

1. Übung

Differentialgleichungen SS 2005
Martin Schmidt/Martin Kilian

1. Zeigen Sie, dass die Funktion $y(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)$ für beliebige Konstanten $A, B, \alpha \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y'' + \alpha^2 y = 0$ ist.
2. Welche Differentialgleichung erfüllt die Funktion $y(t) = A e^{2t} + B e^t + C$? Hier sind $A, B, C \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten.
3. Sei $f(t, u, u') = 2t - 3 + 3u' - 2u$. Zeigen Sie, dass $u(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + t$ eine allgemeine Lösung von $u'' = f(t, u, u')$ ist. Bestimmen Sie die spezielle Lösung für die $u(0) = u(1) = 0$ gilt.
4. Schreiben Sie das folgende System dritter Ordnung in der Form $\dot{x}(t) = A x(t)$:

$$\begin{aligned} y''' + 2y' + y - 3z' + z &= 0 \\ 2z''' + z'' - 4y'' + 2z + 6y &= 0. \end{aligned}$$

5. Bringen Sie die folgende skalare inhomogene Differentialgleichung N -ter Ordnung

$$y^{(N)}(t) + \sum_{n=0}^{N-1} a_n(t) y^{(n)}(t) = f(t), \quad a_n \in \mathbb{R},$$

in die Form $\dot{u}(t) = A(t) u(t) + b(t)$ eines Systems 1. Ordnung.

6. (a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $y_1, \dots, y_M : I \rightarrow \mathbb{C}^N$ Funktionen. Was ist damit gemeint, dass diese Funktionen *linear unabhängig* sind? Zeigen Sie, dass wenn $t_0 \in I$ und $y_1(t_0), \dots, y_M(t_0) \in \mathbb{C}^N$ linear unabhängige Vektoren sind, dann sind y_1, \dots, y_M linear unabhängige Funktionen auf I .

(b) Schliessen Sie hieraus, dass wenn $v_1, \dots, v_M \in \mathbb{C}^N$ linear unabhängige Vektoren sind, und $\lambda_1, \dots, \lambda_M \in \mathbb{C}$, dann sind die Funktionen $y_n : t \mapsto e^{\lambda_n t} v_n$ für $n = 1, \dots, M$ linear unabhängig.

7. Entscheiden Sie im Folgenden, ob die Funktionen (auf \mathbb{R}) linear unabhängig sind.

- (i) $y_1 : t \mapsto \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, \quad y_2 : t \mapsto \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}.$
- (ii) $f_1 : t \mapsto \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, \quad f_2 : t \mapsto \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}, \quad f_3 : t \mapsto \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}.$
- (iii) $g_1 : t \mapsto \sin 3t, \quad g_2 : t \mapsto -\sin t, \quad g_3 : t \mapsto \cos 2t \sin t.$

Bitte reichen Sie Ihre Lösung am Montag, den 18.04.05 in der Vorlesung ein.