Musterkalusur 2

04.02.2005

Analysis I/WS 2004/05
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

Es sind vier der folgenden fünf Aufgaben zu bearbeiten.

1. Bestimme, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Funktionen definiert und für welche $x \in \mathbb{R}$ sie differenzierbar sind. Im Fall der Differenzierbarkeit berechne ihre Ableitung:

   (a) $f_1(x) = \cos(\frac{2}{1+x^2})$. (1P)

   (b) $f_2(x) = e^{|x|}$. (1P)

   (c) $f_2(x) = \frac{1}{\tan|x|}$. (1P)

2. (a) Sei n eine natürliche Zahl. Beweise, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n e^{-x}$ an einer einzigen Stelle, nämlich bei $x = n$, ihr (absolutes) Maximum annimmt. An dieser Stelle hat f zugleich das einzige relative Maximum. (1P)

   (b) Bestimme die maximalen Intervalle, auf denen die Funktion f konkav ist. (1P)

   (c) Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $ex \leq e^x$. (1P)

3. (a) Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\arctan x+1}{2}$ Lipschitz stetig ist mit einer Lipschitz-Konstante kleiner als 1. (1P)

   (b) Wieviel reelle Lösungen hat die Gleichung $x = \tan(2x + 1)$. (1P)

   (c) Gebe eine Folge an, die gegen eine Lösung konvergiert. (1P)

4. Im Fall der Existenz berechne die folgenden Grenzwerte:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$. (1P)

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-\cos x}{x}$. (1P)

   (c) $\lim\limits_{x\to 0+} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$. (1P)

5. Sind die folgenden Behauptungen richtig?

   (a) Die Funktion $f(x) = x(\sin(x^2))^2$ ist auf $[0, 1]$ nicht gleichmäßig stetig.

   JA☐ NEIN☐

   (1P)

   (b) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist die Funktion $f : X \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{1}{d(x,x_0)}$ eine stetige Funktion.

   JA☐ NEIN☐

   (1P)

   (c) Jede differenzierbare Funktion $f : (-1, 3) \longrightarrow (0, 2]$ hat einen Fixpunkt.

   JA☐ NEIN☐

   (1P)

   (d) Die Umkehrfunktion einer bijektiven konvexen Funktion ist konvex.

   JA☐ NEIN☐

   (1P)

Abgabe bis zum Mittwoch, den 9. Februar um 12:00 Uhr in A5