

8. Übung

Differentialgleichungen SS 2005
Martin Schmidt/Martin Kilian

1. Sei O eine orthogonale $n \times n$ -Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und definiere

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto Ox + b.$$

Zeige: Wenn $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch ist, dann auch die Komposition $v \circ T$.

2. Seien $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ Lösungen von

$$\begin{cases} -\Delta u_j &= f \text{ in } \Omega, \\ u_j &= g_j \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeige: Wenn $g_1 \leq g_2$ auf $\partial\Omega$, dann gilt $u_1 \leq u_2$ auf $\bar{\Omega}$.

3. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, und $B_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = \epsilon\}$. Zeige dass

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B_\epsilon(x_0))} \int_{B_\epsilon(x_0)} f(y) d\mu(y) = f(x_0).$$

4. Beweisen Sie die zweite Green'sche Integralformel

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS.$$

5. Zeigen Sie dass für das Volumen $V^n(B^n(R))$ und die Oberfläche $A^n(\partial B^n(R))$ der Kugel $B^n(R) \subset \mathbb{R}^n$ mit Radius $R > 0$ gilt:

$$A^n(\partial B^n(R)) = \frac{n}{R} V^n(B^n(R)) = \begin{cases} \frac{n\pi^{n/2}}{(n/2)!} R^{n-1}, & n \text{ gerade.} \\ \frac{2n(2\pi)^{(n-1)/2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots n} R^{n-1}, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

6. Seien $u, v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen der Laplace Gleichung. Dann löst $w(x) := u(x)v(x)$ die Laplace Gleichung genau dann wenn $\nabla u \perp \nabla v$.

7. Sei $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar.

(i) Zeigen Sie dass bezüglich der Zylinderkoordinaten $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ und $z = z$

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

(ii) Zeigen Sie dass bezüglich der Kugelkoordinaten $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$ und $z = r \cos \theta$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \right].$$

Bitte reichen Sie Ihre Lösung am 22.06.05 in der Vorlesung ein.