10. Übung

Differentialgleichungen SS 2005
Martin Schmidt/Martin Kilian

1. Sei $H = -\Delta$ der Laplace-Operator und für $f \in C(\Omega)$ definiere

$$u(x,\, t) = e^{-t\,H} f.$$

(i) Zeige dass u eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist

$$\begin{cases} \dot{u} - \Delta u = 0, \\ u(x,\, 0) = f(x). \end{cases}$$

(ii) Zeige dass der Wärmeleitungskern $H_\Omega(x,\, y,\, t)$ der Integralkern des Operators e^{-tH} ist.

2. Bezeichne mit $H_\Omega(x,\, y,\, t)$ wieder den Wärmeleitungskern, und definiere

$$G(x,\, y,\, \lambda) = \int_0^\infty H_\Omega(x,\, y,\, t)\, e^{-\lambda\, t} dt.$$

Zeige dass dann für die Green'sche Funktion $G_\Omega(x,\, y)$ gilt:

$$\lim_{\lambda \to 0} G(x,\, y,\, \lambda) = G_\Omega(x,\, y).$$

3. Betrachte die folgende modifizierte Wellengleichung für $u(x,\, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(1) $$u_{tt} - \sum_{j=1}^{n} c_j^2\, u_{x_j x_j} = 0\,,\; c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Sei $\alpha \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\alpha\| = 1$ und $F \in C(\mathbb{R})$ und definiere

$$v(x,\, t) = F(\alpha \cdot x - \mu\, t).$$

Zeige dass v eine Lösung von (1) ist falls

$$\mu^2 = \sum_{j=1}^{n} c_j^2\, \alpha_j^2.$$

4. Sei $f(x) = \dfrac{2\lambda}{x^2 + \lambda^2}$ mit $\lambda > 0$. Bestimme die Fourier-Transformierte von f.

5. Zeige dass für $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$ die Laplace-Transformierte gegeben ist durch

$$\hat{f}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Bitte reichen Sie Ihre Lösung am 06.07.05 in der Vorlesung ein.