Übungsblatt 14

Analysis I/WS 2004/05
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

1. Berechne die Taylorreihe am Punkt a für folgende Funktionen:
   (a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ am Punkt $a = 2$.
   (b) $f(x) = e^{-x}(\arctan(x/2) + \operatorname{arccot}(x/2))$ am Punkt $a = 1$.
   (c) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ am Punkt $a = 0$.

2. (a) Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f : (a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Seien M_0, M_1 bzw. $M_2 \neq 0$ das Supremum von $|f(x)|$, $|f'(x)|$ bzw. $|f''(x)|$ auf (a, ∞). Zeige: $M_1^2 \leq 4M_0M_2$. (Hinweis: falls $h > 0$, folgt aus der Taylorformel, dass es einen Punkt $\alpha \in (x, x + 2h)$ gibt, so dass $f'(x) = \frac{1}{2h}(f(x + 2h) - f(x)) - hf''(\alpha)$.)
   (b) Sei $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine dreimal differenzierbare Funktion, so dass
   $$f(-1) = f(0) = 0,\ f(1) = 1 \text{ und } f'(0) = 0.$$
   Zeige, dass es ein $x_0 \in (-1, 1)$ gibt mit der Eigenschaft $f^{(3)}(x_0) \geq 3$. (Hinweis: Zeige, es gibt $s \in (0, 1)$ und $t \in (-1, 0)$ mit $f^{(3)}(s) + f^{(3)}(t) = 6$.)

3. (a) Let $x \in \mathbb{R}^+$. Show $\arctan(nx) \leq n \arctan x$.
   (b) Let $x \in \mathbb{R}$. Show $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$.

4. Für welche reellen Zahlen $x > 1$ ist die Zeta Funktion $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ differenzierbar? Mit welcher Ableitung?