Übungsblatt 7

Analysis I/WS 2004/05
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

1. (a) Find the simplest formula for a_n and discuss the convergence of the related series:
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \cdots$. (1P)

   (b) Show that $2.7499999\cdots$ and $2.7500000\cdots$ are both decimal expansions for $\frac{11}{4}$. (1P)

2. Untersuche das Konvergenzverhalten der folgenden Reihen:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$. (1P)

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$. (1P)

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$. (1P)

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^s}$ $\quad (s \in \mathbb{Q})$. (1P)

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$. (1P)

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$. (1P)

3. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Zeige, dass falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, auch gilt $\lim_{n\longrightarrow\infty} (na_n) = 0$. (1P)

4. Beweise:

   (a) $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}$. (1P)

   (b) $a_\nu := \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu < e < \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1} =: b_\nu$
(Hinweis: zeige, dass die Folge $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ monoton wächst und die Folge $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ monoton fällt). (1P)

   (c) $\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$. (Hinweis: benutze (b)). (1P)

5. * (Dezimalbruchdarstellung) Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Werten in der Menge $Z = \{0, 1, \cdots, p-1\}$, wobei $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Wir definieren die ensprechende Zahlenfolge $(\sum x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{z_n}{p^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also definiert $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ eine reelle Zahl. Sei nun $M = \{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} |\ (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $0\}$. Zeige, dass die Abbildung $f : M \longrightarrow (0, 1]$, $f((z_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{p^n}$ eine bijektive Abbildung ist. (3ZP)

Abgabe bis zum Freitag, den 10. December um 12:00 Uhr in A5