Analysis I/WS 2004/05
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

Übungsblatt 3

1. Sei n eine natürliche Zahl. Zeige mit Hilfe der vollständigen Induktion:

   (a) $\sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. (1P)

   (b) $7^n - 6n - 1$ ist durch 36 teilbar. (1P)

   (c) Seien a_i, $i = 1, \cdots, n$, reelle Zahlen, dann gilt
   $$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$
   (1P)

   (d) Sei $n \geq 4$, dann $n^2 < n!$. (1P)

   (e) Jede endliche nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat (wenigstens) ein Maximum und (wenigstens) ein Minimum. (1P)

   (f) Die Anzahl aller Teilmengen der Menge $\{1, 2, \cdots, n\}$ ist 2^n. (1P)

2. Definition: Eine reelle Zahl x heißt reell-algebraisch, wenn es eine natürliche Zahl n und ganze Zahlen $a_0, a_1, \cdots, a_n$ gibt, die nicht alle gleich Null sind, so daß
   $$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$
   Zeige:

   (a) Die Menge aller reell-algebraischen Zahlen ist abzählbar. (1P)

   (b) Es gibt reelle Zahlen, die nicht reell-algebraisch sind. (1P)

3. Let a be a real number. Prove: $\sup\{r \in \mathbb{Q} \mid r < a\} = a$. (1P)
   (You may formulate your solution in German or English.)

4. Definition: eine reelle Zahl heißt irrational, wenn sie nicht rational ist. Zeige:

   (a) Wenn $r \neq 0$ eine rationale und a eine irrationale Zahl ist, dann sind $r + a$ und ra auch irrationale Zahlen. (1P)

   (b) Es gibt keine rationale Zahl r mit $r^2 = 12$. (1P)

   (c) $b = (\frac{4-2\sqrt{3}}{7})^{\frac{1}{2}}$ ist keine rationale Zahl, genauso wie $4 - 7b^2$. (1P)

5.* Beweise, dass die Mächtigkeit der Menge irrationaler Zahlen gleich der von $\mathbb{R}$ ist. (3ZP)

   ZP: Zusatzpunkte werden Ihnen angerechnet, sind aber freiwillig.

Abgabe bis zum Freitag, den 12. November um 12:00 Uhr in A5