

Übungsblatt 3

Analysis II/SS 2005
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

1. Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige:

$$\int_0^1 f(x)x^2 dx = \frac{1}{3}f(\xi),$$

für ein $\xi \in [0, 1]$. (2P)

2. Seien f, f' beide stetig auf $[0, \infty)$, und $f(x) = 0$ für alle $x \geq 10^{10}$. Zeige:

$$\int_0^\infty (f(x))^2 dx \leq 2\sqrt{\int_0^\infty x^2 (f(x))^2 dx} \sqrt{\int_0^\infty (f'(x))^2 dx}.$$

(2P)

3. Sei $I : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$I(t) = \int_0^1 \frac{dx}{(x^4 + t^4)^{1/4}} + \ln t.$$

(a) Zeige, dass $I(t) \geq 0$. (Hinweis: $(x+t)^4 \geq x^4 + t^4$.) (2P)

(b) Zeige, dass $I'(t) \geq 0$. (Hinweis: Substituiere x mit $y = \frac{x}{t}$.) (2ZP)

(c) Folgere aus den beiden Teilen (a) und (b), dass $\lim_{t \rightarrow 0+} \left(\int_0^1 \frac{dx}{(x^4 + t^4)^{1/4}} + \ln t \right)$ existiert und endlich ist. (1P)

4. Berechne die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\int \frac{x}{\sqrt{x-2}} dx.$ (1P)

(b) $\int \cos^3 x dx.$ (1P)

(c) $\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx.$ (1P)

(d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$ (1P)

(e) $\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)}.$ (2P)

(f) $\int \frac{(x^4 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2})dx}{x^3 - 1}.$ (1P)

5. Which of the following series are convergent?

(a) $\sum_{n=2}^\infty \frac{\ln n}{n^2}.$ (1P)

(b) $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}.$ (1P)

Abgabe bis zum Freitag, den 6. Mai um 10:00 in A5!