Übungsblatt 5

1. (a) Sei $C_{\mathbb{R}}([0,1])$ der Banachraum aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Definiere die Abbildung

$$F : C_{\mathbb{R}}([0,1]) \to C_{\mathbb{R}}([0,1]), \qquad f \mapsto F(f) \text{ mit } \qquad F(f)(x) = f(x/2).$$

Zeige, dass F in $\mathcal{L}(C_{\mathbb{R}}([0,1]))$ liegt mit $\|F\| = 1$. (2P)

(b) Eine lineare stetige Abbildung $A \in \mathcal{L}(V)$ eines Banachraumes V heisst Isometrie, wenn für alle $v \in V$ gilt $\|Av\| = \|v\|$. Zeige, dass jede Isometrie injektiv ist. (2P)

(c) Definiere die Abbildung

$$G : C_{\mathbb{R}}([0,1]) \to C_{\mathbb{R}}([0,1]), \quad f \mapsto G(f) \text{ mit } \quad G(f)(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ f(1) & \text{für } \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

Zeige, dass G eine Isometrie von $C_{\mathbb{R}}([0,1])$ ist. (2P)

(d) Zeige, dass gilt $F \circ G = \mathbb{1}_{C_{\mathbb{R}}([0,1])}$ aber $G \circ F \neq \mathbb{1}_{C_{\mathbb{R}}([0,1])}$. (2ZP)

2. (a) Sei $P_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \cdots, n\}$, eine Funktion definiert durch $P_i(x_1, \cdots, x_n) = x_i$. Zeige, dass P_i in $\mathbb{R}^n$ differenzierbar ist. (2P)

(b) Sei $L_g : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ definiert durch $L_g(f) = g \circ f$, wobei g ein fixes Element in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ist. Zeige, dass L_g auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ differenzierbar ist. (2P)

3. (a) Sei V ein normierter Vektorraum. Zeige, dass für jedes $A \in \mathcal{L}(V)$, die Abbildung $D_A : \mathcal{L}(V) \longrightarrow \mathcal{L}(V)$ mit $B \mapsto AB - BA$ eine Derivation ist. (2P)

(b) Seien V ein normierter Vektorraum und D eine Derivation von $\mathcal{L}(V)$. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, und alle $A, B \in \mathcal{L}(V)$ gilt: (2P)
$D^n(AB) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}(A) D^k(B)$.

(c) Sei V ein Banachraum und D eine Derivation von $\mathcal{L}(V)$. Zeige, dass $\exp(D)$ ein Algebraisomorphismus ist, d.h. ein invertierbares Element von $\{C \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(V)) | C(AB) = C(A)C(B), \forall A, B \in \mathcal{L}(V)\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$. (2P)

(d) Sei V ein Banachraum und D_A wie in (a) definiert mit $A \in \mathcal{L}(V)$. Zeige, dass in $\mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$ gilt $\exp(D_A)B = \exp(A) \cdot B \cdot \exp(-A)$. (2ZP)

4. (a) Let $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ be a continuous map. Prove that its graph $G(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n | \, y = g(x)\}$ is closed in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. (2ZP)

(b) Is the converse true? (Prove your claim or give a counter-example!) (2ZP)

(c) Does there exist a bounded function $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, which is not continous, and whose graph is closed? (2ZP)

Abgabe bis zum Freitag, den 20. Mai um 10:00 Uhr in A5!