Übungsblatt 9

Analysis I/WS 2004/05
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

1. Seien x and y reelle Zahlen. Welche von den folgenden Abbildungen definieren eine Metrik auf $\mathbb{R}$:

   (a) $d_1(x,y) = (x-y)^2$. (1P)

   (b) $d_2(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. (1P)

2. Let A and B be nonempty subsets of a metric space (X,d) and define the distance between them by

   $$\operatorname{dist}(A,B) = \inf\{d(x,y) |\ x \in A, y \in B\}.$$

   (a) Prove that if $X = \mathbb{R}^n$, A is compact, and B is closed, then there are points $a \in A$ and $b \in B$ such that $\operatorname{dist}(A,B) = d(a,b)$. Hint: Consider first two compact sets A and B and extend in a second step the argument to a compact set A and a closed set B. (2P)

   (b) Find a pair of closed subsets A and B of $\mathbb{R}$ such that $\operatorname{dist}(A,B) < d(x,y)$ for every pair (x,y) in $A \times B$. (1P)

3. Zeige in den folgenden Schritten, dass sich jeder metrische Raum (X,d) auf eindeutige Weise vervollständigen läßt:

   (a) Auf dem Raum aller Cauchyfolgen in (X,d) ist die Relation

   $$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \Longleftrightarrow (d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Nullfolge.}$$

   eine Äquivalenzrelation ist. Die Menge der entsprechenden Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $\tilde{X}$. (1P)

   (b) Für Cauchyfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert der Grenzwert $\tilde{d}((x_n),(y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n))$ und hängt nur von den Äquivalenzklassen der Cauchyfolgen ab. (2P)

   (c) Die entsprechende Abbildung $\tilde{d} : \tilde{X}\times\tilde{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert eine Metrik. (1P)

   (d) $(\tilde{X},\tilde{d})$ ist ein vollständiger metrischer Raum. (2ZP)

   (e) Die konstanten Folgen definieren eine isometrische (mit beiden Metriken verträgliche) Abbildung $X \longrightarrow \tilde{X}$, und das Bild dieser Abbildung liegt dicht in $\tilde{X}$ (d.h. der Abschluss vom Bild ist gleich $\tilde{X}$). (2P)

4. Zeige, dass durch die Identifikation von $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$ die Euklidische Norm von $\mathbb{R}^{2n}$ auf $\mathbb{C}^n$ die Norm

$$||(z_1, \cdots, z_n)|| = \sqrt{z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_n\bar{z}_n}$$

induziert. (1P)

Abgabe bis zum Freitag, den 14. Januar um 10:00 Uhr in A5