.
(iii) C ist eine orthogonale Abbildung.

2. Sei $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine orthogonale Abbildung.

(i) Nimm an dass $\det C = 1$ und zeige, dass dann C eine Rotation um den Ursprung ist.
(ii) Nimm an dass $\det C = -1$ und zeige, dass es dann Matrizen R, S gibt, wobei S orthogonal ist mit $\det S = 1$, und $C = R\,S$ mit

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Schliesse hieraus: Wenn n ungerade ist, dann ist C eine Spiegelung an einer Gerade durch den Ursprung.

3. Zeige dass die Zerlegung einer Isometrie des $\mathbb{R}^n$ in Orthogonal und Translations -Anteile eindeutig ist.

4. Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Translation, und $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$. Zeige dass dann $T_* v_p = v_{T(p)}$.

Bitte reichen Sie Ihre Lösung am Dienstag, den 29.11.05 in der Übung ein.