Übungsblatt 8

Analysis II/SS 2005
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

1. Seien $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 |\ u > v\}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und $T : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine Abbildung definiert durch $T(u,v) = (u+v, u^2+v^2)$. Zeige, dass T lokal injektiv ist. (2P)

2. Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} 3x + y - z + u^2 = 0 \\ x - y + 2z + u = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 2u = 0 \end{array} .$$

   (a) Zeige, dass für jedes $z \in \mathbb{R}$ eine Lösung $(x, y, u) \in \mathbb{R}^3$ für das System gibt. (2P)

   (b) Zeige, dass es ein $u \in \mathbb{R}$ gibt, so dass das Gleichungssystem bezüglich x, y, z nicht eindeutig zu Lösen ist. (2P)

3. Seien $K > 0$ und $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen, die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)| \leq K,\ \forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ und } j = 1, \cdots, n.$$

   Zeige:

   (a) Für jedes $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ und $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt $|f(x) - f(y)| \leq K \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$. (Hinweis: Mittelwertsatz) (2P)

   (b) Ausserdem gilt $|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{n}K||x-y||$, wobei $||u|| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$. (Hinweis: Cauchy-Schwarz-Ungleichung) (2P)

4. Let $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ be given by $F(x,y) = (f(x), -y + xf(x))$, where $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is a continuously differentiable function with $f(x_0) = y_0$ and $f'(x_0) \neq 0$ for some $x_0 \in \mathbb{R}$.

   (a) Show that F is invertible near (x_0, y_0). (2P)

   (b) Show that there is a function g from a neighborhood of $y_0 \in \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ such that the map $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ defined by

$$G(u,v) = (g(u), -v + ug(u))$$

   satisfies $G(F(x,y)) = (x,y)$ in a neighborhood of (x_0, y_0). (2P)

5. Zeige, dass $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin(\frac{1}{x}), & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

   in keiner Umgebung von 0 injektiv ist. (2P)

Abgabe bis zum Freitag, den 10. Juni um 10:00 in A5!