Analysis I/WS 2004/05
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

# Übungsblatt 5

1. Beweise:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{(-1)^n}{n}] = 0;$ (1P )

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+6}{n^2-6} = 0;$ (1P)

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{4n^2+n} - 2n] = \frac{1}{4}$
   (Hinweis: Erweitere $\sqrt{4n^2+n} - 2n$ mit einem geeigneten Ausdruck zu einem Bruch und bilde dann den Grenzwert). (2P)

2. (a) Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, d. h. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n t_n) = 0$. (1P)

   (b) Sei $S$ eine nicht leere beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit $\sup S \notin S$. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Elementen aus $S$, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sup S$. (1P)

3. Determine, which of the following sequences are bounded, convergent, or divergent. In case of convergence, find the limit:

   (a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ with $a_n := \frac{(3-n)^3}{3n^3-1}$, (1P)

   (b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ with $b_n := \frac{1+(-1)^n n^2}{2+3n+n^2}$. (1P)

   (c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ with $c_n := \frac{5n-1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$, (1P)

4. Sei $s_1 = 1$ und $s_{n+1} = \frac{s_n+1}{3}$, $\forall n \geq 1$.

   (a) Berechne $s_2$, $s_3$ und $s_4$, und zeige mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass $s_n > \frac{1}{2}$ für jedes natürliche $n$. (1P)

   (b) Zeige, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge ist. (1P)

   (c) Beweise, dass es $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ gibt, un d bestimme $\lim s_n$. (1P)

5.* Unter dem Kettenbruch $1 + \cfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}$ wird die Rekursionsfolge mit $x_0 = 1$ und $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ verstanden. Zeige:

   (a) $|x_n - g| \leq \frac{1}{g^{n+1}};$ (1ZP)

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = g,$ (1ZP)

   wobei $g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Die irrationale Zahl $g$ heißt der goldene Schnitt.

**Abgabe bis zum Freitag, den 26. November um 12:00 Uhr in A5**