

## 4. Übung

Differentialgleichungen SS 2005  
Martin Schmidt/Martin Kilian

### 1. Betrachte das homogene System

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix},$$

wobei  $a \in \mathbb{R}$  ein reeller Parameter ist.

(i) Nimm an  $a \neq 1$ . Zeige dass  $A$  zwei linear unabh. Eigenvektoren hat. Finde hiermit die allgemeine Lösung im Fall  $a \neq 1$ .

(ii) Nimm jetzt an  $a = 1$ . Zeige dass  $A$  dann nicht zwei linear unabh. Eigenvektoren besitzt. Merke dass das System Komponenten-weise geschrieben werden kann

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t).\end{aligned}$$

Nutze dies aus, und nicht mittels verallgemeinerten Eigenvektoren, und finde die allgemeine Lösung.

(Hinweis: Löse die 1. Gleichung, substituiere in die 2. und löse diese mit Hilfe eines Integrierenden Faktors.)

### 2. Betrachte nochmals das System aus Frage 1 oben im Fall $a = 1$ .

(i) Finde einen Eigenvektor  $v_1$  und bestimme eine Lösung  $x_1(t)$  des Systems.

(ii) Finde einen verallgemeinerten Eigenvektor  $v_2$  der Ordnung 2. Verifiziere dass  $v_1$  und  $v_2$  linear unabh. sind. Zeige dass  $x_2(t) = e^{-t}(tv_1 + v_2)$  auch eine Lösung des Systems ist. Verifiziere dass die Funktionen  $x_1$  und  $x_2$  linear unabh. sind. Bestimme dann die allg. Lösung und prüfe ob dies mit der Antwort in Frage 1(ii) oben übereinstimmt.

### 3. Berechne Eigenwerte, Eigenvektoren und einen verallgemeinerten Eigenwert, und bestimme die Lösung des homogenen Systems

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

### 4. Löse das inhomogene Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) - 4x_1(t) - 2x_2(t) &= 0, & x_1(0) &= 0, \\ \dot{x}_2(t) + x_1(t) - x_2(t) &= e^t, & x_2(0) &= 0.\end{aligned}$$

### 5. Betrachte das inhomogene Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b, \quad x(0) = \xi \in \mathbb{R}^N, \quad b \in \mathbb{R}^N.$$

Nimm an dass  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  invertierbar ist. Zeige mit der Variation der Parameter Formel, dass die eindeutige Lösung gegeben ist durch

$$x(t) = (\exp At)\xi + A^{-1}((\exp At) - I)b.$$

---

Bitte reichen Sie Ihre Lösung am 18.05.05 in der Vorlesung ein.