Mustervordiplomklausur

Analysis II/SS 05
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

Bearbeite nur 4 der folgenden 5 Aufgaben!

1. Berechne folgende Stammfunktionen:

   (a) $\int \ln(4-x^2)\ dx$. (4P)

   (b) $\int \frac{32}{x^4-16} dx$. (4P)

2. Sei $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = xy + 2x - \ln(x^2 y)$.

   (a) Bestimme alle kritischen Punkte von f. (4P)

   (b) Untersuche f auf lokale Maxima und Minima. (4P)

3. Berechne die folgenden zweidimensionalen Integrale:

   (a) $\int_A xe^y d\mu$ und $\int_B xe^y d\mu$ über die beiden Dreiecke A und B, in die die Diagonale $y = x$ das Quadrat $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ teilt. (4P)

   (b) $\int_{\mathbb{R}^2} (x+y)^2 e^{-(x^2+y^2)} d\mu$ (Hinweis: Benutze Polarkoordinaten) (4P)

4. Gegeben sei $d \in \mathbb{N}$ und die Funktion

$$f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, \ldots, x_d, t) \mapsto t^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + \ldots + x_d^2}{4t}\right).$$

   (a) Berechne alle ersten partiellen Ableitungen von f. (4P)

   (b) Zeige dass f für alle $(x_1, \ldots, x_d, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ folgende Gleichung erfüllt:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x_1, \ldots, x_d, t) - \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(x_1, \ldots, x_d, t) - \ldots - \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}(x_1, \ldots, x_d, t) = 0.$$

   (4P)

5. Gegeben sei die Abbildung $f : A \mapsto A + A^{-1}$ von allen invertierbaren Elementen von $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ nach $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

   (a) Berechne für alle invertierbaren $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ die Ableitung von f an der Stelle A. (4P)

   (b) Bestimme alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass die Abbildung f an der Stelle $A = \lambda \mathbb{1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ lokal invertierbar ist. (4P)