Übungsblatt 12

Analysis II/SS 2005
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

1. (a) Sei X eine unendliche Menge.
   i. Sei $\mathcal{R}$ die Kollektion aller abzählbaren Teilmengen von X. Ist $\mathcal{R}$ eine σ-Algebra?
   ii. Sei $\mathcal{S}$ die Kollektion aller Teilmengen $A \subset X$, so dass entweder A oder $A^c = X \setminus A$ endlich ist. Sei $m : \mathcal{S} \longrightarrow \{0, 1\}$ definiert durch
   $$m(A) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } A \text{ endlich ist,} \\ 1, & \text{wenn } A^c \text{ endlich ist.} \end{cases}$$
   Ist m ein Mass auf $\mathcal{S}$?

   (b) Ist die Menge $K_r(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r\} \subset \mathbb{R}^2$ messbar? Im Fall der Messbarkeit bestimme deren Lebesgue-Mass.

2. (a) Bestimme das Integral $\iint_A e^{-x^2-y^2} dxdy$, wobei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   (b) Zeige:
   $$\int_{\mathbb{R}^n} \exp^{-x_1^2-\cdots-x_n^2} d\mu = \pi^{\frac{n}{2}}, \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. (a) Sei $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ die Einheitskugel in $\mathbb{R}^3$. Bestimme das Integral $\iint_S (x^2 + y + z) d\mu$. (Hinweis: Benutze die Kugelkoordinaten: $x = \rho \sin\phi \cos\theta$, $y = \rho \sin\phi \sin\theta$, $z = \rho \cos\phi$, wobei $0 < \theta < 2\pi$, $\rho \geq 0$ und $0 < \phi < \pi$.)

   (b) Die Zylinderkoordinaten werden durch
   $$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$
   definiert. Sei die Menge $S \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt durch die Fläche $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$, die $(x, y)-$Ebene und die Fläche $\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ und } r = 2\cos\theta\}$. Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten bestimme das Integral $\int_S (x^2 + y^2) d\mu$.

4. Untersuche die Gültigkeit der Gleichung $\int_\Omega \bigtriangledown \, . \, f \; d\mu = \int_{\partial\Omega} f \; . \; n \; d\sigma$ für $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(x, y, z) = (-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3})$, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, und $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$.