Musterklausur

Analysis I/WS 2004/05
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

Es werden die vier Aufgaben mit den meisten Punkten gewertet!

1. Bestimme die Stammfunktion:
   (a) $\int (\ln x)^2 dx$. (2P)
   (b) $\int \frac{1+e^x}{1-2e^x+e^{2x}} dx$. (2P)

2. Bestimme die folgenden Integrale:
   (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin y} x e^{-y} dx dy$. (2P)
   (b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{\sin x + \cos x} y^{-2} dy dx$. (2P)

3. (a) Untersuche das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$. (2P)
   (b) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Zeige, dass die Folge $\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und berechne den Grenzwert. (2P)

4. (a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = y^2(x-1) + x^2(x+1)$. Untersuche f auf lokale Maxima und Minima. (2P)
   (b) Bestimme die Richtungsableitung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \ln \sqrt{x^2+y^2}$ im Punkt $(1,1)$ in der Richtung $v = (2,1)$. Ist f in diesem Punkt ableitbar? (2P)

5. Sei $M_{2\times 2}$ der Vektorraum aller reellen 2×2-Matrizen. Sei $f : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ definiert durch $f(A) = A^2$.
   (a) Zeige, dass f in einer Umgebung des Punktes $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ invertierbar ist. (2P)
   (b) Zeige, dass die zweite Ableitung von f als Abbildung von $M_{2\times 2}$ nach $\mathcal{L}(M_{2\times 2}, \mathcal{L}(M_{2\times 2}))$ konstant ist. (2P)

Abgabe bis zum Mittwoch, den 29. Juli um 14:00 Uhr in A5