Übungsblatt 10

Analysis II/SS 2005
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

1. Bestimme, ob die folgende Abbildung Lebesgue integrabel und Riemann integrabel ist:

   $$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$
   $$f(x,y) = \begin{cases} \cos \frac{1}{1-x^2-y^2}, & \text{wenn } x^2+y^2 \leq 4 \text{ und } x^2+y^2 \neq 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (3P)

2. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = \exp(-[nx])$, wobei $[x]$ der ganzzahlige Anteil von x darstellt: $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$. Zeige:

   (a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist f_n Lebesgue integrabel. (2P)

   (b) Die Folge $(\int f_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge. (2P)

3. (a) Evaluate the integral

   $$\int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dydx.$$

   (2P)

   (b) Evaluate the integral

   $$\int_{-1}^1 \int_0^2 (1-6x^2y)dxdy.$$

   (2P)

   (c) Let $f : [-2,2] \times [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ be defined by

   $$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2}, & \text{if } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{if } x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

   Calculate $\int_{-2}^2 \int_{-2}^2 f(x,y)dxdy$. (3P)

4. (Egoroffscher Satz) Seien $Q \subset \mathbb{R}^d$ ein Quader, und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Stufenfunktionen auf Q, die in Q punktweise gegen eine Funktion f konvergiert.

   (a) Definiere g_n durch $g_n = |f - f_n|$. Seien $(\epsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge von positiven Zahlen, und $Q_{N,m}$ die Teilmenge von Q, wo $g_n < \epsilon_m$ für $n \geq N$. Zeige:

   $$\bigcup_{N=1}^\infty Q_{N,m} = Q.$$

   (Hinweis: Zeige zuerst, dass $Q_{N,m} \subset Q_{N+1,m}$.) (2P)

   (b) Sei $\delta > 0$ gegeben. Zeige, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ es ein $n(m) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\mu(Q - Q_{n(m),m}) < \frac{\delta}{2^m}$. (2ZP)

   (c) Sei $Q_0 = \bigcap_{i=1}^\infty Q_{n(i),i}$. Zeige, dass (f_n) in Q_0 gleichmäßig gegen f konvergiert. (Hinweis: Benutze g_n!) (1ZP)

Abgabe bis zum Freitag, den 24. Juni um 10:00 in A5!