

Übungsblatt 4

Analysis II/SS 2005
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

1. Berechne die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\int \frac{dx}{1+x^4}$. (1P)

(b) $\int e^{-x} \cos 3x dx$. (1P)

(c) $\int \sqrt{1-x+x^2} dx$. (1P)

(d) $\int \frac{dx}{\sin x \cos 2x}$. (1P)

(e) $\int x \sqrt{x^2 - 3x - 4} dx$. (2P)

2. Let $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ be a differentiable function with $f(1) = 0$ whose derivative f' is continuous in $(0, 1)$. Prove the following inequality:

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 3 \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2.$$

(2ZP)

3. Sei $C_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N$. Beweise:

(a) $0 < C_N < 1$ für alle $N > 1$. (Hinweis: Beweise zuerst $\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{n}$.) (2P)

(b) Der Limes $C := \lim_{N \rightarrow \infty} C_N$ existiert. Die Zahl C heißt "Euler-Mascheronische Konstante". (2ZP)

4. Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

(a) Definiere $N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$. Beweise, dass N ein Vektorraum ist. (2P)

(b) Definiere $B = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n : Ax = y\}$. Beweise, dass B ein Vektorraum ist. (2P)

(c) Ausserdem gelte $Ax = 0$ nur dann, wenn $x = 0$. Beweise, dass A dann injektiv ist. (2P)

Abgabe bis zum Freitag, den 13. Mai um 10:00 in A5!