Übungsblatt 9

Analysis II/SS 2005
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

1. Seien f und g zwei Stufenfunktionen auf einem Quader $Q \subset \mathbb{R}^d$. Zeige, dass $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(fg)(x) = f(x)g(x)$ auch Stufenfunktionen auf Q sind. (4P)

2. Seien Q_1 und Q_2 zwei Quader in $\mathbb{R}^d$. Zeige:

   (a) $\chi_{Q_1 \cap Q_2} = \chi_{Q_1}\chi_{Q_2}$. (2P)

   (b) $\chi_{Q_1 \cup Q_2} = \chi_{Q_1} + \chi_{Q_2} - \chi_{Q_1}\chi_{Q_2}$. (2P)

3. Die Funktion $f_{(a,b)}(x,y) = ay^2 + bx$ sei eingeschränkt auf den Kreis $x^2 + y^2 = 1$. Für welche Paare $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ hat diese Funktion genau vier kritische Punkte? (Hinweis: Benutze Polar-Koordinaten!) (3P)

4. (a) Sei $(O_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ eine Folge von Teilmengen des Intervalls $[0,1]$ definiert durch

   $$O_0 = \emptyset,$$
   $$O_{i+1} = O_i \cup \bigcup_{k=0}^{3^i-1} \left(\frac{3k+1}{3^{i+1}}, \frac{3k+2}{3^{i+1}}\right).$$

   Zeige, dass die Menge $P = [0,1] \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} O_i$ eine Nullmenge ist. Die Menge P heisst die Cantor-Menge. (Hinweis: Berechne zuerst das Volumen von $\bigcup_{i=1}^{n} O_i = O_n$.) (3P)

   (b) Zeige, dass die Menge P nicht abzählbar ist. (3ZP)

5. Let $f(x,t)$ be a continuously differentiable function from $\mathbb{R}^2$ into $\mathbb{R}$ such that $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t}$. Suppose that $f(x,0) > 0$ for all $x \in \mathbb{R}$. Prove that $f(x,t) > 0$ for all $x, t \in \mathbb{R}$. (Hint: Consider the segment connecting (x,t) to $(x+t, 0)$.) (2P)

Abgabe bis zum Freitag, den 17. Juni um 10:00 in A5!