Übungsblatt 1

Analysis II/SS 2005
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

1. (a) Finde die Unter- und Oberintegrale für die Funktion $f(x) = x$ auf dem Intervall $[0, 1]$. (Hinweis: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$.) (2P)

   (b) Im Fall der Existenz bestimme das Riemannintegral von f: $\int_0^1 f(x)dx$. (2P)

2. (a) Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion: $|f(x)| \leq B$ für alle $x \in [a, b]$, wobei B eine positive Zahl ist. Zeige:

   $$S(p, f^2) - s(p, f^2) \leq 2B(S(p, f) - s(p, f))$$

   für alle Partitionen $p \in \mathcal{P}[a, b]$. (Hinweis: $f^2(x) - f^2(y) = (f(x) + f(y))(f(x) - f(y))$.) (2P)

   (b) Sei $f \in \mathcal{R}[a, b]$ wie im Teil (a). Zeige, dass $f^2 \in \mathcal{R}[a, b]$. (2P)

3. (a) Finde die Unter- und Oberintegrale für die Funktion

   $$f(x) = \begin{cases} x, & \text{wenn x rational ist,} \\ 0, & \text{wenn x irrational ist,} \end{cases}$$

   auf dem Intervall $[0, b]$. (2P)

   (b) Ist f Riemann-integrabel auf dem Intervall $[0, b]$? (2P)

   (c) Sei $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige beschränkte Funktion, so dass f^2 Riemann-integrabel ist. Ist f dann Riemann-integrabel? (Beweise oder nenne ein Gegenbeispiel.) (2P)

4. Let $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function. Show there is at least one $\alpha \in [0, 1]$ such that $f(\alpha) = \int_0^1 f(x)dx$. (2P)

Abgabe bis zum Freitag, den 22 April um 10:00 in A5!