Übungsblatt 8
Musterklausur Analysis I
10.12.2004

Analysis I/WS 2004/05
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

Es sind vier der folgenden fünf Aufgaben zu bearbeiten.

1. (a) Sei $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y - x \in \mathbb{Z}\}$ eine Relation auf $\mathbb{R}$. Beweise, dass S eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ definiert. (1Pkt)

   (b) Beweise, dass $11^n - 4^n$ durch 7 teilbar ist ($n \in \mathbb{N}$). (1Pkt)

   (c) Beschreibe die Mengen:
   $$A_1 = \{z \in \mathbb{C} |\ |i - z| = |i + z| = \sqrt{2}\}$$
   (Mit Skizze!) (1Pkt)

2. Untersuche in den folgenden Beispielen die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz oder Divergenz. Berechne im Fall der Konvergenz den Grenzwert:

   (a) $a_n = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n^2}$. (1Pkt)

   (b) $a_n = \sqrt{n^2 - 5n + 6} - n$. (1Pkt)

   (c) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2+6}{7}$. (1Pkt)

3. Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$. (1Pkt)

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$. (1Pkt)

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n+1} \qquad z \in \mathbb{C}$. (1Pkt)

4. Die Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von nichtnegativen reellen Zahlen sei konvergent. Zeige, dass dann auch die Reihe $\left(\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Hinweis: Zerlege die Reihe $\left(\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in die beiden Teilreihen, von denen die eine alle Elemente enthält, die $\frac{\sqrt{a_n}}{n} \leq a_n$ erfüllen, und die andere alle anderen Elemente. (3ZP)

5. Sind die folgenden Behauptungen richtig?

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls $|\frac{a_n}{a_{n+1}}| \geq 2$ für alle n.

   JA☐ NEIN☐

   (1Pkt)

(b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{\sin n}{n}$ ist eine Nullfolge, d.h. sie konvergiert gegen Null.

JA☐ NEIN☐

(1Pkt)

(c) Nicht jede Teilfolge einer reellen Cauchy-Folge Konvergiert in $\mathbb{R}$.

JA☐ NEIN☐

(1Pkt)

(d) Falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n |a_n|$.

JA☐ NEIN☐

(1Pkt)

Abgabe bis zum Mittwoch, den 15. Dezember um 12:00 Uhr, in A5