Übungsblatt 6

Analysis I/WS 2004/05
Ghazaleh Arghanoun
Martin Schmidt

1. Berechne im Konvergenzfall den Grenzwert der Folge (a_n):

   (a) $a_n = \frac{z^n - n!}{z^n + n!}$, $\quad z \in \mathbb{C}$; (1P)

   (b) $a_n = \left(\frac{3+4i}{5}\right)^n$; (1P)

   (c) $a_n = \left(\sqrt[3]{n+\sqrt{n}} - \sqrt[3]{n}\right)$; (2P)

   (d) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$, $\quad 0 \leq a \leq b \leq c$; (1P)

2. In der Vorlesung hatten wir gezeigt, dass die Folge $a_1 = \frac{3}{2}$; $a_{n+1} = a_n(1 + \frac{2-a_n^2}{2a_n^2}) = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. Wir setzen $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ mit $p_1 = 3$, $q_1 = 2$ und

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n}{2q_n} + \frac{q_n}{p_n} = \frac{p_n^2 + 2q_n^2}{2p_n q_n}$$

   und definieren induktiv die Folge $(p_n, q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\begin{cases} (p_1, q_1) = (3, 2), \\ (p_{n+1}, q_{n+1}) = (p_n^2 + 2q_n^2, 2p_n q_n). \end{cases}$$

   (a) Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$: $p_n^2 = 2q_n^2 + 1$. (1P)

   (b) Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{(\sqrt{2}+\frac{3}{2})q_n^2} \leq |\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2}| < \frac{1}{2\sqrt{2}q_n^2}$. (1P)

   (c) Bestimme das kleinste $n \in \mathbb{N}$, so dass $|\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2}| < 10^{-10}$. (1P)

   (d) * Zeige: $\min\{x \in \mathbb{R}^+ |$ es gibt unendlich viele verschiedene $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ mit $|\frac{p}{q} - \sqrt{2}| < \frac{x}{q^2}\} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. (2ZP)

3. (a) Let $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be Cauchy sequences in $\mathbb{C}$. Prove that the sequence $(d(a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ is convergent. (Hint: use the triangle inequality

$$d(a_n, b_n) \leq d(a_n, a_m) + d(a_m, b_m) + d(b_m, b_n).)$$ (1P)

   (b) Let $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence in $\mathbb{R}$ with $|s_{n+1} - s_n| < 2^{-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Prove that (s_n) is a Cauchy and hence a convergent sequence. (1P)

4. Seien $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte reelle Folgen. Zeige:

   (a) $\sup\{s_n + t_n | \ n > N\} \leq \sup\{s_n | \ n > N\} + \sup\{t_n | \ n > N\}$, für alle $N \in \mathbb{N}$. (1P)

   (b) $\overline{\lim}(s_n + t_n) \leq \overline{\lim} s_n + \overline{\lim} t_n$. (1P)

Abgabe bis zum Freitag, den 3. Dezember um 12:00 Uhr in A5