Übungsblatt 4

Analysis I/WS 2004/05
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

1. Stelle die folgenden Zahlen in der Form $a + ib$ dar:

   (a) $\frac{2+\imath}{2-\imath}$; (1P)

   (b) $\frac{(1+2\imath)^3-(1-\imath)^3}{(3+2\imath)^3-(2+\imath)^2}$. (1P)

2. (a) Zeichne die Mengen $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \leq 2\}$ in der x–y–Ebene; (1P)

   (b) Zeichne die Mengen $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z^2) = 0\}$ in der x–y–Ebene; (1P)

   (c) Zeige, dass folgende Aussagen äequivalent sind:
   $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right| \geq 1$ und $\Re(z) \geq 0$; (2P)

   (d) Zeige, dass folgende Aussagen äequivalent sind:
   $\left|\dfrac{z+\imath}{z-\imath}\right| = 1$ und z ist reell. (2P)

3. Prove that if a, b, a_0, $a_1, \cdots, a_{n-1}$are real numbers and $z = a+ib$ satisfies the equation

   $$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

   then $z = a - ib$ also satisfies this equation. (1P)

4. Beweise:

   (a) Sei ε eine komplexe Zahl mit $\varepsilon^n = 1$ aber $\varepsilon \neq 1$, dann
   $$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{n-1} = 0$$
   Hinweis: Multipliziere die Summe mit $(1 - \varepsilon)$; (1P)

   (b) Sei ε eine komplexe Zahl mit $\varepsilon^n = 1$ aber $\varepsilon \neq 1$, dann
   $$1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \cdots + n\varepsilon^{n-1} = \tfrac{n}{\varepsilon-1}$$
   Hinweis: Multipliziere die Summe mit $(1 - \varepsilon)$ und beutze (a); (1P)

   (c) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$, $z, w \in \mathbb{C}$; (1P)

5.* Zeige die Cauchy-Schwartzsche Ungleichung:

   Seien $a_1, a_2, \cdots, a_n$ und $b_1, b_2, \cdots, b_n$ komplexe Zahlen, dann

   $$|\textstyle\sum_{j=1}^n a_j\bar{b_j}|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n |b_j|^2\right).$$

   (Hinweis: Seien $A = \sum_{j=1}^n |a_j|^2$, $B = \sum_{j=1}^n |b_j|^2$ und $C = \sum_{j=1}^n a_j\bar{b_j}$, berechne $\sum_{j=1}^n |Ba_j - Cb_j|^2$.) (2ZP)

   ZP: Zusatzpunkte werden Ihnen angerechnet, sind aber freiwillig.

Abgabe bis zum Freitag, den 19. November um 12:00 Uhr in A5