Übungsblatt 12

Analysis I/WS 2004/05
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

1. (a) Berechne Real- und Imaginärteil von $z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4711}$. (2P)

   (b) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle eines Polynoms mit reellen Koeffizienten. Zeige dass $\bar{z}_0$ auch eine Nullstele von dem Polynom ist. Folgere daraus, dass sich jedes Polynom mit reellen Koeffizienten in ein Produkt von Polynomen mit rellen Koeffizienten zerlegen läßt, deren Grade alle höchstens zwei sind. (2P)

2. (a) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeige, dass es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = cx$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (Zeige zuerst $f(r) = rf(1)$, $\forall r \in \mathbb{Q}$.) (2P)

   (b) Erfüllt eine stetige Funktion $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ die zwei Bedingungen:

   - $g(xy) = g(x) + g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$,
   - $\lim_{x\to 1} \frac{g(x)}{x-1} = 1$,

   so gilt notwendig $g(x) = \ln(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$. (Betrachte die Funktion $x \longmapsto g(e^x)$.) (2P)

3. Let $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ have the form

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos x - \sin x, & x \geq 0 \\ ax^2 + bx + c, & x < 0 \end{cases}$$

   Find a, b, c so that f is two times differentiable. (2P)

4. Seien $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\sum c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergente Reihen mit $c_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0$, $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ und $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$. Zeige mit dem Abelschen Grenzwertsatz dass $C = AB$ gilt. (2P)

Abgabe bis zum Freitag, den 4. Februar um 10:00 Uhr in A5