Übungsblatt 10

Analysis I/WS 2004/05
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

1. Sei X ein metrischer Raum. Zeige:

   (a) Ist $A \subset B \subset X$, dann $\overline{A} \subset \overline{B}$. (1P)

   (b) Wenn $A, B \subset X$, dann $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$. (1P)

   (c) Wenn $A, B \subset X$, dann $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. (1P)

   (d) Gebe zwei Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ an, so dass $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$. (1P)

   (e) Sei A ein Unterraum von X, also eine Teilmenge von X zusammen mit der Einschränkung der Metrik von X auf $A \times$A. Zeige, dass eine Teilmenge von A genau dann offen ist, wenn sie die Schnittmenge einer offenen Menge von X mit A ist. (1P)

   (f) Die Vereinigung endlich vieler kompakter Teilmengen von X ist wieder eine kompakte Menge. (1P)

2. Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ kompakte Intervalle, und $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Betrachte dabei $I \times J$ als das kartesische Produkt der metrischen Räume I und J, also der Menge $I \times J$ zusammen mit der Metrik $d(i,j),(i',j')) = d(i,i') + d(j,j')$ für alle (i,j) und $(i',j') \in I \times J$.

   (a) Zeige, dass $I \times J$ kompakt ist. (1P)

   (b) Zeige, dass für jedes $x \in I$ die Funktion $J \longrightarrow \mathbb{R}, y \mapsto f(x,y)$ stetig ist. (1P)

   (c) Zeige, dass folgende Funktion F stetig ist: (1P)

   $$F : \quad I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(x) = \sup\{f(x,y) | y \in J\}.$$

3. Prove:

   (a) The function $g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$ is uniformly continuous, but not Lipschitz continuous. (1P)

   (b) There exists exactely one fixed point of the map

   $$f : [0,1] \to [0,1], x \mapsto f(x) = \frac{x^5 + 2}{7}.$$

   Furthermore, define a sequence, which converges against the fixed point. (2P)

Abgabe bis zum Freitag, den 21. Januar um 10:00 Uhr in A5