7. Übung

Differentialgleichungen SS 2005
Martin Schmidt/Martin Kilian

1. Sei $B^3(R)$ die Vollkugel im $\mathbb{R}^3$ mit Radius $R > 0$, und $S^2 = \partial B^3(1)$.

(i) Berechne das Volumen von $B_3(R)$.

(ii) Berechne das Integral $\displaystyle\int_{B_3(1)} \exp(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\, d\mu$.

(iii) Berechne mit Hilfe des Gauß'schen Satzes das Integral

$$\int_{S^2} (x^2 + y + z)\, d\mu.$$

2. Für $0 < a < b$ betrachte das Kreisring-Segment im ersten Quadranten

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2 \text{ und } x \geq 0,\ y \geq 0\right\}.$$

Berechne das Integral $\displaystyle\int_D \log(x^2 + y^2)\, d\mu$.

3. Sei $F(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$ und $\mathcal{Z}$ ein Zylinder mit Endkappen, gegeben durch alle Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $x^2 + y^2 = 1$ für $z \in (-1, 1)$ und $x^2 + y^2 \leq 1$ für $z = \pm 1$. Berechne das Integral

$$\int_{\mathcal{Z}} F d\mu.$$

4. Betrachte für $a > b > 0$ den Volltorus

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 \leq b^2\right\}$$

(i) Berechne den Oberflächeninhalt des Torus.

(ii) Berechne das Volumen des Torus.

5. Berechne den Fluss von $\Phi(x, y, z) = (3xy^2, 3x^2y, z^3)$ über die Einheitssphäre S^2.

Bitte reichen Sie Ihre Lösung am 15.06.05 in der Vorlesung ein.