Analysis I/WS 2004/05

Martin U. Schmidt

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Mengen und Abbildungen

1.1 Mengen

Georg Cantor(1845-1918) hat den Begriff der Menge definiert als „eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen“. Diese Objekte werden Elemente der Menge genannt. Um ein Objekt a als Element der Menge A zu kennzeichnen, schreiben wir $a \in A$. Ist a dagegen kein Element der Menge A, so schreiben wir $a \notin A$.

Wir können Mengen dadurch beschreiben, dass wir alle ihre Elemente angeben, also z.B. ist

$$A = \{a\}$$

die Menge, die nur das Element a enthält und B

$$B = \{a, b, c\}$$

die Menge, die drei Elemente a, b und c enthält. Dabei kann auch ein Element einer Menge wieder eine Menge sein:

$$C = \{a, \{a\}\}.$$

$$M = \{x \in X \mid x \text{ hat die Eigenschaft } p\}$$

oder nur

$$M = \{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } p\}$$

bezeichnet die Menge aller Elemente x (von der Menge X), die die Eigenschaft p haben.[1]

[1] Bei dieser Beschreibung muss man allerdings Vorsicht walten lassen, um die Russellsche Antinomie zu vermeiden. Läßt man nämlich die Menge aller Mengen zu, die sich nicht selbst als Element enthalten, so wird nicht entscheidbar, ob diese Menge sich selbst als Element enthält oder nicht. Als Ausweg wird in der axiomatischen Mengenlehre die Frage, ob eine Menge Element einer Menge ist, nicht in allen Fällen als sinnvoll zugelassen.

A ist eine Teilmenge von B, wenn alle Elemente von A auch Elemente von B sind. In Symbolen $A \subset B$.

1.2 Operationen von Mengen

Die Vereinigung zweier Mengen A und B ist die Menge $A \cup B$ aller Elemente, die in mindestens einer der beiden Mengen A und B enthalten sind. Der Durchschnitt zweier Mengen A und B ist die Menge $A \cap B$ aller Elemente, die sowohl Element von A als auch Element von B sind. Die Differenzmenge $A \setminus B$ ist die Menge aller Elemente von A, die nicht Element von B sind. Das kartesische Produkt der Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) von Elementen von A und B.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M. Dabei ist die leere Menge $\emptyset$ stets ein Element der Potenzmenge.
z.B. $\mathcal{P}(\{a, \{a\}\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}\}$.

Wenn wir nur Teilmengen einer vorgegebenen Menge M betrachten, dann wird für eine solche Menge $A \in \mathcal{P}(M)$ die Menge $M \setminus A$ auch als das Komplement A^c bezeichnet. Diese Operationen erfüllen die folgenden Regeln:

$$\begin{array}{ll}
 & A \setminus A = \emptyset \\
 & A \setminus \emptyset = A \\
\text{(Idempotenz)} & A \cup A = A \\
\text{(Idempotenz)} & A \cap A = A \\
\text{(Kommutativität)} & A \cup B = B \cup A \\
\text{(Kommutativität)} & A \cap B = B \cap A \\
 & A \cup \emptyset = A \\
 & A \cap \emptyset = \emptyset
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(A \subset B \text{ und } B \subset A) & \Longleftrightarrow & A = B \\
A \cup B = B & \Longleftrightarrow & A \subset B \\
A \cap B = A & \Longleftrightarrow & A \subset B \\
 & A \subset A \cup B & \\
 & A \cap B \subset A & \\
(A \subset C \text{ und } B \subset C) & \Longleftrightarrow & A \cup B \subset C \\
(C \subset A \text{ und } C \subset B) & \Longleftrightarrow & C \subset A \cap B
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lr}
\text{(Assoziativität)} & A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\
\text{(Assoziativität)} & A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\
\text{(Distributivität)} & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
\text{(Distributivität)} & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
\text{(de Morgan)} & (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \\
\text{(de Morgan)} & (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \\
 & (A^c)^c = A \\
 & A \subset B \Longleftrightarrow B^c \subset A^c \\
 & A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset \\
 & (A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C \\
 & (A \times C) \cap (B \times C) = (A \cap B) \times C
\end{array}
$$

1.3 Relationen

Als Relationen auf einer Menge bezeichnet man Aussagen über mehrere Elemente der Menge, die entweder wahr oder falsch sind. Wir wollen hier nur Aussagen über zwei Elemente einer Menge A betrachten. Jede solche Relation beschreiben wir durch eine Teilmenge R aller geordneten Paare in $A \times A$, in der wir alle die Paare zusammenfassen, für die die Aussage der Relation wahr ist. Wir sagen dann, dass $(a, b) \in A \times A$ diese Relation erfüllt, wenn (a, b) zu der Teilmenge R gehört. Andernfalls erfüllt (a, b) die Relation nicht. Wir führen jetzt folgende Eigenschaften einer Relation ein:

Reflexivität: für alle $a \in A$ erfüllt (a, a) die Relation.
Symmetrie: falls (a, b) die Relation erfüllt, dann auch (b, a).
Transitivität: falls (a, b) und (b, c) die Relation erfüllen, dann auch (a, c).

Definition 1.1. *Eine Äquivalenzrelation ist eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.*

Eine Äquivalenzrelation definiert dann sogenannte Äquivalenzklassen. Für jedes $a \in A$ ist die Äquivalenzklasse $[a]$ von a die Teilmengen aller Elemente $b \in A$, so dass (a,b) die Relation erfüllt. Die Transitivität impliziert, dass für jedes Element $b \in [a]$ die entsprechende Äquivalenzklasse $[b]$ eine Teilmenge von $[a]$ ist. Wenn zwei verschiedene Äquivalenzklassen $[a]$ und $[b]$ beide ein Element $c \in A$ enthalten, dann sind wegen der Symmetrie sowohl a als auch b in $[c]$ enthalten. Also ist $[a] \subset [c] \subset [a]$ und $[b] \subset [c] \subset [b]$. Damit gilt aber $[a] = [c] = [b]$. Also sind zwei Äquivalenzklassen entweder disjunkt oder gleich. Wegen der Reflexivität ist jedes Element in einer Äquivalenzklasse enthalten.

Also zerfällt A in eine disjunkte Vereinigung von Äquivalenzklassen, d.h. jedes Element von A gehört zu genau einer Äquivalenzklasse.

1.4 Abbildungen

Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element x von X genau ein Element $f(x)$ aus Y zuordnet:

$$f : X \to Y, x \mapsto f(x)$$

Die Menge X der Argumente wird Definitionsbereich genannt und die Menge Y, in denen die Abbilde liegen, Wertebereich. Das Bild ist die Teilmenge aller Elemente y des Wertebereichs Y, die Abbild eines Arguments in X sind:

$$\text{Bild } f[X] = \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ mit } f(x) = y\}.$$

Definition 1.2. *Eine Abbildung $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ heißt*

(i) *injektiv, wenn je zwei verschiedene Elemente $x, x' \in X$ auch auf verschiedene Elemente von Y abgebildet werden:*

$$\forall x, x' \in X \textit{ mit } \textit{ folgt aus } x \neq x' \textit{ auch } f(x) \neq f(x')$$

(ii) *surjektiv, wenn das Bild von f der ganze Wertebereich Y ist.*

$$\forall y \in Y \exists x \in X \textit{ mit } f(x) = y.$$

(iii) *bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.*

Für jede Teilmenge $B \subset Y$ ist das Urbild von B unter f die Menge aller Elemente von X, die nach B abgebildet werden:

$$f^{-1}[B] = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Für eine bijektive Abbildung $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ besteht für jedes $y \in Y$ das Urbild $f^{-1}[\{y\}]$ nur aus genau einem Element. Also existiert auch die Umkehrabbildung

$$f^{-1} : Y \to X, y \mapsto f^{-1}(y) \text{ mit } f^{-1}[\{y\}] = \{f^{-1}(y)\}.$$

Offenbar gilt dann $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in X$ und $f(f^{-1}(y)) = y$ für alle $y \in Y$.

1.5 Komposition von Abbildungen

Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y, x \to f(x)$ und $g : Y \to Z, y \to g(y)$ Abbildungen, dann definiert $g \circ f : X \to Z, x \to g(f(x))$ eine Abbildung.

Satz 1.3. *Die Komposition von Abbildungen ist assoziativ, d.h. für Abbildungen $f : X \to Y, x \mapsto f(x), g : Y \to Z, y \mapsto g(y)$ und $h : Z \to V, z \mapsto h(z)$ gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Sei $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ eine Abbildung und seien $id_X : X \to X, x \mapsto x$ und $id_Y : Y \to Y, y \mapsto y$ die identischen Abbildungen von den Mengen X und Y. Dann gilt*

$$f \circ id_X = f = id_Y \circ f = f$$

Ist diese Abbildung f bijektiv, dann gilt auch

$$f \circ f^{-1} = id_Y, f^{-1} \circ f = id_X$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
(h \circ (g \circ f))(x) &= h(g(f(x))) = (h \circ g) \circ f)(x) && \forall x \in X \\
f \circ id_X(x) &= f(x) = (id_Y \circ f)(x) && \forall x \in X \\
f \circ f^{-1}(y) &= f(f^{-1}(y)) = y = id_Y(y) && \forall y \in Y \\
f^{-1} \circ f(x) &= f^{-1}(f(x)) = x = id_X(x) && \forall x \in X.
\end{aligned}$$

1.6 Kategorien*

Eine Kategorie besteht aus 3 Dingen:

(i) Eine Klasse von Objekten.

(ii) Eine Klasse von Morphismen (Abbildungen). Zu jedem Morphismus gehören zwei Objekte aus der Klasse in (i) entsprechend dem Definitionsbereich und dem Wertebereich von Abbildungen. Wir bezeichnen die Morphismen auch als $f : A \to B$, wobei A der Definitionsbereich und B der Wertebereich ist.

(iii) Eine Verknüpfungsregel für Morphismen, die zwei Morphismen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ einen dritten Morphismus $g \circ f : A \to C$ zuordnet.

Außerdem gibt es für jedes Objekt A den identischen Morphismus id_A und es gelten die analogen Aussagen zu dem vorangehenden Satz: Für drei Morphismen $f : A \to B, g : B \to C$ und $h : C \to D$ gilt das Assoziativgesetz:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

und die Idempotenz

$$id_B \circ f = f = f \circ id_A.$$

Die Konzepte von injektiven und bijektiven Abbildungen besitzen verwandte Verallgemeinerungen für die Morphismen einer Kategorie.

Ein Morphismus $f : A \to B$ heißt Monomorphismus, wenn für alle Morphismen $g, h : C \to A$ gilt

$$f \circ g = f \circ h \Leftrightarrow g = h$$

Ein Morphismus $f : A \to B$ heißt Epimorphismen, wenn für alle Morphismen $g, h : B \to C$ gilt

$$g \circ f = h \circ f \Leftrightarrow g = h.$$

Beispiel 1.4. *Die Objekte der Mengen bilden zusammen mit den Abbildungen als Morphismen eine Kategorie. Dabei sind die injektiven Abbildungen Monomophismen und die surjektiven Abbildungen Epimorphismen. Sei nun* 1 *die einelementige Menge* $\{\emptyset\}$. *Dann lassen sich die Elemente einer beliebigen Menge* A *eindeutig den Morphismen* $1 \to A$ *zuordnen, weil das Bild jedes solchen Morphismuses genau aus einem Element der Menge* A *besteht. Dadurch lassen sich alle Aussagen der Mengenlehre in die Sprache der Kategorie übersetzen, ohne das Konzept des Elements einzuführen.*

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.1 Axiome der reellen Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ wird durch folgende Axiome charakterisiert:

$A1$. Axiome der Addition
$A2$. Axiome der Multiplikation
$A3$. Distributivgesetz
$A4$. Ordnungsaxiome
$A5$. Vollständigkeit

A1. Axiome der Addition 2.1. *Es gibt eine Operation*
$+: \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y$ *mit*

(i) $x + y = y + x$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$

(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$

(iii) *Existenz der Null: es gibt eine Zahl* $0 \in \mathbb{R}$ *mit* $x + 0 = x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$

(iv) *Existenz des Negativen: zu jeder Zahl* $x \in \mathbb{R}$ *gibt es eine Zahl* $-x \in \mathbb{R}$, *so dass* $x + (-x) = 0$.

A2. Axiome der Multiplikation 2.2. *Es gibt eine Operation*
$\cdot: \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y$ *mit*

(i) $x \cdot y = y \cdot x$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$

(ii) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ *für alle* $x, y, z \in \mathbb{R}$

(iii) *Existenz der Eins: es gibt eine Zahl* $1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0$ *mit* $x \cdot 1 = x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$

(iv) *Existenz des Inversen: zu jeder Zahl* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *gibt es eine Zahl* $x^{-1} \in \mathbb{R}$*, mit* $x \cdot x^{-}1 = 1$.

A3. Distributivgesetz 2.3.

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \textit{ für alle } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Definition 2.4. *Allgemein heißt eine Menge* $\mathbb{K}$*, die die Axiome* $A1-A3$ *erfüllt Körper. Für Körper gelten daher auch alle Folgerungen aus* $A1 - A3$*. Es gibt viele Körper.*

Beispiel 2.5. *Der kleinste Körper besteht aus zwei Elementen* $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$*. Die Operationen + und · sind dann definiert durch:*

$$\begin{array}{llll} 0+0=0 & 0+1=1 & 0\cdot 0=0 & 0\cdot 1=0 \\ 1+0=1 & 1+1=0 & 1\cdot 0=0 & 1\cdot 1=1 \end{array}$$

Zeige dass diese Definitionen von + und · auf $\mathbb{Z}_2$ die Axiome $A1 - A3$ erfüllen und umgekehrt durch $A1 - A3$ eindeutig bestimmt sind. In $\mathbb{R}$ soll aber $1 + 1 = 2 \neq 0$ gelten, so dass wir noch weitere Axiome benötigen um den Körper der reellen Zahlen zu charakterisieren.

Wir benützen folgende Abkürzungen:

$$\begin{array}{rrcl} x, y \in \mathbb{R}: & x - y & = & x + (-y) \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \dfrac{1}{x} & = & x^{-1} \\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \setminus \{y\} & \dfrac{x}{y} & = & x \cdot y^{-1} \\ x, y \in \mathbb{R} & xy & = & x \cdot y \\ & xyz & = & x \cdot (y \cdot z) \\ & 2x & = & x + x = x \cdot (1+1) \\ & -xy & = & -(xy) \end{array}$$

Satz 2.6. *(Folgerungen aus A1)*

(i) *Falls* $x + y = x + z$*, dann* $y = z$

(ii) *Falls* $x + y = x$*, dann* $y = 0$

(iii) *Falls* $x + y = 0$*, dann* $y = (-x)$

(iv) $-(-x) = x$

Bemerkung 2.7. *(i) heißt Kürzungsregel. (ii) zeigt, dass die Null eindeutig durch die Eigenschaft $x + 0 = x$ bestimmt ist. (iii) zeigt, dass das Negative $(-x)$ eindeutig durch $x + (-x) = 0$ bestimmt ist.*

Beweis:

(i) Sei $x + y = x + z$, dann folgern wir

$$\begin{aligned} y &= y + 0 = 0 + y = (-x + x) + y \\ &= -x + (x + y) \\ &= -x + (x + z) \\ &= (-x + x) + z = 0 + z = z + 0 \\ &= z \end{aligned}$$

(ii) Sei $x + y = x$, dann gilt $x + y = x + 0$. Also folgt aus (i) $y = 0$

(iii) Sei $x + y = 0$, dann gilt $x + y = x + (-x)$. Also folgt aus (ii) $y = -x$.

(iv) $-x + x = x + (-x) = 0$. Also folgt aus (iii) $x = -(-x)$

q.e.d.

Satz 2.8. *(Folgerungen aus A2)*

(i) *Falls $x \neq 0$ und $xy = xz$, dann $y = z$*

(ii) *Falls $x \neq 0$ und $xy = x$, dann $y = 1$*

(iii) *Falls $x \neq 0$ und $x \cdot y = 1$, dann $y = x^{-1}$*

(iv) *Falls $x \neq 0$, dann $(x^{-1})^{-1} = x$*

Bemerkung 2.9. *Die Folgerungen sind analog zu denen aus A1. Wieder heißt (i) Kürzungsregel, (ii) impliziert wieder die Eindeutigkeit der Eins und (iii) die Eindeutigkeit des Inversen.*

Beweis:

(i) Sei $x \neq 0$ und $xy = xz$, dann folgern wir

$$y = y \cdot 1 = 1 \cdot y = \left(\frac{1}{x} \cdot x\right) \cdot y = \frac{1}{x} \cdot (x \cdot z) = \left(\frac{1}{x} \cdot x\right) \cdot z = 1 \cdot z = z \cdot 1 = z.$$

(ii) Sei $x \neq 0$ und $xy = x$, dann gilt $xy = x \cdot 1$ Also folgt aus (i) $y = 1$.

(iii) Sei $x \neq 0$ und $xy = 1$, dann gilt $xy = x \cdot x^{-1}$. Also folgt aus (i) $y = x^{-1.}$

(iv) Sei $x \neq 0$. Dann ist $x^{-1}x = 1$. Also folgt aus (iii) $x = (x^{-1})^{-1}$.

q.e.d.

Satz 2.10. *(Folgerungen aus A1-A3)*

(i) $x \cdot 0 = 0$ *für alle* x

(ii) $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *oder* $y = 0$

(iii) $(-x)y = -xy = x(-y)$.

(iv) $(-1) \cdot x = -x$

(v) $(-x)(-y) = xy$

(vi) $x \neq 0, y \neq 0$ *dann* $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Bemerkung 2.11. *Die Null hat kein multiplikatives Inverses, sonst wäre ja* $0 \cdot 0^{-1} = 1$, *was (i) widerspricht.*

Beweis:

(i) $x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0$. Aus (ii) von Satz 2.6 folgt dann $x \cdot 0 = 0$

(ii) Sei $x \cdot y = 0$ und $x \neq 0$. Dann gilt wegen (i)

$$y = y \cdot 1 = 1 \cdot y = \left(\frac{1}{x} \cdot x\right) \cdot y = \frac{1}{x} \cdot (x \cdot y) = \frac{1}{x} \cdot 0 = 0.$$

Wegen der Kommutativität folgt aus (i) auch die Umkehrung $0 \cdot y = x \cdot 0 = 0$.

(iii) $0 = 0 \cdot y = (x + (-x))y = xy + (-x)y$. Aus (iii) im Satz 2.6 folgt dann

$$(-x)y = -xy = -yx = (-y)x = x(-y).$$

(iv) Setze in (iii) $y = 1$.

(v) $(-x)(-y) = -(x \cdot (-y)) = -(-xy) = xy$.

(vi) $1 = (xy)^{-1}xy = ((xy)^{-1}x)y = y((xy)^{-1}x) \Rightarrow y^{-1} = (xy)^{-1}x \Rightarrow y^{-1}x^{-1} = (xy)^{-1}xx^{-1} = (xy)^{-1}$. **q.e.d.**

A4. Ordnungsaxiome 2.12. *Es gibt eine Relation $<$ in $\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Totalität der Ordnung: Für je zwei reelle Zahlen gilt genau eine der drei folgenden Relationen $x < y$ oder $x = y$ oder $y < x$.*

(ii) *Transivität: $x < y$ und $y < z \Rightarrow x < z$*

(iii) *Monotonie:* $x < y \Rightarrow \begin{cases} x + c < y + c & \text{für alle } c \in \mathbb{R} \\ x \cdot c < y \cdot c & \text{für alle } 0 < c \in \mathbb{R} \end{cases}$

Wir benutzten folgende Abkürzungen:

$$\begin{aligned} x > y &\Leftrightarrow y < x \\ x \leq y &\Leftrightarrow (x < y \text{ oder } x = y) \Leftrightarrow y \leq x \\ \mathbb{R}^+ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\} \text{ positive Zahlen} \\ \mathbb{R}^- &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} \text{ negative Zahlen} \\ \mathbb{R}_0^+ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\} \text{ nichtnegative Zahlen} \\ \mathbb{R}_0^- &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} \text{ nichtpositive Zahlen} \end{aligned}$$

Satz 2.13. *(Folgerungen aus A4)*

(i) $0 < x \Rightarrow -x < 0$ *und* $x < 0 \Rightarrow -x > 0$

(ii) $x < y \Leftrightarrow 0 < y - x$

(iii) $x < y$ *und* $a < 0 \Rightarrow ay < ax$

(iv) $x \neq 0 \Rightarrow x \cdot x = x^2 > 0$

(v) $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$

(vi) $0 < x < y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

Bemerkung 2.14. *Da $1 \cdot 1 = 1$ folgt aus (iv) $1 > 0$. Dann folgt aus (i) $-1 < 0$. Also gilt $-1 < x^2$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Also gibt es keine reelle Zahl x mit $x^2 = -1$.*

Beweis:

(i) Sei $0 < x$. Dann folgt mit Monotonie $0 + (-x) < x + (-x)$, also auch $-x < 0$.
Sei $x < 0$. Dann folgt mit Monotonie $x + (-x) < -x$ also auch $0 < -x$.

(ii) Sei $x < y$. Dann folgt mit Monotonie $x - x < y - x$, also auch $0 < y - x$.
Sei umgekehrt $0 < y - x$. Dann folgt mit Monotonie $x < y$.

(iii) Sei $x < y$ und $a < 0$. Dann folgt aus (i) $-a > 0$. Also gilt wegen Monotonie $-ax < -ay \Leftrightarrow 0 < ax - ay \Leftrightarrow ay < ax$.

(iv) Sei $x > 0$. Dann folgt wegen Monotonie $x^2 > 0 \cdot x = 0$. Sei $x < 0$. Dann folgt aus (i) $-x > 0$ und mit Monotonie $x^2 = (-x) \cdot (-x) > (-x) \cdot 0 = 0$.

(v) Sei $x > 0$. Dann ist $x \neq 0$. Aus (iv) folgt $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} > 0$. Mit Monotonie folgt dann $\frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} > 0$.

(vi) Sei $0 < x < y$. Dann ist $x > 0$ und $y > 0$ also wegen (v) auch $\frac{1}{x} > 0$ und $\frac{1}{y} > 0$. Dann folgt mit Monotonie $\frac{1}{y} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} \cdot x < \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} \cdot y = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot y = \frac{1}{x}$.

q.e.d.

Satz 2.15. *(Arithmetisches Mittel) Seien $x, y \in \mathbb{R}$, dann gilt*

$$x < y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y$$

Also liegt zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen immer eine weitere.

Beweis: Aus $x < y$ folgt mit Monotonie $x + x < x + y < y + y$. Weil aber $x + x = x(1+1) = 2x$ und $2 = 1 + 1 > 0$ folgt dann $2x < x + y < 2y$ und $x < \frac{x+y}{2} < y$ **q.e.d.**

Übungsaufgabe 2.16. *Es gelten auch folgende Regeln:*

(i) $a < b$ *und* $c < d \Rightarrow a + c < b + d$

(ii) $0 < a < b$ *und* $0 < c < d \Rightarrow ac < bd$

(iii) $ab > 0 \Leftrightarrow$ *entweder* $a > 0, b > 0$ *oder* $a < 0, b < 0$

(iv) $ab < 0 \Leftrightarrow$ *entweder* $a > 0, b < 0$ *oder* $a < 0, b > 0$

Definition 2.17. *(Betrag)*
Der Betrag einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist die nicht-negative Zahl

$$\mid x \mid = \begin{cases} x & \textit{falls } x \geq 0 \\ -x & \textit{falls } x < 0 \end{cases} = \max\{x, -x\}.$$

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x & \textit{falls } y \leq x \\ y & \textit{falls } y > x \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Aus der Definition folgt

$$\begin{array}{lcl} |x| \geq 0 & \text{und} & |x|=0 \Leftrightarrow x=0. \\ -|x| \leq x \leq |x| & \Leftrightarrow & x \leq |x| \text{ und } -x \leq |x| \\ |-x|=|x| & \text{denn} & |-x|=\max\{-x,x\}. \end{array}$$

Satz 2.18. *(Eigenschaften des Betrags) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) $|x| \geq 0$ *und* $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$

(ii) $|x \cdot y|=|x| \cdot |y|$

(iii) $|x+y| \leq |x|+|y|$

Beweis:

(ii) Prüfe durch Fallunterscheidung

(iii) Zwei Fälle: $x+y>0 \Rightarrow |x+y|=x+y \leq |x|+y \leq |x|+|y|$ wegen Monotonie.
$x+y<0 \Rightarrow |x+y|=-x-y \leq |x|-y \leq |x|+|y|$ wegen Monotonie.

q.e.d.

Folgerung 2.19.

$$||x|-|y|| \leq |x-y|$$

Beweis:

$$|x|=|x-y+y| \leq |x-y|+|y| \Rightarrow |x|-|y| \leq |x-y|$$

Vertausche x und $y \Rightarrow |y|-|x| \leq |x-y|$. Also gilt auch $||x|-|y|| \leq |x-y|$
q.e.d.

Definition 2.20. *(Abstand)*
Der Abstand $d(x,y)$ zweier Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ ist die nicht negative Zahl $d(x,y)=|x-y|$
.

Satz 2.21. *(Eigenschaften des Abstands)*
Der Abstand $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto d(x,y)$ hat folgende Eigenschaften:

(i) $d(x,y) \geq 0$ *und* $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

(ii) $d(x,y)=d(y,x)$

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ *für alle* $x,y,z \in \mathbb{R}$.

Beweis: folgt aus Satz 2.18.

(iii) $\mid x-y \mid=\mid x-z+z-y \mid\leq\mid x-z \mid + \mid z-y \mid$. **q.e.d.**

Definition 2.22. *Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nicht leere Teilmenge von Zahlen.*

(i) *M heißt nach oben beschränkt, falls es eine Zahl $\beta \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in M$ gilt $x \leq \beta$. β heißt dann obere Schranke von M.*

(ii) *M heißt nach unten beschränkt, falls es eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in M$ gilt $\alpha \leq x$. α heißt dann untere Schranke.*

(iii) *M heißt beschränkt, wenn M nach oben und unten beschränkt ist.*

Definition 2.23. *(Supremum einer Menge) Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nicht leere nach oben beschränkte Menge. Eine reelle Zahl s heißt die kleinste obere Schranke von M oder das Supremum, wenn sie eine obere Schranke von M ist, und es keine obere Schranke von M gibt, die kleiner ist als s. Wir schreiben dann $s = \sup M$. Wenn das Supremum einer Menge existiert ist es eindeutig, weil jedes Supremum weder kleiner noch größer als ein anderes Supremum von M ist.*

Definition 2.24. *(Infimum einer Menge) Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nicht leere nach unten beschränkte Menge. Eine reelle Zahl t heißt grösste untere Schranke von M oder Infimum von M, wenn es eine untere Schranke von M ist, und es keine untere Schranke von M gibt, die größer ist als t. Wir schreiben dann $t = \inf M$. Auch das Infimum ist, wenn es existiert eindeutig.*

Warnung 2.25. *Das Supremum* $\sup M$ *bzw. Infimum* $\inf M$ *braucht nicht zu der Menge M zu gehören. Wenn $s = \sup M$ bzw. $t = \inf M$ zu der Menge M dazugehört, so ist s das Maximum von M bzw. t das Minimum von M (siehe (ii) und (iii) im Satz 2.29).*

Definition 2.26. *(Maximum und Minimum) Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nicht leere nach oben beschränkte Menge. Ein Element $m \in M$ von M, das eine obere Schranke von M ist heißt Maximum. Wir schreiben dann $m = \max M$. Analog heißt ein Element m einer nicht leeren nach unten beschränkten Menge M, das eine untere Schranke von M ist Minimum. Wir schreiben dann $m = \min M$.*

Übungsaufgabe 2.27. *Zeige, dass jede endliche Teilmenge der reellen Zahlen ein Maximum und ein Minimum besitzt.*

A5. Vollständigkeitsaxiom 2.28. *Für jede nicht leere nach oben beschränkte Menge M existiert das Supremum $s = \sup M \in \mathbb{R}$.*

Später werden wir sehen, dass das Axiom A5 nicht für die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ gilt. Diese erfüllen aber alle anderen Axiome A1-A4.

Wir führen jetzt folgende Teilmenge der reellen Zahlen ein, die Intervalle genannt werden:

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} && \text{für alle } a \leq b \in \mathbb{R} \\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} && \text{für alle } a < b \in \mathbb{R} \\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} && \text{für alle } a < b \in \mathbb{R} \\
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \text{für alle } a < b \in \mathbb{R} \\
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} && \text{für alle } b \in \mathbb{R} \\
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} && \text{für alle } b \in \mathbb{R} \\
[a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} && \text{für alle } a \in \mathbb{R} \\
(a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} && \text{für alle } a \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Offenbar ist b eine obere Schranke von $[a,b)$. Andererseits gibt es wegen Satz 2.15 für jedes $x < b$ ein $y = \max\{\frac{x+b}{2}, a\}$ mit $x < y$ und $y \in [a,b)$. Also gibt es keine obere Schranke von $[a,b)$, die kleiner ist als b. Damit ist b das Supremum von $[a,b)$.
Analog gilt:

$$\begin{aligned}
\inf[a,b] &= a & \sup[a,b] &= b \\
\inf[a,b) &= a & \sup[a,b) &= b \\
\inf(a,b] &= a & \sup(a,b] &= b \\
\inf(a,b) &= a & \sup(a,b) &= b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(-\infty,b] \text{ nicht nach unten beschränkt} && \sup(-\infty,b] = b \\
&(-\infty,b) \text{ nicht nach unten beschränkt} && \sup(-\infty,b) = b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\inf[a,\infty) &= a & &[a,\infty) \text{ nicht nach oben beschränkt} \\
\inf(a,\infty) &= a & &(a,\infty) \text{ nicht nach oben beschränkt}
\end{aligned}$$

Satz 2.29. **(i)** *Für jede nicht leere nach unten beschränkte Menge M existiert das Infimum* $\inf M \in \mathbb{R}$.

(ii) *Eine nicht leere nach oben beschränkte Menge M besitzt genau dann ein Maximum, wenn* $\sup M \in M$. *In diesem Fall ist* $\max M = \sup M$.

(iii) *Eine nicht leere nach unten beschränkte Menge M besitzt genau dann ein Minimum, wenn* $\inf M \in M$. *In diesem Fall ist* $\min M = \inf M$.

Beweis:

(i) Weil die Ordnungsrelation gerade nicht symmetrisch ist, erhalten wir dadurch, dass wir in einer Aussage alle auftauchenden Ordnungsrelationen gerade umkehren, eine andere Aussage. Zum Beispiel erhalten wir die Definition der unteren Schranke, indem wir in der Definition der oberen Schranke alle Ordnungsrelationen umdrehen. Dann erhalten wir aber auch die Definition des Infimums, indem wir in der Definition des Supremums alle Ordnungsrelationen umkehren. Weil aber $x < y \Leftrightarrow -y < -x$, sind also Aussagen über Ordnungsrelationen zwischen reellen Zahlen äquivalent zu den analogen Aussagen, in denen wir alle Ordnungsrelationen umdrehen und alle reellen Zahlen durch ihre Negativen ersetzen[1]. Insbesondere besitzt die Menge M genau dann ein Infimum, wenn die Menge $-M = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in M\}$ ein Supremum besitzt und es gilt $\inf M = -\sup -M$. Also folgt (i) aus dem Vollständigkeitsaxiom A5.

(ii) Wenn $\sup M \in M$, dann ist $\sup M$ eine obere Schranke von M, die Element von M ist. Wenn $\sup M \not\in M$, dann gilt für alle $x \in M$ sogar $x < \sup M$. Dann gilt aber für alle oberen Schranken s von M.

$$x < \sup M \leq s \text{ für alle } x \in M.$$

Also gibt es in M keine obere Schranke von M.

(iii) analog zu (ii)

q.e.d.

Also existiert

$$\max[a, b] = \max(a, b] = \max(-\infty, b] = b$$

$$\min[a, b] = \min[a, b) = \min[a, \infty) = a$$

während $[a, b)$ und (a, b) und $(-\infty, b)$	kein Maximum besitzen
und $(a, b]$ und (a, b) und (a, ∞)	kein Minimum.

Wenn wir aber die reellen Zahlen durch $-\infty$ und ∞ erweitern, können wir auch für unbeschränkte Mengen obere und untere Schranken und Suprema und Infima definieren.

[1]Wenn diese Aussagen aber algebraischen Operationen benutzen, die nicht verträglich sind mit der Abbildung jeder rellen Zahl auf ihre Negative, wie z. B. das Produkt zweier reeller Zahlen, dann müssen bei dieser Ersetzung auch die algebraischen Operationen entsprechend geändert werden, also z. B. das Produkt in das negative des Produktes.

2.2 Die erweiterte Zahlengerade $\bar{\mathbb{R}}$

Definition 2.30. *: Die erweiterte Zahlengerade besteht aus* $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Mit ∞ bezeichnen wir auch $+\infty$. Die Ordnungsrelation läßt sich auf $\bar{\mathbb{R}}$ durch $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$ fortsetzen und erfüllt offensichtlich auch (i) und (ii) des Ordnungsaxioms. Die Operationen $+$ und $\cdot$ lassen sich teilweise auf $\bar{\mathbb{R}}$ fortsetzen:

$$x + \infty = \infty, \quad x - \infty = -\infty \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

$$x \cdot \infty \begin{cases} \infty \text{ für } x > 0 \\ \text{nicht definiert für } x = 0 \\ -\infty \text{ für } x < \infty. \end{cases}$$

$$\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0 \qquad \frac{\infty}{x} = \begin{cases} \infty \text{ für } x > 0 \\ -\infty \text{ für } x < 0. \end{cases}$$

Außerdem gilt

$$\infty + \infty = \infty \qquad\qquad -\infty - \infty = -\infty.$$
$$\infty \cdot \infty = \infty \qquad\qquad \infty(-\infty) = -\infty \quad (-\infty)(-\infty) = \infty.$$

Nicht definiert ist

$$\infty - \infty, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{\pm\infty}{0}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot (\pm\infty).$$

$\bar{\mathbb{R}}$ ist also kein Körper. Die Definitionen von oberen und unteren Schranken, von Supremum und Infimum, und von Maximum und Infimum übertragen sich aber sofort auf die erweiterte Zahlengerade. Offenbar ist ∞ das Maximum und $-\infty$ das Minimum von $\bar{\mathbb{R}}$. Insbesondere ist ∞ eine obere Schranke und $-\infty$ eine untere Schranke von jeder Teilmenge von $\bar{\mathbb{R}}$. Weil dann aber ∞ die einzige obere Schranke einer Teilmenge M von $\mathbb{R} \subset \bar{\mathbb{R}}$ ist, die in $\mathbb{R}$ keine obere Schranke hat, ist ∞ dann auch das Supremum von M als Teilmenge von $\bar{\mathbb{R}}$. Analog ist $-\infty$ das Infimum einer Teilmenge von $\mathbb{R} \subset \bar{\mathbb{R}}$, die keine untere Schranke in $\mathbb{R}$ hat. Daraus folgt aber sofort, dass jede Teilmenge von $\bar{\mathbb{R}}$ ein Supremum und ein Infimum hat. Außerdem gilt wieder, dass eine Teilmenge $M \subset \bar{\mathbb{R}}$ genau dann ein Maximum bzw. Infimum hat, wenn $\sup M \in M$ bzw. $\inf M \in M$ gilt. In diesen Fällen ist wieder $\max M = \sup M$ bzw. $\min M = \inf M$. Wir benutzen die Symbole sup, inf, max und min sowohl für Teilmengen von $\mathbb{R}$ als auch für Teilmengen von $\bar{\mathbb{R}}$, so dass aus dem Zusammenhang klar werden muss, was genau gemeint ist.

2.3 Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

Wir wollen die natürlichen Zahlen als Teilmenge der reellen Zahlen charakterisieren. Aufgrund von A2 gibt es das Element 1, das wegen (ii) in Satz 2.8 eindeutig ist. Aus (iv) im Satz 2.13 folgt dann mit $1 = 1 \cdot 1$, dass $1 > 0$. Dann folgt aus der Monotonie

$$\begin{aligned} 1+1 &= 2 > 1 \\ 2+1 &= 3 > 2 \\ &\vdots \\ n+1 &> n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Definition 2.31. *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt induktiv, falls*

(i) $1 \in M$

(ii) $a \in M \Rightarrow a+1 \in M$

$\mathbb{R}$ selber ist offenbar induktiv oder auch $[1, \infty)$.

Definition 2.32. *(Natürliche Zahlen) $\mathbb{N}$ ist die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$, also der Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$.*

Satz 2.33. *(Prinzip der vollständigen Induktion) Für die Menge $S \subset \mathbb{N}$ gelte*

(i) $1 \in S$

(ii) $a \in S \Rightarrow a+1 \in S$.

Dann ist $S = \mathbb{N}$.

Beweis: S ist offenbar eine induktive Menge. Also gilt $\mathbb{N} \subset S$. Andererseits ist S eine Teilmenge von $\mathbb{N}$. Also folgt $\mathbb{N} = S$. **q.e.d.**

Um eine Aussage $A(n)$ über alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen genügt es also zu zeigen:

(i) die Aussage $A(1)$ ist richtig.

(ii) Falls die Aussage $A(n)$ richtig ist, dann auch $A(n+1)$.

Einen solchen Beweis über eine Aussage über alle natürlichen Zahlen nennt man einen Beweis durch vollständige Induktion.

Satz 2.34. *(Bernoulli–Ungleichung) Sei $x > -1$, dann gilt*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Gleichheit gilt nur für $n = 1$ oder für $x = 0$.

Beweis durch vollständige Induktion: Für $x = 0$ oder $n = 1$ gilt offenbar die Gleichheit. Für jede natürliche Zahl n sei also $A(n)$ die Aussage

$$\text{für alle } x > -1 \text{ mit } x \neq 0 \text{ gilt } (1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x.$$

Wenn $x \neq 0$ dann folgt $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$. Also gilt $A(1)$.

Es gelte $A(n)$. Dann folgen wir aufgrund der Monotonie:

$$\text{wegen } x > -1 \text{ gilt auch } 1 + x > 0$$

$$(1+x)(1+x)^{n+1} > (1+x)(1+(n+1)x) \geq 1 + (n+2)x + (n+1)x^2 > 1 + (n+2)x.$$

Also gilt $A(n+1)$. **q.e.d.**

Satz 2.35. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es keine Zahl in $\mathbb{N}$ zwischen $n-1$ und n.*

Beweis durch vollständige Induktion: Offenbar ist $[1, \infty)$ eine induktive Menge. Also ist $\mathbb{N}$ eine Teilmenge von $[1, \infty)$ und enthält keine Zahl in $(0, 1)$. Wir nehmen jetzt an, dass es für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ keine natürliche Zahl zwischen $n - 1$ und n gibt. Die Menge $M = \{1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \in \mathbb{N}\}$ ist aber eine induktive Menge, weil $(1 + 1) - 1 = 1 \in \mathbb{N}$ und für jedes $x - 1 \in \mathbb{N}$ auch $(x + 1) - 1 = (x - 1) + 1 \in \mathbb{N}$. Also gilt $\mathbb{N} \subset \{1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \in \mathbb{N}\}$. Weil aber $n \geq 1$ kann es dann auch keine Zahl in $\mathbb{N}$ zwischen n und $n + 1$ geben. **q.e.d.**

Satz 2.36. *(Wohlordnungsprinzip). Jede nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{N}$ besitzt ein Minimum.*

Beweis: Weil $[1, \infty)$ eine induktive Menge ist, ist 1 eine untere Schranke von $\mathbb{N}$ und damit auch von M. Andererseits ist $\inf M + 1$ keine untere Schranke von M. Also gibt es ein Element $m \in M$ mit $\inf M \leq m < \inf M + 1$. Wegen dem vorangehenden Satz enthält dann aber $\mathbb{N}$ und damit auch M kein Element in dem Intervall $(m - 1, m)$. Weil aber $m - 1 < \inf M$, sind alle Elemente von M größer als $m - 1$. Also gibt es kein Element von M, das kleiner als m ist, und m ist das Minimum von M. **q.e.d.**

Satz 2.37. *(Archimedes-Endoxos)*

(i) *Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine natürliche Zahl $n > x$.*

(ii) *Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \epsilon$.*

Beweis: (i) Es reicht zu zeigen, dass $\mathbb{N}$ keine obere Schranke hat. Wenn $\mathbb{N}$ eine obere Schranke hat muss es ein $n \in \mathbb{N}$ geben mit $n \in (\sup \mathbb{N} - 1, \sup \mathbb{N}]$. Dann gilt aber $n + 1 > \sup \mathbb{N} \geq n + 1$, was ein Widerspruch ist.
(ii): Nach (i) gibt es ein $n > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon$. **q.e.d.**

Definition 2.38. *(ganze Zahlen $\mathbb{Z}$, rationale Zahlen $\mathbb{Q}$)*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in \mathbb{N} \\ \mathbb{N}_0 &= \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \mathbb{Q} &= \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \textit{ und } n \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$

Wegen dem Satz von Archimedes–Endoxos gibt es viele rationale Zahlen.

Satz 2.39. *Sei $a < b$. Dann existiert $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$.*

Beweis: $a < \frac{m}{n} < b \Leftrightarrow na < m < nb$. Weil $b - a > 0$ gibt es nach dem Satz von Archimedes-Endoxos ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{b-a}$. Dann gilt $na < nb$ und $nb - na > 1$.

Wir nehmen zunächst an, das $a \geq 0$ ist. Sei m die kleinste natürliche Zahl, die größer ist als na. Die natürlichen Zahlen sind enthalten in $\{1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \in \mathbb{N}\}$, weil diese Menge induktiv ist. Also ist $m - 1$ entweder eine natütliche Zahl oder gleich Null. Dann folgt aber $m - 1 \leq na$ und damit auch

$$na < m \leq na + 1 < nb.$$

Als nächstes nehmen wir an, dass $b \leq 0$ ist. Dann sei $-m$ die kleinste natürliche Zahl, die größer ist als $-nb$. Wieder ist $-m - 1$ entweder eine natürliche Zahl oder Null. Also folgt $-m - 1 \leq -nb$ und damit auch

$$na < nb - 1 \leq m < nb.$$

Wenn $a < 0$ und $b > 0$ ist wählen wir $m = 0$. **q.e.d.**

Also enthält jedes Intervall mindestens eine und damit sogar unendlich viele rationale Zahlen. Insbesondere gibt es für jede reelle Zahl und jedes $\epsilon > 0$ eine rationale Zahl r in $(x - \epsilon, x + \epsilon)$, die dann $d(x, r) < \epsilon$ erfüllt. Wir sagen deshalb, dass $\mathbb{Q}$ dicht in den reellen Zahlen liegt. Die rationalen Zahlen erfüllen als Unterkörper der reellen Zahlen die Axiome A1-A4. Wir werden gleich aber sehen, dass sie nicht das Vollständigkeitsaxiom erfüllen.

2.4 Wurzeln und Intervallschachtelung

Satz 2.40. *(Quadratwurzeln) Für alle $a > 0$ gibt es genau ein $b > 0$, so dass $b^2 = a$.*

Wir schreiben $b = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

Beweis: Eindeutigkeit: Aus $0 < b_1 < b_2$ folgt aufgrund der Monotonie $b_1^2 < b_1 b_2 < b_2^2$. Also gibt es höchstens ein $b > 0$ mit $b^2 = a$.

Existenz: Die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}_0^+ \mid x^2 < a\}$ enthält 0 und ist nach oben beschränkt, weil aus $x > a + 1$ folgt

$$x^2 > x(a+1) > (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 > 2a > a.$$

Sei $b = \sup M$.

Wenn $b^2 < a$ gilt, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{2b+1}{a-b^2}$. Dann folgt aber

$$\left(b + \frac{1}{n}\right)^2 \leq b^2 + \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} \leq b^2 + \frac{2b+1}{n} < a.$$

Also ist $b + \frac{1}{n} \in M$ und $b + \frac{1}{n} \leq b$ Widerspruch.

Wenn $b^2 > a$ gilt, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \max\left\{\frac{2b}{b^2-a}, \frac{1}{b}\right\}$. Dann folgt aber

$$\left(b - \frac{1}{n}\right)^2 \geq b^2 - \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} > b^2 - \frac{2b}{n} > a.$$

Jedes $x > b - \frac{1}{n} > 0$ erfüllt dann aber

$$x^2 > x\left(b - \frac{1}{n}\right) > \left(b - \frac{1}{n}\right)^2 > 0.$$

Also ist $b - \frac{1}{n}$ eine obere Schranke von M. Widerspruch. Also gilt $b^2 = a$. **q.e.d.**

Wir werden in Anwendung 3.9 für jedes $n \in \mathbb{N}$ zeigen, dass es für jedes $a > 0$ genau ein $b > 0$ gibt mit $b^n = a$. Wir schreiben dann $b = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. Insbesondere gibt es also genau ein $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, aber wie wir gleich sehen werden gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Also erfüllt $\mathbb{Q}$ tatsächlich nicht das Vollständigkeitsaxiom A5.

Lemma 2.41. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Beweis: Hier benutzen wir (ohne Beweis) die

Primfaktorzerlegung 2.42. *Jede Zahl in $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ läßt sich in bis auf Permutation der Primfaktoren eindeutiger Weise in ein endliches Produkt von Primzahlen zerlegen (Primzahlen sind Zahlen in $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, die nur durch 1 und sich selber teilbar sind).*

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ oder $m^2 = 2n^2$. Teile beide Zahlen m und n solange durch 2, bis eine von beiden ungerade ist, also die entsprechende Primfaktorzerlegung keine 2 enthält: $m = 2^l\tilde{m}$ und $n = 2^l\tilde{n}$. Danach gilt immer noch $2^{2l}\tilde{m}^2 = 2^{2l+1}\tilde{n}^2 \Leftrightarrow \tilde{m}^2 = 2\tilde{n}^2$. Also ist $\tilde{m}$ gerade und die Primfaktorzerlegung von $\tilde{m}$ enthält mindestends eine 2. Dann gilt aber $4k^2 = 2\tilde{n}^2 \Leftrightarrow 2k^2 = \tilde{n}^2$. Also ist auch $\tilde{n}$ gerade. Widerspruch. **q.e.d.**

Satz 2.43. *(Intervallschatelungsprinzip) Seien $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$, abgeschlossene Intervalle $a_n < b_n$ für $n = 1, 2, \cdots$ mit folgenden Eigenschaften.*

(i) *$I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$*

(ii) *Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $b_n - a_n < \epsilon$.*

Dann enthält $\bigcap\limits_{n\geq 1} I_n = \{x\}$ der Durchschnitt genau ein $x \in \mathbb{R}$.

Dieser Satz ist falsch für offene Intervalle. So ist z.B. $\bigcap\limits_{n\geq 1} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$ nach dem Satz von Archimedes-Endoxos.

Beweis: Wegen (i) gilt

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

Also besteht die Menge $A = \{a_1, a_2, \cdots\}$ aus unteren Schranken der Menge $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$ und umgekehrt die Menge B aus oberen Schranken der Menge A. Sei also $x = \sup A$ und $y = \inf B$. Dann sind x und y obere Schranken von A und untere Schranken von B. Also gilt $x \leq y$ und $x, y \in \bigcap\limits_{n>1} I_n$. Es gilt sogar $\bigcap\limits_{n>1} I_n = [x, y]$. Andererseits ist für alle $\epsilon > 0$ auch $y - x < \epsilon$. Dann muss aber $0 \leq y - x \leq \inf\{\epsilon | \epsilon > 0\} = 0$ und deshalb $y = x$ gelten. **q.e.d.**

Es gilt auch die Umkehrung, dass aus dem Intervallschachtelungsprinzip und den Axiomen A1-A4 das Vollständigkeitsaxiom folgt (Übungsaufgabe). Deshalb können die reellen Zahlen auch durch die Axiome A1-A4 und das Intervallschachtelungsprinzip charakterisiert werden. Wir werden später noch andere äquivalente Aussagen angeben.

2.5 Mächtigkeit von Mengen

Definition 2.44. *Zwei Mengen heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen ihnen gibt.*

Offensichtlich ist die Relation von Mengen gleichmächtig zu sein eine Äquivalenzrelation, d.h. sie ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Deshalb stellt sich die Frage, die Äquivalenzklassen dieser Relation zu bestimmen. Zwei Mengen mit endlich vielen Elementen sind offenbar genau dann gleichmächtig, wenn sie die gleiche Anzahl an Elementen haben. Also werden die Äquivalenzklassen der endlichen Mengen durch die Elemente von $\mathbb{N}_0$ beschrieben. Deshalb kann man alle diese Äquivalenzklassen auch als eine Erweiterung von $\mathbb{N}_0$ betrachten. Dabei werden manchmal besonders einfache Repräsentanten in den Äquivalenzklassen zur Beschreibung der natürlichen Zahlen (einschließlich der Null) benutzt:

$$\begin{array}{rc} 0 & \emptyset \\ 1 & \{\ \emptyset\ \} \\ 2 & \{\{\ \emptyset\ \}\} \\ 3 & \{\{\{\ \emptyset\ \}\}\} \end{array}$$

Definition 2.45. *Eine nicht leere Menge A heißt*

endlich, *falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass A gleichmächtig ist zu $\{1, 2, \cdots, n\}$.*

unendlich, *falls sie nicht endlich ist.*

abzählbar, *falls sie gleichmächtig ist zu $\mathbb{N}$.*

höchstens abzählbar, *wenn sie endlich oder abzählbar ist.*

Satz 2.46. (i) *Jede nichtleere Teilemenge von $\mathbb{N}$ ist höchstens abzählbar.*

(ii) *Eine Menge A ist genau dann höchstens abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf A gibt.*

Beweis:

(i) Jede Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ können wir aufgrund des Wohlordnungsprinzip der Größe nach mit dem kleinsten Element anfangend durchnumerieren. Wenn M nach oben unbeschränkt ist, erhalten wir so eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach M und M ist abzählbar. Andernfalls ist M endlich.

(ii) Sei A eine höchstens abzählbare Menge. Wenn A endlich ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass A gleichmächtig ist zu $\{1, 2, \cdots, n\}$. Die Abbildung $\mathbb{N} \to \{1, 2, \cdots, n\}, m \mapsto \min\{m, n\}$ ist eine surjektive Abbildung, so dass dann auch eine surjektive Abbildung auf A existiert. Wenn A abzählbar ist, gibt es sogar eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf A.

Sei umgekehrt A eine Menge und f eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf A. Dann existiert eine Abbildung $g : A \to \mathbb{N}, a \to \min f^{-1}[\{a\}]$, die offenbar eine bijektive Abbildung von A auf eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ definiert. Also ist A gleichmächtig zu einer Teilmenge von $\mathbb{N}$ und damit wegen (i) höchstens abzählbar.

q.e.d.

Satz 2.47. **(i)** *Die Menge* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *ist abzählbar.*

(ii) *Eine höchstens abzählbare Vereinigung von höchstens abzählbaren Mengen ist höchstens abzählbar.*

Beweis:

(i) Wir definieren eine injektive Abbildung f von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ durch

$$f(x, y) = y + \frac{(x + y - 2)(x + y - 1)}{2} = y + \sum_{n=0}^{x+y-2} n$$

(Diagonalnummerierung)

Diese Abbildung ist injektiv. Gilt nämlich $x + y < x' + y'$ so folgt aus

$y - y' < y \leq x + y - 1 \leq x' + y' - 2$ und $f(x, y) - y \leq f(x', y') - y' - (x' + y' - 2)$

$$f(x, y) \leq f(x', y') + y - y' - (x' + y' - 2) < f(x', y').$$

Gilt aber $x + y = x' + y'$ so gilt auch $f(x, y) - f(x', y') = y - y'$.
Also definiert diese Abbildung eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf eine Teilmenge von $\mathbb{N}$. Dann folgt (i) aus (i) vom vorangehenden Satz.

(ii) Wegen (ii) im vorangehenden Satz genügt es eine surjektive Abbildung $n \mapsto A_n$ von $\mathbb{N}$ in die höchstens abzählbaren Mengen zu betrachten. Wegen (ii) im vorangehenden Satz gibt es dann für alle $n \in \mathbb{N}$ eine surjektive Abbildung $f_n : \mathbb{N} \to A_n$. Dann ist

$$F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, (n, m) \mapsto f_n(m)$$

eine surjektive Abbildung. Also folgt (ii) aus (i) und dem vorangehenden Satz. **q.e.d.**

Korollar 2.48. $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

Beweis: $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, (m,n) \mapsto \frac{m}{n}$ ist eine surjektive Abbildung. $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, also ist $\mathbb{Q}$ höchstens abzählbar. $\mathbb{Q}$ ist aber nicht endlich und damit abzählbar. **q.e.d.**

Satz 2.49. *Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar.*

Beweis: Wir nehmen an $\mathbb{R}$ ist abzählbar. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Durchnumerierung von $\mathbb{R}$. Wähle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $I_1 = [a, b]$. Wir definieren induktiv die Intervalle $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Wähle für all $n \in \mathbb{N}$ ein abgeschlossenes Teilintervall I_{n+1} von I_n, das nur ein Drittel so groß ist wie I_n und x_n nicht enthält. Dann liegen für alle $n \in \mathbb{N}, x_n$ nicht in den Intervallen I_n. Wegen dem Intervallschachtelungsprinzip ist aber $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ nicht leer. Also gibt es eine reelle Zahl, die nicht zu der Menge $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gehört. Widerspruch. **q.e.d.**

Auch die Potenzmenge der natürlichen Zahlen ist nicht abzählbar. Wir können sie identifizieren mit den Folgen, die Werte in $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ annehmen, also der Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}_2$. Diese Folgen lassen sich aufgrund der dyadischen Entwicklung mit den reellen Zahlen $[0, 1]$ identifizieren. Diese sind wiederum gleichmächtig zu den reellen Zahlen.

2.6 Der Körper der komplexen Zahlen

Motivation: Wir hatten aus der Ordnungsrelation gefolgert, dass $x^2 > 0$ gilt, falls $x \neq 0$. Deshalb existieren in den reellen Zahlen keine Quadratwurzeln von negativen Zahlen. Erweitert man die reellen Zahlen durch eine Quadratwurzel $\imath$ von -1, so erhält man die komplexen Zahlen, in denen sich dann alle algebraischen Gleichungen lösen lassen.

Definition 2.50. *(Komplexe Zahlen) Die Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aller geordneten Paare (x, y) von reellen Zahlen zusammen mit den Operationen*

$$\begin{aligned} + : \quad & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad & ((x,y),(u,v)) \mapsto (x,y) + (u,v) = (x+u, y+v) \\ \cdot : \quad & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad & ((x,y),(u,v)) \mapsto (xu - yv, xv + yu) \end{aligned}$$

Mit dieser Definition erfüllt $\mathbb{C}$ die Körperaxiome A1-A3 und damit auch die Folgerungen daraus. Dabei ist

$$\begin{aligned} \text{Null} : 0_{\mathbb{C}} &= (0,0) \\ \text{Eins} : 1_{\mathbb{C}} &= (1,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{negatives Element:} -(x,y) &= (-x,-y) \\ \text{inverses Element:} (x,y)^{-1} &= \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) \text{für} (x,y) \neq (0,0). \end{aligned}$$

Wir bezeichnen komplexe Zahlen meistens auch nur durch einen Buchstaben, üblicherweise z. Die Null und die Eins bezeichnen wir auch durch 0 und 1, so dass aus dem Zusammenhang klar werden muss, ob es sich um die Null bzw. Eins der reellen oder der komplexen Zahlen handelt. Außerdem benutzen wir dieselben Abkürzungen wie bei den reellen Zahlen:

$$z + (-z) = z - z = 0$$

$$z^{-1} = \frac{1}{z}. \qquad z \cdot \frac{1}{z} = 1. \qquad \text{usw.}$$

Da ja die komplexen Zahlen eine Erweiterung der reellen Zahlen sein sollen, müssen wir die reellen Zahlen als Teilmenge der komplexen Zahlen auffassen können. Wir definieren also eine injektive Abbildung

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}, x \mapsto (x, 0)$$

Offenbar ist diese Abbildung verträglich mit den Operationen $+$ und $\cdot$ von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} (x,0) + (y,0) &= (x+y,0) & \qquad (x,0)\cdot(y,0) &= (xy,0) \\ (0,0) &= 0 & (1,0) &= 1 \\ -(x,0) &= (-x,0) & (x,0)^{-1} &= (x^{-1},0) \end{aligned}$$

Definition 2.51. *(imaginäre Einheit)* $\imath = (0, 1) \in \mathbb{C}$.

Dann gilt $\imath^2 = (-1, 0) = -1$. Wir können also auch schreiben $(x, y) = x + \imath y$. Dann ergeben sich die Operationen $+$ und $\cdot$

$$\begin{aligned} x + \imath y + u + \imath v &= x + u + \imath(y, v) \\ (x + \imath y)(u + \imath v) &= xu + \imath(yu + xv) + \imath^2 yv = xu - yv + \imath(yu + xv) \end{aligned}$$

Für die komplexe Zahl $z = x + \imath y$ heißt

$x = \Re(z)$ Realteil von z	$y = \Im(z)$ Imaginärteil von z
z heißt reell, falls	$\Im(z) = 0$
z heißt imaginär, falls	$\Re(z) = 0$

Definition 2.52. *(komplexe Konjugation) Die Abbildung* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z = x + \imath y \mapsto \bar{z} = x - \imath y$ *heißt komplexe Konjugation oder einfach nur Konjugation*

Die komplexen Zahlen erhalten wir aus den reellen Zahlen, indem wir reelle Vielfache einer Wurzel aus -1 hinzufügen. Weil aber $(-1) \cdot (-1) = 1$ ist das Negative einer Wurzel aus -1 wieder eine Wurzel aus -1. Welche dieser beiden Wurzeln aus -1 wir zur imaginären Einheit machen ist aber eine Konvention. Deshalb ist die Konjugation ein Endomorphismus der komplexen Zahlen, d.h. eine bijektive Abbildung, die mit den Operationen $+$ und $\cdot$ verträglich ist, die die reellen Zahlen invariant läßt.

Satz 2.53. **(i)** $(\bar{\bar{z}}) = z$

(ii) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

(iii) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(iv) $z + \bar{z} = 2\Re z$ *und* $z - \bar{z} = 2\imath\Im(z)$

(v) $z \cdot \bar{z}$ *ist reell und nicht negativ.*

Beweis:

(i)-(iv) nachrechnen.

(v) $(x + \imath y)(x - \imath y) = x^2 + y^2 \geq 0$

Definition 2.54. *(Betrag) Der Betrag einer komplexen Zahl* $z = x + \imath y$ *ist definiert als die reelle nicht negative Wurzel aus* $z \cdot \bar{z} :| \cdot | \ \mathbb{C} \to \mathbb{R}, z \mapsto | z | = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

Satz 2.55. *(Eigenschaften des Betrags)*

(i) $| z | \geq 0$ *und* $| z | = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(ii) $| z \cdot w | = | z | \cdot | w |$

(iii) $| z + w | \leq | z | + | w |$ *(Dreiecksungleichung)*

(iv) $|| z | - | w || \leq | z - w |$

(v) $| \bar{z} | = | z |$

(vi) $| \Re(z) | \leq | z |$ *und* $| \Im(z) | \leq | z |$

Beweis:

(ii) $| z \cdot w |^2 = zw\overline{(zw)} = z\bar{z}w\bar{w} = (| z || w |)^2$ Wegen der Eindeutigkeit der Wurzel folgt dann $| z \cdot w | = | z | \cdot | w |$.

(vi) Für $z = 0$ ist die Aussage offensichtlich. Sei also $z = x + \imath y \neq 0$. Dann gilt $x^2 \leq x^2 + y^2$. Aus $\sqrt{x^2 + y^2} < x$ folgt aber mit Monotonie $x^2 + y^2 < x\sqrt{x^2 + y^2} < x^2$. Also gilt $x \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ und damit auch $| \Re(z) | \leq z |$. Durch vertauschen von x und y erhalten wir $| \Im(z) | \leq | z |$.

(iii)

$$\begin{aligned}
| z+w |^2 &= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \\
&= z\bar{z}+z\bar{w}+w\bar{z}+w\bar{w} \\
&= z\bar{z}+2\mathbb{R}(z\bar{w})+w\bar{w} \\
&\leq | z |^2 +2 | z\bar{w} | + | w |^2 \\
&= | z |^2 +2 | z || w | + | w |^2 \\
&= | z |^2 + | w |^2
\end{aligned}$$

Aus $| z | + | w |<| z+w |$ folgt aber mit Monotonie

$$(| z | + | w |)^2 < (| z | + | w |) \, | z+w |<| z+w |^2$$

Also gilt $| z+w |\leq| z | + | w |$.

(iv) folgt aus (i)-(iii) genau wie im reellen Fall.

(v) $| \bar{z} |^2 = \bar{z}z =| z |^2$. Dann folgt wegen der Eindeutigkeit der Wurzel $| \bar{z} |=| z |$.

q.e.d.

Definition 2.56. *(Abstand) Der Abstand zweier komplexer Zahlen ist die nicht negative Zahl* $d : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{R}, (z,w) \mapsto d(z,w) =| z-w |$

Aus den Eigenschaften des Betrages folgt genau wie im Reellen.

Satz 2.57. *(Eigenschaften des Abstandes)*

(i) $d(z,w) \geq 0$ *und* $d(z,w) = 0 \Leftrightarrow z = w$

(ii) $d(z,w) = d(w,z)$

(iii) $d(z,w) \leq d(z,u) + d(u,w)$. *(Dreiecksungleichung).*

Wir veranschaulichen die komplexen Zahlen in der zweidimensionalen Ebene. Der Abstand ist dann der euklidische Abstand zwischen den entsprechenden Punkten der Ebene.

Kapitel 3

Zahlenfolgen

3.1 Konvergenz

Im Folgenden werden wir des öfteren Aussagen vorstellen, die sowohl für die reelen Zahlen als auch für die komplexen Zahlen gelten. Wir benutzen dann das Symbol $\mathbb{K}$ um entweder die reelen oder die komplexen Zahlen zusammen mit den entsprechenden Abbildungen und Operationen zu bezeichnen. Die Elemente von $\mathbb{K}$ wollen wir dann einfach Zahlen nennen. Eine Folge ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$, $n \mapsto a_n$. Wir bezeichnen sie mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir interessieren uns vorwiegend für die Grenzwerte solcher Zahlenfolgen.

Definition 3.1. *Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{K}$ gibt, so dass es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq N$ gilt $\mid a_n - a \mid < \epsilon$. Die Zahl a heißt dann Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

Wir schreiben dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $\lim a_n = a$ oder auch $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

Beispiel 3.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Beweis: Nach dem Satz von Archimedes-Endoxos gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \epsilon$. Dann gilt aber wegen (iv) in Satz 2.13 für alle $n \geq N$ auch $\mid \frac{1}{n} - 0 \mid < \epsilon$. **q.e.d.**

Satz 3.3. (i) *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.*

(ii) *Eine komplexe Folge konvergiert genau dann, wenn die Folgen der entsprechenden Realteile und Imaginärteile konvergieren.*

(iii) *Jede konvergente Zahlenfolge ist beschränkt, als Teilmenge von $\mathbb{K}$*

Beweis:

(i) Seien a und b zwei Grenzwerte einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass für alle $n \geq N \mid a_n - a \mid < \frac{\epsilon}{2}$ und für alle $n \geq M \mid a_n - b \mid < \frac{\epsilon}{2}$ gilt. Dann folgt mit $n \geq \max\{N, M\}$

$$0 \leq \mid a - b \mid \leq \mid a - a_n \mid + \mid a_n - b \mid < \epsilon.$$

Dann gilt aber auch $0 \leq \mid a - b \mid \leq \inf(0, \infty) = 0$. Also ist $\mid a - b \mid = 0$ und damit auch $a = b$.

(ii) Die Realteile und Imaginärteile einer komplexen Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilden zwei reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n = x_n + iy_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $z = x + iy$ die Zerlegung einer komplexen Zahl in Realteil und Imaginärteil. Wegen der Ungleichung

$$\max\{\mid x_n - x \mid, \mid y_n - y \mid\} \leq \mid z_n - z \mid$$

Konvergieren die Real- bzw. Imaginärteile einer konvergenten komplexen Folge gegen den Realteil bzw. Imaginärteil des Grenzwertes. Konvergieren umgekehrt die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x bzw. y, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ zwei natürliche Zahlen $N, M \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq M \mid y_n - y \mid < \frac{\epsilon}{2}$. Dann gilt für alle $n \geq \max\{N, M\}$

$$\mid x_n + iy_n - x + iy \mid \leq \mid x_n - x \mid + \mid y_n - y \mid < \epsilon.$$

Also konvergiert eine komplexe Folge genau dann, wenn ihre Realteile und Imaginärteile konvergieren.

(iii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $\mid a_n - a \mid < 1$. Dann gilt aber auch für alle $n \geq N$

$$\mid a_n \mid \leq \mid a_n - a + a \mid < 1 + \mid a \mid .$$

Daraus folgt dann für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mid a_n \mid \leq \max\{\mid a \mid +1, \mid a_1 \mid, \mid a_2 \mid, \cdots, \mid a_{N-1} \mid\}.$$

q.e.d.

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt divergent, wenn sie nicht konvergiert, wenn es also kein $a \in \mathbb{K}$ gibt, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Wenn es für eine reelle Folge für jedes $b \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq N$ gilt $a_n > b$ bzw. $a_n < b$ dann schreiben wir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ Weil in beiden Fällen die Folgen nicht beschränkt sind können sie wegen dem vorangehenden Satz nicht konvergieren. Es gilt offenbar $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} -n = -\infty$.

Satz 3.4. **(i)** *Sei* $| x |< 1$ *dann gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$

(ii) *Sei* $| x |> 1$ *dann ist* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergent.*

(iii) *Sei* $x = 1$ *dann gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 1$

(iv) *Sei* $x \in (1, \infty)$ *dann gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \infty$.

(v) *Sei* $| x |= 1$ *und* $x \neq 1$ *dann ist* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergent.*

Beweis:

(i) Wenn $x = 0$ ist gilt natürlich $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$. Sei also $0 < |x| < 1$. Dann ist $1 < \frac{1}{|x|} = 1 + y$ mit $y = \frac{1-|x|}{|x|}$. Dann folgt aus der Bernoulli–Ungleichung $\frac{1}{|x|^n} = (1 + y)^n \geq 1 + ny > ny = n\frac{1-|x|}{|x|}$. Dann folgt aber $| x |^n < \frac{1}{n}\frac{|x|}{1-|x|}$. Aus dem Satz von Archimedes-Endoxos folgt dann, dass es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\frac{1}{N} < \epsilon \cdot \frac{1-|x|}{|x|}$. Daraus folgt aber für alle $n \geq N$

$$| x^n - 0 |=| x |^n < \frac{1}{n}\frac{| x |}{1- | x |} \leq \frac{1}{N}\frac{| x |}{1- | x |} < \epsilon$$

(iii) Wegen $1^n = 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$.

(iv) Sei $x > 1$. Dann ist $y = x - 1 > 0$. Also gilt aufgrund der Bernoulli–Ungleichung

$$x^n = (1 + y)^n \geq 1 + ny > ny = n(x - 1).$$

Dann gibt es aber für jedes $b > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{b}{x-1}$. Dann folgt aber für alle $n \geq N$:

$$x^n > n(x - 1) \geq N(x - 1) > b.$$

Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \infty$.

(ii) Für $| x |> 1$ gilt wegen (iv) $\lim\limits_{n\to\infty} | x^n |= \infty$. Also ist die Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt.

(v) Für alle $y \in \mathbb{K}$ und alle natürlichen Zahlen n gilt

$$| y - x^n | + | y - x^{n+1} |\geq| x^n - x^{n+1} |\geq| x - 1 | \cdot | x |^n .$$

Für $| x |= 1$ mit $x \neq 1$ gilt also

$$\max\{| y - x^n |, | y - x^{n+1} |\} \geq \frac{| x - 1 |}{2}.$$

Also kann es für $x \neq 1$ keinen Grenzwert geben.

q.e.d.

Satz 3.5. *(Rechenregeln) Seien* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zwei konvergente Zahlenfolgen. Dann gilt*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{K}$.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n)(\lim\limits_{n\to\infty} y_n)$

(iv) *Wenn* $x_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$*, dann gilt auch* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} | x_n | = | \lim\limits_{n\to\infty} x_n |$.

(vi) *Wenn zwei reelle Folgen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ $x_n \leq y_n$ *erfüllen, dann gilt auch* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

(vii) *Wenn zwei reelle Folgen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ $x_n \leq y_n$ *erfüllen und den gleichen Grenzwert haben, dann gilt für jede reelle Folge* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, die für alle* $n \in \mathbb{N}$ $x_n \leq z_n \leq y_n$ *erfüllt,* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Beweis:

(i) Sei $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Dann gilt es für jedes $\epsilon > 0$ natürliche Zahlen $N, M \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ $| x_n - x | < \frac{\epsilon}{2}$ und für alle $n \geq M$ $| y_n - y | < \frac{\epsilon}{2}$ gilt. Dann gilt aber für alle $n \geq \max\{N, M\}$ $| x_n + y_n - (x + y) | \leq | x_n - x | + | y_n - y | < \epsilon$. Also konvergiert $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x + y$.

(ii) Für $\lambda = 0$ gilt offenbar $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Sei also $\lambda \neq 0$. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq \mathbb{N}$ gilt $| x_n - x | < \frac{\epsilon}{|\lambda|}$. Daraus folgt aber:

$$| \lambda x_n - \lambda x | \leq | \lambda || x_n - x | < \epsilon$$

(iii) Weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, gibt es ein $\lambda > 0$ mit $| x_n | < \lambda$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gibt es für alle $\epsilon > 0$ zwei natürliche Zahlen $N, M \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$ gilt $| x_n - x | < \frac{\epsilon}{|y|+1}$ gilt und für alle $n \geq M$ $| y_n - y | < \frac{\epsilon}{2\lambda}$. Dann gilt aber für alle $n \geq \max\{N, M\}$ auch

$$| x_n y_n - xy | \leq | x_n | \cdot | y_n - y | + | x_n - x | \cdot | y | < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(iv) : Aufgrund der Voraussetzungen gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $\mid x_n - x \mid < \frac{|x|}{2}$. Daraus folgt dann

$$\mid x_n \mid \geq \mid x \mid - \mid x_n - x \mid > \frac{\mid x \mid}{2} \text{ und } \frac{1}{\mid x_n \mid} < \frac{2}{\mid x \mid}$$

Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $M \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq M$ gilt $\mid x_n - x \mid < \frac{\epsilon \cdot |x|^2}{2}$. Dann gilt aber auch für alle $n \geq \max\{N, M\}$

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{x - x_n}{x_n x} \right| = \frac{|x - x_n|}{|x_n| \cdot |x|} < \frac{\epsilon \cdot |x|^2}{2} \frac{2}{|x|} \frac{1}{|x|} = \epsilon$$

(v) folgt aus der Ungleichung $||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|$.

(vi) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es zwei natürliche Zahlen N und M, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ und für alle $n \geq M$ $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$. Dann gilt für alle $n \geq \max\{N, M\}$

$$x - y \leq (x - x_n) + (y_n - y) + (x_n - y_n) < \epsilon$$

Also ist $x - y \leq \inf(0, \infty) \leq 0$. Daraus folgt $x \leq y$.

(vii) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es zwei natürliche Zahlen $N, M \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|x_n - x| < \epsilon$ und für alle $n \geq M$ $|y_n - x| < \epsilon$. Für alle $n \geq \max\{N, M\}$ gilt dann aber

$$-\epsilon < x_n - x \leq z_n - x \leq y_n - x < \epsilon$$

Daraus folgt $|z_n - x| < \epsilon$. **q.e.d.**

Offenbar gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)(1 - x) = (1 + x + \ldots + x^n) - (x + x^2 + \ldots + x^{n+1}) = 1 - x^{n+1}$$

Also gilt für $x \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$1 + x + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Dann folgt aus Satz 3.4, dass die Folge $y_n = 1 + x + \ldots + x^n$ für $|x| < 1$ gegen $\frac{1}{1-x}$ konvergiert.

Satz 3.6.

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{m=0}^{n} x^m = \frac{1}{1 - x} \textit{ für } |x| < 1.$$

3.2 Konvergenzprinzipien

Wir wollen 3 Methoden behandeln um zu entscheiden, ob eine Folge konvergiert oder nicht.

Definition 3.7. *(Monotonie) Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt:*

monoton wachsend *, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

streng monoton wachsend *, wenn $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

monoton fallend *, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

streng monoton fallend *, wenn $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Satz 3.8. *(Monotonie Prinzip)*

(i) *Eine monoton wachsende (fallende) beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent. Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ bzw. } \lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

(ii) *Für eine monoton wachsende (fallende) unbeschränkte reelle Folge gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ bzw. } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Beweis:

(i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende (fallende) beschränkte reelle Folge. Dann existiert $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ bzw. $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$a_N > \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n - \epsilon \text{ bzw. } a_N < \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n + \epsilon.$$

Dann gilt aber für alle $m \geq N$:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n - \epsilon < a_N \leq a_m \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ bzw. } \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n \leq a_m \leq a_N < \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n + \epsilon.$$

Dann gilt aber auch $|a_m - \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n| < \epsilon$ bzw. $|a_m - \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n| < \epsilon$.

(ii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende (fallende) reelle unbeschränkte Folge. Dann gibt es für jedes $b \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_N > b$ bzw. $a_N < b$ gilt. Dann gilt aber für alle $m \geq N$ auch $a_m \geq a_N > b$ bzw. $a_m \leq a_N < b$. **q.e.d.**

Anwendung 3.9. *Existenz und Konstruktion der k–ten Wurzel. Für alle $a > 0$ und alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ definieren wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch*

$$a_0 = 1 + \frac{a-1}{k} \qquad\qquad a_{n+1} = a_n\left(1 + \frac{a - a_n^k}{k \cdot a_n^k}\right) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Für $a = 1$ ist dann $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $a \neq 1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 < a_n < a_0, \qquad\qquad a_n < a_{n-1} \text{ und } \qquad\qquad a < a_n^k.$$

Beweis durch vollständige Induktion:

(i) Für $a > 0$ und $a \neq 1$ ist $-1 < -\frac{1}{k} < \frac{a-1}{k} \neq 0$. Wegen der Bernoulli–Ungleichung gilt dann $a_0^k = \left(1 + \frac{a-1}{k}\right)^k > 1 + a - 1 = a$. Daraus folgt aber $-1 < -\frac{1}{k} < \frac{a-a_0^k}{ka_0^k} < 0$. Also gilt auch $0 < a_1 < a_0$ und wegen der Bernoulli–Ungleichung: $a_1^k > a_0^k\left(1 + \frac{a - a_0^k}{ka_0^k}\right)^k > a_0^k\left(1 + k\frac{a - a_0^k}{ka_0^k}\right) = a.$

(ii) Wir nehmen an es gilt für $n \in \mathbb{N}$: $0 < a_n < a_0, a_n < a_{n-1}$ und $a < a_n^k$. Dann folgt $-1 < -\frac{1}{k} < \frac{a-a_n^k}{k\cdot a_n^k} < 0$. Daraus folgt aber: $0 < a_{n+1} < a_n$ und wegen der Bernoulli–Ungleichung: $a_{n+1}^k > a_n^k\left(1 + \frac{a - a_n^k}{ka_n^k}\right)^k > a_n^k\left(1 + k\frac{a - a_n^k}{ka_n^k}\right) = a.$ **q.e.d.**

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also monoton fallend und beschränkt. Wegen dem Monotonie Prinzip konvergiert sie dann. Sei $b = \lim_{n\to\infty} a_n$. Wir formulieren die Rekursionsgleichung um zu

$$a_{n+1} \cdot ka_n^{k-1} = (k-1)a_n^k + a.$$

Bilden wir links und rechts den Grenzwert $n \to \infty$ so erhalten wir

$$kb^k = (k-1)b^k + a \text{ oder auch } b^k = a.$$

Also existiert eine Zahl b mit $b^k = a$. Diese Folge konvergiert sehr schnell. Außerdem sind für rationale a alle Folgenglieder rational.

Satz 3.10. **(i)** *Für jede positive Zahl $a > 0$ und jede rationale Zahl r gibt es genau eine positive Zahl a^r.*

(ii) *Für jede positive rationale Zahl $r > 0$ und $0 < a < b$ gilt auch $0 < a^r < b^r$.*

(iii) *Für jede negative rationale Zahl $r < 0$ und $0 < a < b$ gilt auch $0 < b^r < a^r$.*

Beweis:

(i) Für $r = \frac{p}{q}$ definieren wir $a^r = (\sqrt[q]{a})^p$. Offenbar ist a^r eine positive Lösung der Gleichungen $(a^r)^{qn} = a^{pn}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen jetzt, dass $0 < a < b$ äquivalent ist zu $0 < a^n < b^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Denn für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt

$$b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \ldots + ba^{n-2} + a^{n-1}).$$

Also folgt aus $0 < a < b$ auch $a^n < b^n$ und aus $0 < b \leq a$ auch $a^n \leq b^n$. Also ist für $a > 0$ und $b > 0$ die Ungleichung $a < b$ äquivalent zu der Ungleichung $a^n < b^n$. Also gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\frac{p}{q} > 0$ genau eine positive Lösung der Gleichung $y^q = a^p$. Für $r < 0$ ist $a^r = \frac{1}{a^{-r}}$ die entsprechende positive Zahl.

(ii) Sei $r = \frac{p}{q} > 0$. Dann ist $0 < a < b$ äquivalent zu $0 < a^p < b^p$ und das wiederum äquivalent zu $0 < a^{\frac{p}{q}} < b^{\frac{p}{q}}$.

(iii) Sei $r = \frac{-p}{q} < 0$. Dann folgt (iii) aus (ii) wegen (vi) Satz 2.13

Definition 3.11. *(Teilfolge) Eine Teilfolge einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von der Form $b_m = a_{n_m}$, wobei $0 < n_1 < n_2 < \ldots$ eine streng wachsende Folge von natürlichen Zahlen ist.*

Z.B. hat die divergente Folge $a_n = (-1)^n$ zwei konvergente Teilfolgen $b_m = a_{2m} = 1$ und $c_m = a_{2m+1} = -1$.

Satz 3.12. *(monotone Teilfolgen) Jede reelle Zahlenfolge enthält eine monotone Teilfolge.*

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und A die Menge
$A = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \geq a_m$ für alle natürliche Zahlen $m > n\}$. Wenn A eine unendliche Menge ist, dann sei $n_1 < n_2 < \ldots$ eine Abzählung der Element von A. Die Teilfolge $b_m = a_{n_m}$ ist dann monoton fallend. Wenn A eine endliche Menge ist besitzt es ein Maximum N. Dann gibt es also zu jedem $n > N$ ein $m > n$, so dass $a_m > a_n$ ist. Also definieren wir induktiv eine Teilfolge $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$, so dass $b_{m+1} > b_m$ gilt für alle $m \in \mathbb{N}$. Diese Folge ist streng monoton steigend. Also enthält $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entweder eine monoton fallende oder eine streng monoton steigende Folge. Umgekehrt gilt dann auch, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entweder eine monoton steigende oder eine streng monoton fallende Folge enthält. **q.e.d.**

Satz 3.13. *(Auswahlprinzip von Bolzano–Weierstraß) Jede beschränkte reelle Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis: Wegen dem vorangehenden Satz besitzt jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Teilfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wenn die ursprüngliche Folge beschränkt ist, ist auch die Teilfolge beschränkt. Diese konvergiert dann wegen dem Monotonieprinzip. **q.e.d.**

Korollar 3.14. *Jede beschränkte komplexe Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis: Wegen $\max\{|x|,|y|\} \leq |x+\imath y|$ sind die reellen Folgen der Realteile und Imaginärteile einer Komplexen beschränkten Folge beschränkt. Wegen dem Auswahlrpinzip von Bolzano–Weiertraß besitzt dann die Folge der Realteile eine konvergente Teilfolge. Die entsprechende Teilfoge der Imaginärteilte besitzt dann wieder wegen dem Auswahlprinzip eine konvergente Teilfolge. Wegen Satz 3.3 (ii) konvergiert die entsprechende komplexe Teilfolge. **q.e.d.**

Definition 3.15. *(Cauchy–Folge) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy–Folge, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle natürlichen Zahlen $n, m \geq N$ gilt $|a_n - a_m| < \epsilon$.*

Satz 3.16. *(Kriterium von Cauchy) Eine Zahlenfolge konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy–Folge ist.*

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass alle $m \geq N$ die Ungleichung $|a_m - \lim\limits_{n\to\infty} a_n| < \frac{\epsilon}{2}$ erfüllen. Also gilt auch für alle $m, l \geq N$

$$|a_m - a_l| \leq |a_m - \lim_{n\to\infty} a_n| + |\lim_{n\to\infty} a_n - a_l| < \epsilon.$$

Sei umgekehrt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq N$ gilt $|a_m - a_N| < 1$, und damit auch $|a_m| \leq |a_N| + |a_m - a_N| < |a_N| + 1$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann aber $|a_n| \leq \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$ Deshalb ist die Folge a_n beschränkt und besitzt wegen dem Auswahlprinzip von Bolzano–Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ zwei natürliche Zahlen $N, M \in \mathbb{N}$, so dass alle $n, m \geq N$ die Ungleichung $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$ erfüllen und alle $n \geq M$ die Ungleichung $|b_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$. Weil aber $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, folgt für alle $n \geq \max\{N, M\}$ dann $|a_n - a| \leq |a_n - b_n| + |b_n - a| < \epsilon$. **q.e.d.**

Es gilt sogar unter der Annahme der Axiome A1-A4, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

Vollständigkeitsaxiom A5.

(i) aus dem Monotonieprinzip.

Auswahlprinzip von Bolzano–Weierstraß.

Jede Cauchy–Folge konvergiert.

Intervallschachtelungsprinzip.

Wir können die reellen Zahlen also auch auffassen als folgende Äquivalenzklasse von Cauchy–Folgen von rationalen Zahlen:
Zwei Cauchy–Folgen heißen äquivalent, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist.

3.3 Häufungspunkte

Definition 3.17. *(Häufungspunkt) Die Grenzwerte von konvergenten Teilfolgen heißen Häufungspunkte. Bei reellen Teilfolgen sind zusätzlich $+\infty$ bzw. $-\infty$ Häufungspunkte, wenn es Teilfolgen mit diesen Grenzwerten gibt.*

Satz 3.18. *(Limes superior und Limes inferior) Ist die Menge der Häufungspunkte einer reellen Folge nicht leer und nach oben (unten) beschränkt, so besitzt sie ein Maximum (Minimum).*

Beweis: Wir nehmen an, dass die Menge der Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist. Sei a das Supremum der Häufungspunkte, dann gibt es für jedes $m \in \mathbb{N}$ einen Häufungspunkt $b_m \in (a - \frac{1}{2m}, a]$. Dann gibt es aber auch eine Teilfolge $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die für alle $m \in \mathbb{N}$ $|c_m - b_m| < \frac{1}{2m}$ erfüllt. Dann gilt aber für alle $m \in \mathbb{N}$ sogar $|c_m - a| \leq |c_m - b_m| + |b_m - a| < \frac{1}{m}$. Also ist a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit ein Maximum aller dieser Häufungspunkte. Der Beweis für das Minimum ist analog. **q.e.d.**

Definition 3.19. *Für eine nach oben (unten) beschränkte reelle Folge heißt das Supremum (bzw. Infimum) der Häufungspunkte Limes superior bzw. inferior. Wir bezeichnen es mit* $\overline{\lim} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup a_n$ *bzw.* $\underline{\lim} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf a_n$.

Satz 3.20. **(i)** *$\overline{a}$ ist genau dann der Limes superior einer nach oben beschränkten reellen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für alle $\epsilon > 0$ unendlich viele Elemente der Folge $a_n > \overline{a} - \epsilon$ erfüllen, aber höchstens endlich viele $a_n > \overline{a} + \epsilon$.*

(ii) *$\underline{a}$ ist genau dann der Limes inferior einer nach unten beschränkten reellen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für alle $\epsilon > 0$ unendlich viele Elemente $a_n < \underline{a} + \epsilon$ erfüllen, aber höchstens endliche viele $a_n < \underline{a} - \epsilon$.*

Beweis: Wir beweisen wieder nur (i), weil (ii) analog zu beweisen ist. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nach oben beschränkte Folge. Wegen dem Auswahlprinzip von Bolzano–Weiertraß ist jede untere Schranke einer Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch ein untere Schranke von mindestens einen Häufungspunkt. Also ist die Charkerisierung der Zahl $\overline{a}$ in (i) äquivalent dazu, dass alle Zahlen, die größer sind als $\overline{a}$ auch obere Schranken der Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind, aber $\overline{a}$ selber ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Dann ist $\overline{a}$ aber der maximale Häufungspunkt. **q.e.d.**

Korollar 3.21. *Eine reelle Folge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist und wenn* $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n$.

Weil $\overline{\lim} a_n$ und $\underline{\lim} a_n$ das Maximum und das Minimum der Häufungspunkte sind, ist die Bedingung $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n$ äquivalent zu der Bedingung, dass es nur einen Häufungspunkt gibt.

Beweis: Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = a$ gilt, dann folgt aus dem vorangehenden Satz, dass es für jedes $\epsilon > 0$ ein N gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt $\underline{\lim} a_n - \epsilon \leq a_n \leq \overline{\lim} a_n + \epsilon$. Also gilt auch $|a_n - a| < \epsilon$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a.

Wenn umgekehrt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert auch jede Teilfolge gegen $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Also besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nur einen Häufungspunkt und es gilt $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = a$. **q.e.d.**

Korollar 3.22. *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nach unten (oben) beschränkte reelle Folgen, die für alle* $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq b_n$ *erfüllen. Dann gilt* $\underline{\lim} a_n \leq \underline{\lim} b_n$ *bzw.* $\overline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} b_n$.

Beweis: Sei $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen $\underline{\lim} b_n$ (bzw. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\overline{\lim} a_n$ die gegen $\overline{\lim} a_n$) konvergiert. Dann gibt es eine Teilfolge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (bzw. $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$), die für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $c_n \leq d_n$ erfüllt. Diese Teilfolge ist beschränkt und besitzt eine konvergente Teilfolge. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (bzw. $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$) konvergiert. Dann ist aber $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} d_n$ ein Häfungspunkt von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Also gilt $\underline{\lim} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} c_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} d_n \leq \underline{\lim} b_n$. **q.e.d.**

3.4 Beispiele

(i) Für alle $x \in \mathbb{C}$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

Beweis: Wegen dem Satz von Archimedes–Endoxes gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x| < N$. Dann gilt für alle $n \geq N$

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|^N}{N!} \cdot \frac{|x|^{n-N}}{(N+1)\cdots n} < \frac{|x|^N}{N!} \left(\frac{|x|}{N}\right)^{n-N-1} \cdot \frac{|x|}{n} \leq \frac{|x|^{N+1}}{N!} \cdot \frac{1}{n}$$

Weil aber $\frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist, konvergiert dann $\left|\frac{x^n}{n!}\right|$ auch gegen Null. **q.e.d.**

(ii)* Für alle positiven rationalen Zahlen $r > 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0$.

Beweis*: Nach dem Satz von Archimedes–Endoxos, gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{r}}}$. Dann gilt aber für alle $n \geq N$ auch $\frac{1}{n^r} \leq \frac{1}{N^r} < \epsilon$. Also konvergiert $\frac{1}{n^r}$ nach Null. **q.e.d.**

(iii) Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$.

Beweis: Sei zunächst $x \geq 1$. Sei also $y_n = \sqrt[n]{x} - 1 \geq 0$. Wegen der Bernoulli–Ungleichung gilt dann $x = (1 + y_n)^n \geq 1 + ny_n$. Daraus folgt $0 \leq y_n \leq \frac{x-1}{n}$. Dann konvergiert y_n aber gegen Null. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1 + \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$. Sei jetzt $0 < x < 1$. Dann ist $\frac{1}{x} > 1$. Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{x}}} = 1$. **q.e.d.**

Binomische Formel* 3.23. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Zahlen $x, y \in \mathbb{K}$ gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \text{ wobei } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ und } 0! = 1.$$

Beweis*: durch vollständige Induktion:

(i) Offenbar ist $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$, und die Binomische Formel ist für $n = 1$ richtig.

(ii) Wenn die Binomische Formel für $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann folgt

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\left(k\frac{n!}{k!(n+1-k)!} + (n+1-k)\frac{n!}{k!(n+1-k)!}\right)x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Also gilt sie auch für $n + 1$. **q.e.d.**

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Beweis: Sei $y_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Wegen der Binomischen Formel gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = (1 + y_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y_n^k$$

Dann folgt aber für alle $n \geq 2$:

$$n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} y_n^2 \Leftrightarrow y_n^2 \leq \frac{2}{n} \Leftrightarrow y_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Also ist y_n eine Nullfolge. **q.e.d.**

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Beweis: Wegen (i) gibt es für alle $x \in \mathbb{R}$ ein N, so dass für alle $n \geq N$ gilt $\frac{x^n}{n!} < 1$. Dann gilt aber auch $\frac{x}{\sqrt[n]{n!}} < 1 \Leftrightarrow x < \sqrt[n]{n!}$. Also folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$. **q.e.d.**

Satz 3.24. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine positive Folge, dann gilt*

$$\underline{\lim} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \qquad\qquad \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Wenn die Folge $\sqrt[n]{a_n}$ also eine Häufungspunkt hat, dann hat die Folge $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ auch einen Häufungspunkt. Und wenn gilt $\overline{\lim} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < \infty$ dann gilt auch $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < \infty$.

Beweis: Wenn $\underline{\lim} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 0$ ist, ist die Aussage trivial. Wir nehmen also an, dass es ein $a > 0$ gibt, so dass für alle $0 < \epsilon < a$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass alle $n \geq N$ auch $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq a - \epsilon$ erfüllen. Dann gilt für alle $n > N$

$$\frac{a_n}{a_N} = \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq (a-\epsilon)^{n-N} \Rightarrow a_n \geq a_N \frac{(a-\epsilon)^n}{(a-\epsilon)^N} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \geq \sqrt[n]{\frac{a_N}{(a-\epsilon)^N}} \cdot (a-\epsilon).$$

Wegen (iii) gilt dann aber $\underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \geq (a-\epsilon)$. Weil dies aber für alle $\epsilon > 0$ gilt, folgt auch $\underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \geq a$. Also ist $\underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \geq a$ nicht kleiner als der kleinste Häufungspunnkt von $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Für die Folge $(a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ gilt entsprechend $\underline{\lim} \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n^{-1}} = \underline{\lim} \left(\sqrt[n]{a_n}\right)^{-1}$. Wegen Satz 2.13 (vi) und Satz 3.5 (iv) ist aber für jede positive Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\left(\underline{\lim} b_n^{-1}\right)^{-1} = \overline{\lim} b_n$. Also folgt die zweite Ungleichung aus Satz 2.13 (vi). **q.e.d.**

Die Folge $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend und beschränkt, weil für $n > 3$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{5}{2} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &< 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &< 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 2 + 1 - \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Also konvergiert diese Folge. Der Grenzwert heißt Eulersche Zahl $e \in (\frac{5}{2}, 3)$.

(vi) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Beweis: Wegen der Binomischen Formel gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{1}{k!}$$

Also gilt $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq e$. Offenbar ist aber für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}.$$

Also gilt auch für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\underline{\lim} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}.$$

Weil aber $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \left(\sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\right) = e$ gilt folgt dann $e \leq \underline{\lim} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \overline{\lim} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$ und damit auch $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. **q.e.d.**

(vii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge $\frac{n^n}{n!}$. Dann gilt $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Es gilt aber $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e}$. Dann folgt aus dem vorangehenden Satz $e \leq \underline{\lim} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ und $\frac{1}{e} \leq \underline{\lim} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. Daraus folgt dann: $e \leq \underline{\lim} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \leq \overline{\lim} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \leq e$ und dann auch $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \leq e$. **q.e.d.**

Kapitel 4

Reihen

4.1 Konvergenzkriterien

Definition 4.1. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Dann heißt die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$ die zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörende Reihe. Diese Folge bezeichnen wir mit $\left(\sum a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Wenn die Reihe $\left(\sum a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann bezeichnen wir den Grenzwert mit $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Analog definieren wir $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=m}^{n} a_j$.

Beispiel 4.2. **(i)** *Geometrische Reihe $\left(\sum q^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Für $q \neq 1$ hatten wir berechnet: $\sum\limits_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Dann folgt aus dem letzten Abschnitt*

$$\begin{aligned}
&\textit{Für } |q| < 1 \textit{ ist } \left(\sum q^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \textit{ konvergent:} && \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}. \\
&\textit{Für } |q| \geq 1 \textit{ ist } \left(\sum q^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \textit{ divergent.} && \\
&\textit{Für reelles } q \geq 1 \textit{ ist } \left(\sum q^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \textit{ divergent:} && \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty.
\end{aligned}$$

(ii) *Zeta Funktion $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ist der Grenzwert (wenn er existiert) der Reihe $\left(\sum \frac{1}{n^s}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Zunächst ist diese Reihe nur für alle rationalen Zahlen $s \in \mathbb{Q}$ definiert. Für $s = 1$ ist $\left(\sum \frac{1}{n^s}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.*

Beweis: Diese Reihe ist monoton wachsend. Also ist nur die Frage, ob sie beschränkt ist oder nicht. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt aber $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} \geq \frac{n}{2n} \geq \frac{1}{2}$. Also sind für alle $n \in \mathbb{N}_0$ jeweils die Summen $\sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{j} = 1 + \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{j} \geq 1 + \frac{n}{2}$. Dann gilt aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. **q.e.d.**

(iii) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist die Reihe $\left(\sum \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)} = \frac{1}{k\cdot k!}$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)} &= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{k} \frac{n+k-n}{n(n+1)\cdots(n+k)} \\
&= \frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n\cdots(n+k-1)} - \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n\cdots(n+k-1)}\right) \\
&= \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(m+1)\cdots(m+k)}\right)
\end{aligned}$$

Die Folge $\frac{1}{(m+1)\cdots(m+k)} \leq \frac{1}{m^k}$ konvergiert aber gegen Null. **q.e.d.**

Wenn wir das Cauchy-Kriterium und das Monotonieprinzip auf Reihen anwenden, so erhalten wir:

Satz 4.3. *(Cauchy–Kriterium für Reihen) Die Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein N gibt, so dass für alle $m \geq n \geq N$ gilt $\left|\sum\limits_{j=n}^{m} a_j\right| < \epsilon$.*

Satz 4.4. *(Monotonieprinzip für Reihen) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nicht negativen Zahlen. Dann konvergiert die Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn sie beschränkt ist. Für den Grenzwert gilt dann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{m} a_n$.* **q.e.d.**

Definition 4.5. *(absolut konvergent) Die Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $(\sum |a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.*

Satz 4.6. *Jede absolut konvergente Reihe konvergiert. Und es gilt* $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{m} |a_n|$.

Beweis: Aus der Dreieckungleichung folgt für alle $m \geq n$ $\left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| \leq \sum_{j=n}^{m} |a_j|$. Also ist die Reihe einer absolut konvergenten Reihe eine Cauchyfolge und konvergiert. Insbesondere gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $\left|\sum_{n=1}^{m} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{m} |a_n|$. Dann erfüllen auch die Grenzwerte $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. **q.e.d.**

Aus dem Monotonie-Prinzip und Satz 3.5 folgt das

Satz 4.7. *(Majoranten Kriterium) Die Folgen von nicht negativen Zahlen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *erfüllen für alle* $n \in \mathbb{N}$ $b_n \leq a_n$.

(i) *Wenn außerdem* $\left(\sum a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert, dann konvergiert auch* $\left(\sum b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(ii) *Wenn außerdem* $\left(\sum b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergiert, dann gilt* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$. **q.e.d.**

Beispiel 4.8. *Für alle* $n, k \in \mathbb{N}$ *ist* $\frac{1}{(n+k)^{k+1}} \leq \frac{1}{n\cdots(n+k)}$. *Also folgt aus der Konvergenz von* $\left(\sum \frac{1}{n\cdots(n+k)}\right)$ *auch die Konvergenz von* $\left(\sum \frac{1}{n^{k+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz 4.9. *(Wurzeltest) Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge und sei* $\alpha = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$.

(i) *Falls* $\alpha < 1$, *dann konvergiert* $\left(\sum a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *absolut.*

(ii) *Falls* $\alpha > 1$, *dann divergiert* $\left(\sum a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Im Fall $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ kann die Reihe $\left(\sum a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sowohl konvergent als auch divergent sein. So ist z.B. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}$. Aber die Reihe $\left(\sum \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, während die Reihe $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

Beweis:

(i) Sei $\alpha < 1$. Dann gibt es für jedes $\alpha < \beta < 1$ aufgrund von Satz 3.20 (i) ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta \Leftrightarrow |a_n| \leq \beta^n$. Weil aber $\left(\sum \beta^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert ist dann auch $\left(\sum a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut konvergent.

(ii) Sei $\alpha > 1$. Dann gibt es wieder aufgrund von Satz 3.20 (i) unendlich viele $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$. Also kann die Folge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen Null konvergieren. Dann ist aber die Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge, also divergent. **q.e.d.**

Satz 4.10. *(Exponentialfunktion:) Für alle $x \in \mathbb{K}$ definieren wir*

$$\exp(x) : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, x \mapsto \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Aufgrund des Beispiels (v) im letzten Kapitel ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$. Also gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x^n|}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

Deshalb konvergiert die Reihe $\left(\sum \frac{x^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ absolut.

Satz 4.11. *(Quotiententest) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und sei $\alpha = \overline{\lim}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.*

(i) *Falls $\alpha < 1$, dann konvergiert $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut.*

(ii) *Falls es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass alle $n \geq N$ auch $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ erfüllen, dann divergieren $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\sum |a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Beweis:

(i) Wegen der Ungleichung $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right|$ folgt (i) aus dem Wurzeltext.

(ii) Aus der Bedingung $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ folgt $|a_{n+1}| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \cdots \left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right| \cdot |a_N| \geq |a_N| > 0$. Also ist $|a_n|$ keine Nullfolge und deshalb ist wieder die Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge. **q.e.d.**

Satz 4.12.* *(Cauchy's Verdichtungssatz) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nicht negative monoton fallende Folge. Dann konvergiert die Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn die Reihe $(\sum 2^n a_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.*

Beweis*: Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ und $t_n = \sum_{j=0}^{n} 2^j a_{2^j}$. Wegen der Monotonie von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt für alle $j \in \mathbb{N}$:

$$a_{2^j} + a_{2^j+1} + \ldots + a_{2^{j+1}-1} \leq 2^j a_{2^j} \leq 2(a_{2^{j-1}+1} + a_{2^{j-1}+1} + a_{2^{j-1}+2} + \ldots + a_{2^j})$$

und für $j = 0$ gilt: $a_1 \leq a_1 \leq 2a_1$. Deshalb gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$s_{2^{n+1}-1} \leq t_n \leq 2s_{2^n}.$$

Also ist die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann nach oben beschränkt, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist. **q.e.d.**

Die Reihe $\left(\sum \frac{1}{n^s}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist für $s \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ genau dann konvergent, wenn die Reihe

$$\left(\sum \frac{2^n}{(2^n)^s}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum 2^{(1-s)\cdot n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergent ist, also genau dann, wenn $s > 1$. $\Rightarrow$ Für alle $s \in \mathbb{Q}$ mit $s > 1$ ist $\zeta(s)$ wohl definiert.

Satz 4.13. *(Alternierende Reihe von Leibniz) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert $\left(\sum(-1)^n a_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$*

Beweis: Sei für alle $n \in \mathbb{N}_0$ $s_n = \sum\limits_{m=0}^{n}(-1)^m a_n$. Dann folgt aus der Monotonie:

$$s_1 \leq s_3 \leq \ldots \leq s_{2n+1} \leq \ldots \leq s_{2n} \leq \ldots \leq s_2 \leq s_0.$$

Also ist die Folge $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt und die Folge $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend und beschränkt. Dann konvergieren aber beide Folgen und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = -\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n+1}a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$$

Also konvergiert die Reihe $\left(\sum(-1)^n a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **q.e.d.**

Damit ist also die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ konvergent, während sie nicht absolut konvergiert, weil $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$.

4.2 Dezimalbruchdarstellung von reellen Zahlen

Als Ziffern wählen wir $Z = \{0, 1, \ldots, 9\}$ (bzw. $\{0, 1, \ldots, p-1\}$). Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Werten in Z. Definiere die entsprechende Zahlenfolge $\left(\sum x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{z_n}{p^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\sum x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nach dem Majorantenkriterium absolut konvergent, weil $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{p-1}{p^n}} = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p-1}\right)\cdot\frac{1}{p} = \frac{1}{p}$. Also definiert $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ eine reelle Zahl. Sei jetzt M die Menge aller Folgen $M = \{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert nicht gegen } p-1\}$. Dann ist die Abbildung $M \to [0,1), (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z_n}{p^n}$ surjektiv und injektiv.

Bemerkung 4.14. *Wir hätten auch fordern können, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen Null konvergiert, so haben nämlich alle reellen Zahlen, deren Ziffernfolge gegen 0 konvergiert auch eine Dezimalbruchdarstellung, deren Ziffernfolge gegen 9 konvergiert, z.B.* $\frac{1}{2} = 0,5000\ldots = 0,4999\ldots$.

Surjektiv: Sei $x \in [0,1)$. Dann definieren wir $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induktiv, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{z_n}{p^n} \leq x - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{z_m}{p^m} < \frac{z_n+1}{p^n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \left[\frac{z_n}{p^n} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{z_m}{p^m}, \frac{z_n+1}{p^n} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{z_m}{p^m}\right)$$

gilt. Dann folgt aber auch $0 \leq x - \sum_{m=1}^{n} \frac{z_m}{p^m} < \frac{1}{p^n}$. Also gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{p^n} = x$. Weil aber für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^m} = \frac{p-1}{p^{n+1}\left(1-\frac{1}{p}\right)} = \frac{1}{p^n}$, gilt auch $\lim_{n\to\infty} z_n \neq p-1$.

Injektiv: Seien $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Ziffernfolgen, mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{p^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{p^n}$. Sei also $n \in \mathbb{N}$ der kleinste Index, so dass $z_n \neq w_n$. Weil aber gilt

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{|z_m - w_m|}{p^m} \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^m} = \frac{p-1}{p^{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p^m} = \frac{p-1}{p^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p^n},$$

muss auch $|z_n - w_n| \leq 1$ gelten. Sei also $z_n = w_n + 1$, dann muss für alle $m > n$ gelten $w_m - z_m = p - 1 \Rightarrow z_m = 0$ und $w_m = p - 1 \Rightarrow \lim_{m\to\infty} w_m = p - 1$. Also gehört $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht zu M. **q.e.d.**

4.3 Addition, Multiplikation,Umordnung

Aus dem Satz 3.5 folgt

Satz 4.15. *(Rechenregeln für Reihen) Die Reihen $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien konvergent, dann konvergieren auch die Reihen*

$$\left(\sum (a_n + b_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ und } \qquad \left(\sum \lambda a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{K}.$$ **q.e.d.**

Definition 4.16. *Gegeben seien die Reihen $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Dann heißt die Reihe $(\sum c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ das (Chauchy-)Produkt der beiden Reihen.*

Diese Definition kommt von den Potenzreihen, die wir später kennenlernen werden. Das Produkt der beiden Potenzreihen $(\sum a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\sum b_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist dann nämlich die Potenzreihe $(\sum c_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. wir haben alle Summanden des Produktes mit gleichen Potenzen zusammengefasst.

Satz 4.17. *(Konvergenz des Produktes) Wenn die Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut konvergiert und die Reihe $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert auch das Produkt $(\sum c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der beiden Reihen. Wenn auch $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut konvergiert, dann konvergiert auch $(\sum c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut.*

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$ und $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k$. Es gilt

$$\begin{aligned} C_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \ldots + (a_0b_n + \ldots + a_nb_0) \\ &= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \ldots + a_nB_0 \\ &= a_0(B - \beta_n) + a_1(B - \beta_{n-1}) + \ldots + a_n(B - \beta_0) \end{aligned}$$

Hierbei ist $B = \lim\limits_{n\to\infty} B_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ und $\beta_n = B - B_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} b_k$. Daraus ergibt sich

$$C_n = A_n \cdot B - (a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0).$$

Also genügt es zu zeigen, dass $a_0\beta_n + \ldots + a_n\beta_0$ im Grenzwert $n \to \infty$ gegen Null konvergiert. Aufgrund der Voraussetzungen gibt es positive Zahlen $\alpha, \beta > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$|\beta_n| \leq \beta \text{ und } \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \alpha$$

und für alle $\epsilon > 0$ natürliche Zahlen N, M, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|\beta_n| < \frac{\epsilon}{2\alpha}$ und für alle $n \geq M$ auch $|a_n| < \frac{\epsilon}{2N\beta}$. Dann gilt für alle $n \geq N + M - 1$:

$$\begin{aligned} |a_0\beta_n + \ldots + a_n\beta_0| &\leq |\beta_0 a_n + \ldots + \beta_{N-1}a_{n-N+1}| + |\beta_N a_{n-N} + \ldots + \beta_n a_0| \\ &< N\beta \cdot \frac{\epsilon}{2N\beta} + \frac{\epsilon}{2\alpha} \sum_{k=0}^{n-N} |a_k| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Also konvergiert das Produkt der Reihen $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wenn beide konvergieren und eine absolut konvergiert. Wenn beide Reihen absolut konvergieren, dann konvergiert auch das Produkt der Reihen $(\sum |a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\sum |b_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. Also ist auch das Produkt absolut konvergent. **q.e.d.**

Beispiel 4.18. *Das Quadrat der Reihe* $\left(\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ist nicht konvergent, obwohl die Reihe als Beispiel einer alternierenden Reihe nach Leibniz konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Die Koeffizienten des Quadrates sind gegeben durch:*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(-1)^{n-k}}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}$$

Es gilt aber $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} = 1$. *Also ist das Quadrat der Reihe keine Cauchyfolge.* **q.e.d.**

Satz 4.19. *(Eigenschaften der Exponentialfunktion)*

(i) *für alle* $x, y \in \mathbb{K}$ *gilt* $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

(ii) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $\exp(x) > 0$.

(iii) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *und alle* $r \in \mathbb{Q}$ *ist* $\exp(rx) = (\exp(x)^r)$.

(iv) *Für alle* $x \in \mathbb{C}$ *ist* $\exp(\bar{x}) = \overline{\exp(x)}$.

(v) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $|\exp(\imath x)| = 1$.

Die Zahl $\exp(1)$ *wird Eulersche Zahl genannt und mit* e *bezeichnet. Wegen (iii) gilt dann für alle* $r \in \mathbb{Q}$: $\exp(r) = \exp(r \cdot 1) = e^r$.

Beweis:

(i) Wir hatten schon gesehen, dass die Reihe $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für alle $x \in \mathbb{K}$ absolut konvergiert. Dann ist das Produkt von $\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!}$. Wegen der Binomischen Formel gilt aber

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Dann folgt $\exp(x)\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$.

(ii) Wegen (i) gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ $\exp(x) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0$. Wenn für ein $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) = 0$, dann folgt $1 = \exp(0) = \exp(-x) \cdot \exp(x) = 0$. Widerspruch.

(iii) Offenbar ist für alle $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$ $\left[\exp\left(\frac{x \cdot m}{n}\right)\right]^n = \exp(x \cdot m) = [\exp(x)]^m$. Also gilt auch wegen (ii) $\exp\left(\frac{xm}{n}\right) = [\exp(x)]^{\frac{m}{n}}$.

(iv) $\exp(\bar{x}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{x}^n}{n!} = \overline{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} = \overline{\exp(x)}$.

(v) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(\imath x)\overline{\exp(\imath x)} = \exp(\imath x)\exp(-\imath x) = 1$. **q.e.d.**

Wir können jetzt für jede Zahl $y > 0$, für die es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $y = \exp(x)$ gilt, und für jedes $z \in \mathbb{R}$ die Zahl $y^z = \exp(zx)$ definieren. Wir werden später sehen, dass wir so für alle $y > 0$ und alle $z \in \mathbb{R}$ y^z definieren können.

Definition 4.20. *(Umordnen von Reihen) Sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung von den natürlichen Zahlen auf sich selber. Dann heißt die Reihe $\left(\sum a_{\tau(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Umordnung der Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Analog könnten wir auch die Umordnung von Folgen bilden. Letztere sind aber weniger interessant, weil jede Umordnung einer konvergenten Folge wieder gegen den gleichen Grenzwert konvergiert (Übungsaufgabe). Dagegen gilt dies bei Reihen nicht.

Satz 4.21. *Konvergiert eine Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut, so konvergiert auch jede Umordnung $\left(\sum a_{\tau(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut. In diesem Fall gilt dann $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$.*

Beweis: Sei also τ eine gegebene bijektive Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Wenn $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut konvergent, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $N \leq n \leq m$ gilt: $\sum\limits_{k=n}^{m} |a_k| < \epsilon$. Dann gibt es aber auch ein $M = \max \tau^{-1}[\{1, \ldots, N\}] \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq M$ gilt $\tau(m) \geq N$. Dann folgt für alle $m \geq n \geq M$

$$\sum_{k=n}^{m} \left|a_{\tau(k)}\right| \leq \sum_{k=\min \tau[\{n,n+1,\ldots,m\}]}^{\max \tau[\{n,n+1,\ldots,m\}]} |a_k| < \epsilon.$$

Also ist $\left(\sum |a_{\tau(n)}|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und die Umordnung konvergiert absolut.

Dann konvergiert aber auch $\left(\sum a_{\tau(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Mit denselben N und M in Abhängigkeit von $\epsilon > 0$ gilt dann aber auch

$$\left|\sum_{k=1}^{M} a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{N} a_k\right| = \left|\sum_{k\in\tau[\{1,\ldots,M\}]\setminus\{1,\ldots,N\}} a_k\right| \leq \sum_{k=\min \tau[\{1,\ldots,M\}]\setminus\{1,\ldots,N\}}^{k=\max \tau[\{1,\ldots,M\}]\setminus\{1,\ldots,N\}} |a_k| < \epsilon.$$

Weil es aber für jedes $\epsilon > 0$ solche N und M gibt, folgt dann dass eine Teilfolge der Reihe $\left(\sum a_{\tau(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert der Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Weil die erste Reihe konvergiert, gilt dann $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\tau(n)}$. **q.e.d.**

Satz 4.22. *(Riemann) Sei $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Reihe, die nicht absolut konvergiert, und $\alpha \leq \beta$ zwei reelle Zahlen. Dann gibt es eine Unordnung $\left(\sum a_{\tau(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, die als Reihe beschränkt ist und für die α der Limes inferior der Reihe ist und β der Limes superior. Wenn $\alpha \neq \beta$ konvergiert die Reihe also nicht.*

Beweisskizze: Weil $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Wir betrachten im folgenden die beiden Teilfolgen aller nichtnegativen Elemente $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und aller negativen Elemente $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Schritt: Weil $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, divergieren die beiden Reihen $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\sum c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = -\infty$.

2. Schritt: Wir setzen die umgeordnete Folge abwechselnd jeweils der Reihe nach aus den Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zusammen. Immer wenn die Summe aller bisherigen Folgenglieder größer ist als β, dann fahren wir fort mit Folgengliedern aus c_n, und wenn die Summe aller bisherigen Folgenglieder kleiner ist als α, dann fahren wir fort mit Folgengliedern aus b_n. Wenn $0 \in [\alpha, \beta]$ starten wir mit Folgengliedern aus b_n.

3. Schritt: Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass alle Summen $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{\tau(k)}$ für alle $n \geq N$ in $(\alpha - \epsilon, \beta + \epsilon)$ liegen. Die Reihe $\left(\sum a_{\tau(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dieser Umordnung hat als Limes inferior α und als Limes superior β. Die Menge der Häufungspunkte dieser Reihe ist sogar gleich $[\alpha, \beta]$. **q.e.d.**

Definition 4.23. *Sei $(a_n)_{\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge, dann heißt $(\sum a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die entsprechende Potenzreihe mit Koeffizienten $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.*

Aus dem Wurzeltest folgt sofort

Satz 4.24. *(Konvergenzradius von Potenzreihen) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Koeffizienten der Potenzreihe $(\sum a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und sei $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ und $R = \frac{1}{\alpha}$ ($R = 0$ für $\alpha = \infty$ und $R = \infty$ für $\alpha = 0$).*

(i) *Für $|x| < R$ konvergiert $(\sum a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ absolut.*

(ii) *Für $|x| > R$ divergiert $(\sum a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.*

Wenn $\alpha < \infty$ *definiert also* $f : \{x \in \mathbb{K} \mid |x| < R\} \to \mathbb{K}, x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *eine Potenzreihenfunktion.* **q.e.d.**

Beispiel 4.25. **(i)** $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *also* $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}} = 0 \Rightarrow R = \infty$.

(ii) $\left(\sum x^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *also* $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow R = 1$. *Für* $|x| < 1 : \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

(iii) $\left(\sum \frac{x^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *also* $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1 \Rightarrow R = 1$. *Für* $|x| < 1$ *also konvergent, aber für* $x = 1$ *divergent und für* $x = -1$ *konvergent (alternierende Reihe von Leibniz).*

(iv) $\left(\sum \frac{x^n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *also* $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1 \Rightarrow R = 1$. *Für* $|x| < 1$ *also konvergent und für* $|x| > 1$ *divergent, aber für* $|x| = 1$ *auch konvergent.*

Satz 4.26. *(Eigenschaften von Potenzreihenfunktionen)*

(i) *Seien* $\left(\sum a_n x^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *und* $\left(\sum b_n x^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *Potenzreihen mit Konvergenzradius* R_1 *bzw.* R_2. *Dann konvergieren für* $|x| < \min\{R_1, R_2\}$ *die Summe* $\left(\sum (a_n + b_n) x^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *und das Cauchy-Produkt* $\left(\sum c_n x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *der beiden Potenzreihen und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right).$$

(ii) *Für alle* $r < R_1$ *gibt es ein* $M(r)$*, so dass für alle* $|x| \leq r$ *gilt* $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| \leq M(r)$.

(iii) *Für alle* $r < R_1$ *und für alle* $\epsilon > 0$ *gibt es ein* $N \in \mathbb{N}$*, so dass für alle* $|x| \leq r$ *gilt*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right| < \epsilon.$$

(iv) *Für alle* $r < R_1$ *gibt es ein* $L(r)$*, so dass für alle* x, y *mit* $|x| \leq r$ *und* $|y| \leq r$ *gilt*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n\right| \leq L(r)|x - y|.$$

Beweis:

(i) Folgt aus den Rechenregeln für Reihen und der Konvergenz des Cauchy Produktes.

(ii) Für $|x| \leq r$ gilt $\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = M(r) < \infty$.

(iii) Weil die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ absolut konvergiert gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass gilt $\sum\limits_{n=N}^{\infty} |a_n| r^n < \epsilon$. Dann folgt aber für $|x| \leq r$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n\right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| r^n < \epsilon.$$

(iv) $(x^n - y^n) = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$. Für $|x| \leq r$ und $|y| \leq r$ folgt also $|x^n - y^n| \leq |x-y| n r^{n-1}$. Weil aber gilt

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|} = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right) \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|},$$

haben die Reihen $\left(\sum a_n x^n\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $\left(\sum n \cdot a_n x^{n-1}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ den gleichen Konvergenzradius. Also gilt für $|x| \leq r$ und $|y| \leq r$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x^n - y^n| \leq |x-y| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot n r^{n-1}.$$

Wähle also $L(r) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} < \infty$. **q.e.d.**

Satz 4.27. *(Identitässatz für Potenzreihenfunktionen)*

(i) *Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, die nicht identisch verschwindet, dann gibt es ein $0 < r < R$, so dass die Potenzreihenfunktion in $\{x \in \mathbb{K} \mid |x| < r\}$ höchstens endlich viele Nullstellen $x_1, \ldots, x_N$ hat.*

(ii) *Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihenfunktion mit Konvergenzradius $R > 0$. Für alle x_0 mit $|x_0| < R$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist dann $b_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} a_{n+k} x_0^k < \infty$. Außerdem ist der Konvergenzradius der Potenzreihenfunktion $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ nicht kleiner als $R - |x_0|$ und für alle $|x| < R - |x|_0$ gilt auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x + x_0)^n$.*

(iii) *Seien* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *und* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *zwei Potenzreihenfunktionen, deren Konvergenzradien größer sind als* $r > 0$. *Falls* $\{x \in \mathbb{K} \mid |x| \leq r\}$ *unendliche viele verschiedene Elemente enthält, an denen die beiden Potenzreihenfunktionen übereinstimmen, dann gilt* $a_n = b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$, *d.h. sie stimmen als Potenzreihen überein.*

Beweis:

(i) Sei $N \in \mathbb{N}_0$ der kleinste Index, so dass $a_N \neq 0$. Wenn alle anderen Koeffizienten $(a_n)_{n>N}$ verschwinden, hat die Potenzreihe nur Nullstellen bei $x = 0$. Andernfalls gilt für alle $0 < r < R$ und alle $|x| \leq r$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_N x^N\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n||x|^n \leq |x|^{N+1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}|r^n\right).$$

Also gilt für alle Nullstellen x_m der Potenzreihenfunktionen

$$|a_N| \cdot |x_m|^N \leq |x_m|^{N+1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}|r^n\right).$$

Wenn $|x_m| \neq 0$ ist folgt daraus $|a_N| \leq |x_m|\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}|r^n\right)$. Also hat die Potenzreihenfunktion keine Nullstelle auf

$$\left\{x \in \mathbb{C} \,\middle|\, 0 < |x| < \min\left\{r, |a_N|\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}|r^n\right)^{-1}\right\}\right\}.$$

(ii) Für $x_0 = 0$ trivial. Sei $0 < |x_0| = r < R$. Dann ist für alle $0 < s < R - r$ die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+s)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_n \binom{n}{k} r^k s^{n-k} < \infty$$

absolut summierbar. Dann gilt aber auch für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$s^n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{k} r^k \leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} |a_n| \binom{n}{k} r^{n-k} s^k < \infty.$$

Also ist $b_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{n+k}\binom{n+k}{k} x_0^n < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen Satz 4.21 gilt für alle $N \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{n=0}^{N} s^n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{k} r^k \leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} |a_n| \binom{n}{k} r^{n-k} s^k < \infty.$$

Also ist auch
$$\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|s^n \leq \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|(r+s)^n < \infty.$$

Also ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ für alle $|x| < R-r$ konvergent, und der Konvergenzradius nicht kleiner als $R-r = R-|x_0|$. Für $|x| < R-|x_0|$ und alle $N, M \in \mathbb{N}_0$ gilt dann
$$\left|\sum_{n=0}^{N} x^n \sum_{k=0}^{M} a_{n+k}\binom{n+k}{k} x_0^k - \sum_{n=0}^{N+M} a_n(x+x_0)^n\right| \leq \sum_{n=\min\{N,M\}}^{N+M} |a_n|(|x|+|x_0|)^n.$$

Also folgt im Grenzwert $M \to \infty$
$$\left|\sum_{n=0}^{N} b_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(a_n(x+x_0)^n\right| \leq \sum_{n=N}^{\infty}|a_n|(|x|+|x_0|)^n < \infty.$$

und im Grenzwert $N \to \infty$ auch $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+x_0)^n = 0.$

(iii) Sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise verschiedenen Nullstellen der Potenzreihenfunktion $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)x^n$ in $\{x \in \mathbb{K} \mid |x| \leq r\}$. Dann hat die Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt x_0 mit $|x_0| \leq r$, und in jeder ϵ-Umgebung von x_0 gibt es unendlich viele verschiedene Folgenglieder. Sei R das Minimum der Konvergenzradien von $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Dann hat aufgrund der Voraussetzung und wegen (ii) die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)(y+x_0)^n$, als Potenzreihe in y mindestens den Konvergenzradius $R-r > 0$, und für alle $0 < \epsilon \leq R-r$ unendlich viele Nullstellen auf $\{y \in \mathbb{C} \mid |y| < \epsilon\}$. Also verschwindet wegen (i) diese Potenzreihe in y identisch. Dann stimmen wegen (ii) die beiden Potenzreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ auf dem Gebiet $\{x \in \mathbb{K} \mid |x-x_0| < R-r\}$ überein. Also gibt es auch eine Folge $(\tilde{x}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von paarweise verschiedenen Nullstellen von $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)x^n$, die gegen ein $\tilde{x}_0$ mit $|\tilde{x}_0| \leq \max\{r-(R-r), 0\} < r$ konvergiert. Induktiv folgt dann, dass dassselbe auch für $\tilde{x}_0 = 0$ gilt. Wegen (i) sind dann die beiden Potenzreihen $(\sum a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\sum b_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ identisch. **q.e.d.**

4.4 Sinus und Cosinus

Definition 4.28. *Für alle $x \in \mathbb{K}$ sei*

$$\cos(x) = \frac{\exp(\imath x) + \exp(-\imath x)}{2} \qquad \sin(x) = \frac{\exp(\imath x) - \exp(-\imath x)}{2i}$$

Also gilt für reelle x

$$\cos(x) = \Re(\exp(\imath x)) \qquad \sin(x) = \Im(\exp(\imath x))$$

und für alle $x \in \mathbb{K}$ die **Eulersche Formel**:

$$\exp(\imath x) = \cos(x) + \imath \sin(x).$$

Außerdem gilt für alle $x \in \mathbb{K}$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = \frac{\exp(2\imath x) + 2 + \exp(-2\imath x)}{4} - \frac{\exp(2\imath x) - 2 + \exp(-2\imath x)}{4} = 1,$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \text{ und} \qquad \sin(-x) = -\sin(x).$$

Satz 4.29. *(Additionstheorem) Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt:*

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)\end{aligned}$$

Beweis: $\exp(\imath(x+y)) = \exp(\imath x)\exp(\imath y)$.

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + \imath\sin(x+y) &= (\cos(x) + \imath\sin(x))(\cos(y) + \imath\sin(y))\\ &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + \imath(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)).\end{aligned}$$

Ersetzen wir x und y durch $-x$ und $-y$ und benutzen $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$, dann erhalten wir

$$\cos(x+y) - \imath\sin(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin y - \imath(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)).$$

Die Summe und die Differenz dieser beiden Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).\end{aligned}$$

q.e.d.

Durch Einsetzen von (x, y) und $(x, -y)$ erhalten wir für alle $x, y \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}2\cos(x)\cos(y) &= \cos(x+y) + \cos(x-y)\\ 2\sin(x)\sin(y) &= \cos(x-y) - \cos(x+y)\\ 2\sin(x)\cos(y) &= \sin(x+y) + \sin(x-y)\end{aligned}$$

Satz 4.30. *(Potenzreihen von Sinus und Cosinus)*

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad\qquad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1)!}$$

Beweis: Weil $\imath^2 = -1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ $\imath^{2n} = (-1)^n$ und $\imath^{2n+1} = \imath(-1)^n$. Also gilt auch für alle $x \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \frac{\exp(\imath x) + \exp(-\imath x)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{(\imath x)^n}{n!} + \frac{(-\imath x)^n}{n!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
\sin(x) &= \frac{\exp(\imath x) - \exp(-\imath x)}{2\imath} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\imath}\left(\frac{(\imath x)^n}{n!} - \frac{(-\imath x)^n}{n!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}
\end{aligned}$$

q.e.d.

Kapitel 5

Stetige Funktionen auf metrischen Räumen

5.1 Metrische Räume

Definition 5.1. *(Metrik auf einer Menge X) Eine Metrik (oder Distanzfunktion) ist eine Abbildung* $d : X \times X \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y)$ *mit drei Eigenschaften*

(i) $d(x, y) \geq 0$ *und* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(Positivität)*

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *(Symmetrie)*

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(Dreiecksungleichung)*

für alle $x, y, z \in X$.

Wegen der Dreiecksungleichung gilt

$$d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, y) \leq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)$$

Also gilt auch $d(x, y) - d(u, v) \leq d(x, u) + d(v, y)$. Durch yertauschen $(x, y) \leftrightarrow (u, v)$ und unter Benutzung der Symmetrie erhalten wir

$$d(u, v) - d(x, y) \leq d(x, u) + d(v, y) \Rightarrow |d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(v, y).$$

Wenn also x und u dicht beieinander liegen und y und v, dann ist der Abstand zwischen x und y ungefähr gleich dem Abstand zwischen u und v. (Stetigkeit der Metrik)

Beispiel 5.2. **(i)** *auf jeder Menge* X *definiert* $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$ *die sogenannte diskrete Metrik.*

(ii) *Auf* $\mathbb{R}$ *definiert* $d(x,y) = |x-y|$ *eine Metrik.*

(iii) *Auf* $\mathbb{C}$ *definiert* $d(x,y) = |x-y|$ *eine Metrik.*

(iv) *Auf jeder nicht leeren Teilmenge* $A \subset X$ *eines metrischen Raumes* (X,d) *definiert die Einschränkung von* d *auf* $A \times A \to \mathbb{R}$ *eine Metrik.*

(v) *Auf dem kartesischen Produkt zweier metrischer Räume definiert die Summe beider Metriken eine Metrik.*

(vi) *Die Einschränkung der Metrik (ii) auf die Vereinigung der inversen der natürlichen Zahlen mit* $\{0\}$ *definiert eine Metrik auf* $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\} \simeq \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$*:*

$$d(n,m) = \frac{|n-m|}{nm} \quad d(\infty,n) = d(n,\infty) = \frac{1}{n} \quad d(\infty,\infty) = 0 \quad \text{für alle } n,m \in \mathbb{N}.$$

Die Menge $V = \mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ aller reellen bzw. komplexen erfüllt mit $(x_1,\ldots,x_n) + (y_1,\ldots,y_n) = (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$ und $0 = (0,\ldots,0)$ die Axiome $A1$. Außerdem besitzt sie eine Skalarmultiplikation

$$\mathbb{R} \times V \to V \text{ bzw. } \mathbb{C} \times V \to V (\lambda,(x_1,\ldots,x_n)) \to \lambda \cdot (x_1,\ldots,x_n) = (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n).$$

Mit $(\lambda \cdot \mu) \cdot (x_1,\ldots,x_n) = \lambda(\mu \cdot (x_1,\ldots,x_n))$. Eine Menge mit Addition und Skalarmultiplikation heißt (reeller bzw. komplexer) Vektorraum.

Definition 5.3. *Eine Norm auf einem reellen bzw. komplexen Vektorraum* V *ist eine Abbildung* $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$ *mit folgenden 3 Eigenschaften:*

(i) $\|x\| \geq 0$ *und* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *für alle* $x \in V$

(ii) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ *für* $\lambda \in \mathbb{R}$ *bzw.* $\mathbb{C}$ *und* $x \in V$

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *für alle* $x,y \in V$

Satz 5.4. *Jede Norm definiert durch* $d : V \times V \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \|x-y\|$*eine Metrik.*

Beweis:

(i) folgt aus (i) der Definition einer Norm.

(ii) $d(y,x) = \|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |-1|\|x-y\| = \|x-y\| = d(x,y)$

(iii) $d(x,y) = \|x-y\| \leq \|x-z+(z-y)\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$.

q.e.d.

Definition 5.5. *(Euklidische Norm und Metrik) Auf* $\mathbb{R}^n$ *definiert*

$$\|(x_1,\ldots,x_n)\| = \sqrt{|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2} = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$$

die euklidische Norm die entsprechende Metrik heißt dann euklidische Metrik.

Die Eigenschaft (iii) heißt dabei Minkowski–Ungleichung:

$$\sqrt{(x_1+y_1)^2+\ldots+(x_n+y_n)^2} \le \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}+\sqrt{y_1^2+\ldots+y_n^2}.$$

Um diese zu beweisen zeigen wir zuerst die

Cauchy–Schwarz'sche Ungleichung 5.6.

$$|x_1y_1|+\ldots+|x_ny_n| \le \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\sqrt{y_1^2+\ldots+y_n^2}$$

Beweis: Wegen $|x_iy_i| = |x_i|\cdot|y_i|, x_i^2 = |x_i|^2$ und $y_i^2 = |y_i|^2$ genügt es offenbar

$$x_1y_1+\ldots+x_ny_n \le \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\sqrt{y_1^2+\ldots+y_n^2}$$

zu zeigen. Das ist aber äquivalent zu

$$(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2 \le (x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2).$$

Für $y=(y_1,\ldots,y_n)=0$ ist die Aussage trivial. Sei also $y\neq 0$.

$$\begin{aligned}
\left\|\|y\|x-\frac{x_1y_1+\ldots+x_ny_n}{\|y\|}y\right\|^2 &= \sum_{\imath=1}^n\left(\|y\|x_\imath-\frac{x_1y_1+\ldots+x_ny_n}{\|y\|}y_\imath\right)^2\\
=\sum_{\imath=1}^n\left(\|y\|^2x_\imath^2+\frac{(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2}{\|y\|^2}y_\imath^2-2(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)x_\imath y_\imath\right)&\\
=\|y\|^2\|x\|^2+\frac{(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2}{\|y\|^2}\|y\|^2-2(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2&\\
=\|y\|^2\|x\|^2-(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2.&
\end{aligned}$$

Also gilt $x_1y_1+\ldots+x_ny_n \le \|x\|^2\|y\|^2$. **q.e.d.**

Beweis der Minkowski Ungleichung:

$$\begin{aligned}
(x_1+y_1)^2+\ldots+(x_n+y_n)^2 &\le \|x\|^2+\|y\|^2+2(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)\\
&\le \|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\cdot\|y\| \le \|x\|+\|y\|^2.
\end{aligned}$$

q.e.d.

Analog definiert $\|(x_1,\ldots,x_n)\| = \sqrt{x_1\bar{x}_1+\ldots+x_n\bar{x}_n}$ eine Norm auf $\mathbb{C}^n$. Identifizieren wir die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ (Realteil und Imaginärteil), dann ist $\mathbb{C}^n \simeq (\mathbb{R}^2)^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$.

Übungsaufgabe 5.7. *Die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^{2n}$ induziert durch diese Identifikation auf $\mathbb{C}^n$ die Norm $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1\bar{x}_1 + \ldots + x_n\bar{x}_n}$.*

Definition 5.8. *(offene Kugel, Umgebung, offene Menge) Eine offene Kugel in (X, d) mit Zentrum $x \in X$ und Radius $r > 0$ ist die Menge $B(x, r) = \{y \in X | d(x, y) < r\}$. Eine Umgebung eines Punktes $x \in X$ ist eine Menge $O \subset X$, die eine Kugel $B(x, r)$ mit einem beliebigen $r > 0$ enthält. Eine offene Menge $O \subset X$ ist eine Teilmenge, die eine Umgebung aller ihrer Punkte ist, d.h. für alle $x \in O$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $B(x, \epsilon) \subset O$.*

Beispiel 5.9. *In $\mathbb{R}$ besteht die Kugel $B(x, r)$ aus dem Intervall $(x - r, x + r)$. Im $\mathbb{R}^n$ besteht die Kugel $B(x, r)$ aus allen Punkten, deren euklidischer Abstand zu x kleiner ist als r.*

Alle offenen Kugeln $B(x, r)$ sind offenbar Umgebungen von x. Sei $y \in B(x, r)$. Dann ist $d(x, y) < r$. Sei $z \in B(y, r - d(x, y))$. Dann gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < r$. Also gilt auch $B(y, r - d(x, y)) \subset B(x, r)$. Deshalb ist sind die offenen Kugeln tatsächlich offene Mengen.

Offenbar ist die beliebige Vereinigung von offenen Mengen wieder offen. Seien O und O' zwei offene Mengen und $x \subset O \cap O'$. Dann gibt es $r > 0$ und $r' > 0$ so dass $B(x, r) \subset O$ und $B(x, r') \subset O'$. Also ist $B(x, \min\{r, r'\}) \subset B(x, r) \cap B(x, r') \subset O \cap O'$. Also ist $O \cap O'$ offen. Damit ist auch die Schnittmenge von endlich vielen offenen Mengen wieder offen.

Definition 5.10. *(abgeschlossene Mengen, Abschluss) Die Komplemente von offenen heißen abgeschlossen. Der Abschluss $\bar{A}$ eine Menge A ist die Schnittmenge aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten.*

Wegen der Regel von de Morgan, sind beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen. Deshalb ist der Abschluss einer beliebigen Menge wieder abgeschlossen und der Abschluss einer abgeschlossenen Menge gleich der Menge. Offenbar gehört ein Punkt x genau dann zu dem Abschluss $\bar{A}$, wenn alle offenen Mengen, die x enthalten, einen nicht leeren Schnitt mit A haben. Dies ist wiederum äquivalent dazu, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element a_n in der Kugel $B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ gibt, oder auch dazu, dass es eine Folge in A gibt, die gegen x konvergiert. Damit haben wir gezeigt:

Lemma 5.11. *Der Abschluss einer Teilmenge eines metrischen Raumes besteht aus allen Grenzwerten von Folgen innerhalb der Teilmenge. Und eine Teilmenge ist genau dann abgeschlossen, wenn die Grenzwerte von allen konvergenten Folgen in der Teilmenge auch zu der Menge gehören.* **q.e.d.**

5.2 Vollständigkeit und Kompaktheit

Zunächst verallgemeinern wir einige Aussagen über Zahlenfolge auf allgemeine Folgen in metrischen Räumen.

Definition 5.12. *(Folgen und Cauchyfolgen) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X,d) ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach X, mit $n \mapsto x_n$. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X,d) konvergiert gegen $x \in X$, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt $d(x_n,x) < \epsilon$.*
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n,m \geq N$ gilt $d(x_n,x_m) < \epsilon$.

Wenn die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n,m \geq N$ gilt $d(x_n,x) < \frac{\epsilon}{2}$ und $d(x_m,x) < \frac{\epsilon}{2}$. Dann gilt aber auch $d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x) + d(x,x_m) < \epsilon$. Damit haben wir gezeigt:

Satz 5.13. *In einem metrischen Raum (X,d) ist jede konvergente Folge eine Cauchyfolge.* **q.e.d.**

Definition 5.14. *Ein metrischer Raum (X,d) heißt vollständig, wenn auch jede Cauchyfolge konvergiert.*

Wegen dem Vollstänidkgietsaxiom sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ vollständige metrische Räume. Wegen Lemma 5.11 ist jede abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrsischen Raumes wieder ein vollständiger metrischer Raum.

Übungsaufgabe 5.15. *Zeige in mehereren Schritten, dass sich jeder metrische Raum (X,d) auf eindeutige Weise vervollständigen läßt.*

(i) *Auf dem Raum aller Cauchyfolgen in (X,d) ist die Relation*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \textit{die reelle Folge } (d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}} \textit{ konvergiert gegen Null.}$$

eine Äquivalenzrelation ist. Die Menge der entsprechenden Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $\tilde{X}$.

(ii) *Für Cauchyfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert der Grenzwert $\tilde{d}((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$ und hängt nur von den Äquivalenzklassen der Cauchyfolgen ab.*

(iii) *Die entsprechende Abbildung $\tilde{d} : \tilde{X} \times \tilde{X} \to \mathbb{R}$ definiert eine Metrik.*

(iv) *$(\tilde{X},\tilde{d})$ ist ein vollständiger metrischer Raum ist.*

(v) *Die konstanten Folgen definieren eine isometrische (mit beiden Metriken verträgliche) Abbildung $X \to \tilde{X}$, und das Bild dieser Abbildung liegt dicht in $\tilde{X}$ (d.h. der Abschluss von dem Bild ist gleich $\tilde{X}$).*

Weil jede reelle Zahl der Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen ist, sind die reellen Zahlen die Vervollständigung des metrischen Raums der rationalen Zahlen. Anstelle unserer axiomatischen Charakterisierung der reellen Zahlen können wir also die reellen Zahlen auch aus den rationalen Zahlen konstruieren als Äquivalenzklassen von rationalen Cauchyfolgen.

Definition 5.16. *(kompakt) Eine Teilmenge der offenen Mengen von (X, d), die X überdeckt, (d.h. jedes Element von X ist in mindestens einer der offenen Mengen enthalten) heißt offene Überdeckung von X. Der metrische Raum heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*

Satz 5.17. *Für einen metrischen Raum (X, d) sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *(X, d) ist kompakt.*

(ii) *Jede Folge in (X, d) besitzt eine konvergente Teilfolge.*

(iii) *(X, d) ist vollständig und für jedes $\epsilon > 0$ besitzt (X, d) eine endliche Überdeckung mit offenen Kugeln vom Radius ϵ.*

Beweis: (i)⇒(ii): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge ohne Häufungspunkt. Dann sind für alle $n \in \mathbb{N}$ die Mengen $F_n = \{x_m | m \geq n\}$ abgeschlossen, weil der Abschluss von jedem F_n gerade aus der Vereinigung von F_n mit den Häufungspunkten von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besteht. Weil aber der Schnitt $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ nur aus Häufungspunkten von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestehen kann, bilden die Mengen $(X \setminus F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von X. Offenbar ist aber der Schnitt von endlich vielen Mengen der Mengen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht leer. Also besitzt die Überdeckung $(X \setminus F_N)_{n\in\mathbb{N}}$ keine endliche Teilüberdeckung.

(ii)⇒(iii): Sei also (X, d) ein metrischer Raum, der (ii) erfüllt. Dann besitzt aber jede Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt x. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$, so dass alle $m, n \geq N$ auch $d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$ erfüllen. Weil x ein Häufungspunkt ist, gibt es aber ein $m \geq N$, so dass $d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2}$ gilt. Also gilt für alle $n \geq N$ auch

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, x) < \epsilon.$$

Also konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x und damit ist (X, d) vollständig. Sei $\epsilon > 0$ so gewählt, dass es keine endliche Überdeckung von X mit Kugeln vom Radius ϵ gibt. Dann können wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ induktiv so definieren, dass $x_{m+1} \in$

$X \setminus \bigcup_{m=1}^{n} B(x_m, \epsilon)$. Die Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ erfüllt also für alle $n \neq m \in \mathbb{N}$ $d(x_n, x_m) \geq \epsilon$. Also besitzt sie keine Teilfolge, die eine Cauchyfolge ist, und damit auch keinen Häufungspunkt.

(iii)⇒(i): Wir nehmen an (X, d) erfüllt Bedingung (iii) und $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ sei eine Überdeckung von (X, d), die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Dann definieren wir induktiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass die Kugeln $B(x_n, 2^{-n})$ keine endliche Teilüberdeckung von $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ besitzen und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Kugeln $B(x_{n+1}, 2^{-(n+1)})$ und $B(x_n, 2^{-n})$ nicht disjunkt sind. Weil nämlich (X, d) eine endliche Überdeckung von Kugeln vom Radius $2^{-(n+1)}$ besitzt, und weil $B(x_n, 2^{-n})$ keine endliche Teilüberdeckung von $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ besitzt, gibt es mindestens eine Kugel vom Radius $2^{-(n+1)}$, die nichtleeren Schnitt mit $B(x_n, 2^{-n})$ hat und keine endliche Teilüberdeckung von $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ besitzt. Weil aber

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{2}{2^n} \text{ und } \qquad \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2^{-n+1},$$

ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Der Grenzwert gehört dann zu einer Menge $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$, und es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass $B(x, \epsilon) \subset U_\lambda$. Für genügend großes m ist dann $\frac{1}{2^{m-2}} \leq \epsilon$, und damit auch

$$B(x_m, 2^{-m}) \subset B(x, 2^{-m+2}) \subset B(x, \epsilon).$$

Also besitzt eine Kugel $B(x_m, 2^{-m})$ eine endliche Teilüberdeckung von $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$. Widerspruch. **q.e.d.**

Dieser Satz hat einige wichtige Folgerungen:

Korollar 5.18. **(i)** *Kompakte Mengen eines metrischen Raums sind abgeschlossen.*

(ii) *Abgeschlossene Teilmengen einer kompakten Menge sind wieder kompakt.*

Beweis:

(i) Kompakte Mengen sind vollständig, und stimmen mit ihrem Abschluss überein.

(ii) Abgeschlossene Teilmengen einer kompakten Menge erfüllen offenbar wieder die Bedingung (ii) des vorangehenden Satzes. **q.e.d.**

Definition 5.19. *Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) heißt beschränkt, wenn für ein $x \in X$, die Menge der Abstände $\{d(x, y) | y \in A\}$ beschränkt ist.*

Wegen der Dreiecksungleichung ist diese Bedingung äquivalent dazu, dass für alle $x \in X$ die Menge der Abstände $\{d(x, y) | y \in A\}$ beschränkt sind, aber nicht uniform in $x \in X$.

Satz 5.20. *(Heine–Borel) Eine Teilmenge A des metrischen Raumes $(\mathbb{R}^n, d)$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis: Offenbar gilt für alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} \leq \|x\| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

Deshalb sind für eine Folge in einer beschränkten Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ alle entsprechenden Koordinatenfolgen beschränkt und besitzen konvergente Teilfolgen. Dann besitzt auch die Folge in A eine konvergente Teilfolge. Also erfüllt eine abeschlossene beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ die Bedingung (ii) von Satz 5.17. Umgekehrt enthält eine unbeschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass für alle $x \in X$ die Folge $d(x, x_n)$ gegen ∞ konvergiert. Eine solche Folge kann keinen Häufungspunkt haben. **q.e.d.**

Beispiel 5.21. **(i)** *Die Intervalle $[a, b]$ sind kompakt. Weil jede beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ eine Folge enthält, die gegen das Supremum bzw. Infimum der Menge konvergiert, enthält jede kompakte Menge auch das Supremum und Infimum und besitzt damit ein Minimum und ein Maximum.*

(ii) *$\bar{\mathbb{N}}$ aus Beispiel (vi) ist kompakt.*

(iii) *Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert a. Dann ist $\{a\} \cup \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ kompakt.*

5.3 Stetigkeit

Definition 5.22. *Eine Abbildung $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ von einem metrischen Raum (X, d) in den metrischen Raum (Y, d) heißt stetig in dem Punkt $x \in X$, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass alle $y \in X$, die $d(x, y) < \delta$ erüllen, auch $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ erfüllen. Die Abbildung f heißt stetig, wenn sie in allen Punkten von X stetig ist.*

Stetig im Punkt x heißt also, dass alle Punkte, die sehr nahe bei x liegen, auf Werte abgebildet werden, die sehr nahe bei $f(x)$ liegen.

Satz 5.23. *Für eine Abbildung $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ zwischen den metrischen Räumen (X, d) und (Y, d) ist folgendes äquivalent:*

(i) *f ist stetig in x.*

(ii) *Das Urbild jeder Umgebung von $f(x)$ ist eine Umgebung von x.*

(iii) *Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X,d), die gegen x konvergiert, konvergiert auch die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$.*

Beweis: (i)$\Leftrightarrow$(ii): Die Umgebungen von x sind gerade die Mengen, die eine δ-Kugel um x enthalten. Also ist (ii) äquivalent zu der Aussage, dass das Urbild jeder ϵ-Kugel um $f(x)$ eine δ-Kugel um x enthält. Diese Aussage ist nur eine Umformulierung von (i).
(ii)$\Leftrightarrow$(iii): Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren genau dann gegen x bzw. $f(x)$, wenn jede Umgebung von x bzw. $f(x)$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthält. Wenn also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert und f (ii) erfüllt, dann konvergiert also auch $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$. Also folgt aus (ii) auch (iii). Wenn es umgekehrt eine ϵ-Kugel von $f(x)$ gibt, deren Urbild keine δ-Kugel von x enthält, dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right)$, so dass die Folge der entsprechenden Werte $f(x_n)$ im Komplement dieser ϵ-Kugel von $f(x)$ liegt: $f(x_n) \not\in B(f(x), \epsilon)$. Also konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x aber $f(x_n)$ nicht gegen $f(x)$. **q.e.d.**

Korollar 5.24. *Für eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen den metrischen Räumen (X,d) und (Y,d) ist folgendes äquivalent:*

(i) *f ist stetig.*

(ii) *Das Bild $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ jeder konvergenten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

(iii) *Das Urbild jeder offenen Menge ist offen.*

(iv) *Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen.*

Beweis: Wegen dem vorangehenden Satz ist (i) und (ii) äquivalent. Weil eine Menge genau dann offen ist, wenn sie eine Umgebung von allen ihren Punkten ist, zeigt der vorangehende Satz, dass aus (i) bzw. (ii) auch (iii) folgt. Weil jede Umgebung eines Punktes auch eine offene Umgebung des Punktes enthält, folgt wieder wegen dem vorangehenden Satz aus (iii) auch (i) bzw. (ii). Weil nun die abgeschlossenen Mengen gerade die Komplemente der offenen Mengen sind und das Urbild eines Komplementes gerade gleich dem Komplement des Urbildes ist, ist (iii) zu (iv) äquivalent. **q.e.d.**

Korollar 5.25. *Die Komposition zweier stetiger Abbildungen ist stetig. Die analoge punktweise Aussage gilt auch.*

Beweis: Benutze die Äquivalenz zwischen (i) und (iii) im vorangehenden Korollar und die Gleichung

$$(f \circ g)^{-1}[A] = g^{-1}[f^{-1}[A]].$$

Korollar 5.26. *Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung ist kompakt.*

Beweis: Sei $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ eine stetige Abbildung und $A \subset X$ eine kompakte Menge. Dann ist das Urbild einer beliebig offenen Überdeckung von dem Bild

$$f[A] = \{y \in Y | \exists x \in A \text{ mit } f(x) = y\}$$

eine offene Überdeckung von A. Diese besitzt, wenn A kompakt ist, eine endliche Teilüberdeckung. Also besitzt jede offene Überdeckung von $f[A]$ eine endliche Teilüberdeckung und $f[A]$ ist kompakt. **q.e.d.**

Korollar 5.27. *Sei f eine bijektive stetige Abbildung von einem kompakten metrischen Raum (X, d) auf einen metrischen Raum (Y, d). Dann ist die Umkehrabbildung stetig.*

Beweis: Wegen dem vorangehenden Korollar ist das Bild $f[X] = Y$ kompakt. Weil aber wegen Korollar 5.17 eine Teilmenge eines kompakten metrischen Raumes genau dann abgeschlossen ist, wenn sie kompakt ist, folgt die Aussage aus dem vorangehenden Korollar und der Charakterisierung (iv) im Korollar über stetige Abbildungen. **q.e.d.**

Beispiel 5.28. **(i)** *Auf jedem metrischen Raum ist die identische Abbildung id_X stetig.*

(ii) *Die konstante Abbildung, die alle $x \in X$ auf einen Punkt y abbildet ist stetig.*

(iii) *Mit der entsprechenden Metrik auf $X \times X$ ist $d : X \times X \to \mathbb{R}$ stetig.*

(iv) *Aus den Rechenregeln für Folgen folgt, dass die Abbildungen*

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto x + y \qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto x \cdot y$$

stetig sind. Das gilt auch für die Abbildungen

$$- : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, x \mapsto -x \text{ und } \qquad {}^{-1} : \mathbb{K} \setminus \{0\} \to \mathbb{K} \setminus \{0\}, x \mapsto x^{-1}.$$

(v) *Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ läßt sich genau dann zu einer stetigen Abbildung von $\bar{\mathbb{N}}$ nach $\mathbb{K}$ fortsetzten, wenn sie konvergiert. ∞ wird dann auf $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ abgebildet.*

Definition 5.29. *(Gleichmässige Stetigkeit, Lipschitz–Stetigkeit) Eine Abbildung $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ zwischen metrischen Räumen heißt gleichmäßig stetig auf einer Teilmenge $A \subset X$,wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in A$ mit $d(x, y) < \delta$ auch $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ gilt.*
Die Abbildung heißt Lipschitzstetig auf A, wenn es eine Konstante $L > 0$(Lipschitz-Konstante) gibt, so dass für alle $x, y \in A$ gilt $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$. Offenbar ist jede Lipschitzstetige Abbildung auch gleichmäßig stetig und jede gleichmäßig stetige Abbildung auch stetig. Es gilt auch folgende Umkehrung:

Satz 5.30. *Sei $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann ist f auf jeder kompakten Menge A auch gleichmäßig stetig.*

Auf kompakten Mengen ist also eine Abbildung genau dann stetig, wenn sie gleichmäßig stetig ist.

Beweis: Sei also $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ stetig und $A \subset X$ kompakt. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $x \in A$ ein $\delta(x)$, so dass aus $d(x, y) < \delta(x)$ auch $d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$ folgt. Wir wählen also eine endliche Teilüberdeckung von der offenen Überdeckung $\{B(x, \delta(x)/2) | x \in A\}$ von A. Sei δ das Minimum der Radien dieser endlichen Teilüberdeckung. Dann gibt es für alle $y, z \in A$ mit $d(y, z) < \delta$ eine Kugel $B(x, \delta(x)/2)$ der endlichen Teilüberdeckung mit $y \in B(x, \delta(x)/2)$. Dann folgt

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{\delta(x)}{2} + \frac{\delta(x)}{2} = \delta(x).$$

Also gilt $y, z \in B(x, \delta(x))$. Dann folgt aber

$$d(f(y), f(z)) \leq d(f(x), f(y)) + d(f(x), f(z)) < \epsilon.$$

Also ist f gleichmäßig stetig. **q.e.d.**

Zum Abschluss dieses Abschnittes beweisen wir einen der wichtigsten Sätze der Analysis:

Banachscher Fixpunktsatz 5.31. *Sei $f : X \to X$ eine Lipschitzstetige Abbildung eines vollständigen metrischen Raumes auf sich selber mit Lipschitz-Konstante $L < 1$. Dann hat f genau einen Fixpunkt: $x \in X$ mit $f(x) = x$.*

Beweis: Sei $x_0 \in X$ beliebig und für alle $n \in \mathbb{N}$ x_n induktiv definiert durch $x_n = f(x_{n-1})$. Dann gilt

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq Ld(x_{n-1}, x_n) \leq L^n d(x_0, x_1).$$

Mit der Dreieckungleichung folgt dann für $n \leq m$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq (L^n + \ldots + L^{m-1}) d(x_0, x_1) \\ &= L^n \frac{1 - L^{m-n}}{1 - L} d(x_0, x_1) \leq \frac{L^n}{1 - L} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Also ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und es existiert $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Aus der Stetigkeit von f folgt dann $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} x_{n+1} = x$. Also ist x ein Fixpunkt. Ist $y \in X$ ein zweiter Fixpunkt, so gilt $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y)$. Wegen $0 \leq L < 1$ folgt dann $(1 - L)d(x, y) \leq 0$ oder auch $d(x, y) = 0$. Also gilt $x = y$. **q.e.d.**

5.4 Stetige Funktionen

In diesem Abschnitt sei (X, d) ein metrischer Raum und $(\mathbb{K}, d)$ entweder der Körper der reellen oder der komplexen Zahlen mit den entsprechenden Metriken. Zunächst betrachten wir die Menge aller $\mathbb{K}$-wertigen (nicht unbedingt stetigen) Funktionen auf X. Solche Funktionen f, g können wir punktweise miteinander addieren und multiplizieren und wir können sie mit Elementen $\lambda \in \mathbb{K}$ multiplizieren:

$$\begin{aligned} f+g :& X \to \mathbb{K}, & x \mapsto & f(x)+g(x), & f \cdot g :& X \to \mathbb{K}, & x \mapsto & f(x) \cdot g(x), \\ \lambda f :& X \to \mathbb{K}, & x \mapsto & \lambda f(x). \end{aligned}$$

Die Addition erfüllt offenbar die Axiome $A1$ und die Multiplikation die Axiome $A2$, bis auf die Existenz der Inversen. Das Inverse einer Funktion f existiert offenbar nur, wenn $f(x) \neq 0$ für alle $x \in X$. Indem wir die Elemente von $\mathbb{K}$ mit den entsprechenden konstanten Funktionen auf X identifizieren, wird die Multiplikation mit Elementen von $\mathbb{K}$ zu einem Spezialfall der Multiplikation von Funktionen. Der Raum aller Funktionen von X nach $\mathbb{K}$ wird dadurch zu einer Algebra.

Definition 5.32. *Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf der Menge X heißt*

punktweise konvergent, *wenn die Folgen $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in X$ konvergieren. Die Grenzwerte definieren wieder eine Funktion $f : x \to \mathbb{K}, x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.*

gleichmäßig konvergent, *wenn es eine Funktion $f : X \to \mathbb{K}, x \mapsto f(x)$ gibt, und für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$ und $x \in X$ auch gilt $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.*

Offenbar ist jede gleichmäßige konvergente Folge (f_n) auch punktweise konvergent, aber nicht umgekehrt.

Beispiel 5.33. *Die Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ konvergiert wegen Satz 3.4 punktweise gegen die Funktion*

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1) \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt aber $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1$. Also konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig gegen f.

Definition 5.34. *Eine Funktion $f : X \to \mathbb{K}, x \mapsto f(x)$ heißt beschränkt, wenn das Bild $f[X]$ eine beschränkte Menge ist. $B_{\mathbb{K}}(X)$, bezeichne die Menge aller beschränkten Funktionen auf X. Auf $B_{\mathbb{K}}(X) \| \cdot \|_\infty$ bezeichne folgende Abbildung auf $B_{\mathbb{K}}(X)$:*

$$\| \cdot \|_\infty : B_{\mathbb{K}}(X) \to \mathbb{R}, f \to \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Satz 5.35. *Es gilt*

(i) $B_{\mathbb{K}}(X)$ *ist eine Unteralgebra aller Funktionen von* X *nach* $\mathbb{K}$.

(ii) $\|\cdot\|_\infty$ *ist eine Norm auf dem* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $B_{\mathbb{K}}(X)$.

(iii) $d : B_{\mathbb{K}}(X) \times B_{\mathbb{K}}(X) \to \mathbb{R}, (f,g) \mapsto d(f,g) = \|f-g\|_\infty$ *ist eine Metrik auf* $B_{\mathbb{K}}(X)$.

(iv) $(B_{\mathbb{K}}(X), d)$ *ist ein vollständiger metrischer Raum.*

Beweis:

(i) Für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt $|\lambda + \mu| \leq |\lambda| + |\mu|$ und $|\lambda \cdot \mu| = |\lambda| \cdot |\mu|$ Dann folgt auch $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ und $\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$. Damit ist die Summe und das Produkt zweier beschränkter Funktionen wieder beschränkt.

(ii) folgt daraus, dass $|\cdot|$ eine Norm auf $\mathbb{K}$ ist.

(iii) folgt aus (ii) genau wie bei $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

(iv) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $B_{\mathbb{K}}(x)$. Für alle $\epsilon > 0$ gibt es also ein N, so dass für alle $n, m \geq N$ und alle $x \in X$ gilt

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dann sind für alle $x \in X$ die Folgen $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen. Also konvergieren sie punktweise gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{K}, x \mapsto f(x)$. Weil auch die Folge $\|f_n\|_\infty$ eine Cauchyfolge ist und jede Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ beschränkt ist, ist dann auch $\|f\|_\infty \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty$ beschränkt. Für alle $\epsilon > 0$ und alle $x \in X$ gibt es also ein $N(x) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq N(x)$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Damit folgt für $n \geq N$ und $m \geq \max\{N, N(x)\}$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßIg gegen f. **q.e.d.**

Definition 5.36. $C_{\mathbb{K}}(X)$ *sei der Unterraum von* $B_{\mathbb{K}}(X)$ *aller stetigen und beschränkten Funktionen von* X *nach* $\mathbb{K}$.

Satz 5.37. *Es gilt*

(i) *Der Raum aller stetigen Funktionen von* X *nach* $\mathbb{K}$ *ist eine Unteralgebra aller Funktionen von* X *nach* $\mathbb{K}$. *Das Inverse einer nicht verschwindenden stetigen Funktion von* X *nach* $\mathbb{K}$ *ist wieder stetig.*

(ii) *$C_{\mathbb{K}}(X)$ ist eine Unteralgebra von $B_{\mathbb{K}}(X)$.*

(iii) *$C_{\mathbb{K}}(X)$ ist abgeschlossen in $B_{\mathbb{K}}(X)$ und deshalb vollständig.*

Beweis:

(i) Wegen Korollar 5.24 folgt (i) aus den Rechenregeln für konvergente Folgen.

(ii) Folgt aus (i) und dem vorangehenden Satz.

(iii) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $C_{\mathbb{K}}(x)$. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $B_{\mathbb{K}}(x)$. Wir müssen zeigen, dass der Grenzwert f stetig ist. Sei $x \in X$. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}$. Weil f_n stetig ist gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $y \in B(x,\delta)$ auch $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3}$ gilt. Dann folgt aber auch

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y) \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &< \epsilon. \qquad \text{Also ist } f \text{ stetig.}\end{aligned}$$

q.e.d.

Wichtig in dem Beweis war, dass die Folge f_n in x gleichmäßig gegen f konvergiert und nicht nur punktweise. Auf $[0,1]$ konvergieren die Funktionen $x \mapsto x^n$ gegen die unstetige Funktion $x \to \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1) \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$

Satz 5.38. *Alle stetigen Funktionen auf einem kompakten metrischen Raum sind beschränkt. Das Bild einer reellen stetigen Funktion auf einem kompakten metrischen Raum besitzt ein Minimum und ein Maximum.*

Beweis: Sei (X,d) kompakt und $f : X \to \mathbb{K}, x \mapsto f(x)$ stetig. Dann ist $f[X]$ kompakt und damit auch beschränkt. Die kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind aber gerade die beschränkten und abgeschlossenen Teilmengen. Weil für jede beschränkte nicht leere Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\sup A + \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von A ist und $\inf A + \frac{1}{n}$ keine untere Schranke von A ist gibt es ein

$$a_n \in (\sup A - \frac{1}{n}, \sup A] \cap A \text{ und ein } b_n \in [\inf A, \inf A - \frac{1}{n}) \cap A.$$

Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren dann gegen $\sup A$ bzw. $\inf A$. Also liegen $\sup A$ und $\inf A$ im Abschluss von A. Deshalb enthält jede nicht leere kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Minimum und ein Maximum. **q.e.d.**

Dieser Satz hat viele Anwendungen. Wir werden aus ihm den Fundamentalsatz der Algebra folgern. Zum Abschluss wollen wir folgenden Satz beweisen:

Satz 5.39.* *(Satz von Stone–Weierstraß) Sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum und $A \subset C_{\mathbb{R}}(X)$ eine Unteralgebra, die die konstanten Funktionen enthält und die Punkte trennt, d.h. für alle $x \neq y \in X$ gibt es ein $f \in A$, so dass $f(x) \neq f(y)$. Dann ist der Abschluss von A gleich $C_{\mathbb{R}}(X)$.*

Lemma 5.40.* *Auf dem Intervall $[0,1]$ konvergiert die induktiv definierte Folge von Polynomen $p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x - p_n^2(x))$ mit $p_0 = 0$, gleichmäßig gegen die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$.*

Beweis*: Wir zeigen zunächst mit vollständiger Induktion, dass $0 \leq p_n(x)$ und $0 \leq p_n^2(x) \leq x$ für $x \in [0,1]$ gilt. Beides ist für $p_0 = 0$ offensichtlich.

$$\begin{aligned}
x - p_{n+1}^2(x) &= x - p_n^2(x) - p_n(x)\left(x - p_n^2(x)\right) - \frac{1}{4}\left(x - p_n^2(x)\right)^2 \\
&= (x - p_n^2(x))\left(1 - p_n(x) - \frac{1}{4}(x - p_n^2(x))\right) \\
&= (x - p_n^2(x))\left(\left(1 - \frac{p_n(x)}{2}\right)^2 - \frac{x}{4}\right)
\end{aligned}$$

Aus $p_n^2(x) \leq x$ folgt $p_n(x) \leq 1$ und damit $1 - \frac{p_n(x)}{2} \geq \frac{1}{2}$ und $\left(1 - \frac{p_n(x)}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4} \geq \frac{x}{4}$. Deshalb ist die Folge $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für $x \in [0,1]$ monoton wachsend und $0 \leq p_n^2(x) \leq x$. Dann gilt aber auch $\left(\left(1 - \frac{p_n(x)}{2}\right)^2 - \frac{x}{4}\right) \leq 1 - \frac{x}{4}$ und deshalb auch $0 \leq x - p_n^2(x) \leq x \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n$. Wegen $\frac{1}{1-\frac{x}{4}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n \geq 1 + \frac{x}{4}$ folgt dann aus der Beroulli Ungleichung $\frac{1}{(1-\frac{x}{4})^n} \geq 1 + \frac{nx}{4}$ und $0 \leq x - p_n^2(x) \leq \frac{x}{1+\frac{nx}{4}} < \frac{4}{n}$. Also konvergiert $(p_n^2(x))_{n\in\mathbb{N}}$ auf $x \in [0,1]$ gleichmäßig gegen x. Die Funktion $[0,1] \to [0,1], x \mapsto \sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion von $[0,1] \to [0,1], x \mapsto x^2$. Weil die zweite Funktion stetig ist, ist dann wegen Korollar 5.27 die erste auch stetig und wegen Satz 5.30 sogar gleichmäßig stetig. Dann folgt aber dass die Folge $\left(p_n(x) = \sqrt{p_n^2(x)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $\sqrt{x}$ konvergiert. **q.e.d.**

Beweis des Satzes von Stone–Weiertraß*: Wegen dem Lemma gibt es auf $[0,1]$ eine Folge von Polynomen, die gleichmäßig gegen $x \to \sqrt{x}$ konvergieren. Daraus folgt dann, dass für jedes $f \in A$ auch $|f| = \|f\|_\infty \sqrt{\left(\frac{f}{\|f\|_\infty}\right)^2}$ zu dem Abschluss $\bar{A}$ von A gehört. Dann gehört für jedes $f, g \in \bar{A}$ aber auch

$$\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \text{ und } \inf(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

zu $\bar{A}$. Weil A die Punkte von X trennt, gibt es für alle $x \neq y \in X$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ein Element $f \in A$, dass $f(x) = \alpha$ und $f(y) = \beta$ erfüllt. Sei nämlich g eine Funktion mit $g(x) \neq g(y)$. Dann ist $f = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{g(y)-g(x)}(g - g(x))$ eine solche Funktion.

Sei jetzt $f \in C_{\mathbb{R}}(x)$ eine fest vorgegebene Funktion und $\epsilon > 0$. Dann gibt es für jedes $x, y \in X$ eine Funktion $g_{x,y} \in \bar{A}$ die bei x und y mit f übereinstimmt. Dann gibt es aber auch ein $\delta_{x,y} > 0$, so dass für alle $z \in B(y, \delta_{x,y})$ gilt $g_{x,y}(z) < f(z) + \epsilon$. Durch Übergang zu einer endlichen Teilüberdeckung und dem Infimum der entsprechenden Funktionen $g_{x,y} \in \bar{A}$ gibt es dann eine Funktion $g_x \in \bar{A}$, die $g_x(x) = f(x)$ und $g_x < f + \epsilon$ erfüllt. Wegen der Stetigkeit gibt es wieder für alle $x \in X$ ein $\delta_x > 0$, so dass für alle $y \in B(x, \delta_x)$ gilt $f(y) - \epsilon < g_x(y)$. Durch Übergang zu einer endlichen Teilüberdeckung und dem Supremum der entsprechenden Funktionen g_x finden wir schließlich eine Funktion g in $\bar{A}$, die auf X $f - \epsilon < g < f + \epsilon$ erfüllt. Weil ϵ beliebig ist folgt dann, dass f in $\bar{A}$ enthalten ist. **q.e.d.**

Beispiel 5.41. **(i)** *Weil die identische Abbildung auf $\mathbb{K}$ stetig ist, sind wegen Satz 5.37 auch alle Polynome auf $\mathbb{K}$ stetig und alle Quotienten von Polynomen (rationale Funktionen) auf der Teilmenge von $\mathbb{K}$, auf der der Nenner nicht verschwindet.*

(ii) *Wegen Satz 4.26 (iv) sind alle Potenzreihen stetige Funktionen.*

(iii) *Wenn $f : X \to \mathbb{K}, x \mapsto f(x)$ eine injektive Funktion auf einer kompakten Menge ist, dann ist die Umkehrfunktion $f[X] \to X, x \mapsto f^{-1}(x)$ stetig. Dies gilt auch, wenn X eine offene Teilmenge von $\mathbb{K}$ ist, weil dann jedes $x \in X$ in einer kompakten Umgebung enthalten ist.*

Satz 5.42.* *(Satz von Dini) Auf einem kompakten metrischen Raum (X, d) konvergiert eine monotone Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen reellen Funktionen gleichmäßig, wenn sie punktweise gegen eine stetige Funktion f konvergiert.*

Beweis*: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von stetigen reellen Funktionen, die gegen die stetige Funktion f konvergiert. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ ein $n(x)$, so dass für alle $m \geq n(x)$ auch gilt $f(x) - f_m(x) < \frac{\epsilon}{3}$. Da $f_{n(x)}$ und f stetig sind gibt es auch ein $\delta(x)$, so dass aus $y \in B(x, \delta(x))$ folgt

$$|f_{n(x)}(x) - f_{n(x)}(y)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ und } |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Dann gilt auch $f(y) - f_{n(x)}(y) < \epsilon$. Wähle nun eine endliche Teilüberdeckung von $\{B(x, \delta(x))| \in X\}$. Dann gilt für jedes m, das größer oder gleich dem Maximum der entsprechenden $n(x)$ ist, für alle $y \in B(x, \delta(x))$

$$f(y) - f_m(y) \leq f(y) - f_{n(x)}(y) < \epsilon.$$

Weil diese Mengen X überdecken, folgt die gleichmäßige Konvergenz. **q.e.d.**

Kapitel 6

Stetige Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

6.1 Umkehrfunktionen

Satz 6.1. *(Zwischenwertsatz) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ stetig und $f(a) \neq f(b)$. Dann enthält das Bild $f[[a, b]]$ das abgeschlossene Intervall*

$$[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}] .$$

Beweis: Wir nehmen an $f(a) < f(b)$, andernfalls ist die Argumentation analog. Sei also $y_0 \in (f(a), f(b))$. Sei $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq y_0\}$. Weil $a \in A$ ist A eine nicht leere beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Außerdem ist A abgeschlossen. Also ist A kompakt und besitzt ein Maximum $x_0 = \max A$ mit $f(x_0) \leq y_0$. Weil $y_0 \neq f(b)$ ist $x_0 < b$ und es gilt für alle $x > x_0$ auch $f(x) > y_0$. Sei also $(x_n)_n$ eine Folge in $(x_0, b]$, die gegen x_0 konvergiert. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ und damit auch $f(x_0) \geq y_0$ und $f(x_0) = y_0$. Also ist $f(x_0) = y_0$ und das Bild von f enthält $[f(a), f(b)]$. **q.e.d.**

Mit diesem Satz läßt sich von vielen stetigen Funktionen zeigen, dass sie surjektiv sind, bzw. ihr Bild bestimmen. Die Injektivität von stetigen Funktionen auf Intervallen ist dagegen äquivalent zu ihrer Monotonie.

Definition 6.2. *(Monotonie) Eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ auf einer Teilmenge X von $\mathbb{R}$ heißt*

monoton wachsend *, wenn aus $x, x' \in X, x \leq x'$ folgt $f(x) \leq f(x')$*

streng monoton wachsend *, wenn aus $x, x' \in X, x < x'$ folgt $f(x) < f(x')$.*

monoton fallend *, wenn aus $x, x' \in X, x \leq x'$ folgt $f(x) \geq f(x')$.*

streng monoton fallend *, wenn aus $x, x' \in X, x < x'$ folgt $f(x) > f(x')$.*

Satz 6.3. *Eine stetige reelle Funktion f auf einem Intervall ist genau dann injektiv, wenn f entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.*

Beweis: Wir zeigen zunächst dass jede injektive stetige reelle Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ das Bild $[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$ hat. Wenn es andernfalls ein $y_0 \in f[[a, b]]$ gibt, dass nicht zu dieser Menge gehört, dann folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass jeder Wert in $(\min\{y_0, f(a)\}, \max\{y_0, f(a)\}) \cap (\min\{y_0, f(b)\}, \max\{y_0, f(b)\})$ einmal auf (a, y_0) und einmal auf (y_0, b) angenommen wird, was der Injektivität widerspricht. Falls $f(a) < f(b)$ sind also für alle $x \in (a, b)$ die Bilder $f[(a, x)]$ gleich $(f(a), f(x))$ und falls $f(a) > f(b)$ gleich $(f(x), f(a))$. Im ersten Fall ist f streng monoton wachsend und im zweiten Fall streng monoton fallend. Weil aber alle Paare von Punkten eines beliebigen Intervalles (das mehr als einen Punkt enthält) in einem abgeschlossenen Intervall enthalten sind, das zwei Referenzpunkte enthält, die dann festlegen ob f streng monoton fallend oder streng monoton steigend ist, folgt, dass jede injektive stetige Funktion auf einem Intervall entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist. Umgekehrt ist jede streng monotone Funktion auf einem Intervall auch injektiv. **q.e.d.**

Korollar 6.4. *Die Umkehrfunktion einer bijektiven stetigen Funktion von einem Intervall auf ein Intervall ist stetig.*

Beweis: Offenbar besitzt jeder Punkt x eines Intervalls, das mehr als einen Punkt enthält, eine Umgebung in diesem Intervall, die ein abgeschlossenes beschränktes Intervall ist. Das Bild solcher kompakten Intervalle ist wieder kompakt und wegen dem vorangehenden Satz wieder eine Umgebung von $f(x)$. Dann ist aber f^{-1} wegen Korollar 5.27 bei $y = f(x)$ stetig. Weil f surjetiv ist, ist damit f bei allen y im Wertebereich stetig. **q.e.d.**

Satz 6.5. *Sei f eine monoton wachsende (fallende) Funktion von einem Interval I nach $\mathbb{R}$. Dann ist die Menge aller Punkte des Intervalls, an denen f nicht stetig ist, höchstens abzählbar.*

Beweis: Wir betrachten monoton wachsende Funktionen. Für monoton fallende Funktionen verläuft der Beweis analog. Für jeden inneren Punkt ξ von I sei $f(\xi_-) = \sup\{f(x) \mid x \in I, x < \xi\}$ und $f(\xi_+)\} = \inf\{f(x) \mid x \in I, \xi < x\}$. Wenn $f(\xi_-) = f(\xi_+)$, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ $x_-, x_+ \in I$ mit $x_- < \xi < x_+$ so dass

$$f(x_+) - \epsilon < f(\xi_+) = f(\xi_-) < f(x_-) + \epsilon.$$

Dann gilt aber für alle $x \in [x_-, x_+]$ auch

$$-\epsilon < f(x_-) - f(\xi_-) \leq f(x) - f(\xi_-) = f(x) - f(\xi_+) \leq f(x_+) - f(\xi - +) < \epsilon.$$

Wegen der Monotonie gilt $f(\xi_-) \leq f(\xi) \leq f(\xi_+)$. Also ist f bei ξ stetig. Die Unstetigkeitsstellen bestehen also aus den Stellen, an denen $f(\xi_-) < f(\xi_+)$. In jedem solchen Intervall $(f(\xi_-), f(\xi_+))$ ist aber eine rationale Zahl enthalten. Also gibt es eine Abbildung von den Unstetigkeitsstellen auf die rationalen Zahlen die injektiv sind, weil alle diese offenen Intervalle wegen der Monotonie disjunkt sind. Damit sind die Unstetigkeitsstellen gleichmächtig zu einer Teilmenge der rationalen Zahlen und damit höchstens abzählbar. **q.e.d.**

Beispiel 6.6. $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \to x^k$ *ist streng monoton wachsend, also ist die Umkehrabbildung* $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \to x^{\frac{1}{k}}$ *stetig und streng monoton wachsend. Dasselbe gilt dann auch für die Abbildungen* $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \to x^{\frac{p}{q}}$ *mit der Umkehrabbildung* $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \to x^{\frac{q}{p}}, p, q \in \mathbb{N}$.

6.2 Die reellen Funktionen $e^x, \ln x, a^x, \log_a x$.

Satz 6.7. *(Eigenschaften* exp*)*

(i) $e^0 = \exp(0) = 1$

(ii) $e^x > \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *und* $x > 0$

(iii) $x < y \Rightarrow e^x < e^y$

(iv) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \to e^x$ *ist bijektiv.*

Beweis:

(i) und **(ii)** folgen aus der Definition.

(iii) $x < y \Rightarrow y - x > 0$. Dann gilt wegen (ii) $e^{y-x} > 1$.

Wegen Satz 4.19 (i) und (ii) gilt dann $e^y - e^x = (e^{y-x} - 1)e^x > 0$. Also folgt $e^x < e^y$.

(iv) Offenbar ist die Funktion wegen (iii) injektiv. Wegen Satz 3.4 gibt es für jedes $y \in \mathbb{R}^+$ ein $n \in \mathbb{R}$, so dass $e^{-n} < y < e^n$. Wegen dem Zwischenwertsatz gehört dann y zum Bild von $[-n, n] \to \mathbb{R}^+, x \mapsto e^x$. **q.e.d.**

Definition 6.8. *(des natürlichen Logarithmus). Die Umkehrfunktion von* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ x \mapsto e^x$ *heißt natürlicher Logarithmus:* $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln x$.

Wegen Korollar 6.4 ist der Logarithmus stetig und hat wegen Satz 4.19 und dem vorangehenden Satz folgende Eigenschaften.

Satz 6.9. *(Eigenschaften von ln)*

(i) $\ln(1) = 0$

(ii) $\ln(e) = 1$

(iii) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}^+$

(iv) $a^r = e^{\ln(a)\cdot r}$ *für alle* $r \in \mathbb{Q}$ *und* $a \in \mathbb{R}^+$

(v) $\ln\left(e^{ln(a)x}\right) = x\ln(a)$ *für alle* $a \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}$

(vi) $x, y \in \mathbb{R}^+, x < y \Rightarrow \ln(x) < \ln(y)$

(vii) $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \to \ln(x)$ *ist bijektiv*

Beweis: (i)$\Leftrightarrow e^0 = 1$ und (ii)$\Leftrightarrow e^1 = e$

(iii) $\Leftrightarrow e^{\ln x + \ln(y)} = (e^{\ln x})(e^{\ln y})$.

(iv) sei $r = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ $\left(e^{\ln(a)\frac{p}{q}}\right)^q = e^{\ln(a)p} = a^p$ und $e^{\ln(a)\frac{p}{q}} > 0$ Wegen der Eindeutigkeit der k-ten Wurzel gilt dann $e^{\ln(a)\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}$.

(v) ist offensichtlich.

(vi) folgt aus (iii) des vorhergehenden Satzes.

(vii) folgt aus (iv) des vorhergehenden Satzes. **q.e.d.**

Definition 6.10. *Für alle* $a > 0$ *und alle* $x \in \mathbb{R}$ *sei* $a^x = e^{x\ln(a)}$

Satz 6.11. *(Eigenschaften von* a^x*)*

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$ *für alle* $a \in \mathbb{R}^+, x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) $(a^x)^y = a^{xy}$ *für alle* $a \in \mathbb{R}^+, x, y \in \mathbb{R}$.

(iii) *Für* $a > 1$ *und* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt* $x < y \Rightarrow a^x < a^y$.

(iv) *Für* $a < 1$ *und* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt* $x < y \Rightarrow a^x > a^y$.

(v) *Für* $a \neq 1$ *ist* $a^\cdot : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^x$ *bijektiv und stetig.*

Beweis:

(i) $a^{x+y} = e^{x\ln a + y\ln(a)} = e^{x\ln a}e^{y\cdot\ln a} = a^x a^y$.

(ii) $(a^x)^y = e^{y \ln(e^{x \ln a})} = e^{y \cdot x \ln a} = a^{xy}$.

(iii) Für $a > 1$ ist $\ln(a) > 0$. Also folgt aus $x < y$ auch $x \ln a < y \ln a$ und $a^x < a^y$.

(iv) Für $a < 1$ ist $\ln(a) < 0$. Also folgt aus $x < y$ auch $x \ln(a) > y \ln(a)$ und $a^x > a^y$.

(v) Für $x \neq 1$ ist $\ln(a) \neq 0$. Also ist $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(a)x$ bijektiv und stetig, also auch $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto \exp(\ln(a)x)$. **q.e.d.**

Definition 6.12. *(des Logarithmus zur Basis a) Für alle $a \neq 1$ sei $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ die Umkehrfunktion von $a^{\cdot}$.*

Satz 6.13. *(Eigenschaften des Logarithmus zur Basis a)*

(i) $\log_a(1) = 0$

(ii) $\log_a(a) = 1$

(iii) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

(iv) *Für $a > 1$ und $x, y \in \mathbb{R}^+$ folgt aus $x < y$ auch $\log_a(x) < \log_a(y)$*

(v) *Für $a < 1$ und $x, y \in \mathbb{R}^+$ folgt aus $x < y$ auch $\log_a(x) > \log_a(y)$*

(vi) $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \log_a(x)$ *ist bijektiv und stetig.*

Beweis analog zum Beweis der Eigenschaften von ln. **q.e.d.**

6.3 Die reellen Funktionen sin, cos, arcsin, arccos

Satz 6.14. **(i)** *Für alle $x \in [-5, 5]$ gilt $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. Gleichheit gilt nur für $x = 0$.*

(ii) *Für alle $x \in [-4, 4]$ gilt $1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$. Gleichheit gilt nur für $x = 0$.*

(iii) $\cos : [0, \sqrt{6}] \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)$ *ist streng monoton fallend.*

(iv) cos *hat auf* $[0, 2]$ *genau eine Nullstelle, die wir mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnen.*

(v) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i$.

(vi) $\cos(n\pi) = (-1)^n \quad \sin(n\pi) = 0$ *für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(vii) $\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0 \quad \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n$ *für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(viii) $\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos(x) \quad \sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin(x)$

(ix) $\cos\left(x + \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n \sin(x) \quad \sin\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n \cos(x)$.

(x) $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1], x \mapsto \sin(x)$ *streng monoton steigend und bijektiv.*

(xi) $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1], x \mapsto \cos(x)$ *streng monton fallend und bijektiv.*

Beweis:

(i) Für $x \in [-5, 5]$ und $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt $\frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} < 1$. Also ist für alle $x \in [-5, 5]$ die Folge $\left(\frac{x^{2k}}{2k!}\right)_{k \in \mathbb{N}\setminus\{1,2\}}$ monoton fallend und für $x \neq 0$ sogar streng monoton fallend und konvergiert gegen Null (Beispiel (i) im Abschnitt 3.4). Dann folgt aus dem Beweis zu Satz 4.13, dass für alle $x \in [-5, 5]$ gilt $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ und Gleichheit nur für $x = 0$ gilt.

(ii) Für $x \in [-4, 4]$ und $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt $\frac{x^2}{2k(2k+1)} < 1$. Also ist für alle $x \in [-4, 4]$ die Folge $\left(\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}\right)_{k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}}$ streng monoton fallend und konvergiert gegen Null (Beispiel (i) in Abschnitt 3.4). Wieder folgt aus dem Beweis von Satz 4.13, dass für alle $x \in [-4, 4]$ gilt $1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ und Gleichheit nur für $x = 0$ gilt.

(iii) Wegen den Additionstheorem gilt: $\cos(x) - \cos(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{y-x}{2}) > 0$ wegen (ii) für $x, y \in [0, \sqrt{6}]$ und $x < y$.

(iv) sin und cos sind wegen Beispiel (ii) aus dem Abschnitt über stetige Funktionen stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Wegen (i) ist $\cos(2) \leq 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$. Dann folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass es eine Nullstelle in $[0, 2]$ gibt. Wegen (iii) kann es höchstens eine Nullstelle geben.

(v) Wegen $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ folgt aus (iv) $\sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1$ und aus (ii) $\sin(\frac{\pi}{2}) > 0$. Also gilt $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Dann folgt aus der Eulerschen Formel $\exp(\imath\frac{\pi}{2}) = i$.

(vi) Wegen (v) folgt aus der Eulerschen Formel $\exp(n\imath\pi) = (-1)^n$, also $\cos(n\pi) = (-1)^n$ und $\sin(n\pi) = 0$.

(vii) Wegen (v) folgt aus der Eulerschen Formel: $\exp((n+\frac{1}{2})\imath\pi) = (-1)^n\imath$ also $\cos((n+\frac{1}{2})\pi) = 0$ und $\sin((n + \frac{1}{2})\pi) = (-1)^n$.

(viii) Aus dem Additionstheorem und (vi) folgt (viii).

(ix) Aus dem Additionstheorem und (vii) folgt (ix).

(x) Aus (ix) folgt $\sin(x) = \begin{cases} -\cos(x+\frac{\pi}{2}) & \text{für } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \\ -\sin(-x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) & \text{für } x \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$

Dann folgt (x) aus (iii).

(xi) Aus (viii) folgt $\cos(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{für } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \cos(-x) = -\cos(\pi - x) & \text{für } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$

Dann folgt (xi) aus (iii). **q.e.d.**

Die Umkehrfunktion von $\cos : [0,\pi] \to [-1,1], x \mapsto \cos(x)$ heißt

$$\text{Arcuscosinus} \quad \arccos : [-1,1] \to [0,\pi], x \mapsto \arccos(x).$$

Sie ist wegen (xi) streng monoton fallend und wegen Korollar 6.4 stetig. Die Umkehrfunktion von $\sin : \big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big] \to [-1,1], x \mapsto \sin(x)$ heißt

$$\text{Arcussinus} \quad \arcsin : [-1,1] \to \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big], x \mapsto \arcsin(x).$$

Sie ist wegen (x) streng monoton steigend und wegen Korollar 6.4 stetig.

Satz 6.15. *(Polardasrstellung von $z \in \mathbb{C}$) Jede komplexe Zahl hat die Darstellung:*

$$z = r \cdot e^{\imath q} \quad r = |z| \text{ und } q \in \mathbb{R}.$$

Für $z \neq 0$ ist q bis auf Addition von $2\pi n$ eindeutig bestimmt und heißt Argument von z.

Beweis: Sei $z = x + \imath y$ mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wenn $y \geq 0$ sei $q = \arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}) \in [0,\pi]$ und $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Dann gilt offenbar $x = r \cdot \cos(q)$ und $r\sin(q) \geq 0$. Außerdem gilt $\frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow y = r\sin(q)$. Wegen der Eulerschen Formel gilt dann

$$z = r \cdot e^{\imath q} = r\cos(q) + \imath r \sin q = x + \imath y.$$

Wenn $y < 0$ sei $q = \arccos(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}) + \pi$ und $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Dann folgt wieder $z = re^{\imath q} = r\cos q + \imath r \sin q = x + \imath y$. Seien (r,q) und (r',q') mit

$$re^{\imath q} = r'e^{\imath q'} \Rightarrow r = |re^{\imath q}| = |r'e^{\imath q}| = r'.$$

$$e^{\imath q}e^{-\imath q'} = e^{\imath(q-q')} = 1 \Rightarrow q - q' = 2\pi n.$$

q.e.d.

Korollar 6.16. *Die Abbildung* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *ist surjektiv und* $\exp(z) = \exp(z') \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$ *mit* $z - z' = 2\pi i n$.

Beweis: Seien $z = x + iy$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $e^z = e^x e^{iy}$. Also folgt das Korollar aus dem Satz 6.15 und weil $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ bijektiv ist. **q.e.d.**

Korollar 6.17. *Für jedes* $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *gibt es genau* n *verschiedene Lösungen* $w_1, \ldots, w_n$ *der Gleichung* $w^n = z$ *für* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Seien (r, q) die Polarkoordinaten von z. Dann müssen die Polarkoordinaten (s, p) der Lösungen von $w^n = z$ Die Gleichungen $np = q + 2\pi m$ für $m \in \mathbb{Z}$ erfüllen und $s^n = r$. Also sind die Lösungen gegeben durch $s = \sqrt[n]{r}$ und $p_m = \frac{q}{n} + \frac{2\pi m}{n}$, wobei zwei Lösungen (s, q_m) und $(s, q_{m'})$ genau dann übereinstimmen, wenn $\frac{m-m'}{n} \in \mathbb{Z}$. Also ergeben $m = 0, \ldots, n-1$ alle Lösungen. **q.e.d.**

Satz 6.18. *(Fundamentalsatz der Algebra) Jedes komplexe Polynom* $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ *mit* $a_n \neq 0$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *hat mindestens eine Nullstelle auf* $z \in \mathbb{C}$.

Beweis: Für $|z| \geq R = 1 + 2|\frac{a_{n-1}}{a_n}| + \ldots + 2|\frac{a_0}{a_n}| \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{p(z)}{z^n}\right| &= \left|\frac{p(z)}{z^n}\right| + \left|-\frac{a_{n-1}}{z} - \ldots - \frac{a_0}{z^n}\right| - \left|-a_n\left(\frac{a_{n-1}}{a_n z} + \ldots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right)\right| \\
&\geq |a_n| - |a_n|\left|\frac{a_{n-1}}{a_n z} + \ldots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right| \\
&\geq |a_n|\left(1 - \frac{\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \ldots + \left|\frac{a_0}{a_n}\right|}{|z|}\right) \\
&> |a_n|\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Also ist $|p(z)| > \frac{|a_n|}{2}|z|^n \geq \frac{|a_n|}{2}|z| > \frac{|a_n|}{2} 2\frac{|a_0|}{|a_n|} = |a_0|$. Auf der kompakten Menge $\overline{B(0, R)}$ nimmt $z \mapsto |p(z)|$ wegen Satz 2.29 das Minimum bei einem z_0 an. Dieses liegt in $B(0, R)$ und ist das Minimum auf ganz $z \in \mathbb{C}$, weil außerhalb von $z \in B(0, R)$ gilt $|(p(z)| > |a_0| = |p(0)|$. Wir schreiben jetzt $p(y + z_0) = b_n y^n + \ldots + b_0$ als Polynom in $y = z - z_0$. Dann gilt $b_n = a_n \neq 0$. Wenn $b_0 \neq 0$ gilt $|p(z_0)| = |b_0| > 0$. Dann sei m das kleinste $m \in \mathbb{N}$ mit $b_m \neq 0$. Für $0 < |y| \leq r = \dfrac{1}{1 + 2\left|\frac{b_{m+1}}{b_m}\right| + \ldots + 2\left|\frac{b_n}{b_m}\right|} \leq 1$ gilt dann

$$\left|b_{m+1}y^{m+1} + \ldots + b_n y^n\right| \leq |b_m||y|^m \left(\left|\frac{b_{m+1}}{b_m}\right||y| + \ldots + \left|\frac{b_n}{b_m}\right||y|\right) < \frac{|b_m||y|^m}{2}.$$

Also gilt auch
$$|p(z_0 + y)| < |b_0 + b_m y^m| + \frac{|b_m||y|^m}{2}.$$
Sei jetzt w eine Lösung der Gleichung $w^m b_m = -b_0$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{C}$ mit $0 < |tw| \leq r$
$$|p(z_0 + tw)| < |b_0||1 - t^m| + \frac{|b_0|}{2}|t|^m.$$
Insbesondere gilt für alle $0 < t < \min\left\{1, \frac{r}{|w|}\right\}$
$$|p(z_0 + tw)| < |b_0|\left(1 - \frac{t^m}{2}\right) < |b_0|.$$

Also ist z_0 nicht das Minimum von $|p(z)|$. Widerspruch. Also muss $|p(z)| = 0$ bei dem Minimum gelten. **q.e.d.**

Korollar 6.19. *Jedes komplexe Polynom vom Grade $n \in \mathbb{N}$ zerfällt in ein Produkt von Polynomen ersten Grades.*

Beweis durch vollständige Induktion:

(i) für $n = 1$ ist die Aussage trivial.

(ii) Die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}$. Sei p ein beliebiges Polynom $(n + 1)$-ten Grades. Wegen dem Fundamentalsatz der Algebra hat p eine Nullstelle bei $z_0 \in \mathbb{C}$. Wenn wir p als Polynom in $z - z_0$ schreiben, erhalten wir p als Produkt von $(z - z_0)$ mit einem Polynom n-ten Grades. Wegen der Induktionsvoraussetzung zerfällt dieses in ein Produkt von Polynomen ersten Grades, also auch p. **q.e.d.**

Definition 6.20. *(von Tangens und Cotangens)*

$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi | n \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, x \to \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}.$

$\cot : \mathbb{R} \setminus \{n\pi | n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, x \to \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}.$

Beachte $\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$ und $\cot(x + \pi) = \cot(x)$.

Satz 6.21. **(i)** *Die Abbildung* $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, x \to \tan(x)$ *ist streng monoton steigend, stetig und bijektiv.*

(ii) *Die Abbildung* $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}, x \to \cot(x)$ *ist streng monoton fallend, stetig und bijektiv.*

Beweis:

(i) auf $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ist sin streng monoton steigend und cos streng monoton fallend. Also ist tan streng monoton steigend. Wegen $\tan(-x) = -\tan(x)$ folgt dann auch, dass tan auf $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ streng monoton steigend ist.

(ii) $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$ für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ also ist cot auf $(0, \frac{\pi}{2})$ streng monoton fallen und analog auf $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ sind tan und cot auf $(n\pi, (n + \frac{1}{2})\pi)$ positiv auf $(n - \frac{1}{2})\pi, n\pi)$ negativ. Sie sind beide wegen Satz 5.37 stetig. Außerdem ist für alle $n \in \mathbb{Z}$ $\tan(n\pi) = 0$ und $\cot((n + \frac{1}{2})\pi) = 0$. Dann gilt aber auch

$$\lim_{n\to\infty} \tan\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) = -\infty \quad \lim_{n\to\infty} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right) = \infty$$
$$\lim_{n\to\infty} \cot\left(\frac{1}{n}\right) = \infty \quad \lim_{n\to\infty} \cot\left(\pi - \frac{1}{n}\right) = -\infty$$

Also sind $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ und $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ wegen dem Zwischenwertsatz auch surjektiv. **q.e.d.**

Die Umkehrfunktion von $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ heißt

$$\text{ArcusTangens} \quad \arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), x \mapsto \arctan(x).$$

Die Umkehrfunktion von $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ heißt

$$\text{Arcuscotangens} \quad \operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi), x \mapsto \operatorname{arccot}(x).$$

Diese beiden Umkehrfunktionen sind wegen Satz 6.21 streng monoton und wegen Korollar 6.4 stetig.

6.4 Konvergenz von reellen Funktionenfolgen

Satz 6.22*. *(Dirichlet) Sei X eine Menge, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen beschränkten Funktionen auf X und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen auf X. Wenn folgende Bedingungen erfüllt sind, dann konvergiert die Reihe von Funktionen $(\Sigma a_n f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf X gleichmäßig.*

(i) *Für alle $x \in X$ sind die Folgen $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.*

(ii) *$(\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen Null.*

(iii) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist* $\|\sum_{k=1}^{n} a_k\|_\infty \leq C < 0$.

Beweis*: Wir benutzen die sogenannte Abelsche Summation. Sei $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k f_k &= A_1 f_1 + (A_2 - A_1) f_2 + \ldots + (A_n - A_{n-1}) f_n \\ &= A_1(f_1 - f_2) + \ldots + A_{n-1}(f_{n-1} - f_n) + A_n f_n\end{aligned}$$

Wegen (i) ist $f_k - f_{k+1} \geq 0$ und $f \geq 0$ wegen (ii). Dann folgt wegen (iii)

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=n+1}^{m} a_k f_k\right\|_\infty &= \left\|A_m f_m - A_n f_n + \sum_{k=n}^{m-1} A_k(f_k - f_{k+1})\right\|_\infty \\ &\leq C \left\|f_m + f_n + \sum_{k=n}^{m-1} f_k - f_{k+1}\right\|_\infty \\ &\leq 2C\|f_n\|_\infty.\end{aligned}$$

Wegen (ii) folgt die Behauptung dann aus dem Satz 5.35 (iv). **q.e.d.**

Satz 6.23. *(Abel) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Funktionen auf X und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen auf X. Wenn folgende Bedingungen erfüllt sind, konvergiert die Reihe $(\Sigma a_n f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen auf X gleichmäßig.*

(i) *Für alle $x \in X$ ist $(f_n(x))$ monoton fallend.*

(ii) $\|f_n\|_\infty \leq C$ *für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(iii) $(\Sigma a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig auf X.*

Beweis: Wir benutzen wieder die Abelsche Summation. Sei also $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ und $A = \lim_{n\to\infty} A_n$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{m} a_k f_k &= A_m f_m - A_n f_n + \sum_{k=n}^{m-1} A_k(f_k - f_{k+1}) \\ &= (A_m - A) f_m - (A_n - A) f_n + \sum_{k=n}^{m-1} (A_k - A)(f_k - f_{k+1}) \text{ wegen} \\ 0 &= A\left(f_m - f_n + \sum_{k=n}^{m-1} f_k - f_{k+1}\right).\end{aligned}$$

Wegen (iii) gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein N, so dass alle $k \geq N$ auch $\|A_k - A\|_\infty < \frac{\epsilon}{4C}$ erfüllen. Also gilt für $N \leq n < m$

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=n+1}^{m} a_k f_k\right\|_\infty &< \frac{\epsilon}{4C}\left(\|f_m\|_\infty + \|f_n\|_\infty + \left\|\sum_{k=n}^{m-1} f_k - f_{k+1}\right\|_\infty\right) \\ &\leq \frac{2\epsilon}{4C}(\|f_m\|_\infty + \|f_n\|_\infty) \leq \epsilon.\end{aligned}$$

Also folgt die Behauptung wieder aus Satz 5.35 (iv). **q.e.d.**

Satz 6.24. *(Abelscher Grenzwertsatz) Wenn die $\mathbb{K}$–wertige Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $x = x_0 \neq 0$ konvergiert. Dann konvergiert sie gleichmäßig auf $\{tx_0 \in \mathbb{K} \mid t \in [0,1]\}$*

Beweis: Für $x_0 \neq 0$ sei für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} f_n &: \{tx_0 \in \mathbb{K} \mid t \in [0,1]\} \to \mathbb{R}, & x = tx_0 &\mapsto \left(\frac{x}{x_0}\right)^n = t^n \\ b_n &: \{tx_0 \in \mathbb{K} \mid t \in [0,1]\} \to \mathbb{K}, & x = tx_0 &\mapsto a_n \cdot x_0^n. \end{aligned}$$

Für alle $t \in [0,1]$ ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise monton fallend und beschränkt durch 1. Wenn also $(\Sigma a_n x_0^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert, erfüllen die Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Voraussetzungen des vorangehenden Satzes. Also konvergiert $(\Sigma b_n f_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (\Sigma a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $\{tx_0 \in \mathbb{K} \mid t \in [0,1]\}$ gleichmäßig. **q.e.d.**

Wenn also eine Potenzreihenfunktion mit Konvergenzradius R für $x_0 \in \mathbb{K}$ mit $|x_0| = R$ konvergiert, dann konvergiert sie auf der kompakten Menge $\{tx_0 \in \mathbb{K} \mid t \in [0,1]\}$ gegen eine stetige Funktion. Insbesonders ist dann also der Funktionswert bei x_0 gegeben durch den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) x_0\right)$ der Potenzreihenfunktion. Wir werden später sehen, dass wir dadurch in vielen Fällen diesen Grenzwert bestimmen können.

Beispiel 6.25. **(i)** *Die Potenzreihe $\left(\sum \frac{x^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $[-1,1)$ gegen eine stetige Funktion.*

(ii) *Die Potenzreihe $\left(\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert auf $[-1,1]$ gegen eine stetige Funktion.*

Kapitel 7

Differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

7.1 Definition der Ableitung

Definition 7.1. *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion auf einer Teilmenge X von $\mathbb{R}$, die eine Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}$ enthält. Dann heißt f im Punkt x_0 differenzierbar, wenn es ein $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die reelle Funktion*

$$X \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{für } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

stetig bei $x = x_0$ ist. Wenn X offen ist und f in jedem Punkt differenzierbar ist, heißt die Funktion $f' : X \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$ die Ableitung von f.

Wir bezeichnen $f'(x)$ auch durch $\frac{df}{dx}(x)$.

Satz 7.2. *Sei f im Punkt x_0 differenzierbar, dann ist f im Punkt x_0 auch stetig.*

Beweis:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Also folgt die Aussage aus den Rechenregeln für Folgen und daraus, dass $x \mapsto (x - x_0)$ stetig ist. Hierbei benutzen wir das Kriterium (iii) aus Satz 5.23 **q.e.d.**

Definition 7.3. *Das Differential von f im Punkt x_0 ist die lineare Abbildung $df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h \mapsto f'(x_0)h$. Die Gerade $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)\}$ heißt Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.*

$$\mathit{Graph}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}.$$

Die Sekante durch zwei Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ des Graphen ist gegeben durch

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(f(x_1) - f(x_0))\}.$$

Im Grenzwert $x_1 \to x_0$ konvergiert die Sekante durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ gegen die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0.f(x_0))$.

Beispiel 7.4. **(i)** *$f(x) = |x|$. Für $x_0 = 0$ ist $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1 \text{ für } x > 0 \\ -1 \text{ für } x < 0. \end{cases}$ Also ist f im Punkt $x_0 = 0$ stetig aber nicht differenzierbar.*

(ii) *$f(x) = c \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$ für alle $x \neq x_0$ also ist f differenzierbar und es gilt $f'(x) = 0$.*

(iii) *$f(x) = x \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 1$ für alle $x \neq x_0$ also ist f differenzierbear und es gilt $f'(x) = 1$.*

(iv) *$f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$.*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \ldots + x_0^{n-1} \text{ für alle } x \neq x_0$$

also ist f differenzierbar und es gilt $f'(x) = nx^{n-1}$.

(v) *$f(x) = \exp(x)$*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left(\frac{\exp(x - x_0) - 1}{x - x_0}\right)\exp(x_0).$$

Aufgrund der Definition der Exponentialfunktion gilt: $\frac{\exp(x-x_0)-1}{x-x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{(n+1)!}$. Diese Potenzreihenfunktion ist stetig und bei $x - x_0 = 0$ gleich 1. Also folgt

$$f'(x) = \exp(x)$$

(vi) *$f(x) = \sin(x)$*

$$\frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2} + \frac{x+x_0}{2}\right) + \sin\left(\frac{x-x_0}{2} - \frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \frac{2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0}$$

Und wegen der Potenzreihe von sin *gilt auch*

$$\frac{2\sin(\frac{x-x_0}{2})}{x - x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\frac{x-x_0}{2})^{2k}}{(2k+1)!}$$

Diese Potenzreihenfunktion ist stetig und bei $x - x_0 = 0$ gleich 1. Also folgt

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x+x}{2}\right) = \cos(x).$$

(vii) $f(x) = \cos(x)$

$$\frac{\cos(x) - \cos(x_0)}{x - x_0} = \frac{\cos\left(\frac{x_0+x}{2} - \frac{x_0-x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x_0+x}{2} + \frac{x_0-x}{2}\right)}{x - x_0} = \frac{2\sin\left(\frac{x_0+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x_0-x}{2}\right)}{x - x_0}.$$

Wegen $\dfrac{2\sin\left(\frac{x_0-x}{2}\right)}{x-x_0} = -\dfrac{2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x-x_0}$ *folgt* $f'(x) = -\sin(x)$.

7.2 Rechenregeln der Ableitung

Satz 7.5. *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. dann sind auch die Funktionen $\lambda f, f+g$ und $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0) \qquad (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Wenn $f(x) \neq 0$ für $x \in I$, dann ist auch $\dfrac{1}{f} : I \to \mathbb{R}, x \to \dfrac{1}{f(x)}$ in x_0 differenzierbar und es gilt $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x_0) = -\dfrac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$.

Beweis: Es gilt

$$\frac{\lambda f(x) - \lambda f(x_0)}{x - x_0} = \lambda\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{und}$$
$$\frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x_0 - x_0} \quad \text{und}$$
$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0) \quad \text{und}$$
$$\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right)\frac{1}{x - x_0} = -\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x)f(x_0)(x - x_0)}.$$

Also folgt die Aussage aus Satz 5.37.

Satz 7.6. *Seien f und g reelle Funktionen und der Definitionsbereich von f eine Umgebung von x_0 und der Definitionsbereich von g eine Umgebung von $y_0 = f(x_0)$. Wenn f in x_0 differenzierbar ist und g in y_0, dann ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Beweis: $\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Der ertse Faktor ist aber die Komposition von $x\mapsto f(x)$ mit $y\mapsto\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$ also wegen Satz 5.25 und wegen Satz 7.2 stetig. Also folgt die Behauptung aus Satz 5.37.

Satz 7.7. *(Ableitung der Inversen) Sei f eine bijektive Funktion von $X\to Y$ mit $X,Y\subset\mathbb{R}$ und X eine Umgebung von x_0 und Y eine Umgebung von $y_0=f(x_0)$. Wenn f in x_0 differenzierbar ist und $f'(x_0)\neq 0$ und f^{-1} in y_0 stetig ist, dann ist auch f^{-1} in y_0 differenzierbar und es gilt $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$.*

Beweis: $\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$ für $y=f(x)$ und $y_0=f(x_0)$. Die Funktion $y\mapsto\begin{cases}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} & \text{für } y\neq y_0\\ \frac{1}{f'(x_0)} & \text{für } y=y_0\end{cases}$ ist die Komposition der Funktion $y\to f^{-1}(y)$ mit der Funktion $x\mapsto\begin{cases}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} & \text{für } x\neq x_0\Leftrightarrow f(x)\neq f(x_0)\\ \frac{1}{f'(x_0)} & \text{für } x=x_0\end{cases}$. Also folgt der Satz aus Satz 5.25. **q.e.d.**

Beispiel 7.8. **(i)** $\ln\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}, x\mapsto\ln(x)$

$$\ln'(x)=\frac{1}{\exp'(y)}=\frac{1}{\exp(y)}=\frac{1}{x}\ \textit{mit}\ \exp(y)=x.$$

(ii) $\arcsin:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], x\mapsto\arcsin(x)$

$$\arcsin'(x)=\frac{1}{\cos(y)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \textit{mit}\ \sin(y)=x\ \textit{und}\ x^2\neq 1.$$

(iii) $\arccos:[-1,1]\to[0,\pi], x\mapsto\arccos(x)$

$$\arccos'(x)=\frac{-1}{\sin(y)}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ \textit{mit}\ \cos(y)=x\ \textit{und}\ x^2\neq 1.$$

(iv) $\cdot^\alpha:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}, x\mapsto x^\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$.

$$(\cdot^\alpha)'(x)=\exp(\alpha\ln(x))'=\exp(\alpha\ln(x))\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

(v) $a^\cdot:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto a^x, a\in\mathbb{R}^+$.

$$(a^\cdot)'(x)=\exp(x\cdot\ln(a))'=\exp(x\ln(a))\cdot\ln(a)=\ln(a)\cdot a^x.$$

(vi) Quotientenregel. *Seien f und g in x_0 differenzierbar und $g(x_0) \neq 0$. Dann ist $\frac{f}{g}$ ind x_0 differenzierbar und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)}{g^2(x_0))} g'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

(vii) $x \mapsto \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

(viii) $x \mapsto \cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

$$\cot'(x) = \frac{-\sin(x)\sin(x) - \cos(x)cos(x)}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}.$$

(ix) $\arctan : \mathbb{R} \to \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), x \mapsto \arctan(x)$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(y)} = \frac{1}{1 + x^2} \textit{ mit } \tan(y) = x.$$

(x) $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi), x \mapsto \operatorname{arccot}(x)$

$$\operatorname{arccot}'(x) = \frac{-1}{1 + \cot^2(g)} = \frac{-1}{1 + x^2} \textit{ mit } \cot(y) = x.$$

(xi) $\log_a \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \log_a(x) \qquad \log_a'(x) = \left(\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \dfrac{1}{x\ln(a)}.$

(xii) $x^x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x^x$

$$(x^x)' = \exp(x \cdot \ln(x))' = \exp(x \cdot \ln(x)) \left(\ln(x) + x\frac{1}{x}\right) = (\ln(x) + 1) \cdot x^x.$$

(xiii) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \textit{für } x \neq 0 \\ 0 & \textit{für } x = 0. \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0\pm} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim\limits_{x \to 0\pm} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 & \textit{für } x = 0 \\ 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \textit{für } x \neq 0. \end{cases}.$$

Diese Funktion ist zwar differenzierbar, aber f' ist im Punkt $x = 0$ nicht stetig.

7.3 Mittelwertsatz und Monotonie

Wenn $f'(x_0)$ einer differenzierbaren Funktion positiv ist, dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass aus $|x - x_0| < \epsilon$ folgt $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$. Dann gilt für $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ auch $f(x) < f(x_0)$ und für $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$ auch $f(x) > f(x_0)$. Analoges gilt für negatives $f'(x_0)$.

Definition 7.9. *(relative Maxima und Minima) $f : (a, b) \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ hat bei $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Maximum (Minimum), falls es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass aus $|x - x_0| < \epsilon$ folgt $f(x) \leq f(x_0)$ bzw. $f(x) \geq f(x_0)$.*

Eine differenzierbare Funktion kann also nur an den Nullstellen der Ableitung relative Extremwerte besitzen.

Definition 7.10. *(kritischer Punkt) Eine Nullstelle der Ableitung einer differenzierbaren Funktion heißt kritischer Punkt. Der entsprechende Funktionswert heißt kritischer Wert.*

Kanditaten für die Minima und Maxima einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind

(i) Kritische Punkte

(ii) Randpunkte

(iii) Punkte an denen f nicht differenzierbar ist.

Satz 7.11. *(Satz von Rolle) Sei $f[a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Falls $f(a) = f(b)$, dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.*

Beweis: Wegen Korollar 5.26 gibt es $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ für alle $x \in [a, b]$. Wenn x_1 und x_2 beide am Rand liegen $x_1, x_2 \in \{a, b\}$ dann muss f konstant gleich $f(a) = f(b)$ sein. Also gilt dann $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Andernfalls muss es einen lokalen Extremwert in (a, b) geben, an dem dann die Ableitung verschwindet. **q.e.d.**

Satz 7.12. *(verallgemeinerter Mittelwertsatz) Seien $f, g \cdot [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit*

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0).$$

Beweis: Wende den Satz von Rolle auf die Funktion $x \mapsto (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$ an. Offenbar erfüllt sie die Voraussetzungen und ihre Ableitung ist $\mapsto (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x)$. **q.e.d.**

Satz 7.13. *(Mittelwertsatz) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beweis: Wende den verallgemeinerten Mittelwertsatz auf f und $id_{[a,b]}$ an. **q.e.d.**

Satz 7.14. *(Schrankensatz) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Wenn gilt $|f'(x)| \leq L$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L.*

Beweis: Seien $x < y \in [a, b]$. Dann erfüllt $f : [x, y] \to \mathbb{R}$ die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Also gibt es $x_0 \in (x, y)$ mit $f(y) - f(x) = f'(x_0)(y - x)$. Dann folgt aber $|f(y) - f(x)| = |f'(x_0)||y - x| \leq L|y - x|$. **q.e.d.**

Satz 7.15. *(Ableitung und Monotonie) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf (a, b) differenzierbar. Dann gilt*

(i) *$f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ ist konstant.*

(ii) *$f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ ist monoton steigend.*

(iii) *$f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ ist monoton fallend.*

(iv) *$f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und der Abschluss der Menge $\{x \in (a, b) \mid f'(x) > 0\}$ ist $[a, b] \Leftrightarrow f$ ist streng monoton steigend.*

(v) *$f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und der Abschluss der Menge $\{x \in (a, b) \mid f'(x) < 0\}$ ist $[a, b] \Leftrightarrow f$ ist streng monoton fallend.*

Beweis: Weil eine Funktion genau dann konstant ist, wenn sie monoton steigend und monoton fallend ist, folgt (i) aus (ii) und (iii). Wir beweisen nun (ii) und (iv). Seien $x_1 < x_2 \in [a, b]$. Dann erfüllt $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann folgt also $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ und f ist monoton wachsend. Umgekehrt folgt aus $f'(x_0) < 0$, dass für ein $\epsilon > 0$ gilt $f(x_0 - \epsilon) > f(x_0 + \epsilon)$, f also nicht monoton steigend sein kann. Das zeigt (ii). Wenn f monoton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend ist, dann gibt es $x_1 < x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann ist f aber auf $[x_1, x_2']$ konstant und f' verschwindet auf (x_1, x_2). Weil jede offene Menge ein offenes Intervall enthält folgt damit (iv). **q.e.d.**

Korollar 7.16. *(isolierte kritische Punkte) Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und x_0 ein kritischer Punkt.*

(i) *Wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $f'(x) < 0$ für $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ und $f'(x) > 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$, dann ist x_0 ein lokales Minimum.*

(ii) *Wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $f'(x) > 0$ für $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ und $f'(x) < 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$, dann ist x_0 ein lokales Maximum.*

(iii) *Wenn f' bei x_0 differenzierbar ist und $f''(x_0) > 0$, dann ist x_0 ein lokales Minimum.*

(iv) *Wenn f' bei x_0 differenzierbar ist und $f''(x_0) < 0$, dann ist x_0 ein lokales Maximum.* **q.e.d.**

Beispiel 7.17. *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x+1)e^{-x}$ hat die Ableitung $f'(x) = (1-(x+1))e^{-x} = -xe^{-x}$. Also ist sie auf $(-\infty, 0]$ streng monoton wachsend und auf $[0, \infty)$ streng monoton fallend. Insbesondere ist $f(0) = 1$ das ein globales Maximum. Also gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ auch $e^x \geq (1+x)$.*

7.4 Regel von de L'Hopital

Definition 7.18. *(Grenzwerte von Funktionswerten) Für eine Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ genau dann, wenn es eine Zahl $f(a)$ gibt, so dass auf $[a,b)$ die Funktion $x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ für } x \in (a,b) \\ f(a) \text{ für } x = a \end{cases}$ stetig bei $x = a$ ist. Wir schreiben dann $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$.*

Der analoge Grenzwert $x \to b$ wird mit $\lim\limits_{x \to b-} f(x)$ bezeichnet. Aufgrund der Definition der Stetigkeit existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ also genau dann, wenn es eine Zahl $f(a)$ gibt, so dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit den aus $|x - a| < \delta$ folgt $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Wegen Satz 5.23 ist das äquivalent dazu, dass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (a,b), die gegen a konvergiert, die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(a)$ konvergiert.

Satz 7.19. *(1. Regel von de L'Hopital) Seien $\infty < a < b < \infty$ und f und g auf (a,b) differenzierbare Funktionen, so dass $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to a+} g(x)$. Wenn außerdem der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existsiert, dann existiert auch $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Bemerkung 7.20. *Wenn die Grenzwerte* $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)$ *und* $\lim\limits_{x\to a+} g'(x)$ *existieren und der zweite nicht verschwindet, dann existiert wegen Satz 5.37 auch* $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *und es gilt* $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a+} f'(x)}{\lim\limits_{x\to a+} g'(x)}$.

Beweis: Die Funktion f und g erfüllen die Voraussetzungen des Verallgemeinerten Mittelwertsatzes. Deshalb gibt es für jedes $x \in (a,b)$ ein $x_0 \in (a,x)$ so dass gilt $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. Wenn also der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. **q.e.d.**

Satz 7.21. *(2. Regel von de L'Hopital) Unter derselben Voraussetzung wie bei der 1.Regel von de L'Hopital, nur gelte* $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = \infty$ *statt* $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = 0$*, gilt dieselbe Schlußfolgerung.*

Beweis: Für jedes $a < x < y < b$ gibt es wegen dem verallgemeinerten Mittelwertsatz ein $x_0 \in (x,y)$ so dass gilt $\dfrac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. Wenn f und g die Vorraussetzungen der 2. Regel von de L'Hopital erfüllen, dann gibt es also für jedes $\epsilon > 0$ ein $y \in (a,b)$, so dass es für alle $x \in (a,y)$ gilt $\lim\limits_{x_0\to a+} \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)} - \dfrac{\epsilon}{2} < \dfrac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} < \lim\limits_{x_0\to a+} \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)} + \dfrac{\epsilon}{2}$. Wegen $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = \infty$ gibt es ein $y_0 \in (a,y)$ so dass für alle $x \in (a,y_0)$ gilt $g(x) > \min\{(g(y),0\}$. Mit $\alpha = \lim\limits_{x_0\to a+} \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ folgt dann

$$\left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right)(g(x)-g(y)) + f(y) \quad < f(x) < \quad \left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right)(g(x)-g(y)) + f(x) \quad \text{oder auch}$$
$$\left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{f(y) - g(y)\left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right)}{g(x)} \quad < \frac{f(x)}{g(x)} < \quad \left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{f(y) - g(y)\left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right)}{g(x)}.$$

Wegen $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = \infty$ gibt es dann auch ein $y_0 \in (a,y)$, so dass für alle $x \in (a,y_0)$ gilt $\alpha - \epsilon < \dfrac{f(x)}{g(x)} < \alpha + \epsilon$. Also gilt $\lim\limits_{x_0\to a+} \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} = \lim\limits_{x_0\to a+} \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. **q.e.d.**

Die analogen Aussagen für die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to b-}$ gelten natürlich auch. Grenzwerte der Form $\lim\limits_{x\to -\infty+} f(x)$ bzw. $\lim\limits_{x\to \infty-} f(x)$ definieren wir als die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0-} f(1/x)$ bzw. $\lim\limits_{x\to 0+} f(1/x)$. Wegen der Kettenregel gilt dann $\dfrac{\frac{df(1/x)}{dx}}{\frac{dg(1/x)}{dx}} = \dfrac{f'(1/x)}{g'(1/x)}$. Deshalb gelten die analogen Aussagen auch für diese Grenzwerte.

7.5 Konvexität und Ableitungen

Definition 7.22. *Eine reelle Funktion auf einem Intervall heißt (streng) konvex, wenn für alle a, b im Definitionsbereich und alle $t \in (0,1)$ gilt*

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a)+tf(b) \quad \textit{bzw.} \quad f((1-t)a+tb) < (1-t)f(a)+tf(b).$$

Satz 7.23. *Für eine reelle Funktion f auf einem Intervall sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

(i) *f ist konvex*

(ii) *Für $a < x < b$ im Definitionsbereich gilt $f(x) \leq f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = L(x)$.*

(iii) *Für $a < x < b$ im Definitionsbereich gilt*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

(iv) *Für $a < x < b$ im Definitionsbereich gilt $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$.*

Außerdem gelten die analogen Äquivalenzen zu streng konvex, wenn für dieselben $a < x < b$ die Ungleichungen $\leq$ durch $<$ ersetzt werden.

Beweis:

(i)⇒(ii) Sei also $a < x < b$ im Definitionsbereich. Definiere $t = \frac{x-a}{b-a}$ dann ist $t \in (0,1)$ und $(1-t)a + tb = x$. Also folgt aus (i)

$$f(x) \leq \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right) f(a) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right) f(b) \quad = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

(ii)⇒(iii) Die erste Ungleichung in (iii) folgt sofort aus (ii). Außerdem folgt aus (ii)

$$f(b)-f(x) \geq f(b)-f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-x)$$

und damit folgt auch die zweite Ungleichung in (iii) aus (ii).

(iii)⇒(iv) ist offensichtlich.

(iv)⇒(i) Wir können wegen der Symmetrie $(a, b, t) \leftrightarrow (b, a, 1-t)$ in (i) annehmen $a < b$. Dann sei $x = (1-t)a + tb \in (a, b)$. Wegen (iv) gilt

$$(b - x)(f(x) - f(a)) \leq (x - a)(f(b) - f(x)) \quad \text{also auch}$$
$$(b-a)f(x) \leq (b-x)f(a) + (x-a)f(b) = ((b-a)-(x-a))f(a) + (x-a)f(b).$$

Es gilt aber $x - a = t(b - a)$. Also folgt $f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$.

Die analogen Aussagen für streng konvex lassen sich genauso beweisen, wenn wir alle Ungleichungen $\leq$ durch $<$ ersetzen. **q.e.d.**

Korollar 7.24. *Für eine stetige relle Funktion auf einem Intervall, die im Inneren des Intervalls differenzierbar ist, ist folgendes äquivalent:*

(i) *f ist (streng) konvex*

(ii) *f' ist (streng) monoton wachsend*

Beweis: (i)⇒(ii): Seien $a < b < c$ und $x < b < y$ im Definitionsbereich. Wegen Satz 7.23 (iii) folgt $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \dfrac{f(y) - f(c)}{y - c}$. Aus dem Grenzwert $x \to a$ und $y \to c$ folgt dann $f'(a) \leq \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq f'(c)$ und damit (ii). Umgekehrt folgt aus (ii) wegen dem Mittelwertsatz die Bedingung (iv) von Satz 7.23. **q.e.d.**

Korollar 7.25. *Für eine stetige reelle Funktion auf einem Intervall, die im Inneren zweimal differenzierbar ist, ist folgendes äquivalent*

(i) *f ist (streng) konvex.*

(ii) *$f''(x) \geq 0$ im Inneren des Intervalls (der Abschluss der Menge $\{x \mid f''(x) > 0\}$ ist das ganze Intervall).*

Dieses Korollar folgt sofort aus Korollar 7.24 und Satz 7.15. **q.e.d.**

Wenn wir die Ungleichungen alle umdrehen, so erhalten wir die analogen Aussagen für konkave Funktionen. Also ist eine Funktion f genau dann (streng) konkav, wenn die negative Funktion $-f$ (streng) konvex ist.

Übungsaufgabe 7.26. *Zeige, dass die Umkehrfunktion einer konvexen bijektiven monoton wachsenden Funktion konkav ist.*

Beispiel 7.27. **(i)** $f(x) = x^2 \Rightarrow f'' = 2$. *Also ist f streng konvex.*

(ii) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto \sqrt{x} \Rightarrow f'' = \frac{-1}{4x^{3/2}}$. *Also ist f streng konkav.*

(iii) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \to \exp(x) \Rightarrow \exp'' = \exp$. *Also ist* exp *streng konvex.*

(iv) $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \to \ln(x) \Rightarrow \ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$. *Also ist* ln *streng konkav.*

7.6 Konvexität und Ungleichungen

Satz 7.28. *(Ungleichung von Jensen) Sei f eine reelle konvexe Funktion auf einem Intervall. Seien $x_1, \dots, x_n$ im Definitionsbereich und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positive Zahlen, die $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ erfüllen. Dann gilt*

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Wenn f streng konvex ist, dann gilt Gleichheit nur für $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Beweis durch vollständige Induktion:

(i) Für $n = 1$ muss $\lambda_1 = 1$ sein, so dass die Aussage klar ist.

(ii) Die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}$. Seien $x_1, \dots, x_{n+1}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ wie gefordert. Dann definieren wir $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ und $x = \frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda} x_n$. Also gilt $\lambda_{n+1} = 1 - \lambda$ und $\frac{\lambda_1}{\lambda} + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda} = 1$. Dann folgt aus der Induktionsvoraussetzung $f(x) \leq \frac{\lambda_1}{\lambda} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda} f(x_n)$. Wenn f streng konvex ist, dann gilt Gleichhheit nur für $x_1 = \dots = x_n$. Weil f konvex ist folgt aber $f(\lambda x + (1 - \lambda) x_{n+1}) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(x_{n+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$. Wenn f streng konvex ist, dann gilt Gleichheit wieder nur für $x_{n+1} = x = x_1 = \dots = x_n$. **q.e.d.**

Korollar 7.29. *(Ungleichung arithmetisches-geometrisches Mittel) Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positive Zahlen mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n = 1$. Dann gilt für positive Zahlen $x_1, \dots, x_n$*

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Insbesondere gilt $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$. Gleichheit gilt nun für $x_1 = x_2 \dots = x_n$.

Beweis: $-\ln$ ist streng konvex. Also folgt aus Jensen's Ungleichung

$$\begin{aligned} -\ln(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) &\leq -\lambda_1 \ln x_1 - \dots - \lambda_n \ln x_n \\ \Leftrightarrow \lambda_1 \ln x_1 + \dots + \lambda_n \ln x_n &\leq \ln(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \end{aligned}$$

Wegen der Monotonie von exp folgt:

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} = \exp(\lambda_1 \ln x_1 + \dots + \lambda_n \ln x_n) \leq \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n.$$

q.e.d.

Ersetzen wir $x_1, \dots, x_n$ durch $y_1^{1/\lambda_1}, \dots, y_n^{1/\lambda_n}$ so erhalten wir

Korollar 7.30. *Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positive Zahlen mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ und $y_1, \dots, y_n$ positive Zahlen. Dann gilt*

$$y_1 \dots y_n \leq \lambda_1 y_1^{1/\lambda_1} + \dots + \lambda_n y^{1/\lambda_n}.$$

Gleichheit gilt nur für $y_1^{1/\lambda_1} = y_2^{1/\lambda_2} = \dots = y_n^{1/\lambda_n}$. **q.e.d.**

Korollar 7.31. *(Young'sche Ungleichung) Seien $p > 0, q > 0$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $x > 0$ und $y > 0$*

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^p.$$

Gleichheit gilt nur für $x^p = y^q$. **q.e.d.**

Definition 7.32. *(Norm und Skalarprodukt) Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ und $1 \leq p < \infty$ sei*

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}$$

Für $p \to \infty$ hatten wir in einer Übungsaufgabe gesehen, dass $\|x\|_p$ konvergiert gegen

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

Das Skalarprodukt wird definiert als

$$\big\langle x, y\big\rangle = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n \in \mathbb{K}, \ \textit{für } x, y \in \mathbb{K}^n.$$

Für $y \in \mathbb{R}^n$ setzen wir hierbei $(\bar{y}, \ldots, \bar{y}_n) = \bar{y} = y$.

Satz 7.33. *(Höldersche Ungleichung) Seien $p \geq 1$ und $q \geq 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$*

$$|\big\langle x, y\big\rangle| \leq |x_1y_1| + \ldots + |x_ny_n| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

Für $p = q = 2$ erhalten wir wieder die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|x_1y_1| + \ldots + |x_ny_n| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Beweis: Wir können annehmen, dass $\|x\|_p \neq 0$ und $\|y\|_q \neq 0$. Dann folgt aus der Young'schen Ungleichung für alle $k = 1, \ldots, n$

$$\frac{|x_ky_k|}{\|x\|\|y\|_q} = \frac{|x_k|}{\|x\|_p}\frac{|y_k|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|x_k|^p}{\|x\|^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_k|^q}{\|y\|_q}$$

Nach Summation über $k = 1, \ldots, n$ erhalten wir

$$\frac{|x_1y_1| + \ldots + |x_ny_n|}{\|x\|_p\|y\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Wenn $p = 1$ und $q = \infty$ gilt

$$|x_1y_1| + \ldots + |x_ny_n| \leq (|x_1| + \ldots + |x_n|)\max\{|y_1|, \ldots, |y_n|\}.$$

Den Fall $p = \infty$ und $q = 1$ erhalten wir durch vertauschen von x und y. **q.e.d.**

Satz 7.34. *(Minkowski Ungleichung) Sei $p \geq 1$ und $x, y \in \mathbb{K}^n$, dann gilt*

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Korollar 7.35. *Für alle $1 \leq p \leq \infty$ ist $\|\cdot\|_p : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ eine Norm.* **q.e.d.**

Beweis der Minkowski Ungleichung: Sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow p + q = pq \Leftrightarrow p = (p-1)q$

$$\begin{aligned}|x_1+y_1|^p + \ldots + |x_n+y_n|^p &= |x_1+y_1||x_1+y_1|^{p-1} + \ldots + |x_n+y_n||x_n+y_n|^{p-1}\\ &\leq (|x_1|+|y_1|)|x_1+y_1|^{p-1} + \ldots + (|x_n|+|y_n|)|x_n+y_n|^{p-1}\\ &\leq (\|x\|_p+\|y\|_p)(|x_1+y_1|^{(p-1)q} + \ldots + |x_n+y_n|^{(p-1)q})^{1/q}\\ &= (\|x\|_p+\|y\|_p)\|x+y\|_p^{p/q}\end{aligned}$$

Also erhalten wir $\|x+y\|_p^p \leq (\|x\|_p+\|y\|_p)\|x+y\|_p^{p/q}$. Wenn $\|x+y\|_p = 0$ ist die Aussage trivial. Sei also $\|x+y\|_p \neq 0$, dann folgt $\|x+y\|_p = \|x+y\|_p^{p(1-\frac{1}{q})} \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. **q.e.d.**

7.7 Taylorreihen

Auf offenen Intervallen I (Teilmenge von $\mathbb{R}$) ist die Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion f wieder eine Funktion auf I. Die Bildung der Ableitung ist also ein linearer Operater $\frac{d}{dx}$, der differenzierbaren Funktionen auf I, Funktionen auf I zuordnet. Wenn die Ableitung wieder differenzierbar ist, können wir diesen Operator nochmal anwenden und erhalten $(\frac{d}{dx})^2 f = f''$ die zweite Ableitung von f. Durch n–faches Anwenden erhalten wir gegebenenfalls dann die n-te Ableitung $f^{(n)}$.

Definition 7.36. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei $C^n_{\mathbb{R}}(I)$ die Menge aller n-mal stetig differenzierbaren reellen Funktionen auf I, und $C^\infty_{\mathbb{R}}$ die Menge aller beliebig oft differenzierbaren reellen Funktionen auf I.*

$$C_{\mathbb{R}}(I) = C^0_{\mathbb{R}}(I) \supset C^1_{\mathbb{R}}(I) \supset \ldots \supset C^n_{\mathbb{R}}(I) \supset \ldots \supset C^\infty_{\mathbb{R}}(I)$$

Beispiel 7.37. **(i)** $\exp \in C^\infty_{\mathbb{R}}$, *weil* $\exp^{(n)} = \exp$.

(ii) *für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $x \mapsto x^n \in C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, weil $(x^n)^{(n)} = n!$ und $(x^n)^{(m)} = 0$ für $m > n$.*

(iii) *für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x \mapsto x^{-n} \in C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, weil $(x \mapsto x^{-n})^{(m)} =$*

$$x \mapsto \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-m+1)}{x^{n+m}} = (-1)^m \frac{(n+m-1)(n+m-2)\ldots n}{x^{n+m}}.$$

(iv) $\ln \in C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^+)$ *weil* $\ln^{(m)}(x) = \dfrac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{x^m}$ *für* $m \geq 1$ *und mit* $0! = 1$.

Satz 7.38. *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

(i) $\dfrac{d^n}{dx^n} f \cdot g = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ *für alle* $f, g \in C^n_{\mathbb{R}}(I)$.

(ii) $C^n_{\mathbb{R}}(I)$ *ist eine Unteralgebra von* $C_{\mathbb{R}}(I)$.

Beweis durch vollständige Induktion:

(i) Für $n = 1$ folgen (i) und (ii) aus den Rechenregeln für differenzierbare Funktionen.

(ii) Wir nehmen an, dass (i) und (ii) für $n \in \mathbb{N}$ gelten. Für $f, g \in C^{n+1}_{\mathbb{R}}(I)$ folgt dann aus Satz 7.5

$$\frac{d}{dx}\frac{d^n}{dx^n}(f \cdot g) = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$\text{weil} \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n+1-k)!}(k+n+1-k) = \binom{n+1}{k}.$$

Also gilt (i) und (ii) auch für $(n+1)$. **q.e.d.**

Aus der Rechenregel und der Kettenregel folgt auch

Korollar 7.39. (i) *Die Komposition von* n*-mal stetig differenzierbaren Funktionen ist wieder* n*-mal stetig differenzierbar.*

(ii) *Die inverse Funktion einer* n*-mal stetig differenzierbaren invertierbaren Funktion ist* n*-mal stetig differenzierbar, wenn die Ableitung keine Nullstellen hat.* **q.e.d.**

Definition 7.40. *(Taylor-Polynom) Sei* $f : I \to \mathbb{R}$ *in* x_0 n*-mal differenzierbar, also es gibt eine offene Menge* $O < I$*, die* x_0 *enthält, so dass die Einschränkung von* f *auf* O *in* $C^n(O)$ *liegt. Dann heißt*

$$T_{n,x_0}(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f^{(2)}(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

das Taylorpolynom von f *der Ordnung* n *in* x_0.

Offenbar hat das Taylorpolynom der Ordnung n in x_0 die gleichen Ableitungen bis zur Ordnung n wie f an dem Punkt x_0. Es ist das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad n, das an der Stelle x_0 die Ableitungen $f(x_0), f^{(1)}(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ besitzt:

$$p(x) = c_0+c_1(x-x_0)+\ldots+c_n(x-x_0)^n \Rightarrow p(x_0) = c_0, p^{(1)}(x_0) = c_1, \ldots, p^{(n)}(x_0) = n!c_n.$$

Satz 7.41. *(Taylor-Formel) Sei $f \in C^n_{\mathbb{R}}((a,b))$. Wenn $f^{(n+1)}(x)$ für alle $x \in (a,b)$ existeirt, dann gibt es für jedes $x_0 \neq x \in (a,b)$ ein $\xi \in (x_0,x)$ bzw. $\xi \in (x,x_0)$, so dass*

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \textit{gilt.}$$

Beweis: Sei $x \in (a,b)$ und definiere $g(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$ für $t \in (a,b)$. Dann gilt

$$g'(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k=1}(x,t)^{k-1} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Außerdem sei $h(t) = (x-t)^{n+1}$ und $h'(t) = -(n+1)(x-t)^n$. Dann folgt aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz, dass es ein $\xi \in (x_0,x)$ bzw. $\xi \in (x_0,x)$ gibt mit

$$(g(x)-g(x_0))h'(\xi) = (h(x)-h(x_0))g'(\xi).$$

Es gilt aber $g(x)-g(x_0) = f(x)-T_{n,x_0}(x)$ und $h(x)-h(x_0) = -(x-x_0)^{n+1}$. Also folgt

$$f(x)-T_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)^{n+1}}{n!(n+1)(x-\xi)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$ **q.e.d.**

Definition 7.42. *(Taylorreihe) Sei $f \in C^\infty((a,b))$ und $x_0 \in (a,b)$. Dann heißt die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ Taylorreihe von f in x_0. Es gibt für jedes $x_0, x \in (a,b)$ 3 Möglichkeiten:*

(i) *Die Taylorreihe von f in x_0 konvergiert an dem Punkt x gegen $f(x)$.*

(ii) *Die Taylorreihe von f in x_0 konvergiert an dem Punkt x, aber nicht gegen $f(x)$.*

(iii) *Die Taylorreihe von f in x_0 konvergiert an dem Punkt x nicht.*

Korollar 7.43. *Sei $f \in C^\infty_{\mathbb{R}}((a,b))$ und $x_0 \in (a,b)$. Dann konvergiert die Taylorreihe von f in x_0 an dem Punkt $x \in (a,b)$ gegen $f(x)$, wenn für alle $\xi \in (x_0,x)$ bzw. (x,x_0) gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{f^n(\xi)}{n!}(x-x_0)^n\right| = 0.$ **q.e.d.**

Beispiel 7.44.

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \textit{für } x > 0 \\ 0 & \textit{für } x \le 0 \end{cases} \\ f^{(n)}(x) &= \begin{cases} \textit{Polynom vom Grad 3n von } (\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} & \textit{für } x > 0 \\ 0 & \textit{für } x \le 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Wegen Beispiel 7.17 gilt $1 + x \le e^x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$. *Dann folgt für alle* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$|x| \le e^{|x|-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|x|^n} \le \exp\left(\frac{n}{|x|} - n\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{|x|^n} \le \exp\left(\frac{-1 + n|x| - nx^2}{x^2}\right).$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ *ist dann* $x \to \begin{cases} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} & \textit{für } x > 0 \\ 0 & \textit{für } x \le 0 \end{cases}$ *stetig, und* $f \in C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$. *Und alle Ableitungen von* f *verschwinden bei* $x_0 = 0$. *Also verschwindet die Taylorreihe von* f *bei* $x_0 = 0$ *identisch.*

Satz 7.45. *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Funktionen in* $C^1_{\mathbb{R}}((a, b))$ *eines beschränkten Intervalles* (a, b), *die für ein* $x_0 \in (a, b)$ *punktweise konvergiert. Wenn die Folge* $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *außerdem gleichmäßig gegen* g *konvergiert, dann konvergiert* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig gegen eine Funktion* $f \in C^1_{\mathbb{R}}((a, b))$ *und es gilt* $f' = g$.

Beweis: Wegen dem Mittelwertsatz gilt für alle $x, x_0 \in (a, b)$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |x - x_0| \, \|f'_n - f'_m\|_\infty .$$

Also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in C_{\mathbb{R}}((a, b))$. Wegen dem Mittelwertsatz gibt es für alle $x, x_0 \in (a, b)$ eine Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [x, x_0]$ bzw. $[x_0, x]$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n(x) - f_n(x_0) = (x - x_0)f'_n(\xi_n)$. Wegen dem Auswahlprinzipien von Bolzano-Weierstraß gibt es eine konvergente Teilfolge von $(\xi_n)_{n\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $\xi \in [x, x_0]$ bzw. $[x_0, x]$. Wegen $|f'_n(\xi_n) - g(\xi)| \le |f_n(\xi_n) - g(\xi_n)| + |g(\xi_n) - g(\xi)|$ und der Stetigkeit von g konvergiert die Folge $(f'_n(\xi_n))_{n\mathbb{N}}$ gegen $g(\xi)$. Also konvergiert $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)g(\xi)$. Aus der Stetigkeit von g folgt, dass f bei x_0 differentzierbar ist und $g(x_0)$ die Ableitung $f'(x_0)$ ist. **q.e.d.**

Korollar 7.46. *Sei* $(\sum f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig konvergent auf einem beschränktem Intervall* (a, b) *und* $(\sum f(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent mit* $x_0 \in (a, b)$. *Dann konvergiert* $(\sum f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig gegen eine Funktion* $f \in C^1_{\mathbb{R}}((a, b))$ *und* $(\sum f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* f'. **q.e.d.**

Korollar 7.47. *(Satz von Borel) Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine beliebige Folge in* $\mathbb{R}$. *Dann gibt es eine Funktion* $f \in C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ *mit kompaktem Träger in* $(-2, 2)$, *deren Taylorreihe bei* $x_0 = 0$ *gleich* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ *ist. Im Allgemeinen konvergiert die Taylorreihe für* $x \neq 0$ *nicht.*

Beweis:

$$\text{Sei}\quad h(x) = \begin{cases} \exp\left(\exp\left(\frac{-1}{(|x|-1)^2}\right)\cdot\frac{-1}{(|x|-2)^2}\right) & \text{für } 1<|x|<2\\ 1 & \text{für } |x|<1\\ 0 & \text{für } 2<|x| \end{cases}$$

Dann ist $h \in C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ eine 'Hutfunktion', also eine Funktion mit kompaktem Träger in $[-2,2]$, die auf $[-1,1]$ identisch gleich 1 ist. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ existiert dann eine Konstante $M_n > 0$

$$M_n = \max\{\|h_n\|_\infty, \|h_n'\|_\infty, \dots, \|h_n^{(n)}\|_\infty\}$$

mit $h_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto x^n\cdot h(x)$. Dann sei für eine beliebige reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$C_n = |a_n|M_n + 1 \quad \text{und} \qquad f_n(x) = \frac{a_n}{n!C_n^n}h_n(C_n\cdot x) \qquad \text{für alle } n\in\mathbb{N}_0.$$

Für alle $n,m\in\mathbb{N}_0$ gilt dann $f_n^{(m)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } m\neq n\\ a_n & \text{für } m=n.\end{cases}$ Außerdem gilt für alle $n > m\in\mathbb{N}_0$

$$\|f_n^{(m)}\|_\infty = \frac{|a_n|C_n^m}{n!C_n^n}\|h_n^{(m)}\|_\infty \leq \frac{|a_n|M_nC_n^m}{n!C_n^n} < \frac{C_n^{m+1}}{n!C_n^n} \leq \frac{1}{n!}.$$

Also konvergiert für alle $m\in\mathbb{N}_0$ $(\Sigma f_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichmäßig. Wegen Korollar 7.46 konvergieren also für alle $m\in\mathbb{N}_0$ die Reihen $(\Sigma f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (\Sigma f_n')_{n\in\mathbb{N}_0}, \dots, (\Sigma f_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichmäßig gegen $f, f', \dots, f^{(m)}$. Also ist der Grenzwert $f = \sum\limits_{n=0}^\infty f_n$ eine Funktion in $C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ und es gilt $f^{(m)}(0) = a_m$ für alle $m\in\mathbb{N}_0$. **q.e.d.**

Korollar 7.48. *Für jede Potenzreihenfunktion $f(x) = \sum\limits_{n=0}^\infty a_nx^n$ mit Konvergenzradius $R>0$ und jedes $|x_0|<R$ hat die Taylorreihe von $f(x)$ in x_0 einen Konvergenzradius nicht kleiner als $R-|x_0|$, und konvergiert auf dem Bereich $|x-x_0|<R-|x_0|$ gegen f.*

Beweis: Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ hat die Potenzreihenfunktion $\sum\limits_{n=0}^\infty (a_nx^n)' = \sum\limits_{n=0}^\infty (n+1)a_{n+1}x^n$ offenbar den gleichen Konvergenzradius wie $\left(\sum a_nx^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Wegen Korollar 7.46 folgt dann, dass f differenzierbar ist und f' gegeben ist durch $\sum\limits_{n=0}^\infty (n+1)a_{n+1}x^n$. Dann folgt die Aussage aus dem Identitätssatz für Potenzreihenfunktionen (ii). **q.e.d.**

Definition 7.49. *Eine Funktion $f \in C^\infty((a,b))$ heißt reellanalytisch bei x_0, falls die Taylorreihe bei x_0 einen Konvergenzradius größer als Null hat und auf einer Umgebung von x_0 gegen $f(x)$ konvergiert.*

Also sind alle Potenzreihenfunktionen im Inneren ihres Kovergenzbereiches reellanalytisch. Umgekehrt sind alle reellanalytischen Funktionen Potenzreihenfunktionen.

Beispiel 7.50. (i) *Die Funktionen* $\exp, \sin, \cos, x \mapsto a^x$ *und alle Polynome sind reellanalytische Funktionen auf ganz* $\mathbb{R}$.

(ii) *Wegen Satz 4.26 (iv) gibt es für jede Potenzreihenfunktion f mit Konvergenzradius $R > 0$, die bei $x = 0$ nicht verschwindet, eine Umgebung von 0, auf der* $\left\| \frac{f(0) - f}{f(0)} \right\|_\infty \leq L < 1$ *gilt. Dort konvergiert* $\frac{1}{f} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{f(0)} \left(\frac{f(0)-f}{f(0)} \right)^n$ *als Potenzreihenfunktion. Dann folgt aus dem Identitässatz für Potenzreihenfunktionen, dass der Quotient zweier Potenzreihenfunktionen reellanalytisch ist, solange beide Potenzreihenfunktionen absolut konvergieren und der Nenner nicht verschwindet. Also sind* tan *und* cot *und alle rationalen Funktionen auf dem Definitionsbereich reellanalytisch.*

(iii) *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^+$ (für $\alpha \in \mathbb{Z}$ auch $x_0 \in \mathbb{R}^-$) hat die Potenzreihenfunktion*

$$x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x_0^{\alpha-n} x^n \quad \textit{mit} \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\cdots 1}$$

den Konvergenzradius $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha-n}{|x_0|(n+1)}} = |x_0|$. *Die Ableitung dieser Potenzreihenfunktion ist* $x \mapsto \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} n x_0^{\alpha-n} x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha-1}{n} x_0^{\alpha-1-n} x^n$. *Wegen* $\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}(\alpha-n+n) = \binom{\alpha}{n}$ *ist aber* $(x_0 + x) \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha-1}{n} x_0^{\alpha-1-n} x^n = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x_0^{\alpha-n} x^n$. *Dann erfüllt f die Differentialgleichung $f' = \alpha(x_0 + x)f$ mit $f(0) = x_0^\alpha$. Also verschwindet die Ableitung der Funktion* $x \mapsto \ln\left(\frac{f(x)}{(x+x_0)^\alpha}\right)$ *und verschwindet bei $x = 0$. Dann folgt aus Satz 7.15, dass für alle $|x| < x_0$ gilt $f(x) = (x + x_0)^\alpha$. Also sind für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktionen $x \mapsto x^\alpha$ auf $\mathbb{R}^+$ und für $\alpha \in \mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ reellanalytisch.*

(iv) *Für alle $x_0 \in \mathbb{R}^+$ hat die Potenzreihenfunktion $x \mapsto -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n x_0^n}$ im Konveregemzbereich $|x| < x_0$ die Ableitung $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{x_0^{n+1}} = \frac{1}{x+x_0}$. Also stimmt sie mit der Funktion $\ln(x+x_0) - \ln(x_0)$ überein. Deshalb sind sowohl $\ln$ also auch $\log_a$ auf $\mathbb{R}^+$ reellanalytisch. Insbesondere folgt aus dem Abelschen Grenzwertsatz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.*

(v) *Die Ableitungen der Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen sind wegen (iii) im Inneren ihrer Definitionsbereiche alle reellanalytisch. Wegen Satz 7.15 sind sie selber dann auch reellanalytisch. Für alle $|x| < 1$ gilt*

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$
$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Wegen Beispiel 7.17 gilt für $x > -1$ auch $x \geq \ln(1+x)$. Dann folgt

$$\ln\left((-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right) = \ln\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right)$$
$$\leq -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{1}\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Dann konvergieren aber die ersten beiden Potenzreihen auch für $x = \pm 1$ und die letzten beiden wegen der alternierenden Reihe von Leibniz. Wegen dem Abelschen Grenzwertsatz gelten diese Gleichungen dann auch für $x = \pm 1$. Insbesondere ist $\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

(vi) *Die Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$ ist reellanalytisch auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, aber nicht bei $x_0 = 0$.*

Aus dem Identitätssatz für Potenzreihenfunktionen folgt nun

Korollar 7.51. *Zwei reellanalytische Funktionen $f, g \in C^\infty((a,b))$ stimmen auf (a,b) überein, wenn ihre Taylorreihen für ein $x_0 \in (a,b)$ übereinstimmen.* **q.e.d.**

Index