Übungsblatt 2

Analysis I/WS 2004/05
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

1. Seien a, b, c und d reelle Zahlen. Beweise:

   (a) $a < b$ und $c < d \Rightarrow a + c < b + d$. (1P)

   (b) $0 < a < b$ und $0 < c < d \Rightarrow ac < bd$. (1P)

   (c) $ab > 0 \Leftrightarrow$ entweder $a > 0, b > 0$ oder $a < 0, b < 0$. (1P)

   (d) $ab < 0 \Leftrightarrow$ entweder $a > 0$, $b < 0$ oder $a < 0$, $b > 0$. (1P)

   (e) $0 < a \leq b \Rightarrow a^2 \leq \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 \leq ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq b^2$. (2P)

   (f) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$. (1P)

2. Seien x, y reelle Zahlen. Zeige:

   (a) $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$, (1P)

   (b) $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$. (1P)

3. Seien A, B (nicht leere) beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$, und $S = \{a + b |\ a \in A, b \in B\}$. Zeige:

   (a) $\sup S = \sup A + \sup B$, (1P)

   (b) $\inf S = \inf A + \inf B$. (1P)

4. Let A and B be nonempty subsets of the set of real numbers $\mathbb{R}$ such that

   (a) $A \cup B = \mathbb{R}$;

   (b) if $a \in A$ and $b \in B$ then $a < b$;

   (c) A contains no largest element.

   Prove B contains a smallest element. (1P)
   (You may formulate your solution in German or English.)

Abgabe bis zum Freitag, den 5. November um 12:00 Uhr in A5