Übungsblatt 11

Analysis I/WS 2004/05
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

1. (a) Sei $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{|x|+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Prüfe, ob g in $(0,0)$ stetig ist. (1P)

(b) Sei $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x < \frac{1}{n+1} \\ \sin^2 \frac{\pi}{x} & \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < x \end{cases}$$

Zeige, dass die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zwar punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen eine stetige Funktion konvergiert. (2P)

(c) Beweise, dass die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ konvergiert und berechne den Grenzwert. (Hinweis: Zeige zuerst $\prod_{n=2}^{N}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{N}))$ (1P)

(d) Beweise, dass die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ konvergiert. (Hinweis: Majorantenkriterium) (1P)

(e) Für $x \in \mathbb{R}$ definiere die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv wie folgt: $x_0 = x$; $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+\sqrt{1+x_n^2}}$. Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n x_n) = \arctan x$.
Hinweis: setze $x = \tan(y)$ mit $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und berechne dann mit dem Additionstheorem x_n als Funktion von y. (2ZP)

2. (a) Zeige dass für alle $x \in \mathbb{R}$ folgende Ungleichheit gilt, und Gleichheit nur für $x = 0$ gilt: $e^x \geq 1 + x$. (1P)

(b) Zeige dass es genau eine reelle Lösung der Gleichung $xe^x = 1$ gibt. Gebe außerdem eine Folge an, die gegen die Lösung konvergiert.
Hinweis: Untersuche die Fixpunkte der Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x}$. (2P)

3. (a) Definition. Let X be a metric sapce and $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a sequence of functions $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$. The sequence $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is uniformly bounded if there exists some real number $M > 0$ such that $|f_n(x)| < M$ for every $x \in X$ and every positive integer n.

Prove that every uniformly convergent sequence $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of bounded functions is uniformly bounded. (2P)

(b) If $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence of continuous real functions on X which converges uniformly to a real function f on X, prove that f is continuous, too. (1P)

4. Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ eine stetige reelle Funktion von dem Intervall $[a,b]$ auf sich selber, mit $a < b \in \mathbb{R}$. Zeige dass f einen Fixpunkt hat. (1P)

Abgabe bis zum Freitag, den 28. Januar um 10:00 Uhr in A5