6. Übung

Differentialgleichungen SS 2005
Martin Schmidt/Martin Kilian

1. Sei Q ein Quader im $\mathbb{R}^n$ und $f_n \subset L^1(Q)$ eine Folge von Funktionen, die gleichmässig gegen eine Funktion f konvergiere. Zeige

(i) Falls $\mu(Q) < \infty$, dann ist $f \in L^1(Q)$ und $\int f_n \longrightarrow \int f$.
(ii) Wenn $\mu(Q) = \infty$, dann gilt (i) nicht. [Hinweis: Finde ein Gegenbeispiel auf $\mathbb{R}$.]

2. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $F(x) := \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Zeige dass $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

3. Sei $f_n(x) := ae^{-nax} - be^{-nbx}$ mit $0 < a < b$. Zeige

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n(x)|\,dx = \infty$.
(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\,dx = 0$.
(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in L^1([0,\infty))$ und $\displaystyle\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \ln(\frac{b}{a})$.

4. Berechne die folgenden Grenzwerte und rechtfertige die benötigten Zwischenschritte.

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(x/n)}{(1+\frac{x}{n})^n}\,dx$.
(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{1} \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\,dx$.

5. Sei $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

(i) Zeige dass $\displaystyle\int_0^{\infty} |f(x)|\,dx = \infty$.
(ii) Zeige dass $\displaystyle\lim_{b\to\infty} \int_0^{b} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$. [Hinweis: Integriere $e^{-xy}\sin(x)$ bzgl. x und y. Wegen (i) muss man beim Übergang zum Limes vorsichtig argumentieren.]

Bitte reichen Sie Ihre Lösung am 08.06.05 in der Vorlesung ein.